

# ارائه روشی جدید برای حل عددی مدل توسعه یافته‌ی نفث سیاه با در نظر گرفتن اثر فشار موئینگی

حسن بیگلریان (کارشناس ارشد)

مهرداد تقی‌زاده منظری (استاد)

دانشکده‌ی هندی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

حمید نادران طحان (استادیار)

دانشکده‌ی هندی مکانیک، دانشگاه صنعتی اهرکبیر

در این نوشتار تأثیر فشار موئینگی بر جریان چندفاز مخازن هیدروکربنی بررسی شده است. برای این منظور، مدل نفث سیاه توسعه یافته با در نظر گرفتن اثرات فشار موئینگی بسط داده شده است. برای استخراج معادلات حاکم از یک فشار عمومی استفاده شده که مقدار آن در محدوده‌ی مقادیر فشارهای فازی موجود است. معادلات به دست آمده شامل یک معادله‌ی فشار سهموی و یک دستگاه معادلات انتقال اجزاء سهموی است که برای حل آنها از روش ضمنی - صریح استفاده شده است. برای حل معادله‌ی انتقال اجزاء از یک روش مرکزی دقت بالا استفاده شده که در مقایسه با سایر روش‌های عددی موجود دارای محاسبات کم و دقت قابل قبول است. در انتها نیز سه مسئله‌ی یک بعدی نفث سیاه که نتایج آنها در مقالات معتبر علمی موجود است، حل شده و دقت روش عددی به کار رفته مورد بررسی قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: مدل نفث سیاه، فشار موئینگی، فشار عمومی، محیط متخلخل، مخازن هیدروکربنی.

## مقدمه

یکی از مسائل اساسی در صنعت نفت، افزایش برداشت نفت از مخازن هیدروکربنی است. طراحی بهینه فرایند بازیافت نفت، مستلزم آگاهی از پدیده‌های فیزیکی مختلف حاکم بر جریان سیال در مخازن نفتی است. یکی از جنبه‌های مهم هر فرایند بازیافت، میزان تأثیر آن در استخراج نفت از حفره‌های سنگ مخزن در مقیاس میکروسکوپی است به گونه‌ی که کارایی جابه‌جایی میکروسکوپی تا حد زیادی موفقیت یا شکست هر فرایند بازیافت را تعیین می‌کند. در این بین، یکی از عوامل تأثیرگذار بر تحرک سیال و در نتیجه بر کارایی جابه‌جایی میکروسکوپی، اختلاف فشار بین فازهای مختلف در مجاری باریک محیط‌های متخلخل است. این تفاوت فشار که به دلیل اندرکنش سطح تماس بین فازهای مختلف به وجود می‌آید، معمولاً توسط تابع فشار موئینگی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد و در این پژوهش اثرات آن بر فرایندهای بازیافت نفت بررسی می‌شود.

مدل نفث سیاه برای شبیه‌سازی مخازن هیدروکربنی بسیار مفید است، زیرا می‌تواند هر دو فرایند بازیافت اولیه و ثانویه هیدروکربن را به خوبی مدل کند. این مدل یک جریان سه‌جزئی - سه‌فازی است و تراکم‌پذیری سیال و انتقال جرم بین فازهای مختلف را با استفاده از کم‌ترین داده‌ها از ترکیب محاسبه می‌کند. مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی توصیف‌کننده‌ی این مدل شدیداً وابسته و

غیرخطی است. این معادلات را می‌توان به دو دسته «معادله‌ی فشار» و «معادله‌ی بقای جرم» جداسازی کرد. معادله‌ی فشار یک معادله‌ی پخش سهموی است، در حالی که معادله‌ی بقای جرم یک دستگاه معادلات جابه‌جایی - پخش سهموی است که در آن اثرات جابه‌جایی غالب است. معادله‌ی فشار علی‌رغم حجم محاسباتی بالا چالش عددی زیادی ندارد و برای حل آن می‌توان از روش‌های ضمنی معمول که پایداری بی‌قید و شرط دارند، استفاده کرد. این در حالی است که معادله‌ی بقای جرم نیازمند دقت ویژه‌ی است زیرا این معادله تباهنده<sup>۱</sup> است و تابع شار بخش هذلولوی آن غیر محدب<sup>۲</sup> است. گاهی نیز ممکن است یک فاز، در حالی که همه‌ی اجزای شیمیایی حاضرند، حذف شود که این حالات را «سیرنشده» می‌نامند. تحت این شرایط حل معادله‌ی بقای جرم به مراتب مشکل‌تر می‌شود. بسته به مدل به کار رفته، ممکن است یک یا چند حالت سیرنشده در مسئله به وجود بیاید. حل چنین سیستم معادلاتی که نیاز به تعویض دائم حالات مختلف تباهنده دارد، مسئله‌ی چالش‌برانگیز است. بنابراین اتخاذ روش عددی مناسب برای حل معادله‌ی جابه‌جایی - پخش بقای جرم یکی از اهداف اصلی این نوشتار است.

سالیان متمادی، استفاده از روش‌های خانواده‌ی گودونوف<sup>[۱]</sup> به علت توانایی بالای آن در آشکارسازی ناپوستگی‌ها انتخاب بسیار مناسبی در شبیه‌سازی مخازن بود. اگرچه این روش‌ها از دقت بسیار بالایی برای محاسبه‌ی تغییرات ناگهانی در محل ناپوستگی‌ها برخوردار است، به علت تجزیه‌ی مشخصه‌ی<sup>۳</sup>

ماتریس ژاکوبین و به دست آوردن بردارهای ویژه، هزینه‌ی محاسباتی بسیار بالایی دارد.

از سوی دیگر، در طیف روش‌های عددی و در شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌پذیر، روش‌های مرکزی با پخش مصنوعی کاربرد داشته است. نقطه‌ی آغاز استفاده از روش‌های مرکزی که بر پایه‌ی تقریب تکه‌پی پیوسته‌ی ثابت حل<sup>۴</sup> بنا نهاده شده‌اند، مطالعات انجام‌شده در سال ۱۹۷۱ بود.<sup>[۲]</sup> در مقایسه با روش مرتبه‌ی اول گودونوف، این روش‌ها نیاز به تجزیه‌ی بردار ویژه و مقادیر ویژه ندارند ولی کاربرد روش‌های مرکزی به دلیل پخش عددی بیش از حد، مدت‌ها متوقف شده بود. اما، سادگی نسبی این روش‌ها در به‌کارگیری و محاسبات، محققان را بر آن داشت تا به گسترش روش‌های مرکزی با قدرت تفکیک بالا<sup>۵</sup> روی آورند.

محققین یک روش عددی مرتبه‌ی دوم را به جای روش پیشنهادی در سال ۱۹۷۱ (روش مرکزی)<sup>[۱]</sup> ابداع کردند که مزیت اصلی روش پیشین، یعنی عدم نیاز به حل‌گرهای تقریبی یا دقیق ریمان را حفظ کرده است.<sup>[۳]</sup> این روش برای شبکه‌ی جابه‌جا شده مفید است. این روش‌ها توسط محققین بعدی به درجات<sup>[۵،۴]</sup> و ابعاد بالاتر<sup>[۷،۶]</sup> توسعه یافت. آنان یک نسخه شبکه‌ی غیرجابه‌جا شده از این روش‌ها را نیز ابداع کردند.<sup>[۸]</sup>

همه‌ی روش‌های عددی یادشده دارای لزجت مصنوعی از مرتبه‌ی  $O(\Delta x^{2r}/\Delta t)$  هستند، که در آن  $r$  نماینده‌ی مرتبه‌ی دقت آن روش است. بدین ترتیب پخش مصنوعی با کاهش گام زمانی به صورت تصاعدی افزایش می‌یابد. به منظور اصلاح این نقص، روش جانشین به‌گونه‌ی اصلاح شد<sup>[۹]</sup> که لزجت مصنوعی آن از مرتبه‌ی  $O(\Delta x^{2r-1})$  باشد؛ در نتیجه با کاهش گام زمانی، پخش مصنوعی این روش دستخوش تغییر چندانی نمی‌شود. به علت مزیت‌های این روش، سه‌گونه روش مرکزی متفاوت به مسائل نفت سیاه یک‌بعدی اعمال<sup>[۱۰]</sup> و کارایی آنها با یکدیگر مقایسه شد. نتایج حاصله نشان داد که دقت روش کورگائف و تادمر در تشخیص ناپیوستگی‌های موجود در حل بیشتر است و نیز پخش مصنوعی آن مستقل از عدد CFL است.

در بررسی حاضر، برای در نظر گرفتن اثرات موئینگی، فرمول‌بندی ترتیبی نفت سیاه که توسط ترانگشتاین و بل<sup>[۱۱]</sup> ارائه شده است، با استفاده از تعریف فشار عمومی<sup>۶</sup> بسط داده می‌شود. سپس جزئیات روش عددی مورد استفاده به منظور حل معادلات حاکم بیان می‌شود. در انتها نیز سه مسئله‌ی یک‌بعدی نفت سیاه که نتایج آنها در مقالات معتبر علمی موجود است، حل می‌شود و دقت روش عددی به کار رفته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## معادلات حاکم

معادلات حاکم بر مدل نفت سیاه را می‌توان به چندین شیوه فرمول‌بندی کرد. در اینجا شیوه‌ی انتخابی فرمول‌بندی ترتیبی نفت سیاه است<sup>[۱۱]</sup> که از یک ناهمخوانی حجمی<sup>۷</sup> در استخراج معادله‌ی فشار برخوردار است. در مدل نفت سیاه، سیال داخل مخزن از سه جزء نفت، گاز و آب تشکیل می‌شود که در سه فاز مایع، بخار و آبی توزیع شده‌اند. جرم اجزاء بر واحد حجم فضای خالی توسط بردار  $\mathbf{z} = \{z_o, z_g, z_w\}^T$  و حجم هر یک از فازها بر واحد حجم فضای خالی توسط بردار  $\mathbf{u} = \{u_l, u_v, u_a\}^T$  نمایش داده می‌شود. در اینجا زیرنویس‌های  $o, g, w$  نشان‌دهنده‌ی اجزای نفت، گاز و آب است، در حالی که زیرنویس‌های  $l, v, a$  نشان‌دهنده‌ی فازهای مایع، بخار و آبی است. فشار فازهای موجود در مخزن، به‌علاوه وجود فشار موئینگی، متفاوت است که می‌توان آن را با بردار  $\mathbf{p} = \{p_l, p_v, p_a\}^T$  نمایش داد. از آنجا که در

حالت کلی مجموع  $u_j$ ها برابر با ۱ نیست، درجه‌ی اشباع فازی را به صورت کسری از سیال اشغال‌شده توسط هر یک از فازها تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{e}^T \mathbf{u}} \quad (۱)$$

که در آن  $\mathbf{e} = \{1, 1, 1\}^T$ . سرعت‌های فازی به‌وسیله‌ی قانون داریسی تعریف می‌شود، که با صرف‌نظر از نیروهای گرانشی عبارت است از:

$$\mathbf{v}_j = -\lambda_j \nabla p_j, \quad j = l, v, a \quad (۲)$$

که در آن  $\lambda_j = K k_{rj} / \mu_j$ ، تحرک‌پذیری فاز  $j$  است ( $K$  نفوذپذیری سنگ مخزن،  $k_{rj}$  و  $\mu_j$  به ترتیب نفوذپذیری نسبی و لزجت دینامیک فاز  $j$  است). معادلات فشار موئینگی توسط روابط ۳ بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} p_v - p_l &= p_{cv}(s_v) \\ p_a - p_l &= p_{ca}(s_a) \end{aligned} \quad (۳)$$

که در آن توابع  $p_{cv}$  و  $p_{ca}$  به ترتیب فشار موئینگی فازهای بخار و آب نسبت به فاز نفت است که ممکن است از طریق نتایج آزمایشگاهی یا مدل‌های موئینگی جایگزین شود. مدل‌های مختلفی برای توصیف فشار موئینگی ارائه شده است که مشهورترین آنها مدل‌های ارائه‌شده برای جریان دوفازی<sup>[۱۲،۱۳]</sup> و مدل ارائه‌شده برای جریان سه‌فازی<sup>[۱۴]</sup> است.

با در نظر گرفتن اثرات فشار موئینگی، پیچیدگی معادلات نفت سیاه افزایش می‌یابد. بخشی از این افزایش ناشی از جملات غیرخطی و بخشی نیز به دلیل تبدیل معادله‌ی بقای جرم هذلولوی به یک معادله‌ی سهموی است. همچنین انتخاب فشار مبنا برای استخراج معادلات حاکم نیز مسئله‌ی بسیار مهم است؛ چرا که به دلیل پدیده‌ی موئینگی، فشار فازهای مختلف با هم تفاوت دارد. به منظور استخراج معادلات حاکم، می‌توان فشار یکی از فازها را به عنوان مبنا انتخاب، و معادلات را بر اساس آن تنظیم کرد. ولی این کار معمولاً بر پیچیدگی معادلات وابستگی آنها به یکدیگر می‌افزاید. از سوی دیگر هنگامی که آن فاز مبنا در حالت سیرنشده حذف شود، اعتبار معادلات زیر سؤال می‌رود. اما روش دیگری برای حل این مشکل، استفاده از فشار عمومی است<sup>[۱۵،۱۶]</sup> که به‌وسیله‌ی سرعت کل فازها تعریف می‌شود. به این ترتیب پیچیدگی و وابستگی معادلات به یکدیگر کاهش می‌یابد و از مشکلات عددی مربوط به مسئله‌ی فشار موئینگی نیز کاسته می‌شود.

برای تعریف فشار عمومی، ابتدا توابع کسر جریان  $f_i$  را به صورت  $f_j = \lambda_j / \lambda_t$  تعریف می‌کنیم، که در آن  $\lambda_t = \sum_{j=l,v,a} \lambda_j$  معرّف تحرک‌پذیری کل است. چنانچه این توابع صرفاً تابعی از درجه‌ی اشباع  $\mathbf{s}$  باشند، آنگاه تابعی مانند  $p_c(s_v, s_a)$  وجود دارد به گونه‌ی که:

$$\nabla p_c = f_v \nabla p_{cv} + f_a \nabla p_{ca} \quad (۴)$$

می‌توان نشان داد که شرط لازم و کافی برای این که تابع  $p_c$  رابطه‌ی ۴ را ارضا کند این است که:<sup>[۱۶]</sup>

$$\frac{\partial f_v}{\partial s_a} \frac{\partial p_{cv}}{\partial s_v} + \frac{\partial f_a}{\partial s_a} \frac{\partial p_{ca}}{\partial s_v} = \frac{\partial f_v}{\partial s_v} \frac{\partial p_{cv}}{\partial s_a} + \frac{\partial f_a}{\partial s_v} \frac{\partial p_{ca}}{\partial s_a}$$

با فرض برقراری این شرط، فشار عمومی  $p$  مطابق رابطه‌ی ۵ تعریف می‌شود:

$$p = p_l + p_c \quad (۵)$$

در اینجا رابطه‌ی بین  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{z}$  براساس معادله‌ی ۱۲ عبارت است از:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{z} \quad (12)$$

که در آن  $\mathbf{T}$  ماتریسی است که  $\mathbf{TR} = \mathbf{I}$ . جریان، هنگامی که همه‌ی فازها وجود داشته باشند، «اشباع» نامیده می‌شود. اما ممکن است همه‌ی گاز موجود در فاز مایع و آبی حل شود و در نتیجه فاز بخار حذف شود؛ در این صورت جریان را «سیر نشده» می‌گوییم که نشان می‌دهد فشار مخزن بالاتر از فشار نقطه‌ی حباب مایع است. در این حالت ماتریس‌های  $\mathbf{T}$ ،  $\mathbf{R}$  و  $\mathbf{B}$  نیاز به اصلاح دارند اگرچه شکل کلی روابط ۸، ۱۱ و ۱۲ عوض نمی‌شود. این نکته دلیل اصلی انتخاب این فرمول‌بندی برای مطالعه‌ی حاضر است، زیرا به‌وسیله‌ی آن می‌توان حالت‌های سیر شده و سیر نشده را با هم بررسی کرد و نیاز به تفکیک آنها از یکدیگر نیست.<sup>[۱۱]</sup>

حال ضروری است به منظور اعمال روش عددی برای حل معادله‌ی ۱۱ (معادله‌ی بقای جرم) بخش‌های هذلولوی و سهموی این معادله را از یکدیگر تفکیک کنیم. برای این منظور ابتدا رابطه‌ی ۶ را جداسازی می‌کنیم:

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{pj} + \mathbf{v}_{cj}, \quad j = l, v, a \quad (13)$$

در این معادله  $\mathbf{v}_{pj} = f_j \mathbf{v}_t$  سرعت ناشی از اثرات فشار عمومی، و  $\mathbf{v}_{cj} = \lambda_j (\nabla(p_c - p_{cj}))$  سرعت ناشی از اثرات فشار موئینگی است. با جایگذاری رابطه‌ی ۱۳ در معادله‌ی ۱۱ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \phi \mathbf{z}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}_p}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{h}_c}{\partial x} \quad (14)$$

که در آن  $\mathbf{h}_p = \mathbf{R}\mathbf{B}^{-1} \mathbf{v}_p$  شار ناشی از اثرات فشار عمومی، و  $\mathbf{h}_c = -\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1} \mathbf{v}_c$  شار ناشی از اثرات موئینگی است. می‌توان نشان داد که  $\frac{\partial \mathbf{h}_p}{\partial x}$  یک عبارت جابه‌جایی است و اثرات هذلولوی را تقویت می‌کند، در حالی که  $\frac{\partial \mathbf{h}_c}{\partial x}$  یک عبارت پخش است و اثرات سهموی را تقویت می‌کند. در بخش بعد، نحوه‌ی انتخاب روش عددی مناسب برای گسسته‌سازی هر یک از این عبارات تشریح خواهد شد.

### روش عددی

برای حل معادلات ۸ و ۱۴ از روش حجم محدود استفاده می‌شود. برای یک میدان یک‌بعدی به طول  $L$  نقاط شبکه و اندازه‌ی هر المان چنین تعریف می‌شود:

$$x_i = (i-1) \Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta x = \frac{L}{n-1} \quad (15)$$

حجم کنترل متناظر با نقطه‌ی  $i$  ناحیه‌ی است که به‌وسیله‌ی سطوح  $x_{i+1/2} = x_i + \Delta x/2$  و  $x_{i-1/2} = x_i - \Delta x/2$  محدود می‌شود. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی ۸ بر روی حجم کنترل  $i$  داریم:

$$\int \int \beta dx dt = \int \int \alpha \frac{\partial p}{\partial t} dx dt + \int \int \mathbf{e}^T \mathbf{B} \mathbf{T} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1} \mathbf{v}) dx dt \quad (16)$$

که در آن:

$$\alpha = -\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \mathbf{u} \frac{\partial \phi}{\partial p}, \quad \beta = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1}{\Delta t}$$

اکنون با استفاده از روابط ۲ تا ۵، رابطه‌ی سرعت‌های فازی ۲ را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\mathbf{v}_j = f_j \mathbf{v}_t + \lambda_j (\nabla(p_c - p_{cj})), \quad j = l, v, a \quad (6)$$

در این رابطه  $p_{cl} = 0$  و  $v_t$  سرعت کل است که طبق رابطه‌ی ۷ تعریف می‌شود:

$$\mathbf{v}_t = \sum_{j=l,v,a} \mathbf{v}_j = -\lambda_t \nabla p \quad (7)$$

چنان که از این معادله برمی‌آید، سرعت کل فقط به گرادیان فشار عمومی وابسته است و مستقل از فشار موئینگی است. این مسئله در گسسته‌سازی معادله‌ی فشار حائز اهمیت است.

معادله‌ی حاکم بر توزیع فشار عمومی از تصحیح خطای معادله‌ی حالت ( $\mathbf{e}^T \mathbf{u} = 1$ ) به دست می‌آید.<sup>[۱۱]</sup> با فرض این که چگالی‌های فازی تنها تابعی از فشار عمومی باشد، معادله‌ی فشار حاصل عبارت خواهد بود از:

$$\frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1}{\Delta t} = \left( -\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \mathbf{u} \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1} \mathbf{v}) \quad (8)$$

که در آن  $\phi$  تخلخل،  $t$  زمان و  $\mathbf{v} = \{v_l, v_v, v_a\}^T$  بردار سرعت‌های فازی است.  $\mathbf{B} = \text{diag}\{B_l, B_v, B_a\}$  نیز ماتریس تغییر شکل حجمی است که بیان‌گر نسبت حجم هر فاز در شرایط مخزن (RC) نسبت به حجم همان فاز در شرایط تانک ذخیره (STC) است. در غیاب اثرات حرارتی،  $B$ ها تنها تابعی از فشارند.

ماتریس  $\mathbf{R}$  نسبت حلالیت است و چگونگی توزیع اجزا را در بین فازها توصیف می‌کند.  $R_{ij}$  به‌صورت نسبت مقدار جزء  $i$  در فاز  $j$  به مقدار جزء اصلی در فاز  $j$  تعریف می‌شود. جزء اصلی یک فاز جزئی از آن فاز است که در شرایط STC حاضر باشد. نفت، گاز و آب به‌ترتیب اجزای اصلی فازهای مایع، بخار و آبی هستند. فرض اساسی در استخراج معادله‌ی فشار ۸ این است که ماتریس‌های  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{R}$  به‌جای فشارهای فازی، تابعی از فشار عمومی باشند. به‌عبارت دیگر از خطای ناشی از محاسبه‌ی این ماتریس‌ها در فشار عمومی به جای فشار فازی صرف‌نظر شده است.

مدل ارائه‌شده توسط ترانگشتاین و بل حلالیت گاز در فازهای مایع و آبی و تبخیر نفت را در نظر می‌گیرد، بنابراین:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \backslash & R_v & 0 \\ R_l & \backslash & R_a \\ 0 & 0 & \backslash \end{bmatrix} \quad (9)$$

که در آن:

$$R_l = \frac{z_{gl}}{z_{ol}}, \quad R_v = \frac{z_{ov}}{z_{gv}}, \quad R_a = \frac{z_{ga}}{z_{wa}} \quad (10)$$

در این رابطه  $z_{ij}$  جرم جزء  $i$  در فاز  $j$  بر واحد حجم فضای خالی است. در مدل‌های کلاسیک نفت سیاه که تنها حلالیت گاز در نفت در نظر گرفته می‌شود داریم:  $R_v = R_a = 0$ . معادله‌ی انتقال اجزا توسط قانون بقای جرم به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi \mathbf{z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{R}\mathbf{B}^{-1} \mathbf{v}) = 0 \quad (11)$$

با فرض این که  $p$  بر حجم کنترل  $i$  ثابت باشد،  $\mathbf{RB}^{-1}$  مستقل از  $x$  می شود و رابطه ی ۱۶ چنین ساده می شود:

$$\beta_i \Delta x \Delta t = \alpha_i \left( p_i^{n+1} - p_i^n \right) \Delta x + \Delta t \left[ \left( v_t^{n+1} \right)_{i+1/2} - \left( v_t^{n+1} \right)_{i-1/2} \right] \quad (17)$$

ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  در زمان  $t_n$  مقداردهی می شوند، در حالی که سرعت های کل در زمان  $t_{n+1}$  مقداردهی می شوند. بنابراین معادله ی فشار به صورت ضمنی حل می شود. با در نظر گرفتن رابطه ی ۱۷ برای همه ی سلول ها، یک دستگاه معادلات تشکیل می شود که ماتریس ضرایب آن سه قطری است. در پژوهش حاضر برای حل این دستگاه از الگوریتم توماس استفاده شده است که دارای هزینه ی محاسباتی اندکی است.

چنان که در بخش قبل ذکر شد، سرعت کل  $v_t$  تنها تابع گرادیان فشار عمومی است و مستقل از فشار موتینگی و اثرات آن است. در نتیجه می توان گفت که معادله ی فشار ۱۷ مستقل از اثرات فشار موتینگی است و این اثرات تنها در معادله ی بقای جرم خود را نشان می دهد. این موضوع ناشی از تعریف فشار عمومی است و بنابراین، تغییر متغیر فشار عمومی منجر به ساده تر شدن معادله ی فشار می شود. برای معادله ی انتقال اجزا، با انتقال گیری از رابطه ی ۱۴ بر روی حجم کنترل و با به کارگیری روش صریح داریم:

$$\mathbf{z}_i^{n+1} - \mathbf{z}_i^n = - \frac{\Delta t}{\phi_i \Delta x} \left[ \left( \mathbf{h}_p \right)_{i+1/2} - \left( \mathbf{h}_p \right)_{i-1/2} \right] + \frac{\Delta t}{\phi_i \Delta x} \left[ \left( \mathbf{h}_c \right)_{i+1/2} - \left( \mathbf{h}_c \right)_{i-1/2} \right] \quad (18)$$

که در آن  $\left( \mathbf{h}_p \right)_{i+1/2}$  و  $\left( \mathbf{h}_c \right)_{i+1/2}$  به ترتیب بردارهای شار جابه جایی و پخشی هستند که بر سطح  $i + 1/2$  مقداردهی می شوند. چنان که پیش تر نیز اشاره شد، بردار شار  $\left( \mathbf{h}_c \right)_{i+1/2}$  اثرات سهموی را تقویت می کند، در نتیجه برای محاسبه ی آن می توان از روش های مرکزی معمول استفاده کرد:

$$\left( \mathbf{h}_c \right)_{i+1/2} = \frac{1}{\psi} \mathbf{h}_c \left( \mathbf{z}_i, \frac{\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\psi} \mathbf{h}_c \left( \mathbf{z}_{i+1}, \frac{\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i}{\Delta x} \right) \quad (19)$$

در رابطه ی ۱۹ مقدار شار موتینگی روی سطح، به صورت میانگین شار روی نقاط همسایه در نظر گرفته شد. اما محاسبه ی بردار شار  $\left( \mathbf{h}_p \right)_{i+1/2}$  که اثرات هذلولوی را تقویت می کند از پیچیدگی بالایی برخوردار است و چنان که اشاره شد، برای محاسبه ی آن از روش مرکزی دقت بالای کورگائف و تادمر استفاده می کنیم. کورگائف و تادمر این روش را به هر دو شکل نیمه گسسته و تمام گسسته فرمول بندی کردند که در اینجا از شکل نیمه گسسته ی آن استفاده می شود، زیرا شکل بقایی دارد. پخش مصنوعی این روش از مرتبه ی  $O(\Delta x^2)$  است. در این روش شار عددی داده شده عبارت است از: [۱۰]

$$\left( \mathbf{h}_p \right)_{i+1/2} = \frac{1}{\psi} \left[ \left( \mathbf{h}_p^+ \right)_{i+1/2} + \left( \mathbf{h}_p^- \right)_{i+1/2} \right] - \frac{1}{\psi} a_{i+1/2} \left( \mathbf{z}_{i+1/2}^+ - \mathbf{z}_{i+1/2}^- \right) \quad (20)$$

که در آن:

$$\mathbf{z}_{i+1/2}^+ = \mathbf{z}_{i+1} - \frac{\Delta x}{\psi} \mathbf{z}'_{i+1}, \mathbf{z}_{i+1/2}^- = \mathbf{z}_i + \frac{\Delta x}{\psi} \mathbf{z}'_i \quad (21)$$

به ترتیب مربوط به حالت های راست و چپ هستند و  $\mathbf{h}_p \left( \mathbf{z}_{i+1/2}^\pm \right) = \left( \mathbf{h}_p^\pm \right)_{i+1/2}$ . مشتقات متغیرها نیز با به کارگیری محدودکننده ی مینمُد<sup>۸</sup> مقداردهی می شوند:

$$\mathbf{z}'_i = MM \left( \frac{\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i}{\Delta x}, \frac{\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_{i-1}}{\Delta x} \right) \quad (22)$$

که در آن محدودکننده ی مینمُد چنین تعریف می شود:

$$MM(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & x > 0 \ \& \ y > 0 \\ \max(x, y) & x < 0 \ \& \ y < 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad (23)$$

تعریف سرعت موج بر سطح سلول  $(a_{i+1/2})$  عبارت است از:

$$a_{i+1/2} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{h}_p}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}) \right) \mathbf{z} \in \ell \left( \mathbf{z}_{i+1/2}^-, \mathbf{z}_{i+1/2}^+ \right) \quad (24)$$

که در آن  $\rho(\mathbf{H})$  شعاع طیفی ماتریس  $\mathbf{H}$ ، و  $\ell \left( \mathbf{z}_{i+1/2}^-, \mathbf{z}_{i+1/2}^+ \right)$  مسیری است که دو حالت  $\mathbf{z}_{i+1/2}^+$  و  $\mathbf{z}_{i+1/2}^-$  را در فضای فازی و توسط فن های ریمان به هم متصل می کند. برای محاسبه ی شعاع طیفی ماتریس مذکور می توان از روش های عددی مربوط به محاسبه ی بیشینه مقدار ویژه ی ماتریس ها استفاده کرد. هرچند که با توجه به صفر بودن یکی از مقادیر ویژه ی ماتریس فوق، [۱۱] از روش های تحلیلی نیز می توان برای محاسبه ی بیشینه مقدار ویژه ی این ماتریس استفاده کرد.

از آنجا که تابع شار غیرمحدب و مقداردهی آن بسیار پیچیده است، یافتن مقدار دقیق  $a_{i+1/2}$  کار آسانی نیست. در این پژوهش از تخمین ۲۵ استفاده می شود: [۱۰]

$$a_{i+1/2} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{h}_p}{\partial \mathbf{z}}(\bar{\mathbf{z}}) \right) \quad (25)$$

که در آن  $\bar{\mathbf{z}}$  میانگین حسابی  $\mathbf{z}_{i+1/2}^+$  و  $\mathbf{z}_{i+1/2}^-$  است. نتایج تجربی ثابت می کند که این مقدار به اندازه ی کافی به مقدار بیشینه ی واقعی سرعت موج نزدیک است. [۱۰] حال شرایط پایداری را برای روش عددی مذکور بررسی می کنیم. از آنجا که معادله ی فشار به صورت ضمنی حل می شود، این معادله بدون قید و شرط پایدار است و نیاز به بررسی شرایط پایداری ندارد. اما معادله ی بقای جرم به صورت صریح حل می شود و در اینجا شرایط پایداری را برای آن مورد بررسی قرار می دهیم. از آنجا که معادله ی بقای جرم سهموی است، نیاز به دو شرط پایداری دارد: ۱. شرط کورانت - فریدریش - لوی (CFL)،<sup>۹</sup> که براساس سرعت موج و یک عدد اصلی (مانند  $C$ ) بر روی هر سطح، با استفاده از رابطه ی ۲۶ محاسبه می شود:

$$\frac{a \Delta t}{\phi \Delta x} < C \quad (26)$$

۲. شرط ناشی از بخش سهموی معادله ی بقای جرم که محدودیت دیگری را بر گام زمانی اعمال می کند. این شرط به صورت رابطه ی ۲۷ بیان می شود:

$$\frac{\sigma \Delta t}{\phi \Delta x^2} < v \quad (27)$$

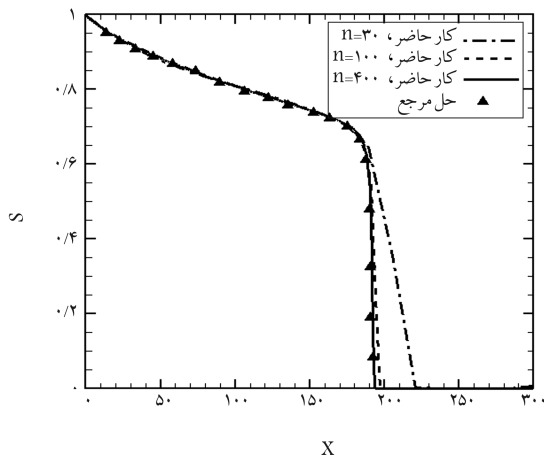
که در آن  $v$  عدد پخش  $\sigma$  بزرگ ترین مقدار ویژه ی ماتریس پخش  $\mathbf{D}$  است که تعریف آن طبق رابطه ی ۲۸ عبارت است از:

$$\mathbf{D} = - \frac{\lambda_t}{e^T \mathbf{u}} \mathbf{RB}^{-1} \mathbf{C} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{se}^T \right] \mathbf{BT} \quad (28)$$

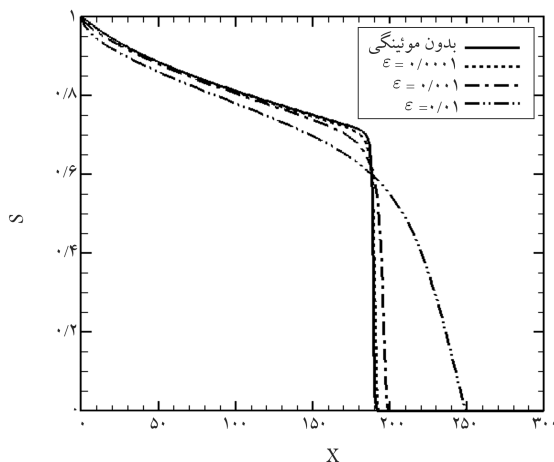
مسئله با استفاده از روش بالادست مرتبه‌ی اول  $1^\circ$  و یک شبکه‌ی ریز متشکل از ۲۰۰۰ گره و برای  $\varepsilon = 5 \times 10^{-2} m^2/s$  حل شده بود. [۱۷]

در حل عددی این مسئله از سه شبکه متشکل از ۳۰، ۱۰۰ و ۴۰۰ گره استفاده شده است و برای کنترل گام زمانی نیز، اعداد CFL و پخش به ترتیب برابر با ۰/۴ و ۰/۱۶۷ انتخاب شدند. نتایج به دست آمده پس از ۳ روز تزریق به همراه داده‌های حاصل از بررسی‌های پیشین [۱۷] در شکل ۱ مشاهده می‌شود. این شکل منحنی درجه‌ی اشباع فاز آب را برحسب مکان نشان می‌دهد. چنان که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش مرکزی دقت بالا در تعداد گره‌های بسیار کم تری نسبت به روش بالادست مرتبه‌ی اول به پاسخ می‌رسد که این نشان‌دهنده‌ی دقت این روش حتی در تعداد گره‌های بسیار کم است.

به منظور بررسی بیشتر اثرات فشار موئینگی، مسئله‌ی فوق را برای مقادیر مختلف ضریب  $\varepsilon$  در معادله‌ی ۳۲ حل می‌کنیم که نتیجه‌ی آن در شکل ۲ نشان داده شده است. در این شکل حالت بدون موئینگی متناظر است با  $\varepsilon = 0$ ؛ یعنی در این حالت اثرات فشار موئینگی لحاظ نمی‌شود و بنابراین معادله‌ی بقای جرم هذلولوی خواهد بود. با افزایش ضریب  $\varepsilon$ ، ضریب پخش  $d_a$  نیز افزایش می‌یابد و در نتیجه اثرات سهموی معادله‌ی بقای جرم تشدید می‌شود. در این شکل اثرات پخش ناشی از افزایش  $\varepsilon$  به خوبی نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، مسافت



شکل ۱. منحنی درجه‌ی اشباع آب بر حسب مکان (مقایسه‌ی نتایج کار حاضر با نتایج حاصل از مطالعات پیشین). [۱۷]



شکل ۲. تأثیر ضریب  $\varepsilon$  بر منحنی درجه‌ی اشباع آب بر حسب مکان.

که در آن ماتریس  $C$  وابسته به خواص سیال و سنگ مخزن است و چنین بیان می‌شود:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & f_l f_v \frac{\partial p_{cv}}{\partial s_v} & f_l f_a \frac{\partial p_{ca}}{\partial s_a} \\ 0 & (f_v - 1) f_v \frac{\partial p_{cv}}{\partial s_v} & f_v f_a \frac{\partial p_{ca}}{\partial s_a} \\ 0 & f_a f_v \frac{\partial p_{cv}}{\partial s_v} & (f_a - 1) f_a \frac{\partial p_{ca}}{\partial s_a} \end{bmatrix}$$

بررسی‌های به عمل آمده در مطالعه‌ی حاضر نشان می‌دهد که مقدار بیشینه‌ی  $v$  برای برقراری پایداری برابر با ۰/۳ است. حال با توجه به روابط ۲۶ و ۲۷ می‌توان مقدار مجاز گام زمانی به منظور دست‌یابی به پایداری را چنین بیان کرد:

$$\Delta t = \min \left( \frac{C \phi \Delta x}{a}, \frac{v \phi \Delta x^2}{\sigma} \right) \quad (29)$$

در عمل، از یک گام زمانی اصلی استفاده می‌شود که کمینه‌ی مقدار مجاز گام‌های زمانی محاسبه‌شده بر روی مرز سلول‌هاست.

## آزمایش‌ها، نتایج و بحث

برای ارزیابی مدل و روش عددی ذکرشده، سه مسئله‌ی یک‌بعدی حل می‌شود و نتایج حل آنها با نتایج تحلیلی یا عددی موجود در منابع علمی مقایسه می‌شود. در مسئله‌ی اول جریان دوفاز باکلی - لورت با اثرات فشار موئینگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مسئله‌ی دوم حل مسئله‌ی مک‌ورتر که مسئله‌ی مهم در میحث فشار موئینگی است ارائه می‌شود. مسئله‌ی سوم به حل جریان سه‌فازی در یک مخزن ترکیبی سیرشده - سیرنشده اختصاص دارد و در آن به بررسی پارامتری فشار موئینگی می‌پردازیم.

**مسئله‌ی اول.** چنان که بیان شد، این یک مسئله‌ی تزریق آب دوفازی باکلی - لورت با دبی ثابت است که اثرات فشار موئینگی برای آن در نظر گرفته شده است. صورت مسئله بدین شرح است که در دامنه‌ی  $x \in [0, 300]$  متر که توسط نفت اشباع شده، از نقطه‌ی  $x = 0$  آب تزریق می‌شود. سرعت کل در مخزن ثابت و برابر با  $v_t = 1/2 \times 10^{-2} m/s$  انتخاب شده است. اگرچه مسئله دوفازی است و می‌توان آن را با تعریف یک شار اسکالر حل کرد، در اینجا برای حل آن از مدل نفت سیاه با مقدار جزء گازی صفر استفاده می‌شود. با وجود این که فیزیک مسئله ساده است، پیچیدگی‌های عددی مدل نفت سیاه همچنان باقی خواهد ماند. شرایط اولیه‌ی مخزن و اجزای تزریق عبارت است از:

$$z_{res} = \{1 \ 0 \ 0\}^T, \quad z_{inj} = \{0 \ 0 \ 1\}^T \quad (30)$$

تخلخل مخزن ۲۰ درصد و تابع کسر جریان فاز آب غیرخطی است:

$$f_a = \frac{s_a^2}{s_a^2 + M(1 - s_a)^2} \quad (31)$$

که در آن  $M$  نسبت تحرک نامیده می‌شود و در این مسئله برابر با ۱ انتخاب شده است. ضریب پخش فاز آب که بیان‌گر میزان اثرات فشار موئینگی است، مطابق رابطه‌ی ۳۲ در نظر گرفته شده است:

$$d_a = \lambda_a f_l \frac{\partial p_{ca}}{\partial s_a} = \varepsilon s_a (1 - s_a) \quad (32)$$

که در آن  $\varepsilon$  یک عدد ثابت است. برای این مسئله حل تحلیلی وجود ندارد و نتایج حاصل از آن با اطلاعات موجود مقایسه می‌شود. براساس داده‌های پیشین، این

جدول ۱. اطلاعات فیزیکی مربوط به مسئله دوم.

پارامترها	مقادیر
$\lambda$	۲
$pd$	$1000 \text{ pa}$
$s_{res,j}$	۰
$\mu_a$	$0.1 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$
$\mu_l$	$0.2 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$
$K$	$10^{-10} \text{ m}^2$
$\phi$	۰.۳

حالت مختلف حل شده است. در سه حالت اول اثرات فشار موئینگی در نظر گرفته می‌شود ولی در حالت چهارم این اثرات نادیده گرفته شده است. شکل ۳ نتایج حاصل از حل عددی مسئله دوم را به همراه نتایج حل نیمه‌تحلیلی محققین<sup>[۱۸]</sup> نمایش می‌دهد. به منظور پایداری روش عددی، همانند مسئله اول عدد CFL برابر با ۰.۴ و عدد پخش برابر با ۰.۱۶۷ در نظر گرفته شده است.

شکل ۳ الف مربوط به حالت جابه‌جایی دوطرفه است. در این حالت  $R = 0$  و در نتیجه طبق رابطه ۳۴ سرعت کل و در نتیجه دبی کل جریان یافته در مخزن صفر است ( $v_t = v_l + v_a = 0$ ). این بدان مفهوم است که نفت و آب در مخزن در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند: یعنی  $v_l = -v_a$ . در نتیجه هنگامی که آب به داخل مخزن تزریق می‌شود، نفت با دبی مساوی با آب تزریقی از همان قسمت خارج می‌شود. چون سرعت کل صفر است، عبارت جابه‌جایی در معادله بقای جرم نیز برابر صفر خواهد بود و بنابراین در این حالت معادله بقای جرم یک معادله سهموی بدون عبارت جابه‌جایی است. در این شکل منحنی درجه‌ی اشباع آب برحسب مکان نشان داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج حاصل از مطالعه‌ی حاضر و حل نیمه‌تحلیلی وجود دارد. این موضوع نشان می‌دهد که روش عددی حاضر برای حل مسائل سهموی بدون اثرات جابه‌جایی نیز بسیار مناسب است.

شکل ۳ ب مربوط به حالت جابه‌جایی یک‌طرفه جزئی است. در این حالت  $R$  عددی بین صفر تا ۱ است که در اینجا عدد ۰.۸ انتخاب شده است. دبی کل جریان در مخزن نیز ۰.۸ دبی آب تزریقی است و در نتیجه برای برقراری توازن، باید نفت به میزان ۰.۲ دبی آب تزریقی از مکان تزریق آب از مخزن خارج شود؛ اگرچه نفت از طرف دیگر مخزن نیز از آن خارج می‌شود. از آنجا که در این حالت سرعت کل مخالف صفر است، معادله بقای جرم هر دو اثرات جابه‌جایی و پخش را دارد و یک معادله سهموی جابه‌جایی - پخش است. چنان‌که در این شکل مشاهده می‌شود، نتیجه‌ی حاصل از حل عددی دارای دقت بسیار مناسبی است.

در حالت سوم که به جابه‌جایی یک‌طرفه معروف است مقدار  $R$  برابر ۱ است. در این حالت مقدار سرعت و دبی کل بیشینه هستند و هر دو اثر جابه‌جایی و پخش وجود دارد. در نتیجه همانند حالت قبل معادله بقای جرم یک معادله سهموی پخش - جابه‌جایی خواهد بود. در این حالت نفت دیگر از محل تزریق آب از مخزن خارج نمی‌شود، بلکه تنها از سمت دیگر مخزن از آن خارج می‌شود و به همین علت به آن جابه‌جایی یک‌طرفه می‌گویند.

در شکل ۳ ج نتیجه‌ی حل این حالت نشان داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود، به دلیل افزایش اثرات جابه‌جایی منحنی مسافت بیشتری را در مکان نسبت به حالت قبلی طی می‌کند. در این حالت نیز تطابق خوبی بین حل عددی و حل نیمه‌تحلیلی وجود دارد.

طی شده توسط موج و در نتیجه سرعت حرکت آن، با افزایش اثرات موئینگی افزایش می‌یابد. این در حالی است که قدرت موج در تخلیه‌ی نفت با افزایش اثرات موئینگی کاهش می‌یابد.

مسئله دوم. این یکی از مسائل مهم در مبحث فشار موئینگی است که به مسئله مک‌ورتر مشهور است. این مسئله اولین بار توسط مک‌ورتر و سونادا<sup>[۱۸]</sup> و به روش نیمه‌تحلیلی برای حالت جابه‌جایی دوطرفه حل شد. در این حالت آب به داخل یک مخزن پر از نفت با طول بی‌نهایت و با انتهای بسته تزریق می‌شود. به علت بسته‌بودن ته مخزن، نفت از محل تزریق آب از مخزن خارج می‌شود؛ به گونه‌ی که دبی کل جریان در مخزن (مجموع آب و نفت) و در نتیجه سرعت کل صفر است. در این حالت معادله بقای جرم یک معادله سهموی بدون عبارت جابه‌جایی است و اثرات پخش در آن غالب است. محققین مسئله مک‌ورتر را با جزئیات بیشتری برای حالات مختلف جابه‌جایی دوطرفه، یک‌طرفه جزئی، یک‌طرفه و باکلی - لورت و با درجه‌ی اشباع ورودی مختلف به روش نیمه‌تحلیلی مورد بررسی قرار دادند.<sup>[۱۹]</sup> در اینجا نتایج مطالعات آنان برای ارزیابی و مقایسه با نتایج مطالعه‌ی حاضر مورد استفاده قرار می‌گیرد. شرایط اولیه‌ی مخزن و اجزای تزریق عبارت است از:

$$\mathbf{z}_{res} = \{1 \ 0 \ 0\}^T, \quad \mathbf{z}_{inj} = \{0.4 \ 0 \ 0.6\}^T \quad (33)$$

از آنجا که سیال تراکم‌ناپذیر و غیرقابل امتزاج است، سرعت کل در مخزن عبارت خواهد بود از:

$$v_t(t) = Rv_a(0, t) \quad (34)$$

که در آن  $t$  زمان و  $R$  ضریبی است که مقدار آن بین صفر تا ۱ است.  $v_a$  سرعت فاز آبی است که برای محاسبه‌ی آن می‌توان از رابطه ۷ استفاده کرد؛ این رابطه برای جریان یک‌بعدی و دوفازی به‌صورت زیر است:

$$v_a = f_a v_t - d_a \frac{\partial s_a}{\partial x} \quad (35)$$

که در آن  $d_a = \lambda_a f_l \frac{\partial p_{ca}}{\partial s_a}$ ، ضریب پخش فاز آب است. با قرار دادن رابطه ۳۵ در ۳۴ و حل آن برای سرعت کل خواهیم داشت:

$$v_t(t) = -\frac{\partial s_a(0, t)}{\partial x} \frac{R d_a(0, t)}{1 - R f_a(0, t)} \quad (36)$$

در بررسی حاضر، برای محاسبه‌ی سرعت کل در گام زمانی  $t_{n+1}$  از رابطه ۳۷ استفاده شده است:

$$v_t^{n+1} = -\left( \frac{s_a|_{i=2}^n - s_a|_{i=1}^n}{\Delta x} \right) \frac{R d_a|_{i=1}^n}{1 - R f_a|_{i=1}^n} \quad (37)$$

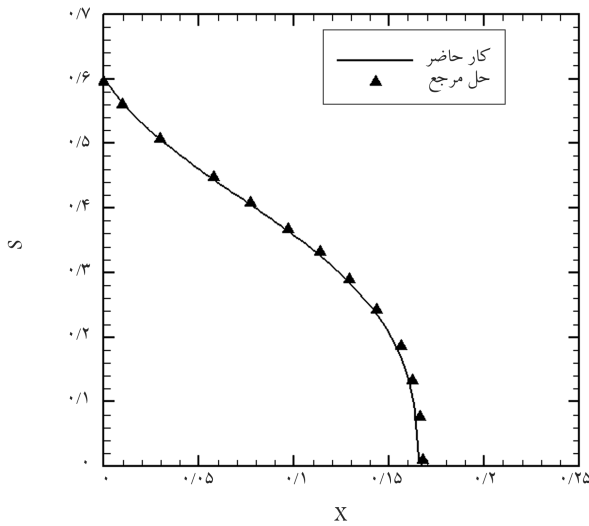
که برای محاسبه‌ی مشتق مکانی درجه‌ی اشباع فاز آبی، مشتق عددی با دقت مرتبه‌ی اول به کار رفته است. برای توابع فشار موئینگی و نفوذپذیری نسبی از مدل بروکس - کوری استفاده شده است:

$$p_{ca} = -pd s_a^{-1/\lambda} \quad (38)$$

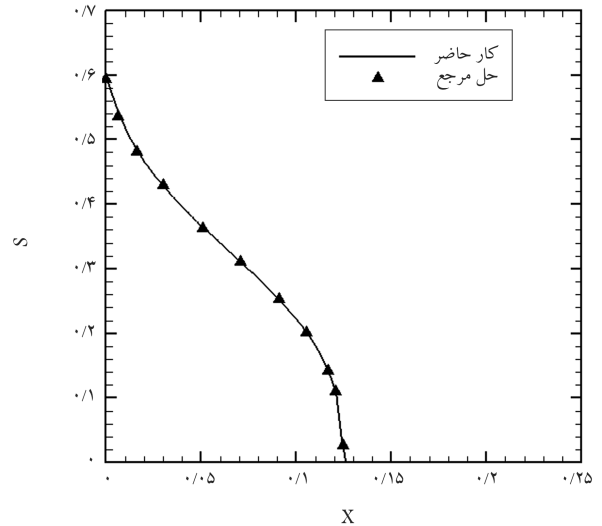
$$k_{rl} = s_l^2 \left( 1 - (1 - s_l)^{1+2/\lambda} \right), \quad k_{ra} = s_a^{2+2/\lambda} \quad (39)$$

پارامترهای این مدل به همراه سایر اطلاعات فیزیکی مربوط به شرایط سیال و سنگ مخزن در جدول ۱ مشاهده می‌شود.

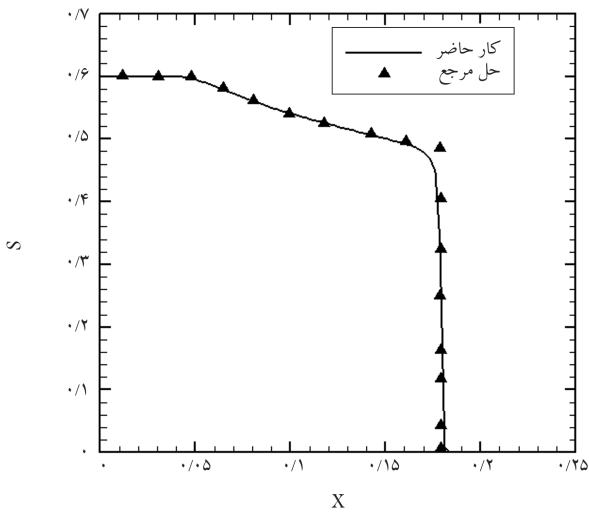
در محاسبات عددی، طول انتخاب شده برای مخزن ۰.۲۵ متر است. این مسئله با استفاده از شبکه‌ی متشکل از ۲۰۰ گره و پس از ۱۰۰۰ ثانیه تزریق، برای چهار



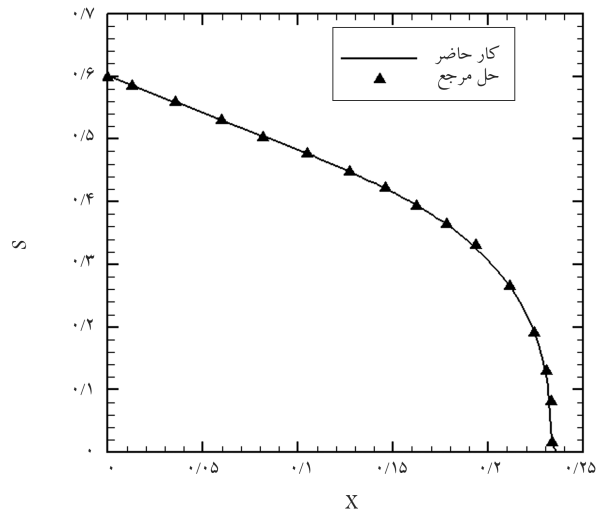
(ب) حل مسئله ی مک و رتر برای حالت  $R=0.8$



(الف) حل مسئله ی مک و رتر برای حالت  $R=0$



(د) حل مسئله ی باکلی - لورت.



(ج) حل مسئله ی مک و رتر برای حالت  $R=1$

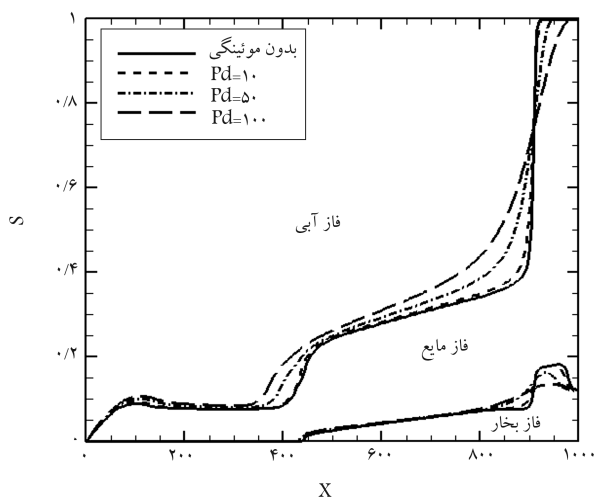
شکل ۳. منحنی درجهی اشباع آب بر حسب مکان (مقایسه‌ی نتایج کار حاضر با نتایج کار فوسیک و همکاران<sup>[۱۹]</sup>).

فشار اولیه‌ی مخزن  $3500 \text{ psi}$ ، فشار چاه تزریق  $4000 \text{ psi}$  و فشار چاه تولید  $3000 \text{ psi}$  است. سایر اطلاعات مربوط به خواص سیال و سنگ مخزن در ضمیمه آورده شده است. برای این مسئله حل تحلیلی وجود ندارد و نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از مطالعات ترانگشتاین و بل<sup>[۱۹]</sup> مقایسه شده است. برای حل مسئله، تعداد گره  $200$  و عدد CFL برابر با  $0.4$  انتخاب شده است. در شکل ۴ نمودار درجه‌ی اشباع فازها در طول مخزن با صرف نظر از اثرات فشار موئینگی و پس از  $125$  روز تزریق نشان داده شده است. همچنین در این شکل نتایج کار ترانگشتاین و بل نیز آورده شده است. چنان که مشاهده می‌شود نتایج حاصله از دقت بالایی برخوردار است.

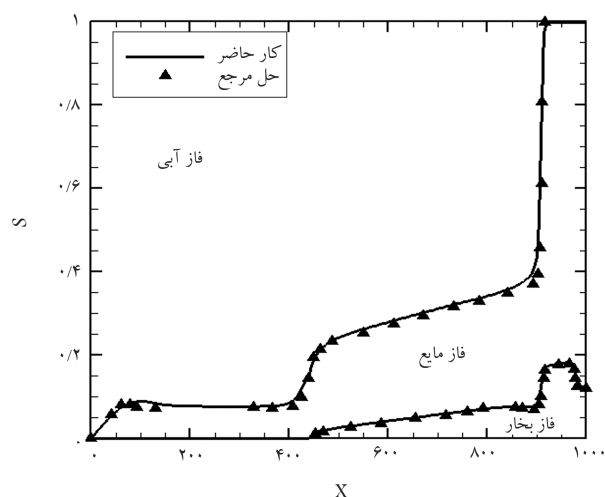
حال مسئله‌ی حاضر را با در نظر گرفتن فشار موئینگی مجدداً حل می‌کنیم و نتایج حاصل از آن را با حالت بدون فشار موئینگی مقایسه می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم  $\lambda = 2$  و درجه‌ی اشباع باقی‌مانده ( $s_{res}$ ) در همه‌ی فازها برابر با صفر باشد. همچنین تعداد گره‌ها و عدد CFL همانند حالت بدون فشار موئینگی

در حالت چهارم، تأثیر حذف بخش سهمی معادله‌ی بقای جرم را بررسی می‌کنیم. در این حالت از اثرات فشار موئینگی صرف نظر می‌کنیم و در نتیجه معادله‌ی بقای جرم، یک معادله‌ی باکلی - لورت هذلولوی خواهد بود. به منظور مقایسه با حالت سوم، سرعت کل در این حالت را برابر با سرعت کل به دست آمده از حالت سوم قرار می‌دهیم. نتیجه‌ی حل مذکور به همراه حل نیمه تحلیلی در شکل ۵ ارائه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، برخلاف حالت سوم، در مخزن شوکی رخ داده که ناشی از حذف اثرات سهمی ناشی از فشار موئینگی است. مسئله‌ی سوم: این مسئله شامل سیلاب زنی آبی به یک مخزن سیرنشده است. طول مخزن  $1000$  فوت و آب از نقطه‌ی  $x = 0$  به مخزن تزریق می‌شود. شرایط ابتدایی و تزریق برای این مسئله عبارتند از:

$$\begin{aligned} z_{res} &= \{0.646 \quad 116.29 \quad 0.7\}^T \\ z_{inj} &= \{0.7 \quad 0.7 \quad 1.271\}^T \end{aligned} \quad (40)$$



شکل ۵. تأثیر فشار موئینگی بر نتایج حاصل از حل مسئله‌ی سوم.



شکل ۴. نمودار درجه‌ی اشباع فازها در طول مخزن. (مقایسه‌ی مطالعه‌ی حاضر با نتایج حاصل از مطالعات تراگشتاین و بل<sup>[۱۱]</sup> با صرف نظر از اثرات موئینگی).

### نتیجه‌گیری

در این کار امکان به کارگیری روش مرکزی دقت بالا برای استفاده در مدل نفت سیاه با در نظر گرفتن اثرات فشار موئینگی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل نشان می‌دهد که این روش عددی دارای پخش مصنوعی کم در مقایسه با سایر روش‌های مرکزی است و میزان پخش مصنوعی آن مستقل از عدد CFL است<sup>[۱۱]</sup> و در نتیجه روش مناسبی برای شبیه‌سازی معادلات سهموی بقای جرم است که در آن انتخاب گام زمانی با محدودیت بیشتری نسبت به حالات هذلولوی مواجه است. همچنین در بررسی حاضر، مدل نفت سیاه توسعه یافته با استفاده از فرمول بندی فشار عمومی برای در نظر گرفتن اثرات فشار موئینگی بسط داده شد و نشان داده شد که استفاده از این فرمول بندی باعث کاهش وابستگی معادلات می‌شود. از آنجا که مسئله‌ی فشار موئینگی در مخازن ترک دار از اهمیت ویژه‌ی برخوردار است، تعمیم این مدل به این دسته از مخازن را می‌توان به عنوان کار بعدی مد نظر قرار داد.

### پانویس

1. degeneracy
2. non-convex
3. characteristic decomposition
4. piecewise constant approximation
5. high-resolution central schemes
6. global pressure
7. volume error discrepancy
8. minmod limiter
9. courant-friedrichs-levy (CFL)
10. first order upwind method
11. without capillarity

### منابع

1. Godunov, K.S. "A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the

به ترتیب برابر با  $200$  و  $0.4$  و عدد پخش برابر با  $0.3$  انتخاب شده است. اکنون به بررسی تأثیر مقادیر  $pd$  بر نتایج حاصل می‌پردازیم. در شکل ۵ تأثیر فشار موئینگی بر منحنی درجه‌ی اشباع فازها برای مقادیر مختلف  $pd$  نشان داده شده است. در این شکل منحنی مربوط به حالت بدون فشار موئینگی<sup>[۱۱]</sup> که از قسمت قبلی به دست آمده بود، به منظور مقایسه مجدداً ارائه شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود، به دلیل اثرات فشار موئینگی وسعت نواحی مربوط به فازهای بخار، مایع و آبی در نمودار درجه‌ی اشباع فازها نسبت به حالت بدون موئینگی دچار تغییراتی شده است. درجه‌ی اشباع فاز بخار در کل مخزن نسبت به حالت بدون فشار موئینگی کاهش یافته، در حالی که درجه‌ی اشباع فاز آبی در اکثر نقاط مخزن افزایش یافته است. در توجیه این امر می‌توان گفت که فشار موئینگی بین فازهای مایع و آب باعث افزایش نفوذ و در نتیجه افزایش سرعت حرکت آب در مخزن شده است و این امر یک نیروی بازدارنده در مقابل حرکت فاز بخار به وجود آورده است.

equations of fluid dynamics", *Matematicheskii Sbornik*, **47**, pp. 271-290 (1959).

2. Friedrichs, K.O. and Lax, P.D. "Systems of conservation equations with a convex extension", *Proceedings of the National Academy of Science, USA*, **68**, pp. 1686-8 (1971).
3. Nessyahu, H. and Tadmor, E. "Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws", *Journal of Computational Physics*, **87**, pp. 408-63 (1990).
4. Liu, X.D. and Tadmor, E. "Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws", *Numerical Mathematics*, **79**, pp. 397-425 (1998).
5. Huynh, H.T. "A piecewise-parabolic dual-mesh method for the Euler equations", *12th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, pp. 1054-66 (1995).
6. Arminijon, P.; Stanescu, D. and Viallon, M.C. "A two-dimensional finite volume extension of the Lax-Friedrichs and Nessyahu-Tadmor schemes for compressible flow", in Hafez, M. (Ed.), *Proceedings of the 6th International Symposium on CFD, Lake Tahoe*, **4**, pp. 7-14 (1995).



- Jiang, G.S. and Tadmor, E. "Nonoscillatory central schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws", *SIAM Journal on Scientific Computing*, **19**, pp. 1892-917 (1998).
- Jiang, G.S.; Levy, D.; Lin, C.T.; Osher, S. and Tadmor, E. "High-resolution nonoscillatory central schemes with nonstaggered grids for hyperbolic conservation laws", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **35**(6), pp. 2147-68 (1998).
- Kurganov, A. and Tadmor, E. "New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations", *Journal of Computational Physics*, **160**, pp. 241-82 (2000).
- Naderan, H.; Manzari, M.T. and Hannani, S.K. "Application and performance comparison of high resolution central schemes for black oil model", *Int. J. of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **17**(7), pp. 736-753 (2007).
- Trangenstein, J.A. and Bell, J.B. "Mathematical structure of black-oil model for petroleum reservoir simulation", *SIAM J. Appl. Math.* **49** pp.749-783 (1989).
- Brooks, R.H. and Corey, A.T., *Hydraulic Properties of Porous Media*, Hydrology paper 3, Colorado State University, Fort Collins, Colorado (1964).
- VanGenuchten, M.T. "A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, **44**, pp. 892-8 (1980).
- Parker, J.C. and Lenhard, R.J. "A model for hysteretic constitutive relations governing multi-phase flow: 1. sturation-pressure relations", *Water Resources Research*, **23**(12), pp. 2187-2196 (1987).
- Antontsev, S.N. "On the solvability of boundary value problems for degenerate two-phase porous flow equations", *Dinamika Sploshn. Sredy*, **10**, in Russian, pp. 28-53 (1972).
- Chavent, G. and Jaffre, J. "Mathematical models and finite elements for reservoir simulation", *Elsevier Science Publishers*, Amsterdam (1986).
- Fatehi, R.; Manzari, M.T. and Hannani, S.K. "A finite-volume ELLAM for non-linear flux convection-diffusion problems", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **44**, pp. 130-137 (2009).
- McWhorter, D.B. and Sunada, D.K. "Exact integral solutions for two-phase flow", *Water Resour. Res.*, **26**(3), pp. 399-413 (1990).
- Fucik, R.; Mikyska, J.; Benes, M. and Illangasekare, T. H. "An improved semi-analytical solution for verification of numerical models of two-phase flow in porous media", *Vadose Zone Journal*, **6**, pp. 93-104 (2007).

همچنین، ضرایب حجمی تشکیل به صورت زیر انتخاب شده اند:

$$B_l = \begin{cases} 1 - 2,3 \times 10^{-5} p & R_l(p) = 0 \text{ اگر} \\ 1 + 1,5 \times 10^{-4} p & R_l > 0 \text{ اگر مایع اشباع باشد و} \\ \frac{1 + 1,5 \times 10^{-4} p_b}{1 + 2,3 \times 10^{-5} (p - p_b)} & \text{اگر مایع سیر نشده باشد} \end{cases}$$

$$B_v = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon + \epsilon_r \epsilon p} & \text{اگر بخار اشباع باشد} \\ \frac{1}{\epsilon + \epsilon_r \epsilon p} + \frac{R_v}{R_v} \left[ \frac{1}{\epsilon + \epsilon_r \epsilon p} - \frac{1}{\epsilon + \epsilon_r \epsilon p} \right] & \text{اگر بخار سیر نشده باشد} \end{cases}$$

$$B_a = \begin{cases} 1 - 1,8 \times 10^{-5} p & R_a(p) = 0 \text{ اگر} \\ 1 - 3 \times 10^{-6} p & R_a > 0 \text{ اگر آب اشباع باشد و} \\ \frac{1 - 3 \times 10^{-6} p_b}{1 + \epsilon_r \gamma \times 10^{-5} (p - p_b)} & \text{اگر آب سیر نشده باشد} \end{cases}$$

در نهایت، برای توابع فشار موئینگی فازهای آبی و بخار از مدل بروکس - کوری استفاده شده است:

$$p_{cv} = p_d (1 - \bar{s}_v)^{-1/\lambda}, \quad p_{ca} = -p_d \bar{s}_a^{-1/\lambda}$$

که در آن  $\bar{s}_j$ ، درجهی اشباع مؤثر فاز  $j$  است و عبارت است از:

$$\bar{s}_j = \frac{s_j - s_{res,j}}{1 - \sum_{j=l,v,a} s_{res,j}}, \quad j = l, v, a$$

و در آن،  $s_{res,j}$  درجهی اشباع باقی ماندهی فاز  $j$  است.

## ضمیمه

### خواص سیال و سنگ مخزن

در مسئله‌ی سوم، واحد طول فوت ( $ft$ ) و واحد زمان روز ( $days$ ) است. همچنین فشار برحسب پوند براینچ مربع ( $psi$ )، لزجت برحسب سانتی پواز ( $cp$ ) و نفوذپذیری سنگ مخزن برحسب  $ft^2 cp/psi \text{ days}$  یا  $0,06328$  برابر مقدار میلی داریسی سنجیده می شود. در این مسئله مقدار نفوذپذیری سنگ مخزن برابر با  $10^0$  میلی داریسی و تخلخل مخزن به صورت  $\phi = 0,2 + 0,2 \times 10^{-5} p$  انتخاب شده است. برای نفوذپذیری نسبی از توابع زیر استفاده شده است:

$$k_{r,l} = s_l (1 - s_v) (1 - s_a), \quad k_{r,v} = s_v^2, \quad k_{r,a} = s_a^2$$

برای نسبت های حلالیت نیز از توابع زیر استفاده شده است:

$$R_l(p) = 0,7 \times 10^5 p,$$

$$R_v(p) = 9 \times 10^{-5} - 6 \times 10^{-8} p + 1,6 \times 10^{-11} p^2,$$

$$R_a(p) = 0,7 \times 10^5 p$$

لزجت های فازی نیز چنین تعریف شده اند:

$$\mu_l = \begin{cases} 0,78 - 1 \times 10^{-4} p & \text{اگر مایع باشد} \\ (0,78 - 1 \times 10^{-4} p_b) (1 + 6,78 \times 10^{-5} (p - p_b)) & \text{اگر مایع سیر نشده باشد} \end{cases}$$

$$\mu_v = 0,7 \times 10^2 + 3 \times 10^{-5} p$$

$$\mu_a = \begin{cases} 0,35 & \text{اگر آب اشباع باشد} \\ 0,35 (1 + 6,78 \times 10^{-5} (p - p_b)) & \text{اگر آب سیر نشده باشد} \end{cases}$$

