

شبیه‌سازی ترکیبی جریان در مخازن نفتی با استفاده از یک روش تقریب مرکزی با دقت بالا

عرفان حقیقی (کارشناس ارشد)

مهرداد تقی‌زاده منظری (استاد)

سیامک کاظم‌زاده حنانی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

حمید نادران طحان (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

در این نوشتار، به‌کارگیری یک روش تقریب مرکزی با دقت بالا در مدل ترکیبی برای سیالات هیدروکربنی مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حاکم عبارت‌اند از یک معادله‌ی سهموی برای تغییرات فشار و یک دستگاه معادلات هذلولوی انتقال اجزاء. برای حل معادله‌ی فشار سهموی از روش تفاضل محدود ضمنی استفاده شده است، و برای حل صریح معادلات انتقال اجزاء از یک روش مرکزی دقت بالای مستقل از عدد کورانت مبتنی بر کار کورگائف و تادمر استفاده شده است. دو ویژگی بارز این نوع جدید از روش‌های مرکزی، عدم نیاز به تعیین و تجزیه‌ی بردارهای ویژه و نیز مستقل بودن جمله‌ی پخش مصنوعی از عدد کورانت است. در انتها، با ارائه‌ی چند مسئله‌ی نمونه‌ی یک‌بعدی — که نتایج آنها در مقالات معتبر علمی موجود است — دقت و هزینه‌ی محاسباتی روش ارزیابی می‌شود.

ehaghighi@alum.sharif.edu
mtmanzari@sharif.edu
hannani@sharif.edu
hnaderan@aut.ac.ir

واژگان کلیدی: جریان دوفازی، محیط متخلخل، روش مرکزی دقت بالا، روش حجم محدود، مدل ترکیبی.

۱. مقدمه

در دو دهه‌ی اخیر، الگوریتم‌های کارآمد برای شبیه‌سازی ترکیبی مخازن هیدروکربنی به تدریج در حال توسعه و پیشرفت است. پیش از این، پیشرفت‌های عمده و مهمی در حل عددی معادلات حاکم بر چنین جریان‌هایی صورت گرفته است.^[۱] علی‌رغم پیشرفت‌های ۲۵ تا ۳۰ سال اخیر، و به‌موازات آن پیشرفت چشمگیر سرعت پردازش رایانه‌ها، هنوز نمی‌توان در مخازن ناهمگن مدل‌سازی ترکیبی میدانی^۱ را به‌طور رضایت‌بخش انجام داد. به‌دلیل تمایل روزافزون به سمت شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده و زیرمدل‌های مربوط به آنها، تقاضا برای توان محاسباتی رو به گسترش است. از سوی دیگر، برای ممکن ساختن بررسی دقیق پدیده‌هایی با ابعاد کوچک در مخزنی با ابعاد ده‌ها کیلومتر، ده‌ها میلیون سلول محاسباتی برای شبکه‌بندی مخزن مورد نیاز است. با توجه به این که در شبیه‌سازی مخزن به تعداد بسیار زیادی سلول محاسباتی نیازمندیم، استفاده از روش‌های با تفکیک بالا، علی‌رغم افزایش هزینه‌ی محاسبه‌ی هر سلول، به‌کارگیری سلول‌هایی به مراتب بزرگ‌تر را ممکن می‌سازد.

در حوزه‌ی شبیه‌سازی مخازن نفتی از اکثر روش‌های عددی موجود استفاده شده است. روش نخست، روش کلاسیک تفاضل محدود است که ابتدا به‌شکل تک‌نقطه‌ی بالادستی با دقت مرتبه‌ی اول در زمان و مکان به کار گرفته شده است.

تاریخ: دریافت ۱۳/۷/۱۳۸۸، اصلاحیه ۱۴/۹/۱۳۸۹، پذیرش ۱۳/۱۱/۱۳۸۹.

هارتن تشریح شده‌اند. شایان ذکر است که بیشتر این روش‌ها دارای دقت مرتبه‌ی اول از نظر زمانی هستند.

روش‌های مرکزی همراه با لزجت مصنوعی گروه عمده‌ی روش‌های عددی هستند که برای حل معادلات هذلولوی مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش‌ها در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر مدت زیادی استفاده می‌شده‌اند. تحقیقات فردریش و لکس^[۴] نقطه‌ی آغازین خانواده‌ی روش‌های مرکزی است. روش حل آنها مرتبه‌ی یک و برمیانی تقریب متغیر حل با یک تابع قطعه قطعه‌ی ثابت بود، ولی در مقایسه با روش مرتبه‌ی اول گودونوف، نیازی به تجزیه‌ی ماتریس ژاکوبین معادله به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی آن نداشت. استفاده از روش‌های مرکزی در عمل رواج گسترده‌ی نیافت، چرا که ضریب پخش عددی آن‌ها بسیار زیاد بود. با این حال سادگی فرمول‌بندی، سهولت برنامه‌نویسی و کم‌بودن حجم محاسبات در این روش‌ها، محققان را به ابداع روش‌های مرکزی با قدرت تفکیک بالاتر برانگیخت.

در سال‌های اخیر، نسیاهو و تادمر^[۵] نمونه‌ی مرتبه‌ی دومی از روش فردریش و لکس را ابداع کردند که مزیت اصلی روش آنان -- یعنی عدم نیاز به حل دقیق یا تقریبی مسئله‌ی ریمان -- را حفظ کرده است. روش آنها برمیانی شبکه‌ی شطرنجی^۲ و در حالت یک‌بعدی فرمول‌بندی شده بود که توسط لیو و تادمر^[۶] به مرتبه‌های بالاتر و توسط آرمینیجان و همکاران^[۷] به ابعاد بالاتر توسعه داده شد. همچنین جیانگ و همکاران^[۸] این روش را به استفاده در شبکه‌های هم‌مرکز^۵ توسعه دادند.

در روش‌های مرکزی یادشده، ضریب پخش عددی از مرتبه‌ی $O(\Delta x^{2r}/\Delta t)$ است؛ نشان‌گر مرتبه‌ی روش از نظر مکانی است.^[۹] این بدان معناست که با کوچک شدن اندازه‌ی گام زمانی (Δt) ضریب پخش عددی زیاد می‌شود و در نتیجه، در مسائلی که گام زمانی کلی توسط پدیده‌های محلی همچون ناپیوستگی‌ها تعیین می‌شود، ضریب پخش عددی در سایر نواحی دامنه به مقدار غیرقابل قبولی بالا خواهد بود.

برای رفع این مشکل، چندین راه حل پیشنهاد شده است. کورگانف و تادمر^[۹] با انجام اصلاحاتی در روش نسیاهو و تادمر به روشی دست یافتند که دارای ضریب پخش عددی از مرتبه‌ی $O(\Delta x^{2r-1})$ است. همچنین، شکل نیمه‌گسسته‌ی این روش از قابلیت حل معادلات هذلولوی تاهیده^۶ برخوردار است و این دو مزیت سبب می‌شود که کاندیدای خوبی برای حل معادلات شبیه‌سازی جریان در مخازن هیدروکربنی باشد.

در سال ۲۰۰۶، این گروه جدید از خانواده‌ی روش‌های مرکزی با قدرت تفکیک بالا در مدل نفت سیاه مورد استفاده قرار گرفت.^[۱۰] چنان که اشاره شد، دو ویژگی مهم و عمده‌ی این روش عبارت‌اند از: ۱. عدم نیاز به تعیین و تجزیه‌ی بردار ویژه؛ ۲. استقلال پخش مصنوعی از عدد کورانت.^[۴] ویژگی اول یک مزیت مهم و بزرگ است، خصوصاً وقتی که دیگر اثرات غیرخطی قوی، مانند گرانش، وارد محاسبه شوند و رفتار یکنواخت چنین اثراتی ضروری است.^[۱۰] ویژگی دوم در حفظ دقت روش بر روی شبکه‌های غیریکنواخت، یا وقتی که عدد کورانت کاهش می‌یابد مفید است.^[۱۰] در این گروه، برخلاف روش‌های مرکزی سنتی، مقدار بیش از اندازه‌ی پخش عددی در اعداد کورانت کوچک‌تر، از کیفیت پاسخ نمی‌کاهد.^[۴]

در نوشتار حاضر، کاربرد روش اخیر و مزایای آن در شبیه‌سازی ترکیبی مخزن یک‌بعدی بررسی شده است. مدل فیزیکی ترکیبی، کامل‌ترین مدل فیزیکی برای توصیف رفتار جریان چندفازی در مخازن هیدروکربنی است و قادر به پیش‌بینی بسیاری از پدیده‌های مربوط به این مخازن (نظیر فرایند تزریق گاز امتزاج‌پذیر، بازگردانی گاز به مخزن یا مخازن گاز مبعانی) است. در ادامه، معادلات حاکم بر جریان دوفازی نفت و گاز معرفی و بررسی می‌شود و سپس، روش‌های عددی مورد استفاده برای

حل معادلات فشار و انتقال اجزاء تشریح می‌گردد. برای اطمینان از پیاده‌سازی مدل و روش عددی، چند مسئله‌ی یک‌بعدی نمونه -- که نتایج آنها در مقالات معتبر علمی موجود است -- حل و بررسی شده و در پایان، نتایج به همراه بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲. معادلات حاکم

سیال مخزن، از دو یا چند ترکیب شیمیایی متنوع -- خصوصاً هیدروکربن‌ها (متان، اتان و غیره) -- تشکیل شده است که جزء نامیده می‌شوند. سیالات مخزن هیدروکربنی، شامل ده‌ها ماده‌ی متفاوت‌اند که بسیاری از آنها در شبیه‌سازی مخزن باید مدل شوند. مدل ترکیبی مدلی سه‌فاز و چندجزئی است که در آن اجزای هیدروکربنی مختلف در گروه‌هایی با هم دسته‌بندی می‌شوند و هر یک از آنها مانند یک شبه‌جزء رفتار می‌کنند. بنابراین، مفهوم جزء هم شامل گونه‌های شیمیایی نظیر هیدروکربن‌هاست و هم شبه‌جزء‌ها را شامل می‌شود. مقدار این اجزاء برحسب مول (نسبت جرم به وزن مولکولی) بر واحد حجم حفره تعیین می‌شود. از به هم پیوستن اجزاء در مخزن، فازها به دست می‌آیند. در اینجا «فاز» عبارت است از هر سیال همگنی که از سایر فازها به‌وسیله‌ی یک سطح مشترک مجزا شده است. در این مطالعه، مخزن حداکثر شامل دو فاز در نظر گرفته می‌شود که عبارت‌اند از فازهای مایع و بخار.

معادلات حاکم بر مدل ترکیبی به شکل‌های گوناگون می‌توانند فرمول‌بندی شوند. فرم انتخاب‌شده برای این تحقیق مبتنی بر مطالعات ترانگنشتاین و بل^(۱۹۸۹) است^[۱۱] که برای استخراج معادله‌ی فشار از یک خطای اختلاف حجمی^۷ استفاده کردند. برای اختصار، از ذکر جزئیات مربوط به فرضیات و فرایند استخراج روابط صرف‌نظر کرده و به مروری مختصر بر معادلات اکتفا می‌شود.

با نادیده گرفتن اثرات فشار موئینگی، تمامی فازها دارای فشار یکسان p هستند. مول بر واحد حجم حفره‌ی هر یک از اجزاء در کل سیال و در هر نقطه از فضا به‌وسیله‌ی بردار \mathbf{n} مشخص می‌شود. با معلوم بودن بردار \mathbf{n} و فشار p ، مدل ترکیبی با معین ساختن بردارهای \mathbf{n}_i (تعداد مول‌های هر جزء در فاز مایع در واحد حجم حفره) و \mathbf{n}_v (تعداد مول‌های هر جزء در فاز بخار بر واحد حجم حفره) تعادل ترمودینامیکی را توصیف می‌کند. برای این منظور، جرم سیال در بین فازها باید بالانس شود، یعنی $\mathbf{n} = \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_v$. علاوه بر این، مدل ترکیبی با استفاده از \mathbf{n}_i و p ، نسبت حجم فازها به حجم حفره را محاسبه می‌کند که با u_i و u_v نشان داده می‌شوند، به عبارت دیگر، حجم هر فاز بر واحد حجم حفره به‌وسیله‌ی بردار $\mathbf{u} = \{u_i, u_v\}^T$ مشخص می‌شود. اندیس‌های l و v به ترتیب اشاره به فازهای مایع و بخار دارند. درجه‌ی اشباع هر فاز، کسری از حجم سیال است که به‌وسیله‌ی یک فاز اشغال شده است. بردار اشباع فازها چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{s} \equiv \frac{\mathbf{u}}{e^T \mathbf{u}}, \quad (1)$$

که در آن \mathbf{e} یک ماتریس ستونی با درایه‌های یک است. بردار سرعت‌ها نیز چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v} = \{v_l, v_v\}^T$$

به طوری که با صرف‌نظر کردن از اثرات گرانشی، طبق قانون دارسی:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{L} \left(\mathbf{e} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \kappa \quad (2)$$

سرعت های فازی هستند. همچنین:

$$\mathbf{L} \equiv \text{diag} \left(\frac{\kappa_{rl}}{\mu_l}, \frac{\kappa_{rv}}{\mu_v} \right)$$

ماتریس قطری قابلیت حرکت فازها (به عبارت دیگر، نفوذپذیری نسبی تقسیم بر لزجت فاز) است و κ نفوذپذیری مطلق سنگ مخزن است. با انجام عمل جمع بر روی طرفین معادله ۲ برای تمام فازها، سرعت کل به صورت $v_t = \mathbf{v}^T \mathbf{e} = -\lambda \partial p / \partial x$ به دست می آید که در آن:

$$\lambda = \kappa (\lambda_l + \lambda_v) = \kappa \left(\frac{\kappa_{rl}}{\mu_l} + \frac{\kappa_{rv}}{\mu_v} \right)$$

معادله حاکم بر توزیع فشار داخل میدان به گونه ای استخراج می شود که خطای معادله حالت ($\mathbf{e}^T \mathbf{u} = 1$) تصحیح شود.^[۱۱] در نهایت، یک معادله سهموی به شکل معادله ۳ برای توزیع فشار به دست می آید:

$$\frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1}{\Delta t} \phi = \left[-\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right] \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{X} \Xi \mathbf{v}) \quad (3)$$

که در آن ϕ تخلخل و t زمان است. همچنین ماتریس $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_v\}$ ماتریس کسرهای مولی در هر فاز و $\Xi = \text{diag} \{\xi_l, \xi_v\}$ نیز ماتریس قطری چگالی های مولی هر فاز است. ماتریس $\mathbf{X} \Xi$ که از ضرب کسرهای مولی در چگالی های مولی به دست می آید، شامل آرایه ای از مول های هر جزء در هر فاز تقسیم بر حجم فاز است. ماتریس کسرهای مولی در هر فاز با توجه به $\mathbf{x}_l \equiv \frac{\mathbf{n}_l}{\mathbf{e}^T \mathbf{n}_l}$ و $\mathbf{x}_v \equiv \frac{\mathbf{n}_v}{\mathbf{e}^T \mathbf{n}_v}$ عبارت است از:

$$\mathbf{X} \Xi = [\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_v] = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T \mathbf{n}_l & \circ \\ \circ & \mathbf{e}^T \mathbf{n}_v \end{bmatrix}^{-1}$$

که در آن $\mathbf{N} = \{\mathbf{n}_l, \mathbf{n}_v\}$ و ماتریس قطری حجم فازها تقسیم بر حجم حفره عبارت است از:

$$\mathbf{D}_u \equiv \begin{bmatrix} u_l & \circ \\ \circ & u_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T \mathbf{n}_l & \circ \\ \circ & \mathbf{e}^T \mathbf{n}_l \end{bmatrix} \Xi^{-1}$$

آنگاه، اگر هر دو فاز موجود باشند می توان نوشت:

$$\mathbf{N} \mathbf{D}_u^{-1} = \mathbf{X} \Xi$$

قانون بقای جرم، انتقال اجزاء را چنین بیان می کند:

$$\frac{\partial (\mathbf{n} \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{X} \Xi \mathbf{v}) = \circ \quad (4)$$

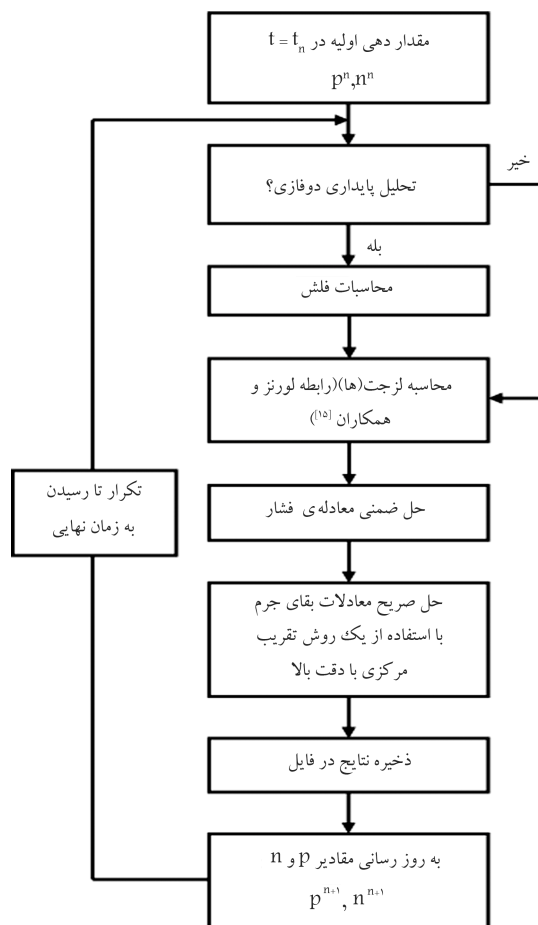
معادله ی فوق، مشروط بر این که فشار و سرعت کل سیال مستقل از \mathbf{n} باشند، یک معادله ی هذلولوی است.^[۱۱]

۳. روش عددی

در این پژوهش، جفت شدگی بین معادله ی فشار و بقای اجزاء از طریق روند ترتیبی فشار ضمنی و بقای اجزاء صریح انجام می گیرد. معادله ی فشار به وسیله ی روش

تفاضل محدود مرکزی ضمنی به همراه ضرایبی که در اندازه ی گام زمانی قبل محاسبه شده اند، تقریب زده می شود. معادلات بقای جرم نیز به صورت صریح و با استفاده از یک روش تقریب مرکزی با دقت بالا حل می شوند. مراحل اصلی الگوریتم شبیه سازی عبارت اند از (شکل ۱):

۱. به ازای مقادیر معلوم دما، فشار و ترکیب کلی (\mathbf{z}_i)، ابتدا به منظور تعیین تک فاز یا دو فازی بودن سیستم، تحلیل پایداری انجام می شود. اگر سیستم دوفاز بود، محاسبات فلش انجام می شود (در این مطالعه از الگوریتم دانش^[۱۳] استفاده شده است). در این مرحله، کسرهای مولی در حالت تک فاز یا دوفاز، چگالی های مولی در حالت تک فاز یا دوفاز، ترکیب فازی به شرط دوفاز بودن سیستم، و سایر پارامترهای مربوط به دست می آید. برای انجام محاسبات فلش از معادله ی حالت پنگ-رابینسون^[۱۳] استفاده می شود.
۲. براساس ترکیب فازی نسبت به محاسبه ی فشار، دما و لزجت فازی با استفاده از روش لورنز و همکاران^[۱۴] اقدام می شود.
۳. معادله ی فشار با استفاده از روش تفاضل محدود بلوک مرکزی حل می شود.
۴. روش تقریب مرکزی با دقت بالا بر مبنای کارگروگانف و تادمر برای حل صریح معادلات بقای جرم مورد استفاده قرار می گیرد.
۵. مراحل پیشین تا رسیدن به زمان از پیش تعیین شده تکرار می شوند.



شکل ۱. الگوریتم حل معادلات.

با فرض ثابت بودن فشار در سرتاسر سلول، $\mathbf{X} \Xi$ مستقل از x می‌شود. حال با استفاده از روش تفاضل محدود اولی‌ری پس‌رو معادله‌ی ۶ گسسته می‌شود:

$$\Psi \mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{E} \quad (7)$$

که در آن:

$$\Psi_{ii} = \alpha_i^n + \left(\lambda_{i+1/2}^n + \lambda_{i-1/2}^n \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$\Psi_{ij} = \begin{cases} -\lambda_{i+1/2}^n, & j = i + 1 \\ -\lambda_{i-1/2}^n, & j = i - 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_i = \beta_i^n \Delta t + \alpha_i^n p_i^n \quad (8)$$

دستگاه فوق، یک دستگاه معادلات خطی سه‌قطری برای متغیر فشار در هر سلول محاسباتی است. حل این دستگاه سه‌قطری با استفاده از روش مستقیم توماس بسیار آسان بوده و هزینه‌ی محاسباتی بسیار پایینی دارد. همچنین به دلیل ضمنی بودن روش گسسته‌سازی، ملاحظات پایداری هیچ محدودیتی بر اندازه‌ی گام زمانی محاسباتی تحمیل نمی‌کند. برای محاسبه‌ی پارامتر λ بهتر است از روش معدل‌گیری هارمونیک استفاده شود:

$$\lambda_{i+1/2} = \frac{2\lambda_i \lambda_{i+1}}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \quad (9)$$

چرا که این پارامتر تابع درجه‌ی اشباع بوده و به شدت غیرخطی است. با حل دستگاه سه‌قطری یادشده، مقدار فشار در مرکز هر سلول به دست می‌آید که با استفاده از آن می‌توان مقدار سرعت کل را در مرزهای هر سلول به کمک رابطه‌ی ۱۰ به دست آورد:

$$v_{t|i+1/2}^{n+1} = -\lambda_{i+1/2}^n \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i+1/2}^{n+1} = -\lambda_{i+1/2}^n \left\{ \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}}{\Delta x} \right\} \quad (10)$$

۳.۳ حل معادلات انتقال اجزاء

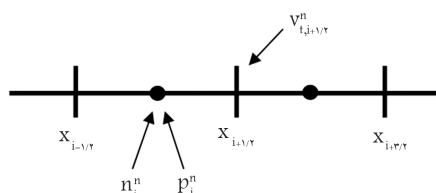
انتقال جزء با انتقال‌گیری روی حجم کنترل با استفاده از یک تقریب زمانی صریح حاصل خواهد شد:

$$\mathbf{n}_i^{n+1} - \mathbf{n}_i^n = -\frac{\Delta t}{\phi \Delta x} \left[\mathbf{h}_{i+1/2}^n - \mathbf{h}_{i-1/2}^n \right] \quad (11)$$

که در آن $\mathbf{h}_{i\pm 1/2}$ بردار شار عبوری $\mathbf{X} \Xi \mathbf{v}$ از جوه $i \pm 1/2$ است. فرمول‌بندی ضمنی فوق، از مرتبه‌ی اول در زمان است. \mathbf{h} را می‌توان به صورت تابعی از متغیرهای پایسته در طرفین سطح مشترک نوشت. این پارامتر عنصر اساسی تحقیق حاضر است، به طوری که شکل این تابع بروضوح و دقت نتایج تأثیر مستقیم دارد. دیدگاه به کارگرفته شده در اینجا مبتنی بر مطالعات کورگانف و تادمر^[۹] و نادران و همکاران^[۲] است. در ادامه، روش استفاده شده در این تحقیق برای تخمین شار ارائه می‌شود.

شرط کورانت برای روش‌های عددی استفاده شده در این مطالعه، بر مبنای سرعت موج بیشینه (λ_{\max}) ، و یک عدد کورانت سراسری (C) ، با استفاده از رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود:

$$\frac{\lambda_{\max} \Delta t}{\Delta x} < C \quad (12)$$



شکل ۲. شبکه‌ی یک‌بعدی شطرنجی.

۱.۳ شبکه‌ی محاسباتی

گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل در حالت یک‌بعدی مبتنی بر شبکه‌ی سلول مناسب است. این نوع شبکه‌ی محاسباتی به طور خاص برای شبیه‌سازی مخازن بسیار مناسب است، زیرا در آن می‌توان فرض کرد خواص سنگ مخزن و سیال در هر سلول محاسباتی ثابت است.

در یک شبکه‌ی یک‌بعدی سلول مینا، سلول B_i را می‌توان سلولی محصور به نقاط $x_{i+1/2}$ و $x_{i-1/2}$ و با طول $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ تعریف کرد. برای هر سلول B_i می‌توان بردار چگالی اجزاء در زمان t را به صورت \mathbf{n}_i^t در نظر گرفت که یک تقریب قطعه به قطعه‌ی ثابت از \mathbf{n} در زمان t فراهم می‌کند. مقدار فشار p_i^t متناظر با بردار \mathbf{n}_i^t است. در این تحقیق از یک شبکه‌ی شطرنجی استفاده می‌شود، به این صورت که مقادیر فشار و چگالی اجزاء در مرکز هر سلول در نظر گرفته شده و مقادیر سرعت کل در مرزهای سلول منظور می‌شود. صورت شماتیکی از این نوع شبکه‌بندی در شکل ۲ نشان داده شده است.

برای یک میدان یک‌بعدی به طول L ، مختصات نقاط گره و اندازه‌ی سلول‌ها عبارت‌اند از:

$$x_i = (i - 1)\Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, n_{\text{cell}}$$

$$\Delta x = \frac{L}{n_{\text{cell}} - 1} \quad (5)$$

که در آن، n_{cell} نشان‌گر تعداد سلول‌هاست.

۲.۳ حل معادله‌ی فشار

روش تفاضل محدود برای حل معادلات سهموی از سال‌ها پیش مورد بررسی و استفاده قرار گرفته است. این روش با پیاده‌سازی بر روی شبکه‌های با سازمان، دقت عددی بالایی دارد و هزینه‌ی محاسباتی آن نیز کم‌تر از سایر روش‌هاست. حال با استفاده از شبکه‌ی محاسباتی معرفی شده در بخش قبل، گسسته‌سازی معادله‌ی فشار تشریح می‌شود. برای این منظور، شکل خلاصه‌تری از معادلات فشار ۳ و داری در حالت یک‌بعدی در نظر گرفته می‌شود. معادله‌ی فشار را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۶ نوشت:

$$\beta = \alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{X} \Xi \mathbf{v}) \quad (6)$$

که در آن:

$$\beta = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - \lambda}{\Delta t} \phi$$

و نیز:

$$\alpha = -\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

۴.۳. روش کورگانف و تادمر

کورگانف و تادمر روش خود را به هر دو شکل نیمه گسسته و تمام گسسته فرمول بندی کردند. در اینجا، از شکل نیمه گسسته استفاده می کنیم زیرا پایسته است. این روش یک بخش مصنوعی از مرتبه $O(\Delta x^3)$ دارد و شار عددی آن چنین به دست می آید: [۹]

$$h_{i+1/2} = \frac{h(n_{i+1/2}^+) + h(n_{i+1/2}^-)}{2} - \frac{a_{i+1/2}}{2} [n_{i+1/2}^+ - n_{i+1/2}^-] \quad (13)$$

که در آن:

$$n_{i+1/2}^+ = n_{i+1} - \frac{\Delta x}{\nu} n_{x,i+1}$$

$$n_{i+1/2}^- = n_i + \frac{\Delta x}{\nu} n_{x,i}$$

مشقات متغیر n نیز چنین محاسبه می شوند:

$$n_{x,i} = \minmod \left(\frac{n_{i+1} - n_i}{\Delta x}, \frac{n_i - n_{i-1}}{\Delta x} \right)$$

$$n_{x,i+1} = \minmod \left(\frac{n_{i+2} - n_{i+1}}{\Delta x}, \frac{n_{i+1} - n_i}{\Delta x} \right)$$

که در آن، محدودکننده \minmod بدین صورت تعریف می شود:

$$\minmod(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & x > 0, y > 0 \\ \max(x, y) & x < 0, y < 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad (14)$$

تنها مسئله‌ی باقی مانده، نحوه‌ی تعیین سرعت انتشار موج (یعنی $a_{i+1/2}$) است که برابر با بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس ژاکوبین معادله‌ی هذلولوی است که در نقطه‌ی بین دو موقعیت $n_{i+1/2}^+$ و $n_{i+1/2}^-$ محاسبه می شود. از آنجا که محاسبه‌ی سرعت موج با این تعریف بسیار پیچیده است، مقدار $a_{i+1/2}$ در \bar{n} میانگین حسابی $n_{i+1/2}^+$ و $n_{i+1/2}^-$ محاسبه می شود. [۱۵، ۲]

شده است. در مسئله‌ی الف، فشار اولیه و دما به ترتیب عبارتند از $p = 5^\circ \text{ bar}$ و $T = 397 \text{ K}$. دبی تزریق A برابر است با 0.17 PV/D .
با توجه به اطلاعات مسئله، ترکیبات اولیه‌ی مخزن و تزریق عبارتند از:

$$z_{res} = \left\{ \begin{matrix} 0.1^\circ \\ 1.0^\circ \end{matrix} \right\}, \quad z_{inj} = \left\{ \begin{matrix} 1.0^\circ \\ 0.1^\circ \end{matrix} \right\}$$

از آنجا که مدل ریاضی مورد استفاده در این مقاله مبتنی بر تعداد مول اجزاء است، خواهیم داشت:

$$v_{mix} = \frac{RT Z_{mix}}{p} \quad [\text{ft}^3/\text{lbmole}] \quad (15)$$

که در آن v_{mix} حجم مولی مخلوط، R ثابت جهانی گازها ($10.7332 \frac{\text{psia.ft}^3}{\text{lbmole.R}}$) و Z_{mix} ریشه‌ی معادله‌ی حالت درجه سه است. بنابراین، بردار تعداد مول هر یک از اجزاء بر واحد حجم حفره (n) چنین محاسبه می شود:

$$n = \frac{V}{v_{mix}} \times z \quad (16)$$

که در آن V حجم سلول است. الگوریتم حل کلی مسئله در شکل ۱ بیان شده است.

در شکل ۳ ترکیب متان برحسب فاصله از محل تزریق نشان داده شده است. چنان که مشاهده می شود، با استفاده از شبکه‌ی متشکل از ۱۰۲ گره، حل تحلیلی مسئله به دست می آید. نتایج همچنین نشان می دهند که بخش عددی در روش تقریب مرکزی با دقت بالا، بر اثر افزایش تعداد گره کاهش می یابد. نکته‌ی دیگری که باید به آن اشاره شود، مقارن بودن پاسخ حول ناپیوستگی‌ها در روش تقریب مرکزی با دقت بالاست. این نکته از مشخصات بارز روش‌های مرکزی است و در شکل ۳ نیز به وضوح مشاهده می شود. در جدول ۲ زمان پردازش در یک گام محاسباتی برای روش تفاضل محدود و روش ترکیبی المان محدود ترکیبی - گالرکین ناپیوسته (MFE-DG) [۱] و روش تقریب مرکزی با دقت بالا به منظور مقایسه‌ی هزینه‌ی محاسباتی آنها ارائه شده است. یادآور می شود که روش‌های ترکیبی المان جدول ۱. اطلاعات مربوط به مسئله‌ی اول.

مقدار	کمیت
$1.0^\circ C_1$, $0.1^\circ C_2$	ترکیب گاز تزریق (mole frac)
$0.1^\circ C_1$, $1.0^\circ C_2$	ترکیب اولیه سیال مخزن (mole frac)
Case 1a : 5° , Case 1b : 69	فشار (bar)
Case 1a : 397 , Case 1b : 311	دما (K)
0.2	تخلخل (fraction)
1°	نفوذپذیری (md)
$k_\alpha = S_\alpha$	نفوذپذیری نسبی

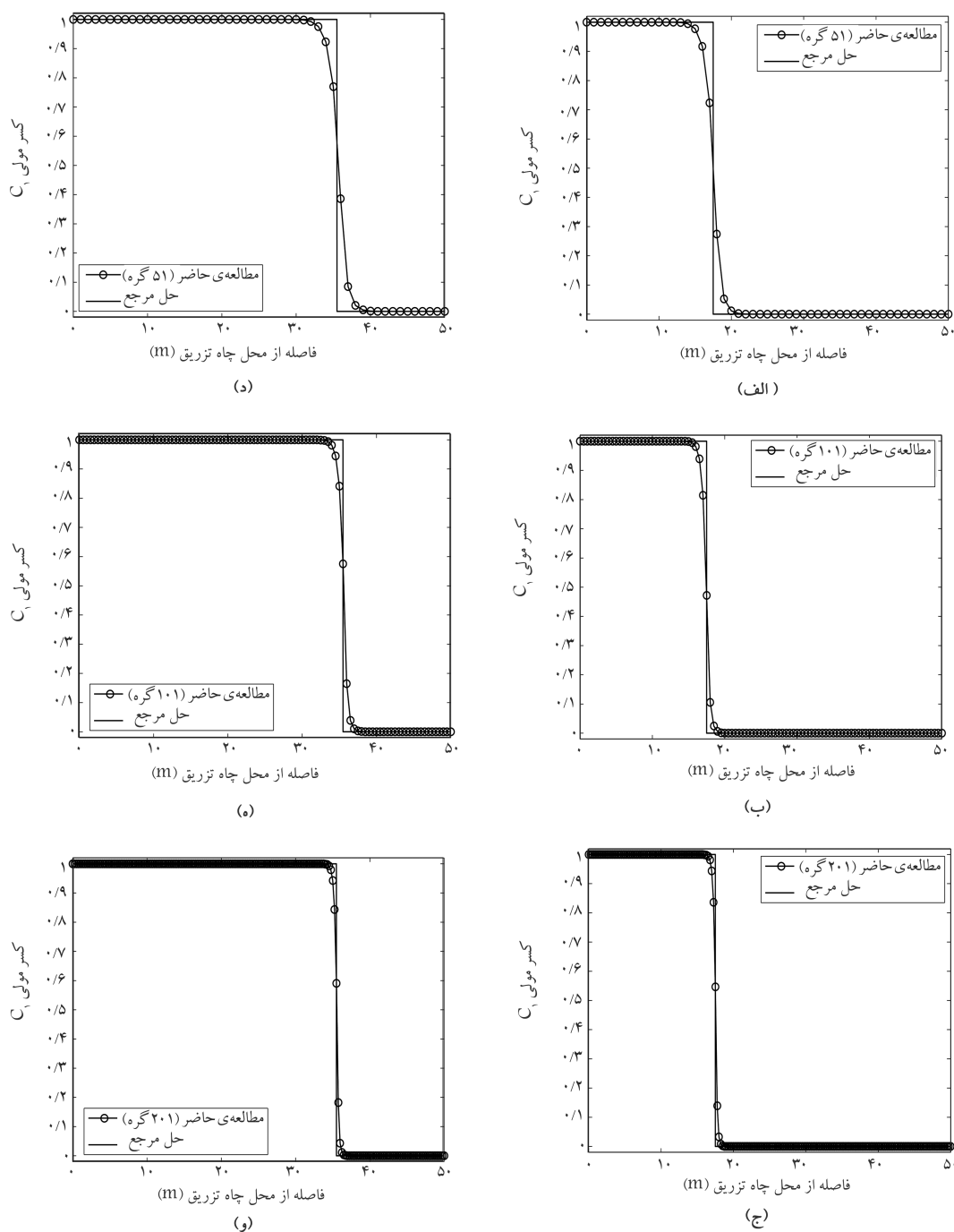
جدول ۲. زمان پردازش (ثانیه) در هر گام زمانی در تعداد گره‌های متفاوت برای مسئله‌ی الف در $0.17 \text{ PV Injection}$.

تعداد گره	۵۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰
روش MFE-DG	۰.۳۷	۱.۲۴	-	-
روش تقریب مرکزی	۰.۱۶	۰.۵۲	۱.۳۳	-
روش تفاضل محدود	۰.۱۴	۰.۴۹	-	۴.۴۱

۴. آزمایش‌ها و نتایج

همه‌ی محاسبات عددی بر روی یک مخزن افقی یک بعدی همگن به طول 5° متر انجام شده‌اند. همچنین تخلخل مخزن برابر با 2° درصد و نفوذپذیری مطلق آن معادل 1° میلی داریسی (md) در نظر گرفته شده است؛ توزیع ابتدایی ترکیب سیال و فشار در مخزن نیز یکنواخت فرض شده است. سیال با ترکیب و دبی حجمی ثابت در نقطه‌ی $x = 0$ تزریق شده و چاه برداشت با فشار معلوم، برابر با فشار اولیه‌ی مخزن، در نقطه‌ی $x = 5^\circ m$ واقع شده است. بنابراین، جریان سیال همیشه از $x = 0$ به سمت $x = 5^\circ m$ است. در ادامه، مسائل حل شده ارائه می شوند با این یادآوری که: در تمامی این مسائل منظور از C_1 همان هیدروکربن متان (CH_4)، C_2 هیدروکربن اتان (C_2H_6) و C_3 هیدروکربن پروپان (C_3H_8) است.

مسئله‌ی اول. در این مسئله، برای جابه‌جا کردن C_3 تا محل چاه تولید، C_1 تزریق می شود. در آغاز مخزن از C_3 اشباع شده است. اطلاعات این مسئله در جدول ۱ ذکر



شکل ۳. ترکیب متان در فازگازی پس از گذشت ۲۰ روز (الف، ب و ج) و ۴۰ روز (د، ه، و) برحسب فاصله با استفاده از روش تقریب مرکزی با دقت بالا (مستله ۱ الف).

دیگر است (جدول ۲)، این تفاوت در تعداد گره‌های به‌کار رفته تا رسیدن به پاسخ تحلیلی قابل صرف‌نظر کردن است. در این مسئله، عدد CFL برابر با ۰/۴ است و متوسط گام‌های زمانی (Δt) استفاده شده توسط روش ترکیبی المان محدود ترکیبی - گالرکین ناپیوسته برای ۵۰ و ۱۰۰ گره به‌ترتیب برابر با ۰/۱۸ و ۰/۱۰ روز، در روش تقریب مرکزی با دقت بالا و برای ۵۱، ۱۰۱، ۲۰۱ گره، به‌ترتیب برابر با ۰/۴۵، ۰/۲۲، ۰/۱۱ روز و نهایتاً در روش تفاضل محدود و برای ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ گره، مقادیر متوسط گام زمانی به‌ترتیب برابر با ۰/۳، ۰/۱۸ و ۰/۴ روز هستند. از مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش MFE-DG با ۱۰۰ گره، روش تقریب

محدود ترکیبی - گالرکین ناپیوسته و تفاضل محدود بر روی رایانه‌ی با مشخصات ۴ GHz, Pentium ۲/۴ اجرا شده، و اگرچه کد روش تقریب مرکزی با دقت بالا به زبان MATLAB نوشته شده، بر روی سیستمی با همان مشخصات اجرا شده است. برای رسیدن به پاسخ تحلیلی با استفاده از روش تقریب مرکزی جدید، در مقایسه با روش ترکیبی المان محدود ترکیبی - گالرکین ناپیوسته تعداد گره بیشتری مورد نیاز است (نتایج روش مرکزی جدید با ۲۰۱ گره و روش ترکیبی المان محدود ترکیبی - گالرکین ناپیوسته با ۱۰۰ گره قابل مقایسه‌اند)، اما از آنجا که هزینه‌ی محاسباتی روش مرکزی به کار گرفته شده در این تحقیق به‌مراتب کم‌تر از دو روش

چنان که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، در مسئله‌ی ۱ ب نیز نتایج حاصل از شبیه‌سازی با ۲۰۱ گره و کار هونتیت و فیروزآبادی^[۱] با ۱۰۰ گره قابل مقایسه‌اند. در این مسئله نیز عدد کورانت برابر با ۰/۴ است. میزان زمان پردازش در یک گام محاسباتی برای هر سه روش در این مسئله در جدول ۳ نشان داده شده است.

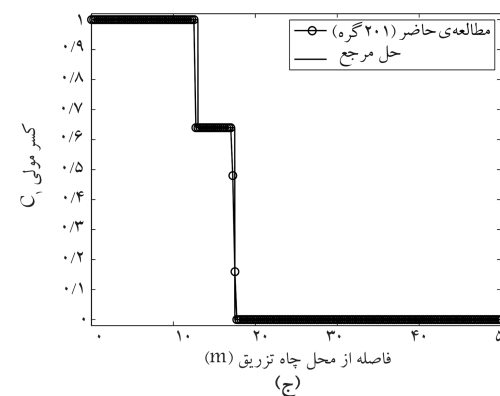
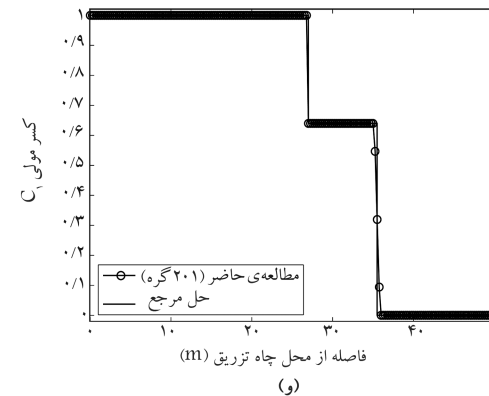
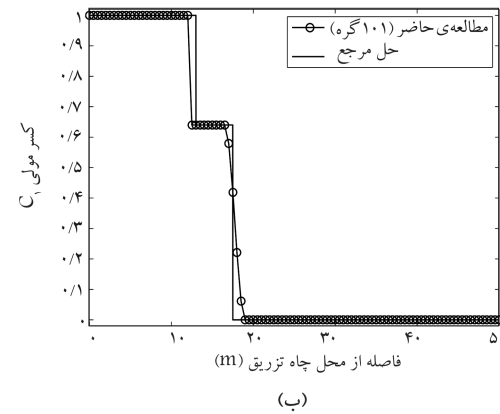
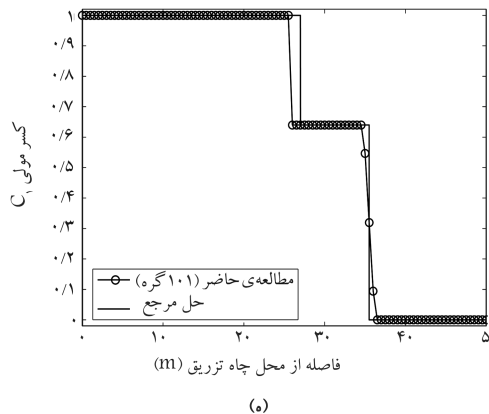
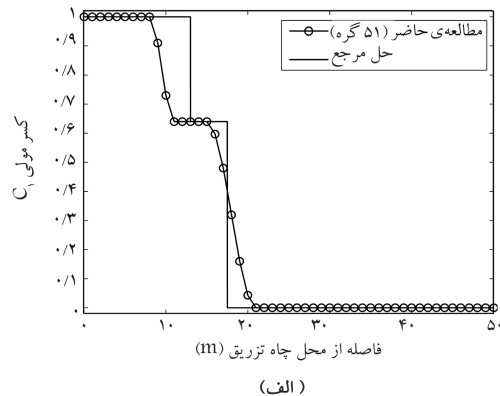
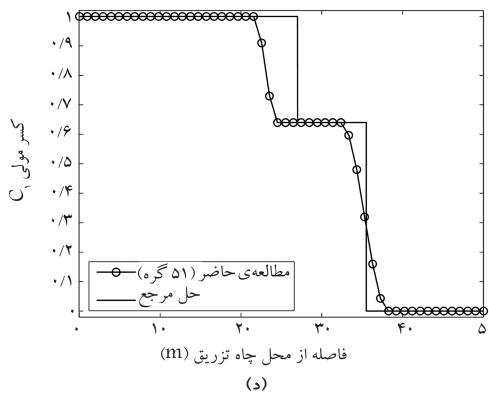
مسئله‌ی دوم. در این مسئله جابه‌جایی مخلوط مایع دو تایی C_2/C_1 به وسیله‌ی مخلوط گازی C_1/C_2 مورد بررسی قرار می‌گیرد. گاز تزریقی متشکل از ۹۰ درصد C_1 و ۱۰ درصد C_2 است که با دبی $17 PV/D$ تزریق می‌شود. خواص سیال و سنگ مخزن برای این مسئله در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

متخنی‌های ترکیب متان و پروپان در فازهای نفت و گاز پس از تزریق تقریباً ۵۱ درصد حجم حفره (۳۰ روز)، به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند. حل

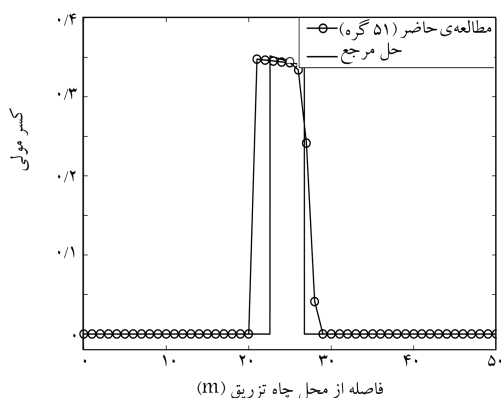
مرکزی با ۲۰۱ گره، و روش تفاضل محدود با ۵۰ گره مشخص می‌شود که دو روش اول تقریباً ۴ برابر سریع‌تر از روش تفاضل محدودند. در تعداد گره یکسان، روش MFE-DG کندتر از دو روش دیگر است که تا حدودی به انجام محاسبات اضافی فشار در مرز سلول‌ها مرتبط است.^[۱]

چنان که پیش‌تر نیز بدان اشاره شد، به دلیل استوار بودن روش تقریب مرکزی جدید بر روش حجم محدود (به خاطر خصوصیت بقای کمیت‌های انتقال یافته)، تقریب دقیق‌تری (در مقایسه با روش‌های تفاضل محدود) از ناپیوستگی‌های ظاهر شده در جواب فیزیکی ارائه می‌دهد.^[۲]

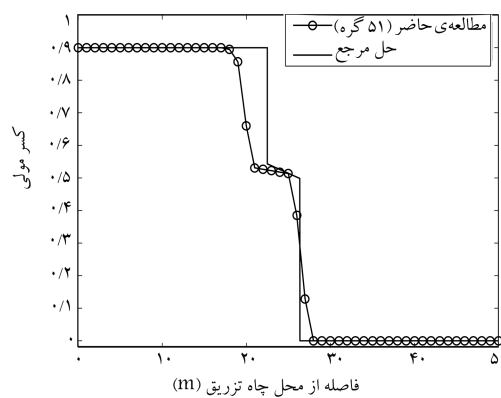
با تغییر فشار و دما به $T = 311 K$ و $p = 69 bar$ (مسئله‌ی ۱ ب)، یک ناحیه‌ی دوفازی پدیدار می‌شود. شکل ۴ نشان می‌دهد که برای مثال دوفازی دو شوک وجود دارد.



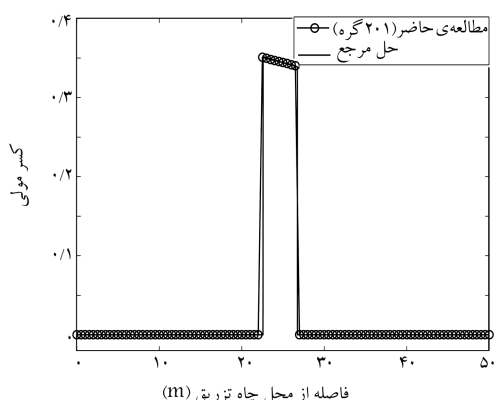
شکل ۴. ترکیب متان در فاز گازی پس از گذشت ۲۰ روز (الف، ب و ج) و ۴۰ روز (د، ه و و) بر حسب فاصله با استفاده از روش تقریب مرکزی با دقت بالا (مسئله‌ی ۱ ب).



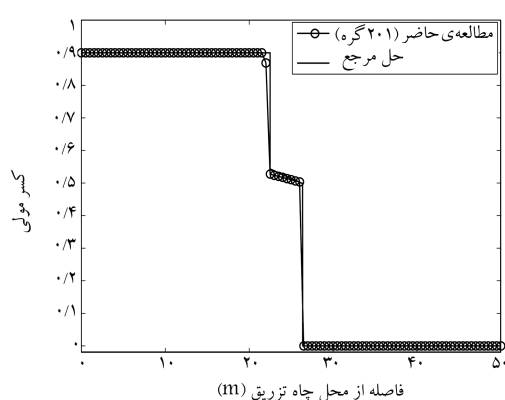
(ج)



(الف)



(د)



(ب)

شکل ۵. ترکیب متان در فازهای گاز (الف و ب) و مایع (ج و د) پس از گذشت ۳۰ روز برحسب فاصله از محل تزریق با استفاده از روش تقریب مرکزی با دقت بالا (مستله‌ی ۲).

تحلیلی تقریباً با ۲۰۱ گره به دست می‌آید. با مقایسه‌ی این شکل‌ها با نتایج هویت و فیروزآبادی^[۱] مشخص می‌شود که همانند دو مثال پیشین، روش تقریب مرکزی با دقت بالا نسبت به روش ترکیبی المان محدود ترکیبی - گالرکین ناپیوسته با تعداد گره بیشتر به حل تحلیلی هم‌گرا می‌شود در حالی که سرعت رسیدن به پاسخ با استفاده از روش تقریب مرکزی با دقت بالا، به دلیل کم بودن هزینه‌ی محاسبات، تقریباً برابر و حتی می‌توان گفت نسبتاً بهتر از روش ترکیبی المان محدود و گالرکین ناپیوسته است (جدول ۵).

نکته‌ی دیگری که باید بدان اشاره کرد این است که، همانند مسئله‌ی ۱، یک ناحیه‌ی دو فاز در جبهه‌ی جریان مشاهده می‌شود با این تفاوت که در این مسئله ترکیب سیال در ناحیه‌ی دو فاز ثابت نبوده و با فاصله گرفتن از محل تزریق،

جدول ۵. زمان پردازش (ثانیه) در هر گام زمانی در تعداد گره‌های متفاوت برای مسئله‌ی ۲ در ۵۱ گره. PV Injection = ۰٫۵۱

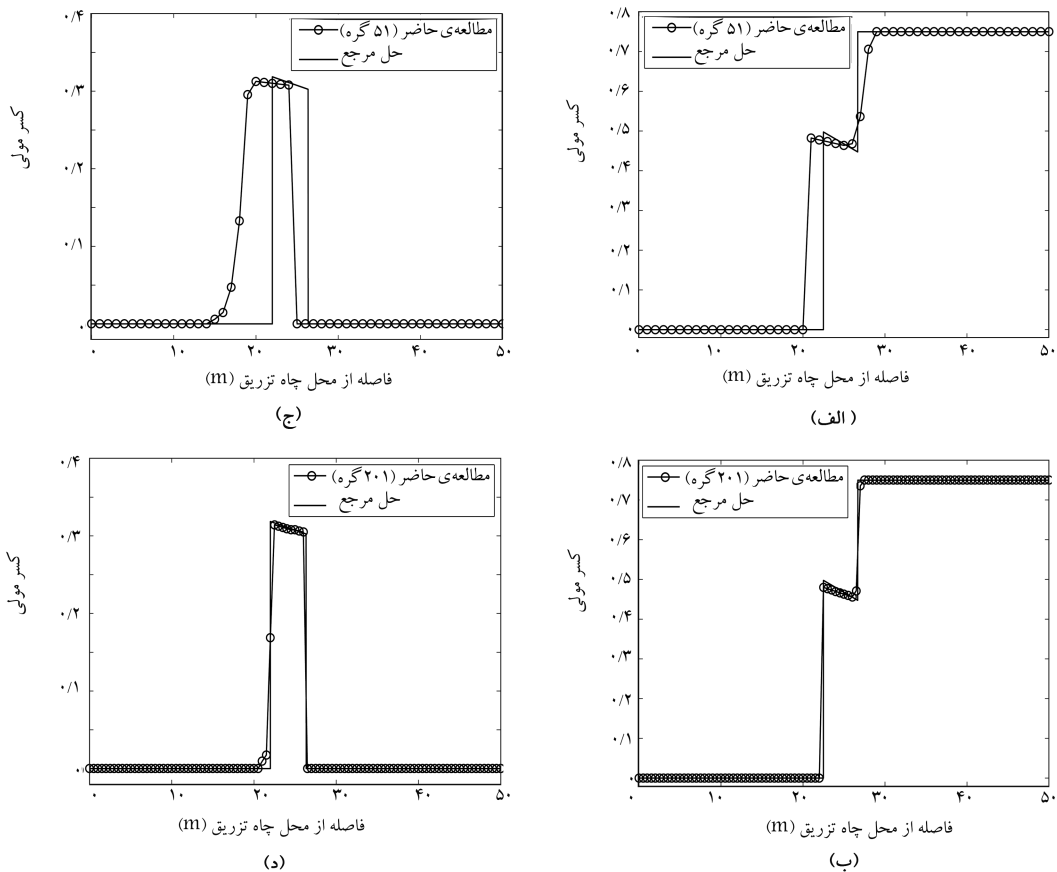
تعداد گره	۵۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰	روش
روش MFE-DG	۰٫۵۵	۱٫۷۹	-	-	
روش تقریب مرکزی	۰٫۲۲	۰٫۶۰	۱٫۸۰	-	
روش تفاضل محدود	۰٫۱۷	۰٫۵۳	-	۵۵۳٫۱	

جدول ۳. زمان پردازش (ثانیه) در هر گام زمانی در تعداد گره‌های متفاوت برای مسئله‌ی ۱ ب در ۶۸ گره. PV Injection = ۰٫۶۸

تعداد گره	۵۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰	روش
روش MFE-DG	۰٫۴۰	۱٫۳۳	-	-	
روش تقریب مرکزی	۰٫۱۸	۰٫۵۵	۱٫۳۸	-	
روش تفاضل محدود	۰٫۱۵	۰٫۵۱	-	۴٫۶۲	

جدول ۴. اطلاعات مربوط به مسئله‌ی دوم.

مقدار	کمیت
$0.1 C_1$	$0.09 C_1$
$0.175 C_2$	$0.25 C_2$
	فشار (bar)
	۶۹
	دما (K)
	۳۱۱
	تخلخل (fraction)
	۰٫۲
	نفوذپذیری (md)
	۱۰
	نفوذپذیری نسبی
	$k_{\alpha} = S_{\alpha}$



شکل ۶. ترکیب پروپان در فازهای گاز (الف و ب) و مایع (ج و د) پس از گذشت ۳۰ روز بر حسب فاصله از محل تزریق با استفاده از روش تقریب مرکزی با دقت بالا (مستله ۲).

و گرادیان‌های شدید را بدون نوسان در حل عددی و نیز بدون نیاز به افزودن میزان زیادی پخش عددی به دست آورد. به دلیل پایدار بودن فرمول بندی حجم محدود، این روش -- در مقایسه با روش‌های تفاضل محدود -- تقریب دقیقی از ناپیوستگی‌های ظاهر شده در جواب فیزیکی را به دست می‌دهد. البته دقت این روش در مقایسه با روش‌هایی همچون گالرکین ناپیوسته و گودونوف مرتبه دوم با حل‌کننده‌ی ریمان تقریبی کم‌تر است، اما با توجه به هزینه‌ی محاسباتی بسیار کم و نیز متقارن بودن پاسخ اطراف ناپیوستگی‌ها، مطلوب است.

چنان‌که پیش‌تر ذکر شد، در این نوشتار برای توصیف رابطه‌ی سرعت و فشار از قانون دارسی استفاده می‌شود. ولی تجربه نشان داده است که این قانون همه‌جا و به‌ویژه در سرعت‌های بالا صادق نیست که این امر عمده‌تاً نزدیک چاه‌ها رخ می‌دهد. یک فعالیت مهم در جهت توسعه‌ی بررسی حاضر می‌تواند لحاظ کردن اثرات غیردارسی در مسئله به‌منظور بالا بردن دقت آن باشد. تعمیم‌کد به ابعاد بالاتر (دو و سه بعد) و نیز به کارگیری مدل بر روی شبکه‌ی بی‌سازمان (نامنظم) به‌منظور مدل‌سازی مخازن با هندسه‌ی پیچیده، فعالیت مهم دیگری در جهت توسعه‌ی بررسی حاضر است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان این نوشتار از حمایت‌های شرکت نفت و گاز پارس در به انجام رسانیدن این تحقیق تقدیر و تشکر می‌نمایند.

درصد متان آن به تدریج کاهش می‌یابد. این کاهش تدریجی (کاهش گرادیان) موجب می‌شود که هر سه روش شوک دوم را بهتر از شوک اول تشخیص دهند که در این بین، پاسخ روش تقریب مرکزی با دقت بالا نسبت به دو روش دیگر از تقارن و کیفیت بهتری برخوردار است. لازم به ذکر است که در گرادیان‌های بالا (شوکی اول) دقت روش ترکیبی المان محدود ترکیبی - گالرکین ناپیوسته در تعداد گره‌ی یکسان بهتر از روش تقریب مرکزی با دقت بالاست و دقت این روش بهتر از روش تفاضل محدود است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، شبیه‌سازی عددی مخازن نفتی با استفاده از مدل ترکیبی و به کمک روش تقریب مرکزی با قدرت تفکیک بالا برای حل معادلات هذلولوی بقای جرم در حالت یک‌بعدی انجام گرفت.

با توجه به نتایج به دست آمده، به نظر می‌رسد که رویکرد به کار گرفته شده روش قدرت‌مندی برای شبیه‌سازی فرایندهای بازیافت نفت در طول زمان است. سادگی نسبی، سهولت به کارگیری و کارایی محاسباتی روش‌های مرکزی از جمله مرابایی هستند که همواره مورد توجه بوده‌اند.

در مطالعه‌ی حاضر نشان داده شده که با کاربرد روش حجم محدود به‌همراه روش کورگائف و تادمر برای محاسبه‌ی شار عددی، می‌توان جواب‌های دارای شوک

پانویس

1. field-scale
2. flux-corrected schemes
3. total-variation diminishing (TVD)
4. staggered grid
5. collocated grids
6. degenerate
7. volume error discrepancy
8. pore volume per day (PV/D)

منابع

1. Hoteit, H. and Firoozabadi, A. "Compositional modeling by the combined discontinuous galerkin and mixed methods", *SPE Journal*, **22**, pp. 19-34 (2006).
2. Aziz, K. and Settari, A. "Petroleum reservoir simulation", *Elsevier Applied Science Publishers, Ltd.*, London (1979).
3. Naderan, H.; Manzari, M.T. and Hannani, S.K. "Application and performance comparison of high-resolution central schemes for the black oil model", *Int. J. Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **17**(7), pp. 736-753 (2007).
4. Friedrichs, K.O and Lax, P.D. "Systems of conservation equations with a convex extension", *Proceedings of the National Academy of Science, USA*, **68**, pp. 1686-8 (1971).
5. Nessyahu, H. and Tadmor, E., "Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws", *J. Computational Physics*, **87**, pp. 408-463 (1989).
6. Liu, X.D. and Tadmor, E., "Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws", *Numerical Mathematics*, **79**, pp. 397-425 (1998).

7. Arminijon, P.; Stanescu, D. and Viallon, M.C. "A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flow", in *Hafez, M. (Ed.), Proceedings of the 6th International Symposium on CFD, Lake Tahoe*, **4**, pp. 7-14 (1995).
8. Jiang, G.S.; Levy, D.; Lin, C.T.; Osher, S. and Tadmor, E. "High-resolution nonoscillatory central schemes with nonstaggered grids for hyperbolic conservation laws", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **35**(6), pp. 2147-68 (1998).
9. Kurganov, A. and Tadmor, E. "New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations", *J. Computational Physics*, **160**, pp. 241-282 (1989).
10. Naderan, H.; Manzari, M.T. and Hannani, S.K. "Simulation of three phase flow in porous media using a high-resolution central scheme", *Proc. European Conf. on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD, The Netherlands* (2006).
11. Trangenstein, J.A. and Bell, J.B. "Mathematical structure of compositional reservoir simulation", *SIAM J. Appl. Math.*, **10**(5), pp. 817-845 (1989).
12. Danesh, A. "PVT and phase behavior of petroleum reservoir fluids", *Developments in Petroleum Science*, Elsevier, Amsterdam, **47** (1998).
13. Peng, D.Y. and Robinson, D.B. "A new two-constant equation of state", *Ind. Eng. Chem. Fundam.*, **15**(1), pp. 59-64 (1976).
14. Lohrenz, J.; Bray, B.G. and Clark, C.R. "Calculating viscosities of reservoir fluids from their compositions", *Journal of Petroleum Technology*, **16**, pp 1171-1176 (January 1964).
15. Bell, J.B.; Colella, P. and Trangenstein, J.A. "Higher order Godunov methods for general system of hyperbolic conservation laws", *J. Computational Physics*, **82**, pp. 362-397 (1989).