مهندسی مکانیک شریف
دوره‌ی ۳-۲۷، شماره‌ی ۲، ص. ۷۵-۶۵

به‌کارگیری روش نیرو و روش مرکزها در بهینه‌سازی وزن خرپاها

بهروز فرشی (دانشیار)
علی علی‌نیا زیازی (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت

farshi@iust.ac.ir
ali.alinia@iust.ac.ir

در این تحقیق بهینه‌سازی وزن سازه‌ی خرپا تحت قیود تنش، سطح مقطع، و ارتباط بین سطح مقاطع اعضا تحت یک یا چند حالت بارگذاری استاتیکی، بررسی می‌شود. روش نقاط میانی که از تکنیک کره‌های محاطی بهره می‌جوید و از گرادیان توابع در آن استفاده می‌شود، به‌عنوان ابزار بهینه‌سازی در نظر گرفته شده، و از روش نیروها در تحلیل سازه به‌عنوان ابزار فرمول‌بندی استفاده می‌شود. در اینجا با تعمیم روش مرکزها برای در نظرگرفتن قیود تساوی، امکان استفاده‌ی هم‌زمان از این دو روش به‌منظور بهره‌گیری هرچه بیشتر از خصوصیات ذاتی آن‌ها فراهم می‌شود. چند نمونه مثال عددی برای نشان‌دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است. مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با آنچه که پیش‌تر در مراجع گزارش شده است، حاکی از قدرت و کارایی این روش است.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی، روش نیرو، روش کره‌های محاطی، کمینه وزن، سازه‌های خرپایی.

مقدمه

در چند دهه‌ی اخیر بهینه‌سازی سازه‌ها مورد توجه فراوان بسیاری از محققان قرار گرفته است. بدیهی است که این دقت نظر به صرفه‌جویی در وقت، هزینه‌های طراحی و ساخت، و مواد مصرفی انجامیده است. در میان سازه‌ها، سازه‌ی خرپا به‌دلیل سادگی و مصرف زیاد در صنعت ــ در مقایسه با دیگر سازه‌ها ــ توجه بیشتری از طراحان به خود جلب کرده است. افزون بر این، تدوین هر روش جدید برای بهینه‌سازی سازه‌ها در ابتدا برای سازه‌ی خرپا در نظر گرفته می‌شود و سپس طی مراحل تکامل به سازه‌های رتبه‌ی بالاتر تعمیم داده می‌شود. براین اساس، محققین و پژوهش‌گران به‌منظور یافتن کمینه وزن یک سازه روش‌های مختلفی ارائه کرده‌اند که در ادامه برخی از آن‌ها به‌اختصار شرح داده می‌شوند.

ماهیت بهینه‌سازی وزن سازه‌ها عموماً غیرخطی است. لذا برخی از محققین روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP)[۱] راکه مبتنی بر یک قاعده‌ی بهینگی ریاضی است، برای حل این مسائل گسترش دادند.[۱-۶] این روش‌ها عموماً روش‌هایی قوی در مسائل بهینه‌سازی هستند. محققین دیگری در جست‌وجوی معیار بهینگی[۲] برای مسائلی هستند که غالباً برمبنای یافتن ضرایب حساسیت رفتار سازه به پارامترهای طراحی باشد. در این‌گونه روش‌ها عموماً یک رابطه‌ی بازگشتی برای اصلاح متغیرهای طراحی به دست می‌آید که در مقایسه با روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) باعث کاهش حجم محاسبات می‌شود. در این زمینه مطالعات بسیاری انجام شده است.[۷-۱۱] همچنین امکان تلفیق روش برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) و روش مبتنی بر معیار بهینگی (OC) نیز بررسی شده است.[۱۲] ازجمله تحقیقات مهم، می‌توان به مطالعات انجام‌شده براساس تحلیل حساسیت و اصلاح معیارهای OC موجود برای یافتن معیار بهینگی مناسب‌تر،[۱۳] یا استفاده از مبنای چگالی انرژی کرنشی در سازه و اصلاح روش‌های موجود OC براساس آن[۱۴] اشاره کرد. برخی از محققین با استفاده از شیوه‌ی SLP به حل مسائل بهینه‌سازی پرداختند؛ در پاره‌یی از این مطالعات با استفاده از اصلاح قید اندازه تغییر متغیرها و به‌کمک روش ناحیه‌ی امنیت[۳] وزن سازه‌ها بهینه شد.[۱۵-۱۷] از دیگر روش‌های عددی جست‌وجو برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی که در دو دهه‌ی اخیر گسترش یافته‌اند می‌توان به الگوریتم ژنتیک، استراتژی اولوشن[۴]، شبکه‌ی عصبی، و جست‌وجوی هارمونی[۵] اشاره کرد. این روش‌ها ازجمله روش‌های مرتبه صفرند و اغلب برای یافتن جواب نیازمندِ تعداد تکرار زیاد و محاسبات فراوان‌اند. در فوق خلاصه کوچکی از کارهای فراوان انجام شده در زمینه بهینه‌سازی ارائه شد. در اغلب این روش‌ها تحلیل سازه مبتنی بر روش جابه‌جایی[۶] است. در مقابل، گروهی دیگر از پژوهش‌گران تلاش کردند تا با استفاده از روش نیرو[۷] در حل مسائل بهینه‌سازی، از فواید ساده‌سازی حاصل از آن تا حد امکان بهره‌برداری کنند.

در سال ۱۹۸۰ با ایده‌ی خطی‌سازی معادله‌ی سازگاری و اصلاح عدم ارضاء معادله‌ی سازگاری و همراه‌کردن آن با روش برنامه‌ریزی خطی، مسئله‌ی بهینه‌سازی مد نظر قرارگرفت.[۱۸] سطح مقطع‌های اضلاع به‌عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شد و قید تنش، قید اندازه روی سطح مقطع و ارتباط بین سطح مقطع اعضا[۸] در چند حالت مختلفِ بارگذاری بررسی شده است. این روش با گذاشتن یک

تاریخ: دریافت ۱۳۸۸/۹/۹، اصلاحیه ۱۳۸۸/۱۲/۱۱، پذیرش ۱۳۸۹/۲/۴.

قید اضافی خارجی به نزدیکی‌های جواب می‌رسد. محققین دیگری با استفاده از روش نیرو و در نظر گرفتن سطح مقاطع و نیروهای اضلاع زائد[9] به‌عنوان متغیر و نیز حذف رابطه‌ی غیرخطی سازگاری، نقطه‌ی آغازینی برای حل فرایند بهینه‌سازی خرپا ارائه کردند.[۱۹] روش آن‌ها با استفاده از روش طراحی با تنش کامل (FSD)[10] ادامه می‌یابد، که خود نشان دادند جواب به دست آمده می‌تواند یک جواب بهینه‌ی موضعی باشد. هم‌زمان، با استفاده از روش نیرو مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه خرپا ــ که تحت چند حالت مختلف بارگذاری قرار دارد ــ تحت قید تنش و بدون حضور قیود محدودیت اندازه سطح مقطع و ارتباط بین سطح مقاطع حل شد.[۲۰] در این روش سطح مقطع‌ها و نیروهای اضلاع زائد در سازه به‌عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده و یک بار سازه تحت قید تنش که در فرمول‌بندی روش نیرو خطی می‌شود[۲۱] توسط برنامه‌ریزی خطی حل خواهد شد. برای ارضاء سازگاری، با به دست آمدن کرنش‌ها از چرخه‌ی قبل و قرار دادن آن در رابطه‌ی بتی[۲۲] یک رابطه‌ی خطی به چرخه‌ی بعدی اضافه می‌شود تا به‌تدریج جواب سازگار به دست آید. این روش به‌دلیل عدم حضور قید اندازه‌ی سطح مقطع و قید ارتباط بین اعضا از قابلیت حذف اعضا و رسیدن به جواب بهینه‌ی کلی برخوردار است.

در تمامی این روش‌ها بعد از هر چرخه‌ی بهینه‌سازی برای یافتن رفتار سازه ــ اعم از تنش، جابه‌جایی و غیره ــ تحلیل دوباره‌ی سازه در نقطه‌ی جدید طراحی به دست آمده ضرورت می‌یابد که این امر خود عامل افزایش حجم محاسبات خواهد بود. در سال ۲۰۰۶،[۲۳] با استفاده از روش نیرو و در نظر گرفتن سطح مقطع‌ها و نیروهای اضلاع زائد به‌عنوان متغیرهای طراحی، و نیز با بهره‌گیری از روش تابع جریمه[11] و روش الگوریتم ژنتیک نسبت به تحلیل سازه و بهینه‌کردن وزن سازه در هر چرخه به‌طور توأمان اقدام شد؛ به‌طوری که بعد از هر چرخه‌ی بهینه‌سازی دیگر نیازی به تحلیل دوباره سازه نیست. از این روش برای تحلیل غیرخطی[۲۴] و در تحقیقی دیگر برای بهینه‌سازی شکل و هندسه‌ی سازه نیز بهره‌برداری شد.[۲۵] از دیگر تحقیقات انجام‌شده در روش نیرو می‌توان به ترکیب روش نیرو و الگوریتم مورچه اشاره کرد.[۲۶] در این نوشتار بهینه‌سازی وزن سازه‌های خرپای کشسان تحت قیود تنش، قید محدودیت بر سطح مقطع و قید ارتباط بین سطح مقطع‌های اعضا که ممکن است تحت یک یا چند حالت مختلف بارگذاری استاتیکی قرارگیرد، بررسی می‌شود. وجود دو قید آخر مانع استفاده از روش مرجع[۲۰] در این حالت خواهد شد. بر این اساس باید روابط غیرخطی سازگاری به مسئله‌ی بهینه‌سازی اضافه شود. هدف از این نوشتار استفاده‌ی هم‌زمان از خصوصیات خوب حاصل از فرمول‌بندی روش نیرو و روش مرکزها ــ که از تکنیک روش کره‌های محاطی بهره می‌جوید ــ در بهینه‌سازی وزن سازه‌های خرپاگونه است. با در نظر گرفتن نیروهای اضلاع زائد و سطح مقطع‌ها به‌عنوان متغیرهای طراحی، می‌توان شرایطی فراهم کرد که در فرایند بهینه‌سازی بعد از انجام هر چرخه نیازی به تحلیل سازه نباشد.[۲۳] روش کره‌های محاطی[۲] تنها شامل قیود نامساوی است و بنابراین، با تعمیم این روش می‌توان قیود تساوی را نیز به آن اضافه کرد. به‌همین لحاظ امکان استفاده‌ی توأمان از این دو روش، به‌عبارت دیگر فرمول‌بندی قیود برحسب روش نیرو و روش کره‌های محاطی فراهم می‌شود. چند نمونه مثال عددی نیز برای نشان‌دادن کارایی و قدرت این روش ارائه می‌شود.

فرمول‌بندی مسئله

یک سازه‌ی خرپا با m عضو و n گره را در نظر بگیرید. تابع هدف طراحی مسئله عبارت است از وزن این سازه خرپا که می‌توان آن را به‌صورت رابطه‌ی ۱ ارائه کرد.

$$\text{Minimize } W(A) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i l_i A_i \tag{۱}$$

که در آن ρ_i جرم حجمی، l_i طول عضو، و A_i سطح مقطع عضو iام است. سازه می‌تواند تحت K حالت مختلف بارگذاری استاتیکی قرار گیرد. قیدهای در نظر گرفته شده عبارت‌اند از: قید تنش هر عضو، قید سطح مقطع و قید ارتباط بین سطح مقطع‌ها که می‌توان آن‌ها را چنین نشان داد:

$$\begin{aligned} &\sigma_i^L \le \sigma_{ik} \le \sigma_i^U \\ &A_i^L \le A_i \le A_i^U \\ &\text{linking of variables} \\ &i = 1, ..., m; \qquad k = 1, ..., k. \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن σ_{ik} تنش در بارگذاری kام، σ_i^U و σ_i^L مقادیر حد مجاز بالایی و پایینی برای تنش، A_i^U ، A_i^L مقادیر حد پایین و بالا برای سطح مقطع عضو iام هستند.

فرمول‌بندی روش نیرو

با استفاده از روش نیرو، نیروی هر عضو را در یک سازه نامعین استاتیکی که درجه نامعینی استاتیکی در آن R است، می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳ ارائه کرد.[۲۲]

$$F_{ik} = \sum_{s=1}^{n} b_{0_{is}} P_{sk} + \sum_{s=1}^{J} b_{x_{is}} X_{sk} \tag{۳}$$

که در آن F_{ik} نیروی عضو iام تحت بارگذاری kام، $b_{0_{is}}$ ضریب اثر بار واحد در راستای درجه آزادی sام بر عضو iام، P_{sk} مقدار بار خارجی در راستای درجه آزادی sام در بارگذاری kام، $b_{x_{is}}$ ضریب اثر نیروی عضو زائد sام به‌ازای مقدار بار واحد بر عضو iام، X_{sk} نیروی عضو زائد sام در بارگذاری jام است. به‌عبارت دیگر در رابطه‌ی ۳ نیروی هر عضو متشکل از دو قسمت است: بخش اول اثر قسمت سازه‌ی معین استاتیکی در نظر گرفته شده از سازه اصلی، و بخش دوم اثر نیروهای اضلاع زائد سازه اصلی بر روی هر عضو سازه خرپا را نشان می‌دهد. با توجه به تعریف تنش در یک عضو سازه خرپا، و با استفاده از رابطه‌ی ۳ مقدار تنش برحسب نیروهای زائد به دست می‌آید:[۲۰]

$$\sigma_{ik} = \left(\sum_{s=1}^{n} b_{0_{is}} P_{sk} + \sum_{s=1}^{J} b_{x_{is}} X_{sk} \right) \Big/ A_i \tag{۴}$$

در روش نیرو، در یک سازه نامعین استاتیکی، نیروهای اضلاع زائد توسط رابطه‌ی سازگاری به تغییر شکل اعضا مرتبط می‌شوند:[۲۲]

$$\sum_{s=1}^{m} b_{x_{rs}}^T \frac{l_s}{E_s A_s} F_{sk} = 0 \qquad r = 1, ..., R; \quad k = 1, ..., K. \tag{۵}$$

که در آن E_s ضریب کشسانی عضو sام است. با قرار دادن رابطه‌ی ۳ در رابطه‌ی ۵ خواهیم داشت:[۲۲]

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{m} b_{x_{rs}}^T \frac{l_s}{E_s A_s} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{0_{sl}} P_{lk} + \sum_{l=1}^{J} b_{x_{sl}} X_{lk} \right) = 0 \\ &r = 1, ..., R; \qquad k = 1, ..., K. \end{aligned} \tag{۶}$$

در سازه‌ی معین استاتیکی ــ به‌دلیل عدم وجود عضو زائد ــ رابطه‌ی سازگاری به‌طور خودکار ارضاء خواهد شد اما در سازه نامعین استاتیکی این رابطه به‌معنای وجود ارتباط بین سطح مقاطع و نیروهای اعضای زائد سازه است. لازم به ذکر است که تعداد این معادلات در هر حالت بارگذاری برابر با درجه نامعینی سازه است. چنان که مشاهده می‌شود رابطه‌ی ۶ یک رابطه‌ی غیرخطی برحسب سطح مقطع‌ها و نیروهای اعضای زائد سازه است.

فرمول‌بندی بهینه‌سازی

در اینجا هدف یافتن کم‌ترین مقدار وزن سازه خرپا است. قیود در نظر گرفته شده در این تحقیق عبارت‌اند از: ۱. تنش‌های اعضا که باید بین یک حد مجاز معلوم باشند؛ ۲. سطح مقطع اعضا باید از حد مشخصی کم‌تر نباشد؛ ۳. سطح مقطع اعضا می‌توانند به یکدیگر مرتبط شوند (به‌عنوان مثال چند عضو باید سطح مقطع برابر داشته باشند). با در نظر گرفتن سطح مقطع‌ها (A_i) و نیروهای اعضای زائد (X_{rk}) به‌عنوان متغیرهای فضای طراحی، به‌عبارت دیگر گسترش فضای طراحی از تعداد m متغیر (تعداد سطح مقطع‌ها) به $m + R \times K$ متغیر (تعداد سطح مقطع‌ها به‌اضافه‌ی تعداد نیروهای اعضا زائد در هر بارگذاری) قیود تنش برحسب این متغیرها خطی خواهد شد.[۲۰و۲۱] در صورت عدم حضور دو قید آخر می‌توان از روش برنامه‌ریزی خطی[۲۰] برای حل مسئله استفاده کرد. اما چون وجود هر یک از دو قید آخر، به‌خصوص قید اندازه روی سطح مقطع‌ها، باعث می‌شود که سازه در انتهای فرایند بهینه‌سازی همچنان نامعین استاتیکی باشد، باید رابطه‌ی سازگاری را که بیانگر ارتباط بین سطح مقطع‌ها و نیروهای اعضا زائد است، به‌عنوان یک قید در مسئله‌ی بهینه‌سازی در نظر گرفت. چنان که پیش‌تر نیز بیان شد این قید برحسب متغیرهای فضای جدید گسترش یافته (A_i و X_{jk}) غیرخطی است و دیگر نمی‌توان از برنامه‌ریزی خطی (LP) به تنهایی برای حل مسئله بهره جست. افزون بر این، در چنین حالاتی جواب بهینه می‌تواند به جای این که در یک گوشه کامل باشد در یک زیرفضای طراحی، جایی که تعداد قیود فعال کم‌تر از تعداد متغیرها است، قرارگیرد. با توجه به این که جواب حاصل از حل برنامه‌ریزی خطی همیشه در یک گوشه‌ی کامل قرار دارد، استفاده از برنامه‌ریزی خطی به‌تنهایی پاسخگو نخواهد بود. بنابراین باید از روش دیگری که بتواند قیود غیرخطی را نیز پاسخگو باشد بهره جست. بر اساس تعریف مسئله در این تحقیق می‌توان مسئله ی بهینه‌سازی را به‌صورت رابطه‌ی ۷ نشان داد.

$$\text{Minimize}: \quad W(A) = \sum_{i=1}^{m} \rho_i l_i A_i$$

Subject to :

$$-\sigma_i^U A_i + \sum_{s=1}^{J} b_{x_{is}} X_{sk} \leq -\sum_{s=1}^{n} b_{0_{is}} P_{sk}$$

$$\sigma_i^L A_i - \sum_{s=1}^{J} b_{x_{is}} X_{sk} \leq \sum_{s=1}^{n} b_{0_{is}} P_{sk}$$

$$\sum_{s=1}^{m} b_{x_{rs}}^T \frac{l_s}{E_s A_s} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{0_{sl}} P_{lk} + \sum_{l=1}^{J} b_{x_{sl}} X_{lk} \right) = 0$$

$$A_i^L \leq A_i \leq A_i^U$$

Linking of variables

$$i = 1, ..., m; \quad r = 1, ..., R; \quad k = 1, ..., K. \tag{7}$$

در بیشتر روش‌های بهینه‌سازی غیرخطی، فرایند بهینه‌سازی بدین‌صورت است که ابتدا نقطه‌یی آغازین برای طراحی در نظر گرفته می‌شود و سپس سازه در آن نقطه تحلیل می‌شود و رفتار سازه به دست می‌آید. بعد از آن یک بار چرخه‌ی بهینه‌سازی براساس روشی مشخص انجام می‌گیرد و نقطه‌ی جدیدی برای طراحی حاصل می‌شود. سپس دوباره سازه در این نقطه‌ی جدید تحلیل می‌شود و رفتار سازه به دست می‌آید. دوباره این فرایند تکرار می‌شود تا به ترتیب نقاط جدید بهتری به دست آید. در این تحقیق هدف حذف مراحل میانی در یک چرخه‌ی بهینه‌سازی است. به‌عبارت دیگر هدف محصورکردن تحلیل سازه در داخل روش بهینه‌سازی است به‌طوری که با هر بار انجام فرایند بهینه‌سازی نه‌تنها یک نقطه‌ی جدید طراحی به دست می‌آید، بلکه رفتار سازه، و به بیان دیگر نیروها و متعاقب آن تنش‌های اعضا که قیود مورد بررسی هستند نیز توأمان به‌طور تقریبی به دست خواهد آمد. این روش پیش‌تر نیز مورد بررسی قرارگرفته است.[۲۳] چنان که پیش‌تر بیان شد در این بررسی با استفاده از روش تابع جریمه مسئله به یک مسئله‌ی بهینه‌سازی بدون قید تبدیل شد و سپس از روش الگوریتم ژنتیک که روش مرتبه صفر محسوب می‌شود، برای حل آن مسئله استفاده شد. در اینجا هدف استفاده از روش‌های مرتبه بالاتر است که کارایی بهتری دارند. لذا برای نیل به این منظور از روش مرکزها که از تکنیک کره‌های محاطی بهره می‌جوید به‌عنوان ابزار بهینه‌سازی استفاده می‌شود. علی‌رغم در اختیار بودن توضیح کامل این روش،[۲] برای کامل بودن بحث در این مجال روش مذکور به‌صورت مختصر ارائه می‌شود.

روش کره‌های محاطی اساساً چنین است که ابتدا قیود و تابع هدف حول یک نقطه‌ی اولیه که در فضای قابل قبول قرار دارد، با استفاده از بسط سری تیلور خطی می‌شوند. سپس شعاع و مرکز بزرگ‌ترین کره قابل مماس بر این قیود و تابع هدف خطی‌شده، یافت می‌شود به‌طوری که مرکز کره در داخل فضای قابل قبول تعریف شده توسط قیود و در سمت کاهش تابع هدف قرار داشته باشد و مرکز کره باید در جایی قرار گیرد که اندازه شعاع کره مماسی کوچک‌تر یا مساوی با فاصله‌ی نقطه‌ی مرکز کره تا هر یک از قیود خطی شده باشد. با این کار مرکز به دست آمده در وسط فضای قابل قبول است و فاصله‌ی آن از قیود فعال به یک اندازه خواهد بود. حال مرکز کره به دست آمده به‌عنوان نقطه‌ی جدید طراحی در نظر گرفته می‌شود؛ و دوباره این فرایند حول این نقطه انجام می‌شود تا به‌تدریج با این تکنیک فضای طراحی قابل قبول محدودتر شود؛ مرکز کره نیز به سمت نقطه‌ی بهینه حرکت می‌کند و شعاع آن به‌تدریج کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است برای حفظ دقت تقریب خطی‌سازی و همچنین غلبه بر حالتی که نقطه‌ی جواب نهایی در یک زیرفضا قرار دارد، علاوه برقیود مورد بررسی باید قید محدودیت اندازه حرکت نیز در نظر گرفته شود. روش مرکزها دارای ویژگی‌های مناسبی است؛ از جمله: ۱. حذف موقتی قیود غیرفعال و فقط در نظر گرفتن قیود فعال و نیمه‌فعال که به کاهش حجم مسئله می‌انجامد؛ ۲. حرکت نقطه‌ی طراحی در داخل فضای قابل قبول نسبت به قیود نامساوی است و بنابراین، هرگاه به هر دلیل فرایند بهینه‌سازی متوقف شود نقطه‌ی به دست آمده خود از دید یک طراح جوابی قابل قبول خواهد بود. همچنین نقطه‌ی به دست آمده در هر چرخه نسبت به قیود حاکم در فاصله‌ی تقریباً یکسانی قرار دارد که باعث می‌شود نسبت به قیود دارای ضریب اطمینان تقریباً برابر باشد. همچنین به‌دلیل حرکت داخل فضای طراحی نسبت به خطی‌کردن قیود حساسیت کم‌تری نشان خواهد داد.

باید توجه داشت که با توجه به تعریف مسئله، در این تحقیق علاوه بر وجود قیود نامساوی (قید تنش و قید اندازه روی سطح مقطع)، قیود تساوی غیرخطی و به‌عبارتی قیود سازگاری که تعداد آن برابر $R \times K$ است، نیز وجود دارد. برای این که بتوان قید تساوی غیرخطی را در روش کره‌های محاطی اضافه کرد می‌توان از تکنیک زیر استفاده کرد. وجود قیود تساوی بدین معناست که جواب انتهایی مسئله

باید روی این قیود قرار داشته باشد. در فضای گسترش‌یافته، قسمتی از فضا را که نسبت به قیود نامساوی قابل قبول‌اند در نظر بگیرید. با توجه به ماهیت مسئله‌ی مورد بررسی که یک سازه است، بخشی از سطح قیود سازگاری باید در این فضا باشند. لذا تنها نقاطی از فضای قابل قبول که روی این سطح قرار دارند می‌توانند جوابی برای مسئله باشند. به‌عبارت دیگر، یک نقطه در این سطح مقادیری برای سطح مقطع‌ها و نیروهای اعضا زائد تخصیص می‌دهد که هم قیود نامساوی و هم قیود سازگاری را ارضاء می‌کنند (فضای قابل قبول ـ سازگار[۱۲]). باید توجه داشت که درصورت وجود چند قید سازگاری فضای قابل‌قبول ـ سازگار زیرفضایی است که از فصل مشترک این قیود حاصل می‌شود. لذا قیود تساوی (سازگاری) را می‌توان مانند قیود نامساوی در نظر گرفت، با این تفاوت که در روش کره‌های محاطی قید اعمالی بر روی شعاع کره به‌جای کوچک‌تر بودن از فاصله‌ی مرکز کره تا خطی‌شده‌ی قیود، به قید تساوی تبدیل می‌شود. این کار باعث می‌شود که در هر تکرار بزرگ‌ترین کره به‌گونه‌یی انتخاب شود که همیشه بر این قیود تساوی (به‌عبارت دیگر خطی‌شده آن‌ها) مماس باشد و هرچه چرخه‌ی بهینه‌سازی پیش می‌رود با کاهشِ شعاع کره، مرکز کره به‌تدریج به سمت این قیود تساوی نزدیک‌تر می‌شود و در نهایت نقطه‌ی جواب روی فصل مشترک این قیود خواهد نشست. به‌عبارت دیگر می‌توان مسئله‌ی بهینه‌سازی را چنین فرمول‌بندی کرد.

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize}:\ r_p\\
&\text{Subject to}:\\
&\quad \text{۱)}\ r_p \le l^{(p)}_{ineq};\ \ (\text{برای قیود نامساوی})\\
&\quad \text{۲)}\ r_p \le l^{(p)}_{W}\\
&\quad \text{۳)}\ r_p = l^{(p)}_{eq};\ \ (\text{برای قیود مساوی})\\
&\quad \text{۴)}\ \vec{l}^{\,L}_{(p)} \le \vec{S}_{(p)} \le \vec{l}^{\,U}_{(p)}\\
&\quad \text{ineq} = \text{۱}, ..,\qquad\qquad (\text{۸})\\
&\quad m\times K + \ \text{تعداد متغیرهای طراحی وابسته}\\
&\quad \text{eq} = \text{۱}, ..., J\times K \qquad\qquad (\text{۹})
\end{aligned}
$$

که در آن r_p شعاع کره محاطی در چرخه‌ی pام، $\vec{S}_{(p)}$ بردار حرکت از نقطه‌ی قبلی به مرکز جدید، $\vec{l}_{(p)}{}^{L}$ و $\vec{l}_{(p)}{}^{U}$ مقدار حد بالا و پایین برای مؤلفه‌های بردار حرکت، $l^{(p)}_{ineq}$ فاصله‌ی مرکز کره تا قیود نامساوی (قید تنش، جابه‌جایی، و قید اندازه روی سطح مقطع)، $l^{(p)}_{eq}$ فاصله‌ی مرکز کره تا قیود تساوی (که عبارت‌اند از قیود سازگاری) و $l^{(p)}_{W}$ فاصله‌ی مرکز کره تا تابع هدف است که همگی در چرخه‌ی pام هستند:

$$
\begin{aligned}
l^{(p)}_{ineq}\ \ or\ \ l^{(p)}_{eq} &= \frac{g_q\left(\vec{A}_p,\ \vec{X}_p\right) + \vec{S}_p{}^{T}\cdot \vec{\nabla} g_q\left(\vec{A}_p,\ \vec{X}_p\right)}{\left|\vec{\nabla} g_q\left(\vec{A}_p,\ \vec{X}_p\right)\right|}\\
l^{(p)}_{W} &= \frac{-\vec{S}^{T}_p\cdot \vec{\nabla} W\left(\vec{A}_p,\ \vec{X}_p\right)}{\left|\vec{\nabla} W\left(\vec{A}_p,\ \vec{X}_p\right)\right|} \qquad (\text{۱۰})
\end{aligned}
$$

در رابطه‌ی ۹ $(\vec{A}_p, \vec{X}_p)$ بردار نقطه‌ی طراحی در چرخه‌ی pام (مرکز کره به دست آمده از چرخه‌ی قبلی)، $\vec{\nabla}$ عملگر گرادیان، W تابع وزن سازه (رابطه‌ی ۱)، و g_q قیود نامساوی و تساوی است که چنین بیان می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&-\sigma^{U}_i A_i + \sum_{s=\text{۱}}^{J} b_{x_{is}} X_{sk} \le -\sum_{s=\text{۱}}^{n} b_{\circ_{is}} P_{sk}\\
&\sigma^{L}_i A_i - \sum_{s=\text{۱}}^{J} b_{x_{is}} X_{sk} \le \sum_{s=\text{۱}}^{n} b_{\circ_{is}} P_{sk}\\
&\sum_{s=\text{۱}}^{m} b^{T}_{x_{rs}} \frac{l_s}{E_s A_s}\left(\sum_{l=\text{۱}}^{n} b_{\circ_{sl}} P_{lk} + \sum_{l=\text{۱}}^{J} b_{x_{sl}} X_{lk}\right) = \circ\\
&A^{L}_i \le A_i \le A^{U}_i\\
&i = \text{۱}, ..., m;\quad r = \text{۱}, ..., R;\quad k = \text{۱}, ..., K. \qquad (\text{۱۱})
\end{aligned}
$$

ذکر این نکته ضروری است که قید ارتباط بین سطح مقطع‌ها در اکثر روش‌های بهینه‌سازی یک قید تساوی ساده است و لزوماً به‌عنوان قید در نظر گرفته نمی‌شود و تنها به کاهش تعداد متغیرها می‌انجامد.[۲] در این تحقیق نیز روش کار مانند دیگر روش‌هاست اما علت ذکر این قید آن است که وجود این قید می‌تواند به این موضوع منتهی شود که سازه در انتهای کار نامعین استاتیکی باقی بماند و درنتیجه در نظر گرفتن روابط سازگاری ضروری باشد.

مثال عددی

برای نشان‌دادن کارایی روش ارائه‌شده چند مثال عددی متداول در بهینه‌سازی بررسی می‌شوند. این مثال‌ها عبارت‌اند از: خرپای ۱۰ عضوی، ۲۵ عضوی، ۷۲ عضوی، ۶۰ عضوی، و ۲۰۰ عضوی. برای شروع بهینه‌سازی کافی است سطح مقطع اعضا به حد کافی بزرگ انتخاب شوند تا در فضای قابل قبول نسبت به قیود نامساوی قرار گیرند. در مثال‌های زیر تمامی سطح مقطع اعضا در نقطه‌ی آغارین دارای سطح مقطع برابرند.

مثال اول: خرپای صفحه‌یی ۱۰ عضوی

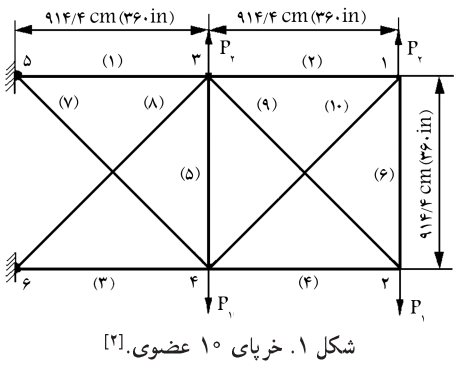
در شکل ۱ خرپای ۱۰ عضوی نشان داده شده که توسط محققان زیادی مورد بررسی قرارگرفته و نتایج مربوط به آن پیش‌ترگزارش شده است.[۲] اطلاعات مربوط به این مثال عبارت است از:

مدول کشسانی (10^{7} psi) $E = ۶۸۹۴۷$ MPa،

مقاومت حد تنش برابر $\sigma_\circ = \pm ۱۷۲$ MPa (۲۵ ksi)،

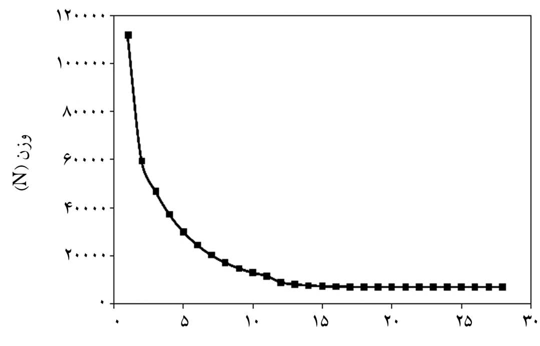
وزن حجمی برابر با $\rho = ۲۷۶۸\ \text{kg/m}^{۳}$ (۰٫۱ pci)،

سطح مقطع اعضا باید بزرگ‌تر از ($\text{in}^{۲}$ ۰٫۱) $\text{cm}^{۲}$ ۰٫۶۴۵۱ باشد.



شکل ۱. خرپای ۱۰ عضوی.[۲]

در این مثال قید ارتباط بین متغیرها وجود ندارد. این مثال در دو حالت مختلف بررسی می‌شود. در حالت اول تنها یک بارگذاری به‌صورت $P_۲ = ۰$، (۱۰۰ kips) $P_۱ = ۴۴۴/۸۲$ kN است. در حالت دوم نیز تنها یک بارگذاری به (۵۰ kips) $P_۲ = ۲۲۲/۴۱$ kN، (۱۵۰ kips) $P_۱ = ۶۶۷/۲۳$ kN است. در شکل ۲ نمودار تغییرات وزن سازه برحسب چرخه‌های بهینه‌سازی برای حالت اول نشان داده شده است. در نقطه‌ی آغازین بهینه‌سازی سطح مقطع‌ها همگی برابر با (۶۰ in^۲) ۳۸۷ cm^۲ در نظر گرفته شده اند. چنان که مشاهده می‌شود روند جواب به‌صورت کاهشی و پایدار است و بعد از ۱۵ تکرار، اختلاف جوابِ بهینه‌ی به دست آمده با جوابِ واقعی کم‌تر از ۱درصد است. در جدول ۱ نتایج به دست آمده از روش ارائه‌شده در این تحقیق در مقایسه با روش برنامه‌ریزی غیر خطی[۲] ارائه شده است. مشاهده می‌شود که بین جواب‌های به دست آمده و نتایج موجود توافق خوبی وجود دارد. در این مثال در هر دو حالت جواب بهینه در یک گوشه‌ی کامل ــ جایی که تعداد قیود فعال بزرگ‌تر یا مساوی با تعداد متغیرها است ــ قرار دارد. به‌عبارت دیگر علاوه بر دو قید تساوی سازگاری، در حالت اول ۴ قید از قیود اندازه بر روی سطح مقطع و ۶ قید تنش، و در حالت دوم ۳ قید اندازه و ۷ قید تنش فعال‌اند. این حالت ازجمله حالاتی است که حتی روش ساده‌یی همچون FSD نیز پاسخ‌گو خواهد بود.[۱۲و۱۹]



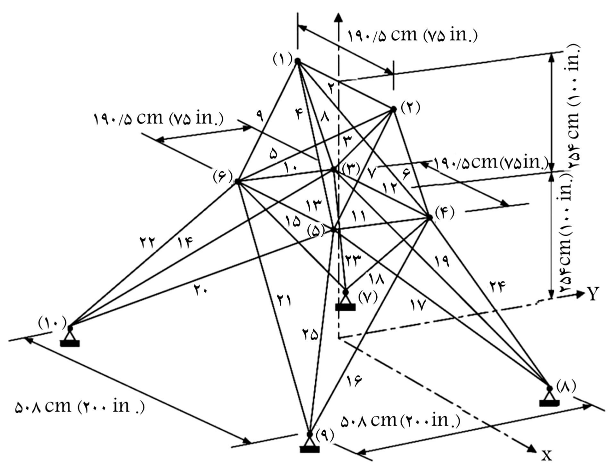
شکل ۲. نمودار تغییرات وزن برحسب تعداد چرخه‌ی بهینه‌سازی برای خرپای ۱۰ عضوی (حالت اول).

جدول ۱. خلاصه‌ی نتایج برای مثال خرپای ۱۰ عضوی.

شماره‌ی عضو	سطح مقطع اعضا در نقطه‌ی بهینه (cm^۲)			
	حالت اول		حالت دوم	
	مرجع[۲]	روش این تحقیق	مرجع[۲]	روش این تحقیق
۱	۵۱/۲۱۲	۵۱/۲۱۲	۳۸/۳۷۶۵	۳۸/۳۷۵۲
۲	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵۲	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵۲
۳	۵۲/۰۱۲	۵۲/۰۱۲	۶۴/۸۵۵۵	۶۴/۸۵۶۸
۴	۲۵/۴۰۶۴	۲۵/۴۰۵۷	۲۵/۴۷۲۵	۲۵/۴۷۱۲
۵	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵۲	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵۲
۶	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵۲	۱۳/۲۳۹۵	۱۳/۲۴۰۸
۷	۳۷/۰۶۴	۳۷/۰۶۲۵	۵۵/۲۲۲۷	۵۵/۲۲۴
۸	۳۵/۹۲۸	۳۵/۹۲۸۹	۱۷/۷۶۸۸	۱۷/۷۷۳
۹	۳۵/۹۲۸	۳۵/۹۲۸۹	۳۶/۰۲۱	۳۶/۰۲۱۵
۱۰	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵۲	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵۲
وزن (N)	۷۰۸۶/۹	۷۰۸۶/۹	۷۴۰۴/۰۷	۷۴۰۴/۰۷

مثال دوم: خرپای فضایی ۲۵ عضوی

در شکل ۳ سازه خرپای فضایی ۲۵ عضوی[۲] نشان داده شده است. ماده‌ی به کار گرفته شده آلومینیوم با ضریب کشسانی (۱۰^۷ psi) ۶۸۹۴۷ MPa و جرم وزنی (۰/۱ pci) ۲۷۶۸ kg/m^۳ است. در حالت کلی سازه تحت ۶ نوع بارگذاری مستقل قرار دارد.[۹] اما با توجه به تقارن بارگذاری سطح مقطع اعضا به هفت گروه تقسیم شده (جدول ۲) و بنابراین (مطابق جدول ۳) بارگذاری به دو حالت کاهش می‌یابد.[۶] در شکل ۴ روند تغییرات وزن برحسب تکرار بهینه‌سازی نشان داده شده است؛ اندازه‌ی سطح مقطع عضوها برای نقطه‌ی آغازین همگی برابر با (۲۵ in^۲) ۱۶۱ cm^۲ در نظر گرفته شده است. مقاومت حد کششی و فشاری برابر با (۴۰ ksi) ۲۷۵/۸ MPa± است. سطح مقطع اعضا باید بزرگ‌تر از (۰/۱ in^۲) ۰/۶۴۵۱ cm^۲ باشد. نتایج به دست آمده برای این مثال در جدول ۲ ارائه شده است.



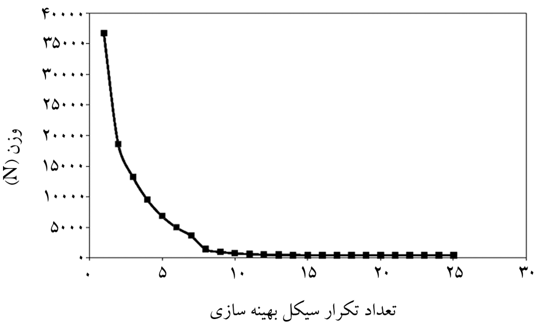
شکل ۳. خرپای ۲۵ عضوی.[۲]

جدول ۲. خلاصه‌ی نتایج برای مثال خرپای ۲۵ عضوی.

شماره‌ی گروه	اعضای گروه	سطح مقطع اعضا در نقطه بهینه (cm^۲)	
		مرجع[۶]	روش این تحقیق
۱	$A_۱$	۰/۶۴۵۲	۰/۶۴۵۲
۲	$A_۲ : A_۵$	۲/۴۲۲۷	۰/۴۲۷۹
۳	$A_۶ : A_۹$	۳/۰۵۴۴	۳/۰۳۷۶
۴	$A_{۱۰} : A_{۱۳}$	۰/۶۴۵۲	۰/۶۴۵۲
۵	$A_{۱۴} : A_{۱۷}$	۰/۶۴۵۲	۰/۶۴۵۲
۶	$A_{۱۸} : A_{۲۱}$	۱/۷۹۷۵	۱/۷۸۸۵
۷	$A_{۲۲} : A_{۲۵}$	۲/۴۴۹۸	۲/۴۵۲۴
وزن N		۴۰۵/۹۹	۴۰۵/۸

جدول ۳. حالات بارگذاری در خرپای ۲۵ عضوی.[۲]

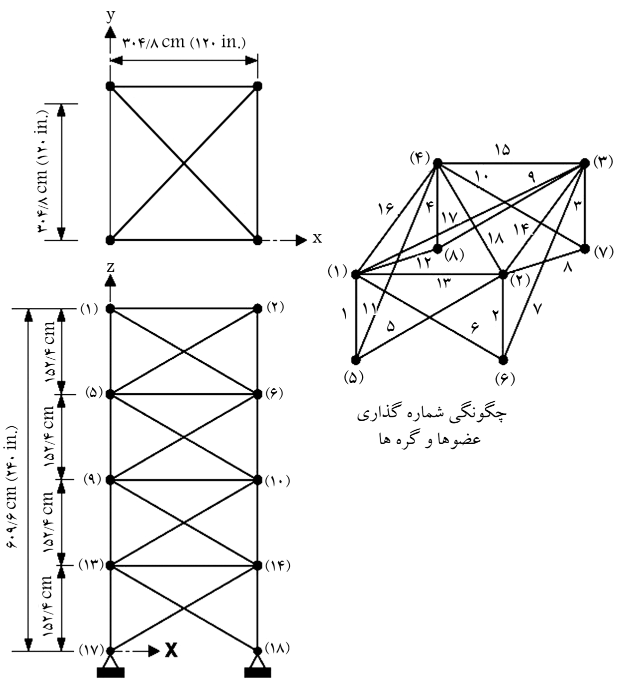
شماره‌ی گره	بارگذاری ۱ (kN)			بارگذاری ۲ (kN)		
	P_X	P_Y	P_Z	P_X	P_Y	P_Z
۱	۴/۴۴۸	۴۴/۴۸	−۲۲/۲۴	۰	۸۸/۹۶	−۲۲/۲۴
۲	۰	۴۴/۴۸	−۲۲/۲۴	۰	−۸۸/۹۶	−۲۲/۲۴
۳	۲/۲۲۴	۰	۰	۰	۰	۰
۶	۲/۲۲۴	۰	۰	۰	۰	۰



شکل ۴. نمودار تغییرات وزن برحسب تعداد چرخه‌ی بهینه‌سازی برای خرپای ۲۵ عضوی.

مثال سوم: خرپای فضایی ۷۲ عضوی

در شکل ۵ هندسه‌ی سازه خرپای فضایی ۷۲ عضوی و شماره‌گذاری گره‌ها و اعضای آن نشان داده شده است.[۲] ماده‌ی به‌کارگرفته شده دارای ضریب کشسانی (۱۰^۷ psi) ۶۸۹۴۷ MPa و جرم وزنی (۰٫۱ pci) ۲۷۶۸ kg/m^3 است. حد بالا و پایین تنش تمام اعضا برابر است با (۲۵ ksi) ۱۷۲ MPa ± و کوچک‌ترین مقدار برای روی سطح مقطع اعضا برابر (۰٫۱ in^2) ۰٫۶۴۵۱ cm^2 است. سازه در حالت اصلی تحت ۵ حالت بارگذاری مستقل قرار دارد[۹] اما به‌دلیل تقارن در بارگذاری، با استفاده از قید ارتباط بین متغیرها، سطح مقطع اعضا سازه را می‌توان به یکدیگر مرتبط کرد، به‌طوری که به شانزده گروه تقسیم شود (جدول ۴) و درنتیجه می‌توان بارگذاری را به دو حالت کاهش داد[۲] (جدول ۵). برای آغاز بهینه‌سازی سطح مقطع تمامی اعضا برابرند و مقدار (۲۵ in^2) ۱۶۱ cm^2 برای آن در نظر گرفته شده است. در شکل ۶ روند کاهش وزن برحسب تعداد مراحل بهینه‌سازی نشان داده شده است. نتایج به دست آمده برای این مثال در جدول ۴ ارائه شده و با سایر مراجع مقایسه شده است.



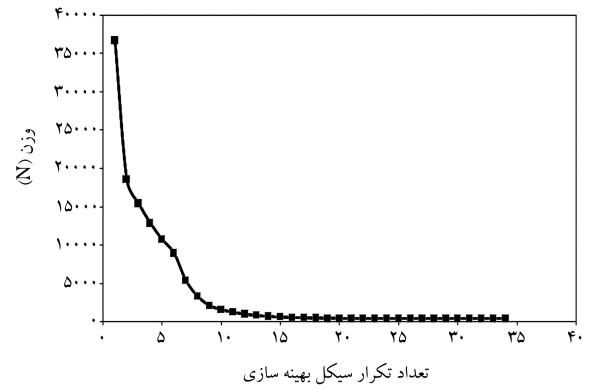
شکل ۵. خرپای فضایی ۷۲ عضوی.[۲]

جدول ۴. خلاصه‌ی نتایج برای مثال خرپای ۷۲عضوی، ۱۶ سطح مقطع مستقل.

شماره‌ی گروه	اعضای گروه	سطح مقطع اعضا در نقطه‌ی بهینه (cm^2) مرجع[۶]	روش این تحقیق
۱	$A_1 : A_4$	۱٫۲۱۸۱	۱٫۲۱۸۱
۲	$A_5 : A_{12}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۳	$A_{13} : A_{16}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۴	$A_{17} : A_{18}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۵	$A_{19} : A_{22}$	۱٫۲۲۸۵	۱٫۲۲۸۵
۶	$A_{23} : A_{30}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۷	$A_{31} : A_{34}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۸	$A_{35} : A_{36}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۹	$A_{37} : A_{40}$	۱٫۲۸۲۰	۱٫۲۸۲۰
۱۰	$A_{41} : A_{48}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۱۱	$A_{49} : A_{52}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۱۲	$A_{53} : A_{54}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۱۳	$A_{55} : A_{58}$	۱٫۸۹۷۵	۱٫۸۹۷۵
۱۴	$A_{59} : A_{66}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۱۵	$A_{67} : A_{70}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
۱۶	$A_{71} : A_{72}$	۰٫۶۴۵۲	۰٫۶۴۵۲
وزن N		۴۲۹٫۸	۴۲۹٫۸

جدول ۵. بارگذاری خرپای ۷۲ عضوی.[۲]

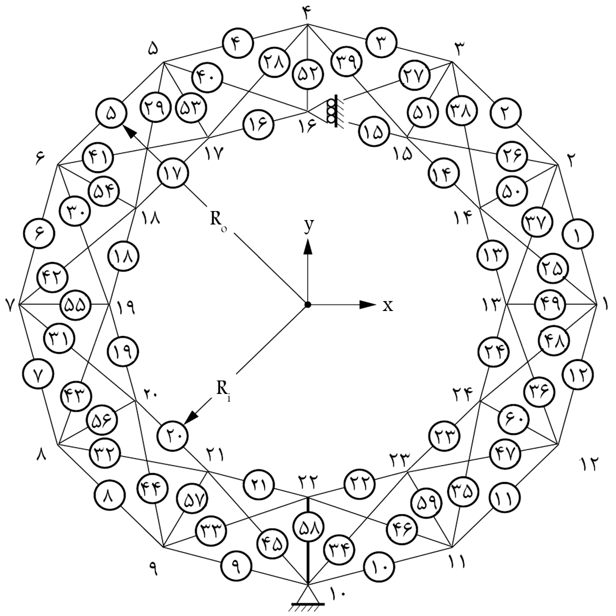
شماره‌ی گره	بارگذاری ۱ (kN) P_X	P_Y	P_Z	بارگذاری ۲ (kN) P_X	P_Y	P_Z
۱	۲۲٫۲۴	۲۲٫۲۴	−۲۲٫۲۴	۰	۲۲٫۲۴	−۲۲٫۲۴
۲	۰	۰	۰	۰	۰	−۲۲٫۲۴
۳	۰	۰	۰	۰	۰	−۲۲٫۲۴
۴	۰	۰	۰	۰	۰	−۲۲٫۲۴



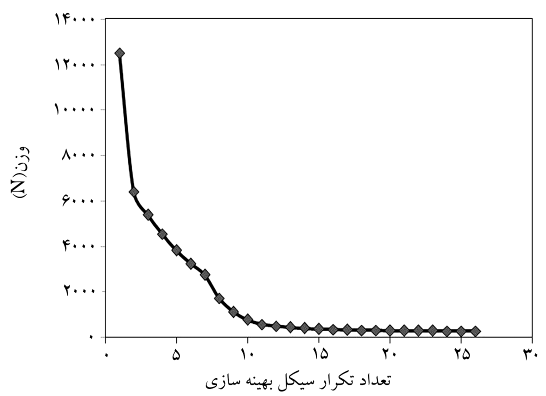
شکل ۶. نمودار تغییرات وزن برحسب تعداد چرخه‌ی بهینه‌سازی برای خرپای ۷۲ عضوی.

مثال چهارم: حلقه خرپایی ۶۰ عضوی

یک حلقه صفحه‌یی که توسط المان‌های خرپا مدل شده است در شکل ۷ نشان داده شده است،[۱۱] که نسبت به مثال‌های قبلی از تعداد متغیر طراحی بزرگ‌تری برخوردار است و از مثال‌های نسبتاً بزرگ به حساب می‌آید. خواص ماده‌ی به کار گرفته شده عبارت است از: ضریب کشسانی برابر با ($10^{۷}$ psi) ۶۸۹۴۷ MPa و جرم وزنی معادل (۰٫۱ pci) ۲۷۶۸ $kg/m^{۳}$. حد بالا و پایین تنش تمام اعضا برابر است با (۱۰ ksi) ۶۸٫۹۴ MPa± و کوچک‌ترین مقدار روی سطح مقطع اعضا برابر ($۰٫۵ in^{۲}$) ۳٫۲۲۵۸ $cm^{۲}$ است. شعاع داخلی حلقه برابر با (۹۰ .in) ۲۲۸٫۶ cm و شعاع خارجی برابر با (۱۰۰ .in) ۲۵۴ cm± است. سطح مقطع اعضا سازه به یکدیگر مرتبط شده‌اند به‌طوری که به ۲۵ گروه مستقل تقسیم می‌شوند (جدول ۶). سازه تحت سه نوع بارگذاری مستقل قرار می‌گیرد (جدول ۷) و برای آغاز بهینه‌سازی سطح مقطع تمامی اعضا برابرند و مقدار ($۵۰ in^{۲}$) ۳۲۲ $cm^{۲}$ برای آن در نظرگرفته شده است. در شکل ۸ روند کاهش وزن برحسب تعداد مراحل



شکل ۷. خرپای ۶۰ عضوی.[۱۱]



شکل ۸. نمودار تغییرات وزن برحسب تعداد چرخه‌ی بهینه‌سازی برای خرپای ۶۰ عضوی.

جدول ۶. خلاصه‌ی نتایج برای مثال خرپای ۶۰ عضوی.

شماره‌ی گروه	اعضای گروه	سطح مقطع اعضا در نقطه‌ی بهینه ($in^{۲}$)	
		مرجع[۱۱]	روش این تحقیق
۱	A_1 , A_{13}		۹٫۱۷۲۱
۲	A_2 , A_{14}		۸٫۷۰۴۴
۳	A_3 , A_{15}		۳٫۵۵۶۹
۴	A_4 , A_{16}		۱۲٫۴۸۶۶
۵	A_5 , A_{17}		۱۲٫۴۰۷۸
۶	A_6 , A_{18}		۷٫۱۷۴۶
۷	A_7 , A_{19}		۸٫۸۳۰۲
۸	A_8 , A_{20}		۹٫۱۵۵۴
۹	A_9 , A_{21}		۳٫۲۲۶
۱۰	A_{10} , A_{22}		۱۳٫۵۴۲۴
۱۱	A_{11} , A_{23}		۸٫۰۶۰۵
۱۲	A_{12} , A_{24}		۶٫۵۶۴۲
۱۳	A_{25} , A_{37}		۳٫۲۲۶
۱۴	A_{26} , A_{38}		۳٫۲۲۶
۱۵	A_{27} , A_{39}		۶٫۰۵۷۷
۱۶	A_{28} , A_{40}		۷٫۲۸۶۹
۱۷	A_{29} , A_{41}		۷٫۳۷۱۴
۱۸	A_{30} , A_{42}		۵٫۹۴۴۲
۱۹	A_{31} , A_{43}		۶٫۹۰۶۹
۲۰	A_{32} , A_{44}		۳٫۲۲۶
۲۱	A_{33} , A_{45}		۶٫۵۶۰۴
۲۲	A_{34} , A_{46}		۸٫۰۵۶
۲۳	A_{35} , A_{47}		۷٫۶۵۰۷
۲۴	A_{36} , A_{48}		۸٫۰۵۶
۲۵	$A_{49} \dots A_{60}$		۷٫۶۵۰۷
وزن (N)		*۱۲۷۷٫۶	۱۲۷۷٫۲

* در نتایج ارائه شده در مرجع[۱۱] تنها وزن بهینه ارائه شده است.

جدول ۷. بارگذاری خرپای ۶۰ عضوی.[۱۱]

حالت بارگذاری	شماره‌ی گره	مؤلفه‌های بارگذاری (kN)	
		P_X	P_Y
۱	۱	−۴۴٫۵۴	۰
	۷	۴۰٫۰۸	۰
۲	۱۵	−۳۵٫۶۳	۱۳٫۳۶
	۱۸	−۳۵٫۶۳	۱۳٫۳۶
۳	۲۲	−۸۹٫۰۷	۴۴٫۵۴

جدول ۸. خلاصه‌ی نتایج برای مثال خرپای ۲۰۰ عضوی.

شماره‌ی گروه	اعضای گروه	سطح مقطع اعضا در نقطه‌ی بهینه (in^2)		شماره‌ی گروه	اعضای گروه	سطح مقطع اعضا در نقطه‌ی بهینه (in^2)	
		مرجع[6]	روش این تحقیق			مرجع[6]	روش این تحقیق
۱	۱،۴	۱٫۶۶۷۷۳۹	۱٫۵۰۰۶۴۲	۴۹	۱۰۲،۱۱۴	۲۸٫۱۶۷۶۹	۰٫۶۴۵۱۶
۲	۲،۳	۱٫۷۴۱۹۳۲	۱٫۶۰۱۲۸۷	۵۰	۱۰۳،۱۱۳	۱٫۴۳۹۹۹۷	۰٫۶۴۵۱۶
۳	۵،۱۷	۴٫۶۰۵۱۵۲	۴٫۸۰۸۳۷۷	۵۱	۱۰۴،۱۱۲	۸٫۴۱۸۶۹۳	۱۲٫۴۹۲۲۳
۴	۶،۱۶	۲٫۶۰۸۳۸۲	۲٫۴۸۴۵۱۱	۵۲	۱۰۵،۱۱۱	۴۷٫۳۰۶۳۶	۳٫۰۷۹۹۹۴
۵	۷،۱۵	۰٫۶۶۳۸۷	۰٫۶۴۵۱۶	۵۳	۱۰۶،۱۱۰	۱٫۶۶۰۶۴۲	۱٫۷۰۲۵۷۷
۶	۸،۱۴	۶٫۷۹۶۱۱۵	۶٫۷۷۱۵۹۹	۵۴	۱۰۷،۱۰۹	۱٫۴۵۱۶۱	۱۳٫۴۲۳۲
۷	۹،۱۳	۰٫۶۴۵۱۶	۰٫۶۴۵۱۶	۵۵	۱۰۸	۳۶٫۷۲۸۳۱	۵٫۸۳۲۸۹۲
۸	۱۰،۱۲	۰٫۸۲۶۴۵	۰٫۶۴۵۱۶	۵۶	۱۱۵،۱۱۸	۷٫۸۲۴۵	۰٫۶۴۵۱۶
۹	۱۱	۶٫۱۷۴۰۷	۶٫۰۴۰۶۳۳	۵۷	۱۱۶،۱۱۷	۳٫۷۵۸۰۵۷	۲۲٫۴۷۷۳۷
۱۰	۱۸،۲۵،۵۶،۶۳،۹۴،۱۰۱، ۱۳۲،۱۳۹،۱۷۰،۱۷۷	۰٫۶۴۵۱۶	۰٫۶۴۵۱۶	۵۸	۱۱۹،۱۳۱	۲۴٫۷۲۱۲۴	۰٫۶۴۵۱۶
۱۱	۱۹،۲۰،۲۳،۲۴	۰٫۷۳۸۰۶۳	۰٫۶۴۵۱۶	۵۹	۱۲۰،۱۳۰	۱۳٫۸۸۱۹۱	۲٫۰۰۹۰۲۸
۱۲	۲۱،۲۲	۰٫۷۸۱۹۳۴	۰٫۶۴۵۱۶	۶۰	۱۲۱،۱۲۹	۱٫۲۹۸۰۶۲	۱۷٫۴۱۲۲۲
۱۳	۲۶،۳۸	۱۱٫۰۷۶۷۵	۱۱٫۲۵۹۹۸	۶۱	۱۲۲،۱۲۸	۵۹٫۰۴۵۰۴	۰٫۶۴۵۱۶
۱۴	۲۷،۳۷	۱٫۰۴۱۲۸۸	۰٫۸۱۶۷۷۳	۶۲	۱۲۳،۱۲۷	۰٫۹۴۷۰۹۵	۰٫۶۴۵۱۶
۱۵	۲۸،۳۶	۳٫۳۲۸۳۸	۳٫۲۵۰۳۱۶	۶۳	۱۲۴،۱۲۶	۶٫۵۰۰۶۳۲	۱۹٫۸۷۴۸
۱۶	۲۹،۳۵	۱۳٫۲۷۱۵۹	۱۳٫۲۲۳۲	۶۴	۱۲۵	۳۷٫۷۱۹۹۲	۰٫۹۹۸۷۰۸
۱۷	۳۰،۳۴	۰٫۷۶۶۴۵	۰٫۶۴۵۱۶	۶۵	۱۳۳،۱۳۴،۱۳۷،۱۳۸	۰٫۶۴۵۱۶	۰٫۶۴۵۱۶
۱۸	۳۱،۳۳	۰٫۶۴۵۱۶	۰٫۶۴۵۱۶	۶۶	۱۳۵،۱۳۶	۱٫۰۸۷۷۴	۰٫۶۴۵۱۶
۱۹	۳۲	۱۲٫۴۷۴۱۷	۱۲٫۴۹۲۲۳	۶۷	۱۴۰،۱۵۲	۳۱٫۰۶۳۸۱	۲۸٫۹۹۹۹۴
۲۰	۳۹،۴۲	۲٫۵۰۸۳۸۲	۳٫۰۷۹۹۹۴	۶۸	۱۴۱،۱۵۱	۳٫۷۳۴۱۸۶	۱٫۲۶۸۳۸۵
۲۱	۴۰،۴۱	۰٫۹۰۴۵۱۴	۱٫۷۰۲۵۷۷	۶۹	۱۴۲،۱۵۰	۱۶٫۴۵۹۳۲	۱۵٫۱۹۲۸۷
۲۲	۴۳،۵۵	۱۳٫۷۶۶۴۲	۱۳٫۴۲۳۲	۷۰	۱۴۳،۱۴۹	۶۵٫۳۹۹۸۷	۷۱٫۰۶۵۰۲
۲۳	۴۴،۵۴	۵٫۲۳۱۶۰۲	۵٫۸۳۲۸۹۲	۷۱	۱۴۴،۱۴۸	۶٫۳۷۶۷۶۱	۵٫۲۵۹۹۸۹
۲۴	۴۵،۵۳	۰٫۶۶۰۶۴۴	۰٫۶۴۵۱۶	۷۲	۱۴۵،۱۴۷	۱٫۷۴۹۶۷۴	۰٫۶۹۸۰۶۳
۲۵	۴۶،۵۲	۲۲٫۷۳۸۰۲	۲۲٫۴۷۷۳۷	۷۳	۱۴۶	۴۴٫۲۱۱۵۲	۴۲٫۴۶۷۰۱
۲۶	۴۷،۵۱	۰٫۶۶۲۵۷۹	۰٫۶۴۵۱۶	۷۴	۱۵۳،۱۵۶	۰٫۸۵۹۳۵۳	۹٫۲۷۱۵۹۴
۲۷	۴۸،۵۰	۱٫۳۸۷۰۹۴	۲٫۰۰۹۰۲۸	۷۵	۱۵۴،۱۵۵	۱٫۰۱۸۰۶۲	۲٫۷۹۷۴۱۴
۲۸	۴۹	۱۸٫۱۸۴۴۸	۱۷٫۴۱۲۲۲	۷۶	۱۵۷،۱۶۹	۳۳٫۴۰۸۹۷	۲۳٫۸۲۹۶۳
۲۹	۵۷،۵۸،۶۱،۶۲	۰٫۷۰۶۴۵	۰٫۶۴۵۱۶	۷۷	۱۵۸،۱۶۸	۴٫۴۸۵۷۹۷	۱۵٫۹۲۱۹
۳۰	۵۹،۶۰	۰٫۸۳۰۹۶۶	۰٫۶۴۵۱۶	۷۸	۱۵۹،۱۶۷	۹٫۹۱۹۳۳۵	۰٫۶۴۵۱۶
۳۱	۶۴،۷۶	۲۰٫۲۱۹۳۱	۱۹٫۸۷۴۸	۷۹	۱۶۰،۱۶۶	۹۷٫۹۱۵۹۳	۹۲٫۵۶۰۴۶
۳۲	۶۵،۷۵	۱٫۱۳۰۹۶۵	۰٫۹۹۸۷۰۸	۸۰	۱۶۱،۱۶۵	۲٫۷۴۴۵۱۱	۴٫۵۷۷۴۱
۳۳	۶۶،۷۴	۶٫۰۵۶۱۱۷	۱٫۵۰۰۶۴۲	۸۱	۱۶۲،۱۶۴	۰٫۹۲۴۵۱۴	۳٫۱۴۷۷۳۶
۳۴	۶۷،۷۳	۲۹٫۱۸۷۰۴	۱٫۶۰۱۲۸۷	۸۲	۱۶۳	۵۱٫۰۴۶۳۵	۴۶٫۹۱۷۹۷
۳۵	۶۸،۷۲	۱٫۳۷۷۴۱۷	۴٫۸۰۸۳۷۷	۸۳	۱۷۱،۱۷۲،۱۷۵،۱۷۶	۳٫۸۰۱۲۸۳	۰٫۶۴۵۱۶
۳۶	۶۹،۷۱	۰٫۶۵۲۲۵۷	۲٫۴۸۴۵۱۱	۸۴	۱۷۳،۱۷۴	۲٫۵۳۵۴۷۹	۰٫۷۱۵۴۸۲
۳۷	۷۰	۲۴٫۶۳۶۰۸	۰٫۶۴۵۱۶	۸۵	۱۷۸،۱۹۰	۳۹٫۸۹۰۸۹	۳۰٫۲۸۱۲۳
۳۸	۷۷،۸۰	۳٫۶۹۱۶۰۶	۶٫۷۷۱۵۹۹	۸۶	۱۷۹،۱۸۹	۱۲٫۴۵۳۵۲	۱٫۱۹۸۷۰۷
۳۹	۷۸،۷۹	۰٫۹۳۷۴۱۷	۰٫۶۴۵۱۶	۸۷	۱۸۰،۱۸۸	۰٫۷۵۸۰۶۳	۱۶٫۷۳۴۱۶
۴۰	۸۱،۹۳	۲۱٫۷۲۳۸۳	۰٫۶۴۵۱۶	۸۸	۱۸۱،۱۸۷	۱۰۴٫۴۷۰۸	۹۹٫۰۱۲۰۶
۴۱	۸۲،۹۲	۷٫۴۹۹۳۴	۶٫۰۴۰۶۳۳	۸۹	۱۸۲،۱۸۶	۰٫۹۰۳۸۶۹	۳٫۲۴۵۸
۴۲	۸۳،۹۱	۰٫۸۸۱۲۸۹	۰٫۶۴۵۱۶	۹۰	۱۸۳،۱۸۵	۴٫۰۸۷۰۸۹	۴٫۸۷۲۲۴۸

ادامه جدول ۸.

شماره‌ی گروه	اعضای گروه	سطح مقطع اعضا در نقطه‌ی بهینه (in^2)		شماره‌ی گروه	اعضای گروه	سطح مقطع اعضا در نقطه‌ی بهینه (in^2)	
		مرجع[۶]	روش این تحقیق			مرجع[۶]	روش این تحقیق
۴۳	۹۰،۸۴	۴۰٫۸۵۴۷۶	۰٫۶۴۵۱۶	۹۱	۱۸۴	۵۷٫۴۵۴۰۸	۵۳٫۳۶۹۵۷
۴۴	۸۹،۸۵	۱٫۱۶۷۷۴	۰٫۶۴۵۱۶	۹۲	۱۹۴،۱۹۱	۱۷٫۷۳۰۹۳	۲۳٫۵۹۱۵۷
۴۵	۸۸،۸۶	۱٫۵۴۵۱۵۸	۱۱٫۲۵۹۹۸	۹۳	۱۹۳،۱۹۲	۱۷٫۷۴۸۳۵	۱۵٫۷۱۶۱
۴۶	۸۷	۳۰٫۲۷۶۷۱	۰٫۸۱۶۷۷۳	۹۴	۲۰۰،۱۹۵	۵۰٫۹۶۶۹۹	۴۳٫۴۰۸۹۵
۴۷	۱۰۰،۹۹،۹۶،۹۵	۰٫۸۸۹۶۷۶	۳٫۲۵۰۳۱۶	۹۵	۱۹۹،۱۹۶	۱۱۰٫۵۸۰۴	۱۱۸٫۹۷۶۵
۴۸	۹۸،۹۷	۰٫۸۵۰۹۶۶	۱۳٫۲۲۳۲	۹۶	۱۹۸،۱۹۷	۴۸٫۳۷۹۲۶	۴۶٫۱۵۷۹۷
					وزن (N)	۹۶۷۹۲*	۹۸۴۶۵٫۲

* با سطح مقطع‌های ارائه شده در مرجع[۶] بعضی از قیود اندکی نقض می‌شوند و وزن برابر با ۹۸۴۱۱٫۸ N می‌باشد.

بهینه‌سازی نشان داده شده است. نتایج به دست آمده برای این مثال در جدول ۶ ارائه شده و با سایر مراجع مقایسه شده است.

مثال پنجم: خرپای صفحه‌یی ۲۰۰ عضوی

در شکل ۹ یک خرپای ۲۰۰ عضوی نشان داده شده است.[۶] درجه‌ی نامعین استاتیکی در این سازه برابر ۵۰ است و در مقایسه با مثال‌های پیشین، مثالی بزرگ با تعداد متغیرهای طراحی بالاتر و تعداد قیود بسیار بالاتر است. اطلاعات مربوط به این مثال عبارت است از: ضریب مدول کشسانی برابر با (۳×۱۰^۷ psi) MPa ۲۰۶۸۴۲، وزن حجمی برابر با (۰٫۲۸۳ pci) kg/m^3 ۷۸۳۳. کم‌ترین مقدار مجاز برای سطح مقطع اعضا ($۰٫۱\ in^2$) $۰٫۶۴۵۱\ cm^2$ است. مقدار تنش تمام اعضا برابر است با (۱۰ ksi) MPa ۶۸٫۹۴± و سطح مقطع اعضا سازه به یکدیگر مرتبط شده‌اند به‌طوری که به ۹۶ گروه مستقل تقسیم می‌شوند (جدول ۸). سازه تحت سه نوع بارگذاری مستقل قرار دارد:

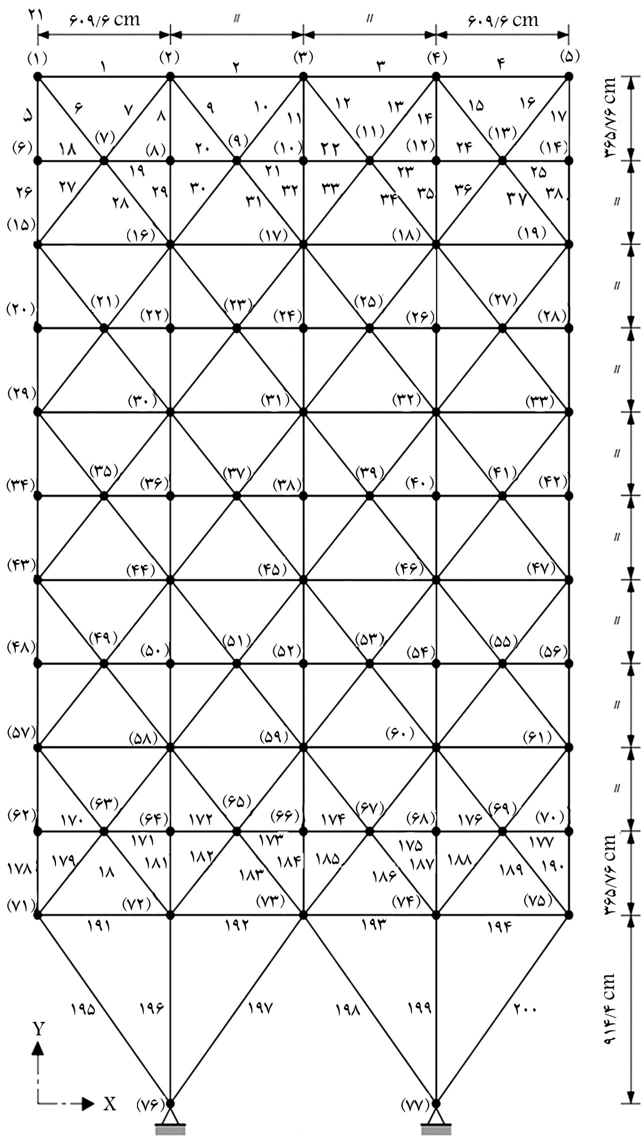
۱. نیرویی برابر با ۴٫۴۵ kN (۱ kips) در جهت مثبت x بر گره‌های ۱، ۶، ۱۵، ۲۰، ۲۹، ۳۴، ۴۳، ۴۸، ۵۷، ۶۲، ۷۱ اعمال می‌شود،

۲. نیرویی برابر با ۴۴٫۵ kN (۱۰ kips) در جهت منفی y بر گره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۲، ۲۴،...، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵ اعمال می‌شود،

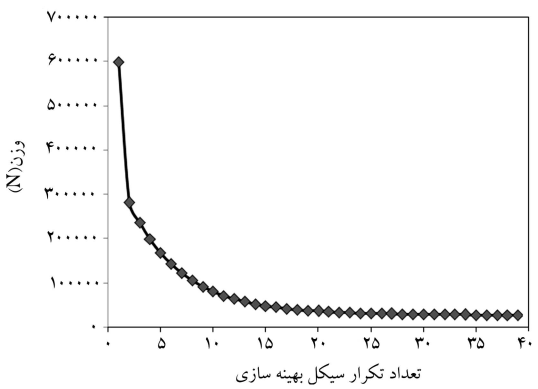
۳. بارگذاری ۱ و ۲ توأمان وارد می‌شوند.

برای آغاز بهینه‌سازی سطح مقطع تمامی اعضا برابر با هم بوده و مقدار ($۶۰\ in^2$) $۳۸۷٫۰۶\ cm^2$ برای آن در نظرگرفته شده است. در شکل ۱۰ روند کاهش وزن بر حسب تعداد مراحل بهینه‌سازی نشان داده شده است. نتایج به دست آمده برای این مثال در جدول ۸ ارائه شده و با سایر مراجع مقایسه شده است.

در این مثال تعداد قیود تنش برابر با $۱۲۰۰ = ۲۰۰ \times ۲ \times ۳$، تعداد قیود محدودیت سطح مقطع ۲۰۰، و تعداد قیود تساوی سازگاری برابر $۱۵۰ = ۵۰ \times ۳$ است. چنان که بیان شد تعداد قیود مورد بررسی در هر چرخه بسیار زیاد است. با به‌کارگیری روش کره‌های محاطی تنها تعداد کمی از این قیود در هر چرخه لحاظ می‌شود که این امر به‌شدت از حجم محاسبات می‌کاهد، به‌ویژه وقتی تعداد قیود زیاد



شکل ۹. خرپای ۲۰۰ عضوی.[۶]



شکل ۱۰. نمودار تغییرات وزن برحسب تعداد چرخه‌ی بهینه‌سازی برای خرپای ۲۰۰ عضوی.

و تعداد متغیرهای طراحی کم باشد که عموماً در مسائل عملی پیش می‌آید. افزون بر این، در انتهای هر چرخه دیگر نیاز به تحلیل دوباره سازه برای یافتن رفتار سازه نیست چرا که نیروهای اضلاع زائد در انتهای هر چرخه در نقطه‌ی کاری به دست آمده‌اند. این موضوع نیز از حجم محاسبات ــ خصوصاً وقتی تعداد عضوهای سازه زیاد و درجه‌ی نامعینی آن پایین باشد ــ مشهود است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق روشی برای یافتن کم‌ترین مقدار وزن یک سازه خرپا تحت قیود تنش و محدودیت اندازه سطح مقطع که تحت چند حالت بارگذاری استاتیکی مختلف قرار دارد، ارائه شد. این مهم با بهره‌گیری از روش نیرو برای تحلیل سازه و ترکیب آن با روش کره‌های محاطی به‌عنوان ابزار بهینه‌سازی، که یکی از روش‌های مرتبه اول است، به دست آمد. روش کره‌های محاطی خصوصیات منحصر به فردی دارد که پیش‌تر فقط برای قیود نامساوی به کارگرفته شده است. در اینجا این روش به‌منظور در نظر گرفتن قیود تساوی تعمیم داده شده تا بتوان قیود تساوی غیرخطی سازگاری را که از فرمول‌بندی روش نیرو به دست می‌آید به آن اضافه کرد. بدین‌ترتیب امکان ترکیب این دو روش و بهره‌گیری از محسنات هر دو روش به‌طور یک‌جا فراهم می‌شود. از ترکیب این دو روش می‌توان مرحله‌ی انجام تحلیل سازه در هر چرخه‌ی بهینه‌سازی را نیز حذف کرد. همچنین رفتار سازه و به‌عبارت دیگر نیروها و به‌تبع آن تنش‌های اعضا، به‌طور تقریبی محاسبه می‌شوند؛ هرچه تعداد چرخه‌ی بیشتری انجام می‌شود دقت جواب‌ها نیز افزایش می‌یابد.

چنان که می‌دانیم در بیشتر مسائل بهینه‌سازیِ وزن سازه‌ها قیود تنشی وجود دارند که برای هر عضو و در هر بارگذاری باید در نظر گرفته شوند؛ درنتیجه قسمت اعظم قیود را تشکیل می‌دهند. در فرمول‌بندی روش نیرو با در نظر گرفتن سطح مقطع اعضای سازه و نیروهای اضلاع زائد سازه نامعین استاتیکی به‌عنوان متغیرهای طراحی، قیود تنش خطی خواهند شد. لذا دیگر نیازی به محاسبه‌ی گرادیان این قیود نخواهد بود. از مزایای روش مرکزها می‌توان به حرکت در فضای قابل قبول و تا حد امکان به دور از قیود و حذف موقتی قیود غیرفعال و تنها در نظر گرفتن قیود فعال و نزدیک به فعال نام برد. بنابراین تعداد محاسبات لازم کاهش فراوانی می‌یابد و فقط برای قیود تساوی غیرخطی سازگاری به محاسبه‌ی گرادیان توابع نیاز خواهد بود. این امر به‌خصوص وقتی درجه‌ی نامعینی سازه پایین باشد مشهود است. با این حال، مثال‌های حل‌شده نشان می‌دهند که چنانچه درجه‌ی نامعینی سازه نیز زیاد باشد این روش کارایی لازم را دارد.

نمودارهای کاهش وزن نشان می‌دهند که در چند تکرار اولیه مقدار وزن سازه به میزان زیادی کاهش می‌یابد؛ همچنین بعد از ۲۰ الی ۲۵ تکرار کاملاً به نزدیکی‌های جواب بهینه رسیده و قیود فعال در نقطه‌ی بهینه مشخص می‌شوند که حتی می‌توان برای چرخه‌های انتهایی از دیگر روش‌های موجود بهینه‌سازی نیز بهره جست. چنان که انتظار می‌رود به‌دلیل بهره‌گیری از روش مرکزها کاهش وزن به‌طور یکنواخت بوده و نوسانی در روند کاهش وزن مشاهده نمی‌شود.

چنان که پیش‌تر بیان شد در روش ارائه‌شده به‌دلیل استفاده از روش‌های مرتبه بالاتر، در مقایسه با روش‌های مرتبه صفر، مشاهده می‌شود که این روش از سرعت و هم‌گرایی خوبی برخوردار است. همچنین می‌توان روش ارائه‌شده در اینجا برای در نظر گرفتن قیود دیگر از جمله قیود جابه‌جایی، کمانش، فرکانس و غیره را گسترش داد یا برای المان‌های درجه بالاتر نیز از آن‌ها بهره جست که البته نیاز به تحقیقات بیشتری دارد.

منابع

1. Schmit, L. “Structural design by systematic synthesis”, *In Proceedings, 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE,* New York, pp. 105-122 (1960).
2. Schmit, L.A. and Farshi, B. “Some approximation concepts for structural synthesis”, *AIAA Journal,* **12** (5), pp. 692-699 (1974).
3. Schmit, L. and Miura, H. “Approximation concepts for efficient structural synthesis”, NASA-CR-2552, Washington DC: NASA (1976).
4. Vanderplaats, G. and Moses, F. “Structural optimiza-

پانوشت

1. non-linear programming
2. optimality criteria
3. trust region
4. evolution strategy
5. harmony search
6. displacement method
7. force method
8. linking of variables
9. redundant forces
10. fully stressed design
11. penalty function
12. feasible-compatible

tion by methods of feasible directions", *Computers and Structures,* **3**, pp. 739-755 (1973).

5. Harless, R. "A method for synthesis of optimal weight", *Computers and Structures,* **12**, pp. 791-804 (1980).
6. Arora, J. and Haug, J. "Efficient optimal design of structures by generalized steepest descent programming", *International Jouranl for Numercal Nethods in Engineering,* **10**, pp. 747-766 (1976).
7. Razani, R. "The behaviour of the fully stressed design of structures and its relationship to minimum weight design", *AIAA Journal,* **3**(12), pp. 2262-2268 (1965).
8. Venkayya, V.; Khot, N. and Reddy, V. "Energy distribution in an optimum structural design", Report No. AFFDL-TR-68-156, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio. (March 1969).
9. Venkayya, V. "Design of optimum structures", *Computers and structures,* **1**, pp. 265-309 (1971).
10. Allwood, R. and Chung, Y. "Minimum-weight design of trusses by an optimality criteria method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **20**, pp. 697-713 (1984).
11. Patnaik, S.; Guptill, J. and Berke L. "Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **38**, pp. 3087-3120 (1995).
12. Fleury, C. "A unified approach to structural weight minimization", *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering,* **20**, pp. 17-38 (1979).
13. Patnaik, S.; Gendy, A.; Berke, L. and Hopkins, D. "Modified fully utilized design (MFUD) method for stress and displacement constraints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **41**, pp. 1171-1194 (1998).
14. Makris, P. and Provatidis, C. "Weight minimisation of displacement-constrained truss structures using a strain energy criterion", *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering,* **191**, pp. 2159-2177 (2002).
15. Lamberti, L. and Pappalettere, C. "Comparison of the numerical efficiency of different sequential linear programming based algorithms for structural optimization problems", *Computers and Structures,* **76**, pp. 713-728 (2000).
16. Lamberti, L. and Pappalettere, C. "Move limits definition in structural optimization with sequential linear programming. Parts I & II", *Computers and Structures,* **81**, pp. 197-238 (2003).
17. Lamberti, L. and Pappalettere, C. "Improved sequential linear programming formulation for structural weight minimization", *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering,* **193**, pp. 3493-3521 (2004).
18. Kirsch, U. "Optimal design of trusses by approximate compatibility", *Computers and Structures,* **12**, pp. 93-98 (1980).
19. Reinschmidt, K. and Russell, A. "Applications of linear programming in structural layout and optimization", *Computers and Structures,* **4**, pp. 853-869 (1974).
20. Farshi, B. and Schmit, L. "Minimum weight design of stress limited trusses", *Journal of Structural division, ASCE.,* **100**(ST1), pp. 97-107 (Jan 1974).
21. Pearson, C. "Structural design by high-speed computing machines", *Proceedings of the first conference on electronic computation, ASCE,* New York, N.Y., pp. 417-436 (1958).
22. Przemieniecki, J., *Theory of Matrix Structural Analysis,* New York, McGraw-Hill (1968).
23. Kaveh, A. and Rahami, H. "Analysis, design and optimization of structures using force method and genetic algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* **65**, pp. 1570-1584 (2006).
24. Kaveh, A. and Rahami, H. "Nonlinear analysis and optimal design of structures via force method and genetic algorithm", *Computers and Sturucturs,* **84**, pp. 770-778 (2006).
25. Rahami, H.; Kaveh, A. and Gholipour, Y. "Sizing, geometry and topology optimization of trusses via force method and genetic algorithm", *Engineering Structures,* **30**, pp. 2360-2369 (2008).
26. Kaveh, A. and Hassani, M. "Simultaneous analysis, design and optimizatioin of structures using force method and ant colony algorithms", *Asian Journal of Civil Engineering,* **10**, pp. 381-369 (2009).