

تحلیل مشخصه‌های امواج طولی هدایت‌شده‌ی فراصوت در استوانه‌های کشسان

خسرو نادران طحان (دانشیار)

کوروش حیدری شیوازی (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

علی رزاز (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی، گروه مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اهواز

«امواج هدایت‌شده‌ی فراصوت» امواجی هستند که با تابش و بازتاب روی سطوح اجسام، درون آن‌ها، در امتداد طول و سطوح آزاد جسم منتشر می‌شوند و در بازرسی‌های غیرمخرب کاربرد روزافزونی دارند. در بررسی حاضر مشخصه‌های انتشار امواج طولی در استوانه‌های کشسان توپر و توخالی بررسی شده است. با حل معادلات حرکت و محاسبه‌ی میدان تغییر مکان و استخراج کرنش‌ها و تنش‌ها در مختصات استوانه‌یی و با اعمال شرایط مرزی، معادله‌ی فرکانس به دست می‌آید. به علت وابستگی ضرایب این معادله به توابع بسل نوع اول و دوم، نمی‌توان ریشه‌های آن را به صورت یک عبارت تحلیلی پیدا کرد. به همین دلیل برای محاسبه‌ی ریشه‌های این معادله به روش حدس و خطا، برنامه‌یی رایانه‌یی نوشته شد. برای استوانه‌ی توپر و توخالی، مشخصه‌های امواج طولی — یعنی نمودارهای طیف فرکانس، سرعت فاز، سرعت گروه و نیز نمودارهای ساختار موج — ترسیم و نتایج حاصل از آن تحلیل شده‌اند.

واژگان کلیدی: امواج هدایت‌شده، امواج طولی، طیف فرکانس، نمودار براکندگی، سرعت فاز، سرعت گروه، ساختار موج.

۱. مقدمه

آن‌ها کار بازرسی را مشکل می‌کنند — زمینه‌ی تحقیقات گسترده و جالبی را فراهم کرده است.^[۹-۱۱]

اگر چه امواج سه‌گانه‌ی هدایت‌شده — امواج طولی، برشی و خمشی — به طور هم‌زمان در استوانه منتشر می‌شوند، شکل‌های برشی و طولی به علت برخورداری از تقارن محوری بیشتر مورد توجه‌اند. در بررسی حاضر فقط شکل طولی این امواج مطالعه شده است.^[۱۲] برای این کار شکل به‌خصوصی از حل معادلات حاکم در نظر گرفته شد و میدان‌های تغییر مکان، تنش‌های عمودی و برشی به دست آمد. با اعمال شرط مرزی سطوح بدون تنش برای استوانه‌ی توپر و توخالی، و استخراج دستگاه معادلات همگن برای محاسبه‌ی دامنه‌ی تغییر مکان‌ها، شرط وجود جواب‌های غیرصفر برای این دستگاه که عبارت از صفرشدن دترمینان ضرایب است، اعمال شد و به این ترتیب معادله‌ی فرکانس به دست آمد. چون ضرایب این معادله ترکیبی است از توابع بسل نوع اول و دوم، نمی‌توان پاسخ معادله را به صورت عبارت تحلیلی نوشت. بنابراین به منظور محاسبه‌ی بعضی ریشه‌های معادله‌ی فرکانس و دامنه‌ی تغییر مکان نظیر آن‌ها به روش حدس و خطا، یک برنامه‌ی رایانه‌یی نوشته شد. به کمک اطلاعات حاصله، نمودارهای طیف فرکانس، سرعت فاز و سرعت گروه، و نیز ساختار موج (نمودار تغییر مکان‌های محوری و شعاعی) برای چند مورد

در بازرسی‌های غیرمخرب، برای تعیین خواص مواد و مشخص کردن اندازه و محل نواقص در اجزای حساس سازه‌ها، از امواج فراصوت استفاده می‌شود. تحقیقات نشان می‌دهد که در این بازرسی‌ها، امواج هدایت‌شده‌ی فراصوت، یعنی امواجی که روی سطح یا در امتداد یک میله، لوله یا صفحه حرکت می‌کنند در مقایسه با امواج حجمی بسیار مؤثرترند.

اطلاعات پایه در مورد انتشار این امواج را در منابع زیادی می‌توان یافت.^[۱۳] سابقه، وضعیت فعلی و دورنمای کاربرد امواج هدایت‌شده در بازرسی‌های غیرمخرب و تجهیزاتی، که برای تولید و آشکارسازی آثار آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، توسط محققان مرور شده است.^[۱۴] پیچیدگی‌های هندسی و اشکال مختلف مقاطع اجسامی که مورد بازرسی قرار می‌گیرند و روش‌های نظری و عددی که برای تجزیه و تحلیل آثار این امواج به کار گرفته می‌شود مورد توجه و علاقه‌ی پژوهش‌گران است.^[۵-۸] استفاده‌ی گسترده از لوله‌ها و استوانه‌ها در نیروگاه‌ها، پالایشگاه‌ها، خطوط بزرگ لوله‌های نفت و گاز و نوع نواقصی که در این اجسام وجود دارد — مثل ترک‌ها، رسوب‌ها و حفره‌ها که در مواردی در دسترس نیستند یا وجود روکش روی سطوح

و فرکانس رسم شد و نتایج به دست آمده با اطلاعات موجود در منابع دیگر مقایسه شده‌اند.

۲. پیشینه‌ی نظری

معادله‌ی حرکت ذرات یک جسم کشسان همسان‌گرد برحسب بردار تغییر مکان $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ به صورت رابطه‌ی ۱ نوشته می‌شود: [۱]

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

که در آن t زمان، ρ جرم مخصوص، λ و μ ضرایب لامه‌اند. علامت‌های ∇ و ∇^2 عملگرهای مشتق‌گیری جزئی مرتبه‌ی اول و دوم‌اند که شکل آن‌ها به دستگاه مختصات بستگی دارد. اگر دامنه‌ی پاسخ معادله‌ی ۱ نامحدود باشد (مرزهای جسم تا بی‌نهایت ادامه داشته باشند)، این معادله برای یافتن تغییر مکان ذرات جسم کفایت می‌کند. اما اگر دامنه‌ی پاسخ محدود باشد (مثل حرکت ذرات یک صفحه یا میله)، آنگاه برای به دست آوردن میدان تغییر مکان، تأمین شرایط مرزی ۲ و ۳ بر روی مرزها ضروری است:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) \quad (2)$$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (3)$$

در این روابط \mathbf{x} بردار موقعیت هر نقطه از جسم، \mathbf{n} عمود وارد بر سطح جسم در هر نقطه، \mathbf{T} و \mathbf{t}_n به ترتیب تانسور و بردار تنش روی سطحی هستند که \mathbf{n} بر آن عمود شده است. اگر شرایط مرزی روی سطح S جسم ترکیبی باشد از تغییر مکان و تنش، باید شرط ۲ روی یک بخش (مثلاً S_1) و شرط ۳ روی بخش دیگر (مثلاً S_2) برقرار باشد.

۳. روش حل

یکی از روش‌های حل معادله‌ی ۱، استفاده از روش معروف به تجزیه‌ی هلمولتز است. براساس این روش فرض می‌شود بردار تغییر مکان دارای دو مؤلفه است: یکی انتقالی که برابر گرادیان یک تابع اسکالر φ است، و دیگری چرخشی که مقدار آن برابر کرل یک تابع پتانسیل برداری Ψ است، بردار تغییر مکان (\mathbf{u}) را برای آن به صورت رابطه‌ی ۴ می‌نویسند:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \Psi, \quad \nabla \cdot \Psi = 0 \quad (4)$$

با جایگزین کردن ۴ در ۱ و استفاده از روابط تحلیل برداری معادله‌ی ۵ به دست می‌آید:

$$\nabla[(\lambda + 2\mu)\nabla^2\varphi - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}] + \nabla \times [\mu\nabla^2\Psi - \rho\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}] = 0 \quad (5)$$

اگر عبارت‌های داخل کروشه‌ها صفر باشند، معادله‌ی ۵ برای تمام نقاط جسم همواره برقرار خواهد بود و بنابراین، معادلات مستقل ۶ و ۷ به دست می‌آیند:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c_L^2} \times \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{c_T^2} \times \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \quad (7)$$

که در آن: $c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ و $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. اگر معادله‌ی ۴ فاقد مؤلفه‌ی چرخش فرض شود، آنگاه:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi \quad (8)$$

و معادله‌ی ۶ به صورت معادله‌ی ۹ (معادله‌ی معروف به «معادله‌ی موج») درمی‌آید:

$$\nabla^2\mathbf{u} = \frac{1}{c_L^2} \times \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (9)$$

این معادله نشان می‌دهد که حرکت انتقالی یا طولی با سرعت c_L منتشر می‌شود. با استدلالی مشابه، اگر فرض شود که این بار بردار تغییر مکان در معادله‌ی ۴ فقط دارای بخش چرخشی است آنگاه:

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Psi, \quad \nabla \cdot \Psi = 0 \quad (10)$$

و معادله‌ی ۷ به معادله‌ی ۱۱ تبدیل می‌شود:

$$\nabla^2\mathbf{u} = \frac{1}{c_T^2} \times \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (11)$$

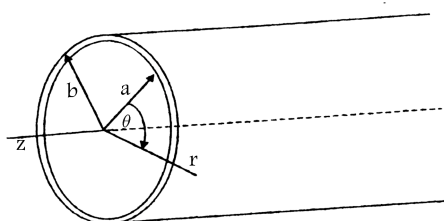
این معادله‌ی موج نیز نشان می‌دهد که حرکت چرخشی با سرعت c_T منتشر می‌شود. معادلات ۹ و ۱۱ مستقل از یکدیگرند و این موضوع نشان می‌دهد که امواج طولی و برشی بدون تأثیر متقابل در محیط‌های نامحدود منتشر می‌شوند درحالی که فقط روی مرز اجسام کشسان برای برقراری هم‌زمان شرایط مرزی با یکدیگر مرتبط یا وابسته می‌شوند.

۱.۳. انتشار امواج هدایت‌شده در استوانه‌ی کشسان

پیدا کردن فرکانس امواج قابل انتشار در استوانه‌های طولی، با استفاده از معادلات ۶ و ۷ یا ۹ و ۱۱ و تعیین شکل توابع φ و Ψ امکان‌پذیر است. برای مشخص کردن امواجی که در امتداد محور استوانه منتشر می‌شوند و ممکن است امواج طولی، برشی و یا خمشی باشند از روش دیگری برای تفکیک متغیرها استفاده می‌شود. در این روش برای استوانه‌ی بی‌طول بی‌نهایت، میدان تغییر مکان در دستگاه مختصات استوانه‌ی (شکل ۱)، که محور z آن در امتداد محور استوانه قرار دارد، چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_r &= U_r(r) \cos n\theta \cos(\omega t + kz) \\ u_\theta &= U_\theta(r) \sin n\theta \cos(\omega t + kz) \\ u_z &= U_z(r) \cos n\theta \cos(\omega t + kz) \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن u_z, u_θ, u_r مؤلفه‌های تغییر مکان در راستای شعاعی، محیطی و محوری، و U_z, U_θ, U_r دامنه‌ی این تغییر مکان‌ها، $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ مرتبه‌ی محیطی،



شکل ۱. دستگاه مختصات در استوانه‌ی توخالی به طول بی‌نهایت و شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b .

کرنش به دست می‌آیند و با جایگزینی آن‌ها در روابط هوک می‌توان تمامی مؤلفه‌های تنش را نیز محاسبه کرد. مؤلفه‌های σ_{rr} ، $\sigma_{r\theta}$ و σ_{rz} روی سطوح داخلی و بیرونی استوانه برابر صفرند. با اعمال شرایط مرزی روی سطح بیرونی و داخلی استوانه، شش معادله به دست می‌آید که برای داشتن حل غیر بدیهی، درمیان ضرایب مجهول باید صفر شود؛ یعنی:

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} = 0 \quad (13)$$

که در آن ضرایب c_{ij} عبارت‌هایی از توابع بسل نوع اول و دومند (برای استوانه‌ی توپر فقط بسل نوع اول) و در ضمیمه ۱ درج شده‌اند. می‌توان نشان داد که D قابل تجزیه به دو درمیان $D_1 = 0$ و $D_2 = 0$ است که ریشه‌های معادلات حاصل به ترتیب فرکانس امواج طولی و برشی را تشکیل می‌دهند. مؤلفه‌های این درمیان‌ها نیز در ضمیمه ۱ ارائه شده است.

برای یک میله‌ی استوانه‌ی توپر به شعاع a معادله‌ی فرکانس، معروف به معادله‌ی باگهامر، شکل ساده‌تری دارد و چنین استخراج می‌شود: [۱]

$$\frac{\alpha}{a} (\beta^2 + k^2) J_1(\alpha a) J_1(\beta a) - (\beta^2 - k^2)^2 J_0(\alpha a) J_1(\beta a) - 4 k^2 \alpha \beta J_1(\alpha a) J_0(\beta a) = 0 \quad (14)$$

که در آن $\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2$ و $\beta^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2$ و J_0 و J_1 توابع بسل نوع اول از مرتبه‌ی صفر و یک هستند.

برای هر مقدار از k و α که در معادله‌ی ۱۴ صدق کنند، مؤلفه‌های میدان تغییر مکان چنین به دست می‌آیند:

$$u_r = [-aAJ_1(\alpha r) - ikCJ_1(\beta r)]e^{i(kz - \omega t)} \quad (15)$$

$$u_z = [ikAJ_0(\alpha r) + \beta CJ_0(\beta r)]e^{i(kz - \omega t)} \quad (16)$$

که در آن‌ها $c = -\frac{2ik\alpha J_1(\alpha a)A}{(\beta^2 - k^2)J_1(\beta a)}$ و A مقدار نامشخص دامنه است که در این بررسی برابر واحد در نظر گرفته شده است. عبارت مربوط به سرعت گروه، c_g ، در ضمیمه ۲ درج شده است. برای استوانه‌ی توخالی، مؤلفه‌های تغییر مکان از روابط ۱۷ و ۱۸ به دست می‌آیند: [۲]

$$u_r = [-A_1\alpha H_1^*(\alpha r) - A_2\alpha H_1^*(\alpha r) + B_1kH_1^*(\beta r) + B_2kH_1^*(\beta r)]e^{i(kz - \omega t)} \quad (17)$$

$$u_z = [-A_1kH_0^*(\alpha r) - A_2kH_0^*(\alpha r) - B_1\beta H_0^*(\beta r) - B_2\beta H_0^*(\beta r)]e^{i(kz - \omega t)} \quad (18)$$

در این روابط ضرایب B_1 و B_2 و A_1 ، A_2 ، A_1 و A_2 مؤلفه‌های بردار ویژه‌ی ماتریسی هستند که معادله‌ی مشخصه‌ی آن $D_1 = 0$ است. H_0^* و H_1^* توابع هنکل نوع ۱ و ۲ مرتبه‌ی صفر و H_0^* و H_1^* توابع هنکل نوع ۱ و ۲ مرتبه‌ی یک هستند که چنین تعریف می‌شوند (J و Y توابع بسل نوع اول و دومند):

$$H_0^* = J_0 + iY_0, \quad H_1^* = J_0 - iY_0 \quad (19)$$

$$H_1^* = J_1 + iY_1, \quad H_0^* = J_1 - iY_1 \quad (20)$$

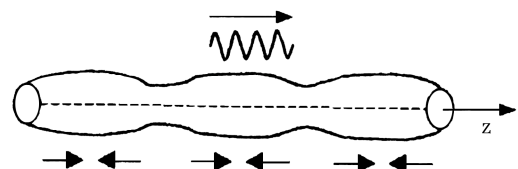
k عدد موج، $\omega = 2\pi f$ و f فرکانس است. دامنه‌ی تغییر مکان‌ها با جایگزینی روابط ۱۲ در معادله‌ی حرکت ۱ یا معادلات ۹ و ۱۱ تعیین می‌شوند. این دامنه‌ها از توابع بسل (یا توابع بسل اصلاح‌شده) تشکیل شده‌اند و به کمک آن‌ها تغییر مکان، کرنش‌ها و تنش‌ها در هر نقطه از جسم محاسبه می‌شوند. [۱]

برای مطالعه‌ی انتشار امواج در اجسام، به کمک معادله‌ی فرکانس، ابتدا نمودار تغییرات فرکانس‌های قابل انتشار برحسب عدد موج به دست می‌آید؛ این نمودار «طیف فرکانس» نامیده می‌شود. با مشخص شدن این تغییرات، تغییرات سرعت فاز و سرعت گروه -- که به ترتیب به صورت $c_p = \frac{\omega}{k}$ و $c_g = \frac{d\omega}{dk}$ تعریف می‌شوند -- به سادگی مشخص می‌شوند. نمودار تغییر مکان نقاط جسم برحسب فاصله از یک مبدأ دلخواه، ساختار موج را مشخص می‌کند.

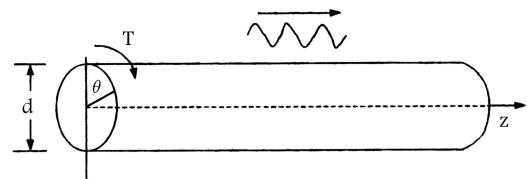
اگر موج تنشی در استوانه انتشار یابد، امواج طولی (شکل ۲)، برشی (شکل ۳) و خمشی (شکل ۴) آن را می‌توان به صورت جداگانه مطالعه کرد. [۱] چنانچه همه مودها در امتداد z منتشر شوند، امواج طولی و برشی دارای تقارن محوری‌اند ولی مود خمشی فاقد این تقارن است. در روابط ۱۲، تغییر مکان‌های نظیر $n = 0$ مودهای متقارن محوری‌اند و تغییر مکان‌های نظیر $n = 1, 2, 3, \dots$ مودهای خمشی شامل توابع سینوسی با آرگومان $n\theta$ هستند. به همین جهت از علامت‌گذاری زیر برای تفکیک مودها استفاده می‌شود: $L(0, m)$ و $T(0, m)$ به ترتیب برای مودهای طولی و برشی با تقارن محوری و $F(n, m)$ برای مود نامتقارن خمشی. $m = 1, 2, 3, \dots$ شماره‌ی مود موج است. در عمل مودهای طولی به مودهای خمشی ترجیح داده می‌شوند، زیرا این امواج تقارن محوری دارند و در تمام 360° محیط استوانه‌ی توخالی می‌توان برای بازرسی از آن‌ها استفاده کرد.

۲.۳. مودهای متقارن

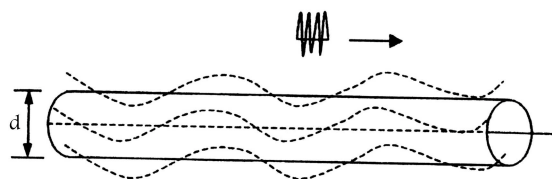
با تعیین میدان تغییر مکان و استفاده از روابط کرنش - تغییر مکان، تمامی مؤلفه‌های



شکل ۲. امواج طولی در استوانه.



شکل ۳. امواج برشی در استوانه.



شکل ۴. امواج خمشی در استوانه.

۴. نتایج

۱.۴. میله‌ی آلومینیومی توپر

برای یک میله‌ی آلومینیومی توپر به شعاع $a = 5^{\circ}$ میلی‌متر و $c_L = 6.3 \text{ Km/s}$ و $c_T = 3.1 \text{ Km/s}$ ، به کمک یک برنامه‌ی رایانه‌ی نسبت به تعیین فرکانس و میدان تغییر مکان امواج متقارن محوری قابل انتشار، به ازای هر مقدار از عدد موج k ، اقدام شد. کم‌ترین فرکانس‌ها نظیر مود اول است و فرکانس‌های بعدی به ترتیب نظیر مدهای دوم، سوم و... هستند. در شکل ۵ طیف فرکانس، در شکل ۶ الف سرعت فاز، و در شکل ۶ ب سرعت گروه برحسب حاصل ضرب فرکانس در قطر میله ترسیم شده است.

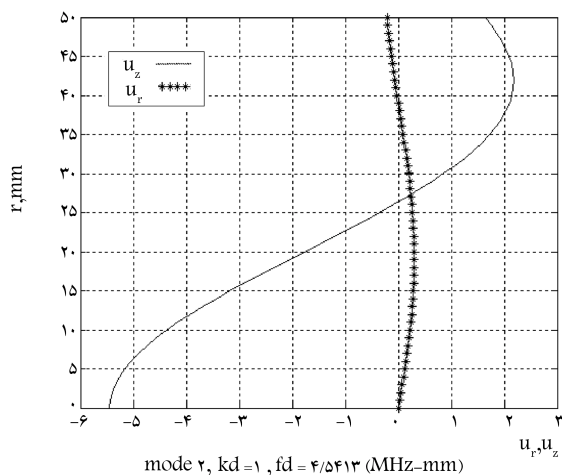
فرکانس‌های توقف (مقادیر fd در ازای $k = 0$) حاصل از بررسی حاضر به منظور مقایسه با فرکانس‌های مشابه -- که برگرفته از نمودار موجود در دیگر مراجع^[۱] هستند -- برای چند مود نمونه در جدول ۱ درج شده است. با توجه به نزدیکی مقادیر این فرکانس‌ها می‌توان گفت که نتایج حاصل از بررسی حاضر از دقت کافی برخوردارند.

در شکل ۶ الف مشاهده می‌شود که اگر fd خیلی بزرگ انتخاب شود، سرعت فاز پایین‌ترین مود به سرعت امواج سطحی ریلی در آلومینیوم هم‌گرا می‌شود در حالی که سرعت فاز مدهای مرتبه‌ی بالاتر به c_T -- یعنی به سرعت امواج برشی -- هم‌گرا می‌شوند.^[۱]

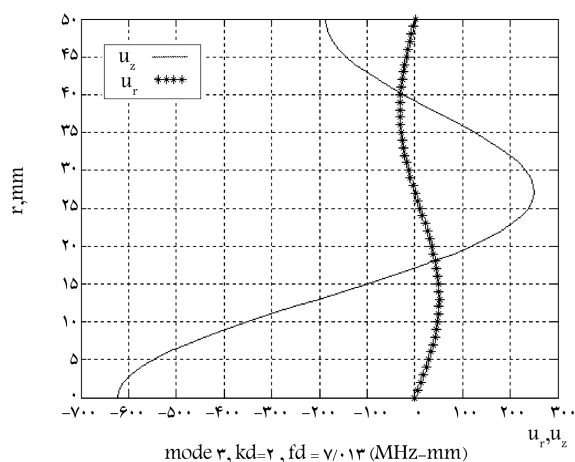
در شکل‌های ۷ تا ۱۰ ساختار موج برای چند مود و فرکانس نمونه در استوانه‌ی آلومینیومی توپر نشان داده شده است. در این شکل‌ها موقعیت نقاطی که تغییر مکان آن‌ها بیشتر است مشخص می‌شود. مثلاً در شکل ۷ که ساختار موج را برای مود

جدول ۱. مقایسه‌ی فرکانس‌های توقف fd ، mm - MHz .

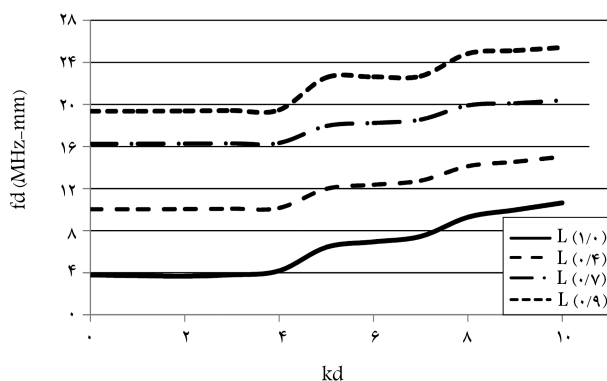
شماره مود	۱	۴	۷	۹
بررسی حاضر	۳٫۷۸	۱۰٫۰۴	۱۶٫۲۵	۱۹٫۳۶
مراجع ^[۱]	۳٫۷۷	۱۰	۱۶٫۳۹	۱۹٫۴۴



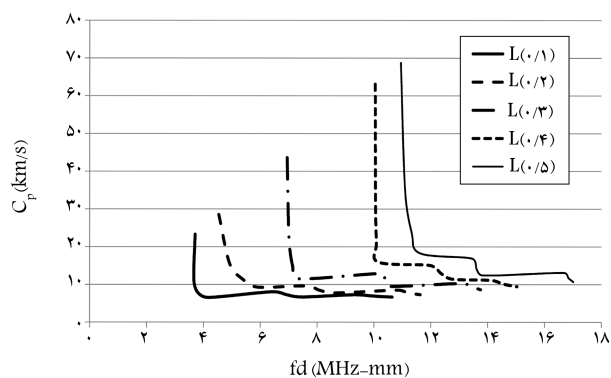
شکل ۷. ساختار موج در مود دوم.



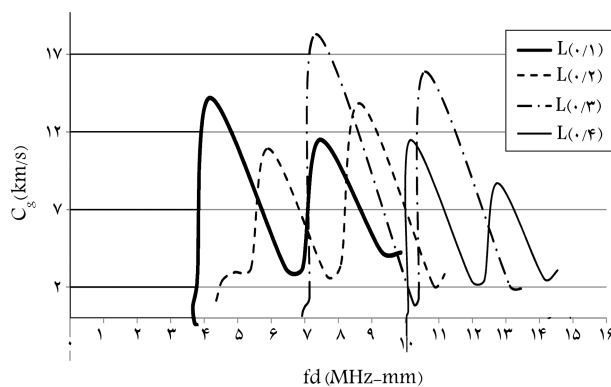
شکل ۸. ساختار موج در مود سوم.



شکل ۵. طیف فرکانس برای میله‌ی آلومینیومی.

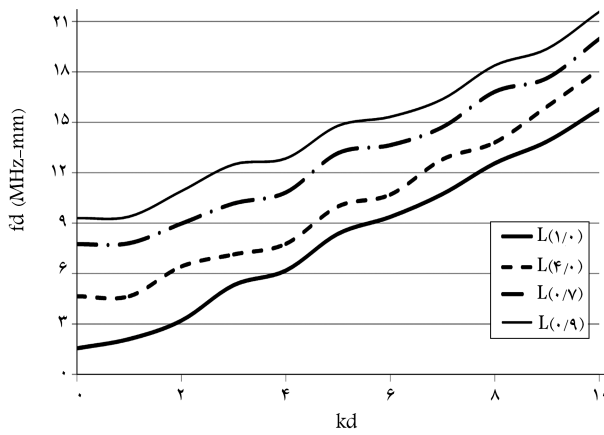


الف) سرعت فاز

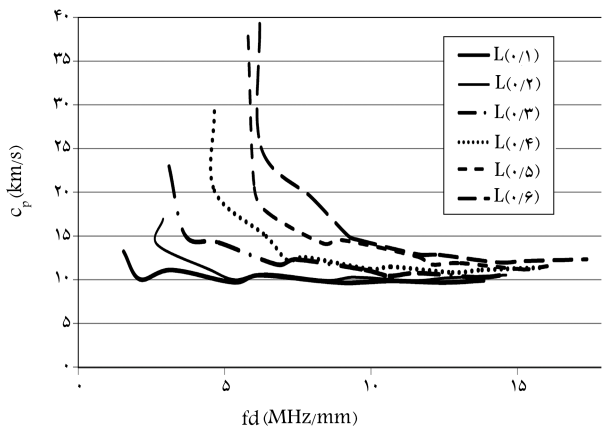


ب) سرعت گروه

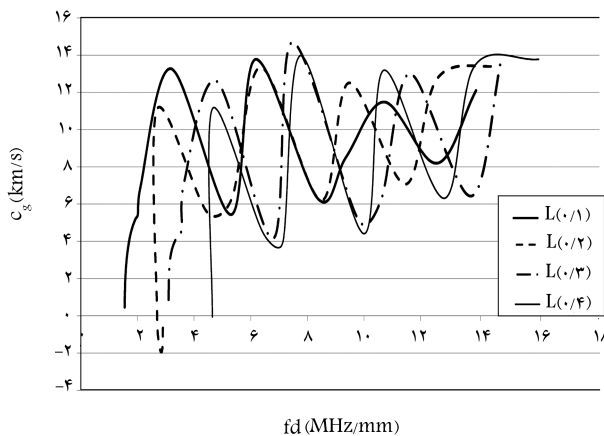
شکل ۶. نمودار پراکندگی سرعت برای میله‌ی آلومینیومی.



شکل ۱۱. طیف فرکانس برای استوانه‌ی توخالی فولادی زنگ‌نزن.

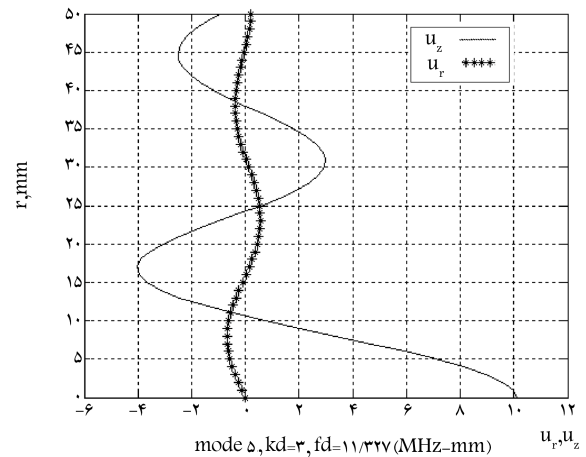


شکل ۱۲. نمودار پراکندگی سرعت فاز برای لوله‌ی فولادی زنگ‌نزن.

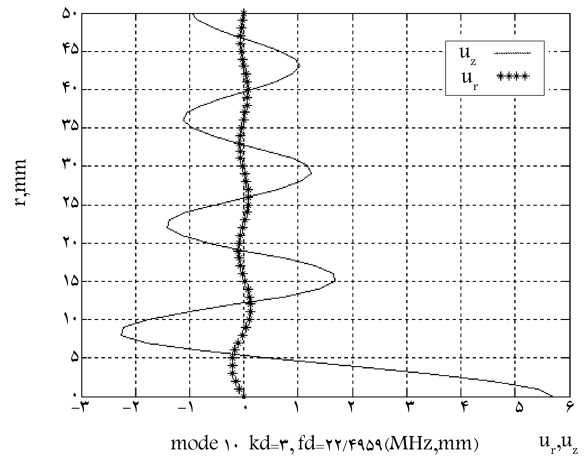


شکل ۱۳. نمودار پراکندگی سرعت گروه برای موده‌های مختلف در لوله‌ی فولادی زنگ‌نزن.

۱۳ رسم شده است. مشاهده می‌شود که در بعضی از فرکانس‌ها، این سرعت تقویت و در بعضی دیگر تضعیف می‌شود. ملاحظه می‌شود شکل کلی تغییرات طیف‌های فرکانس و سرعت فاز مشابه تغییرات در یک میله توپر است. نمودارهای تغییر مکان برای بعضی از موده‌ها و فرکانس‌ها در شکل‌های ۱۴ تا ۱۶ رسم شده‌اند. ساختار موج، یعنی نمودار تغییر مکان‌های طولی و شعاعی برای مود اول و



شکل ۹. ساختار موج در مود پنجم.

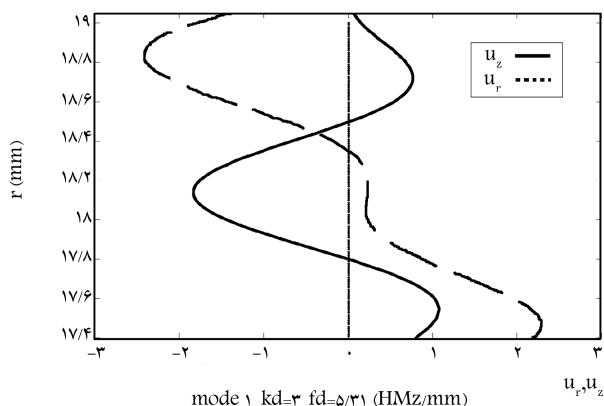
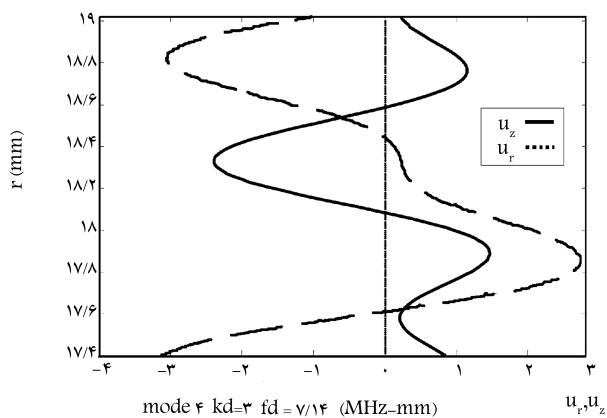
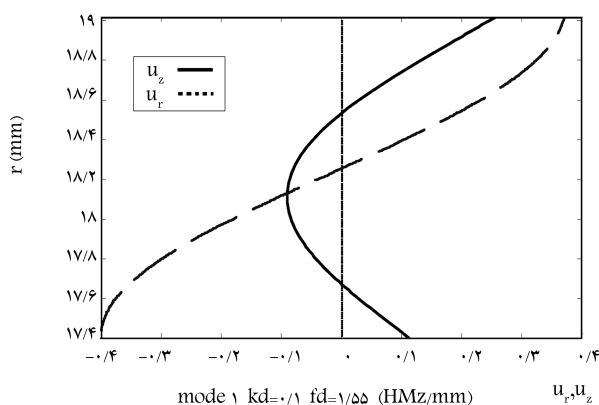
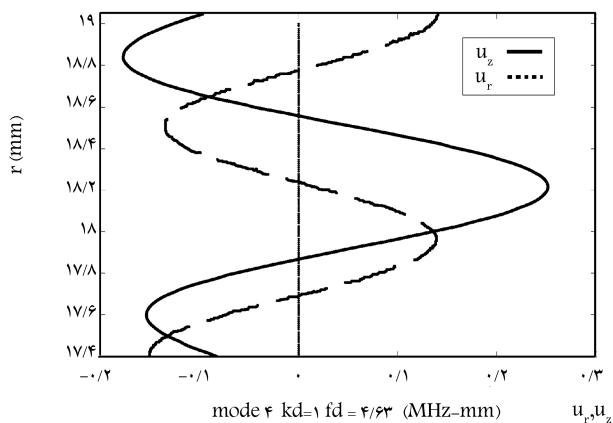


شکل ۱۰. ساختار موج در مود دهم.

دوم نشان می‌دهد، تغییر مکان طولی در نقاط نزدیک به سطح و مرکز استوانه در مقایسه با تغییر مکان شعاعی بسیار بیشتر است. بنابراین اگر قرار است از این مود برای بازرسی استفاده شود باید حس‌گرهای فراصوت در صفحه‌ی عمود بر محور Z و در فاصله‌ی تقریباً یک چهارم از لبه‌ی بیرونی یا در مرکز میله قرار داده شوند. بدیهی است چنانچه حس‌گر را به‌منظور دریافت تغییر مکان‌های شعاعی روی سطح جانبی استوانه قرار دهند، امواج دریاقتی وضوح کافی نخواهند داشت. شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ نشان می‌دهند که محل مناسب حس‌گر برای موده‌های نشان داده شده، تقریباً در فواصل نصف شعاع یا در مرکز است.

۲.۴. استوانه‌ی توخالی

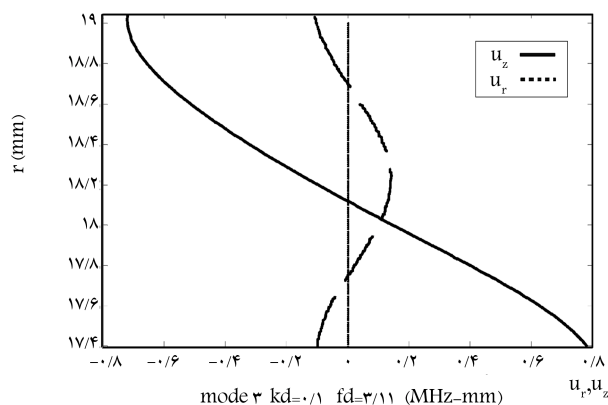
برای استوانه‌ی توخالی از فولاد زنگ‌نزن به‌طول بی‌نهایت با شعاع داخلی ۱۷٫۴ میلی‌متر و شعاع خارجی ۱۹٫۵ میلی‌متر و $c_L = 5/8$ و $c_T = 3/1$ کیلومتر بر ثانیه، ریشه‌های معادله‌ی فرکانس با روش نیوتن - رافسون به‌ازای هر مقدار از عدد موج k محاسبه می‌شوند. به‌کمک این ریشه‌ها که همان مقادیر ویژه معادله فرکانس‌اند، مؤلفه‌های بردارهای ویژه، یعنی ضرایب A_1, A_2, B_1, B_2 در معادلات ۱۷ و ۱۸ نیز قابل محاسبه‌اند و به‌طور هم‌زمان می‌توان نمودار تغییر مکان را برحسب r و برای هر عدد موج و فرکانس نیز رسم کرد. طیف‌های فرکانس و سرعت فاز به‌ترتیب در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ و نمودار سرعت گروه برای چهار مود اولیه در شکل



شکل ۱۶. ساختار موج در مود چهارم برای دو فرکانس متفاوت u_r و u_z .

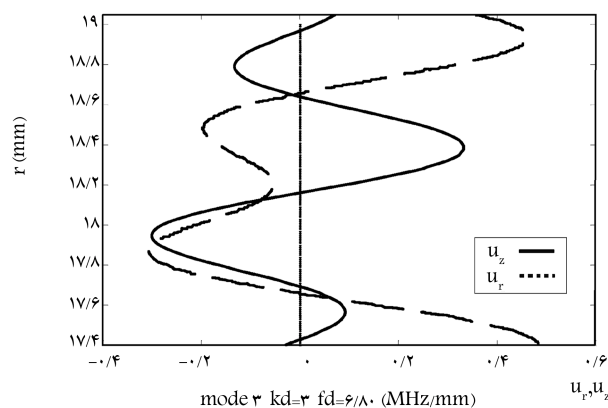
شکل ۱۴. ساختار موج در مود اول برای دو فرکانس متفاوت u_r و u_z .

نیز دو فرکانس متفاوت در شکل ۱۴ رسم شده است. جالب توجه است که تغییر مکان‌های طولی که روی سطوح بیرونی و داخلی در فرکانس پایین‌تر با وضوح کافی قابل دریافت‌اند در فرکانس بالاتر روی سطح بیرونی تقریباً به صفر می‌رسند، در حالی که تغییر مکان‌های شعاعی روی سطوح داخلی و بیرونی همانند آنچه که در فرکانس‌های پایین‌تر رخ می‌دهد تقریباً هم‌مرتب باقی می‌مانند. این موضوع برای مود سوم نیز مشاهده می‌شود، با این تفاوت که تغییر مکان‌های شعاعی در فرکانس بالاتر روی سطوح داخلی و بیرونی به‌خوبی قابل دریافت‌اند ولی در فرکانس پایین‌تر از وضوح کافی برخوردار نخواهند بود. تغییر مکان‌های مود چهارم برای دو فرکانس اندازه‌های نسبی مشابه مود اول را دارند. این مطالعات را می‌توان برای بهینه‌سازی توان تلف‌شده (نشت توان) در لوله‌های پرآب و برای تشخیص عیب در ضخامت لوله‌ها به‌کار گرفت.



۵. نتیجه‌گیری

از امواج هدایت‌شده، به‌دلیل این که دارای مودهای چندگانه‌اند، با انتخاب مودهای مناسب، می‌توان در بازرسی‌های غیرمخرب استفاده کرد. برای نشان دادن چگونگی تعیین مودهای مناسب، دو مدل استوانه‌ای -- یکی توپر آلومینیومی و دیگری توخالی از جنس فولاد زنگ‌نزن -- با فرض این که رفتارشان کاملاً کشسانی باشد، مورد بررسی قرار گرفت و مودهای طولی در آنها، به‌دلیل آن که تقارن محوری دارند و در بازرسی‌ها بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، مطالعه شد. از حل عددی معادله فرکانس مدل‌ها به طیف‌های فرکانس و پراکندگی سرعت فاز دست خواهیم یافت.



شکل ۱۵. ساختار موج در مود سوم برای دو فرکانس متفاوت u_r و u_z .

استوانه به دست آمد. نمودارهای ساختار موج برای نشان دادن محل‌های مناسب دریافت علائم ارائه شدند. این نمودارها نشان‌گر چشم‌انداز عمیق‌تری از حرکت ذرات جسم روی مرزها و درون آن هستند و برای ارزیابی نتایج نظری و تجربی کاربرد دارند.

به‌کمک این طیف‌ها می‌توان نشان داد که با تغییر فرکانس موج مورد استفاده، می‌توان سرعت انتشار آن‌ها را تغییر داد. در مطالعه‌ی این امواج، نمودار تغییرات سرعت گروه نیز به دست خواهد آمد که به‌کمک آن می‌توان چگونگی تغییر سرعت گروه موج مورد استفاده بر اثر تغییر فرکانس را تعیین کرد. این نمودار برای مودهای مختلف در

منابع

1. Rose, J.L., *Ultrasonic Waves in Solid Media*, Cambridge University Press (1999).
2. Graff, K.F., *Wave Motion in Elastic Solids*, New York: Dover (1991).
3. Rose, J.L. "A base line and vision of ultrasonic guided wave inspection potential", *Journal of Pressure Vessel Technology*, **124**, pp.273-282 (2002).
4. Barshinger, J.; Rose, J.L. and Avioli, M.J., Jr. "Guided wave resonance tuning for pipe inspection", *Journal of Pressure Vessel Technology*, **124**, pp.303-310 (2002).
5. Ratassepp, M. and Klauson, A. "Curvature effects on wave propagation in an infinite pipe", *ISSN 13922-2114 ULTRAGARSAS*, **2**(59), pp.19-25 (2006).
6. Hayashi, T.; Song, W.J. and Rose, J.L. "Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross section, a rod and rail example", *Ultrasonics*, **41**, pp. 175-183 (2003).
7. Hayashi, T.; Tamayama, C. and Murase, M. "Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section", *Ultrasonics*, **44**, pp. 17-24 (2006).
8. Zhao, X.G. and Rose, J.L. "Boundary element modeling for defect characterization potential in a wave guide", *Int. Journal of Solids and Structure*, **40**, pp.2645-2658 (2003).
9. Lohr, K.R. and Rose, J.L. "Ultrasonic guided wave and acoustic impact methods for pipe fouling detection", *Journal of Food Engineering*, **56**, pp.315-324 (2003).
10. Satyarnarayan, L.; Chandrasekaran, J.; Maxfield, B. and Balasubramaniam, K. "Circumferential higher order guided wave modes for the detection and sizing of cracks and pinholes in pipe support regions", *NDT & E International*, **41**, pp.32-43 (2007).
11. Wassink, C.H.P. and Dijkstra, F.H., *Innovation in Non-Destructive Testing and Inspection Technologies*, Applus RTD-NDTI Technological Center Delftweg 144, 3046 NC Rotterdam, The Netherlands (2006).
12. Razzaz, A., *Study of Ultrasonic Guided Waves in Elastic Solids*, M. Sc. Dissertation, Islamic Azad University, Ahvaz Branch (2008).

ضمائم ضمیمه ۱

با اعمال شرایط مرزی $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ در روابط حاصل برای تنش‌های شعاعی و برشی در صفحات $r\theta$ و r_z ، معادله‌ی فرکانس به صورت زیر قابل استخراج است:

$$\begin{aligned} c_{r\theta} &= (\beta^t - k^t) a^t Y_1(\beta a) \\ c_{r1} &= -(\beta^t - k^t) b^t J_0(\alpha b) + 2 \alpha b J_1(\alpha b) \\ c_{r2} &= 2 k \beta b^t J_0(\beta b) - 2 k b J_1(\beta b) \\ c_{r3} &= -(\beta^t - k^t) b^t Y_0(\alpha b) + 2 \alpha b Y_1(\alpha b) \\ c_{r\theta} &= 2 k \beta b^t Y_0(\beta b) - 2 k b Y_1(\beta b) \\ c_{\theta r} &= -k \beta b^t J_0(\beta b) + 2 k b J_1(\beta b) \\ c_{\theta 3} &= \beta^t b^t J_0(\beta b) - 2 \beta b J_1(\beta b) \\ c_{\theta\theta} &= -k \beta b^t Y_0(\beta b) + 2 k b Y_1(\beta b) \\ c_{\theta 6} &= \beta^t b^t Y_0(\beta b) - 2 \beta b Y_1(\beta b) \\ c_{\phi 1} &= 2 k \alpha b^t J_1(\alpha b) \\ c_{\phi 2} &= (\beta^t - k^t) b^t J_1(\beta b) \\ c_{\phi 3} &= 2 k \alpha b^t Y_1(\alpha b) \\ c_{\phi\theta} &= (\beta^t - k^t) b^t Y_1(\beta b) \end{aligned}$$

$$D = D_1 \cdot D_2 = 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{35} \\ c_{\phi 1} & c_{\phi 2} & c_{\phi 3} & c_{\phi 5} \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_{23} & c_{26} \\ c_{53} & c_{56} \end{vmatrix}$$

از حل معادله‌های $D_1 = 0$ و $D_2 = 0$ به ترتیب فرکانس امواج قابل انتشار طولی و برشی به دست می‌آید. اگر a و b به ترتیب نشانگر شعاع‌های داخلی و بیرونی استوانه، J_0 و J_1 نشانگر توابع بسل نوع اول با مرتبه‌ی صفر و ۱، و نیز Y_0 و Y_1 نشانگر توابع بسل نوع دوم با مرتبه‌ی صفر و ۱ باشند، مؤلفه‌های غیر صفر D چنین نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned} c_{11} &= -(\beta^t - k^t) a^t J_0(\alpha a) + 2 \alpha a J_1(\alpha a) \\ c_{12} &= 2 k \beta a^t J_0(\beta a) - 2 k a J_1(\beta a) \\ c_{13} &= -(\beta^t - k^t) a^t Y_0(\alpha a) + 2 \alpha a Y_1(\alpha a) \\ c_{15} &= 2 k \beta a^t Y_0(\beta a) - 2 k a Y_1(\beta a) \\ c_{22} &= -k \beta a^t J_0(\beta a) + 2 k a J_1(\beta a) \\ c_{23} &= \beta^t a^t J_0(\beta a) - 2 \beta a J_1(\beta a) \\ c_{25} &= -k \beta a^t Y_0(\beta a) + 2 k a Y_1(\beta a) \\ c_{26} &= \beta^t a^t Y_0(\beta a) - 2 \beta a Y_1(\beta a) \\ c_{31} &= 2 k \alpha a^t J_1(\alpha a) \\ c_{32} &= (\beta^t - k^t) a^t J_1(\beta a) \\ c_{33} &= 2 k \alpha a^t Y_1(\alpha a) \end{aligned}$$

ضمیمه ۲

اگر $F(\alpha, \beta) = 0$ معادله‌ی مشخصه یا معادله‌ی فرکانس باشد، در این صورت سرعت گروه از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$c_g = \frac{k}{\omega} \times \frac{\frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \beta}}{\frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{1}{c_L^t} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{1}{c_T^t}}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \frac{2}{a} (\beta^t + k^t) J_1(\beta a) [\alpha J_0(\alpha a) + (\lambda - \frac{1}{a}) J_1(\alpha a)] \\ &+ a (\beta^t - k^t)^t J_1(\alpha a) J_1(\beta a) \\ &- 2 k^t \beta J_0(\beta a) [\alpha J_0(\alpha a) + (\lambda - \frac{1}{a}) J_1(\alpha a)] \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} &= \frac{2 \alpha}{a} J_1(\alpha a) [\beta (\beta^t + k^t) J_0(\beta a) + (2 \beta - \frac{\beta^t + k^t}{a}) J_1(\beta a)] \\ &- (\beta^t - k^t)^t J_0(\alpha a) [(\lambda \beta - \frac{\beta^t - k^t}{a}) J_1(\beta a) + \beta (\beta^t - k^t) J_0(\beta a)] \\ &- 2 k^t \alpha J_1(\alpha a) [J_0(\beta a) - \beta a J_1(\beta a)] \end{aligned}$$