

## تعمیم روش کره‌های محاطی در بهینه‌سازی مهندسی

بهروز فرشی (دانشیار)

علی علی‌نیا زبازی\* (دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

مهندسی مکانیک شریف  
دوری ۳-۲۸، شماری ۱، ص. ۱۳-۳

یکی از روش‌های بهینه‌سازی روش «کره‌های محاطی» است که در آن حرکت به سمت جواب بهینه از داخل فضای قابل قبول طراحی نسبت به قیود صورت می‌گیرد و لذا از جمله روش مرکزها به‌شمار می‌رود. در این روش مسیر حرکت به سوی نقطه‌ی بهینه در فاصله‌ی تقریباً یکسانی نسبت به قیود فعال قرار دارد و از همین رو نسبت به خطی‌کردن قیود حساسیت نشان نمی‌دهد. این روش پیش‌تر برای قیود نامساوی به کار گرفته شده است. در این تحقیق این روش تعمیم می‌یابد تا قابلیت در نظر گرفتن قیود تساوی خطی یا غیرخطی را در کنار قیود نامساوی برای مسائل بهینه‌سازی کسب کند. در این راستا سعی شده است تا حد ممکن خصوصیات ذاتی مناسب موجود در روش کره‌های محاطی حفظ شود. برای نیل به این منظور سه شیوه ارائه شده است. نتایج به دست آمده از حل مثال‌های گوناگون در مهندسی نشان از کارایی این روش است.

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی، روش مرکزها، شیوه‌ی کره‌های محاطی، قیود تساوی غیرخطی.

## ۱. مقدمه

فرم کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی مهندسی مقید -- شامل قیود تساوی و نامساوی -- را می‌توان چنین نشان داد:

$$\begin{aligned} \min f(\vec{x}) \\ s.t. \quad g_j(\vec{x}) \geq 0, \quad j \in J_1 = \{1, \dots, J\} \\ h_k(\vec{x}) = 0, \quad k \in K_1 = \{1, \dots, K\} \\ x_i^L \leq x_i \leq x_i^U, \quad i \in I_1 = \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $f, g_j, h_k : R^n \rightarrow R, x \in R^n$  توابع پیوسته و مشتق‌پذیری هستند. مجموعه نقاط قابل قبول برای این مسئله به صورت:

$$X = \{x \in R^n : g_j(x) \geq 0, h_k(x) = 0\}$$

بیان می‌شود. حل چنین مسئله‌ی در گستره‌ی وسیعی از زمینه‌های علمی مهندسی و کاربردی ضرورت می‌یابد. محققان بسیاری در این زمینه تحقیق کرده‌اند و در نتیجه‌ی این تحقیقات روش‌های بهینه‌سازی مختلفی برای حل مسئله‌ی فوق ارائه شده که هر یک دارای نقاط قوت و ضعف مربوط به خود هستند. ارائه‌ی تمامی این روش‌ها در این نوشتار ضرورت ندارد و در اینجا اجمالاً به بعضی از تحقیقات اساسی انجام شده که قابلیت در نظر گرفتن هر دو نوع قید تساوی و نامساوی را دارد اشاره می‌شود. از جمله روش‌های بهینه‌سازی که از قابلیت در نظر گرفتن قیود تساوی غیرخطی،

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۲۸، اصلاحیه ۱۳۹۰/۲۸، پذیرش ۱۳۹۰/۴/۱۳.

farshi@iust.ac.ir  
ali.alinia@iust.ac.ir

توأم با قیود نامساوی، برخوردار است می‌توان به روش تابع خطا<sup>[۱]</sup>، روش جهات قابل قبول<sup>[۲]</sup> اشاره کرد. از آنجا که روش تابع خطا به سختی قیود تساوی را به‌طور کامل ارضا می‌کند، با به‌کارگیری روش ضرایب لاگرانژ مکمل (ALM)<sup>[۳]</sup> این نقیصه مرتفع شد. در این رابطه روش گرادیان کاهش‌یافته‌ی عمومی<sup>[۴]</sup> از قیود تساوی برای کاهش فضای طراحی استفاده می‌کند؛ در مقابل روش تصویرگرادیان عمومی<sup>[۵]</sup> بردار جهت جست‌وجوی بهینه‌یابی به دست آمده را در زیرفضای تعریف شده به‌وسیله‌ی قیود تساوی و قیود فعال تصویر می‌کند. در صورت غیرخطی بودن قیود، در این دو روش برای بازگشت به سطح قیود باید از حرکت بازگشتی استفاده کرد. دو روش برنامه‌ریزی مکرر خطی<sup>[۶]</sup> و برنامه‌ریزی مکرر درجه دوم<sup>[۷]</sup> نیز از دیگر روش‌هایی هستند که از موفقیت‌های نسبی برخوردارند.

روش‌های یادشده هر یک نسبت به دیگری دارای نقاط قوت و ضعفی هستند که در مراجع به تفصیل بیان شده‌اند. در بعضی از این روش‌ها مسیر حرکت برای دست‌یابی به نقاط طراحی برتر در فرایند بهینه‌سازی بر روی سطوح قیود قرار دارد و در بعضی دیگر این مسیر از خارج از فضای قابل قبول به سمت نقطه‌ی بهینه است. از دیدگاه کاربردی، هم‌گرایی نقاط به دست آمده در فرایند بهینه‌سازی از داخل فضای قابل قبول به سمت جواب بهینه مورد انتظار است؛ مطلوب‌تر این است که مسیر حرکت نسبت به قیود فاصله‌ی نسبتاً یکسانی داشته باشد به‌طوری که هرگاه و به‌هر دلیل فرایند بهینه‌سازی متوقف شود، یک دسته جواب قابل قبول خوب موجود خواهد بود. لذا بعضی از محققین تلاش کردند که مسیر نقاط طراحی دائماً در داخل فضای قابل قبول قرار گیرند. به‌عنوان مثال می‌توان از تابع خطای

داخلی و روش مرکزها نام برد. ایده‌ی حرکت در مرکز فضای قابل قبول نسبت به قیود به سمت جواب بهینه، برای مسائل محدب، توسط هوارد ارائه شد،<sup>[۹۸]</sup> و دیگر محققان این ایده را برای سایر حالات بسط دادند.<sup>[۱۰۰-۱۰۴]</sup> به‌عنوان مثال می‌توان از کارهای انجام‌شده در زمینه‌ی مسائل کمیته-بیشینه،<sup>[۱۰۱]</sup> مسائل نیمه‌محدود،<sup>[۱۰۲، ۱۰۳]</sup> و برنامه‌های کسری<sup>[۱۰۴]</sup> اشاره کرد. روش مرکزهای هوارد با فرض مشتق‌پذیری و محدب‌بودن از هم‌گرایی خطی برخوردار است.<sup>[۱۰۵]</sup> بعضی از محققان درخصوص افزایش سرعت این هم‌گرایی فعالیت داشته‌اند.<sup>[۱۰۶]</sup>

محققین با استفاده از ایده‌ی حرکت در داخل فضای قابل قبول، برای یافتن مرکز فضای قابل قبول نسبت به قیود «روش کره‌های محاطی» را پیشنهاد کردند<sup>[۱۰۷]</sup> که مبتنی بر محاط‌کردن یک آبزرکه<sup>۸</sup> بر خطی‌شده قیود و تابع هدف استوار است. بعدها با گسترش این روش،<sup>[۱۰۸]</sup> و با استفاده از وارون متغیرها برای مسائل سازه‌یی -- به‌خصوص با ارائه‌ی شیوه‌ی حذف موقتی قیود غیربحرانی که باعث کاهش چشم‌گیر تعداد قیود در نظر گرفته شده در هر سیکل می‌شود -- آن را به روشی کارآمد برای حل مسائل عملی تبدیل کردند.<sup>[۱۰۹، ۱۱۰]</sup> برای یافتن مرکز فضای قابل قبول از روش‌های دیگری نیز می‌توان استفاده کرد، مثلاً می‌توان از شیوه‌ی بیضوی<sup>۹</sup> که در آن مرکز بیضی به‌عنوان مرکز طراحی<sup>۱۰</sup> در نظر گرفته می‌شود بهره جست.<sup>[۱۱۱، ۱۱۲]</sup> همچنین می‌توان به استفاده از محاط‌کردن بزرگ‌ترین بیضی‌گون هسین<sup>۱۱</sup> برای یافتن مرکز فضای قابل قبول، یا به استفاده از یک تابع پتانسیل برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی<sup>[۱۱۳]</sup> نیز اشاره کرد که می‌تواند حتی سرعت همگرایی فوق‌خطی یا حتی درجه دوم نیز بیابد<sup>[۱۱۴]</sup>

از شیوه‌ی بیضوی<sup>۱۲</sup> برای در نظر گرفتن قیود تساوی نیز استفاده شده است<sup>[۱۱۵]</sup> اما در حال حاضر، روش کره‌های محاطی فقط برای قیود نامساوی قابل اجراست. در اینجا هدف، بسط و گسترش روش کره‌های محاطی<sup>[۱۱۶، ۱۱۷]</sup> است به‌طوری که در کنار قیود نامساوی بتوان قیود تساوی غیرخطی را نیز به‌کمک این روش ارضا کرد. برای در نظر گرفتن قیود تساوی، این قیود نیز همانند قیود نامساوی توسط بسط سری تیلور خطی شده و سپس با استفاده از یکی از سه شیوه‌ی ارائه‌شده در زیر، روش کره‌های محاطی به‌نحوی هدایت می‌شود که قیود تساوی در هر دوره‌ی بهینه‌سازی نیز منظور شود.

در روش اول مسئله بعد از انجام هر دوره مرکز کره به زیرفضای مشترک قیود تساوی انتقال داده می‌شود. در روش دوم شیوه‌ی کره‌های محاطی به‌گونه‌یی تغییر می‌یابد که مرکز کره‌ی محاطی روی زیرفضای مشترک قیود تساوی قرار می‌گیرد که از خطی‌شده‌ی این قیود حاصل می‌شود. در روش سوم قیود تساوی را باید همیشه فعال در نظر گرفت به‌طوری که کره محاطی در هر دوره بر تمامی قیود تساوی خطی‌شده مماس شود. در این حالت سعی می‌شود با استفاده از شیوه‌ی ارائه‌شده در بخش ۳ به سمت محدب فضا حرکت کرد تا احتمال رسیدن به جواب بهینه‌ی کلی بیشتر شود.

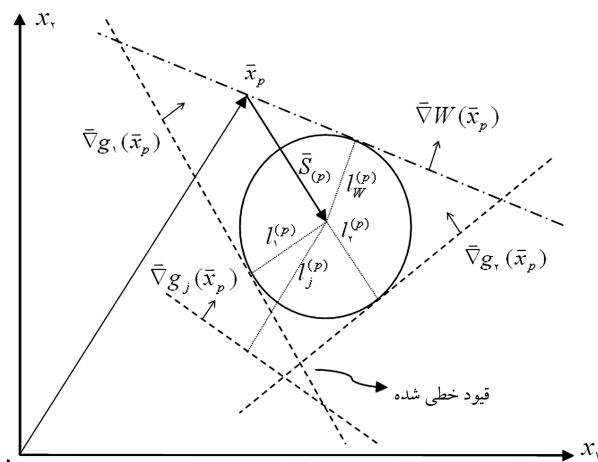
## ۲. شیوه‌ی کره‌های محاطی

اگرچه توضیح کامل روش کره‌های محاطی در دسترس است<sup>[۱۱۶، ۱۱۷]</sup> برای کامل بودن بحث، روش مذکور به‌اختصار تشریح می‌شود. اساس کار روش کره‌های محاطی چنین است که ابتدا به‌منظور کاهش حجم محاسبات از میان تمامی قیود نامساوی، بحرانی‌ترین قیود انتخاب می‌شوند. چنانچه قیود به‌طور مناسب هنجار شده باشند با استفاده از مقدار قید در نقطه‌ی جاری،  $g_j(\vec{x}_p)$ ، می‌توان میزان بحرانی بودن قید

را به دست آورد. به عبارت دیگر هر چه این مقدار به صفر نزدیک‌تر باشد نشان از بحرانی‌تر بودن یا نزدیک‌تر بودن آن قید است. این مقادیر به ترتیب صعودی مرتب‌شده و کم‌ترین آن  $g^{\min}(\vec{x}_p)$  نامیده می‌شود. از این لیست صعودی تعداد  $Q$  قید اول و کم‌ترین آن  $Q \geq n$  به عبارت دیگر قیودی که مقادیرشان در نقطه‌ی جاری،  $g_j(\vec{x}_p)$ ، از  $R^* \times g^{\min}(\vec{x}_p)$  کوچک‌تر باشند برای خطی‌کردن در مرحله‌ی بعد در نظر گرفته می‌شوند. مقدار  $R^*$  بزرگ‌تر از ۱ است و در اینجا برابر با ۳ انتخاب می‌شود. بدیهی است که هرچه مقدار  $R^*$  بزرگ‌تر انتخاب شود تعداد قید بیشتری باید در نظر گرفت که به نسبت زمان حل بیشتری برای آن لازم است. در مرحله‌ی بعد، تابع هدف و این قیود نامساوی انتخاب شده ( $Q$  قید اول از لیست به دست آمده) حول نقطه‌ی جاری که در فضای قابل قبول قرار دارد، با استفاده از بسط سری تیلور خطی می‌شوند.

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(p)}(\vec{x}) &= f(\vec{x}_p) + (\vec{x} - \vec{x}_p)^T \nabla f(\vec{x}_p) \\ \tilde{g}_j^{(p)}(\vec{x}) &= g_j(\vec{x}_p) + (\vec{x} - \vec{x}_p)^T \nabla g_j(\vec{x}_p), \quad j = 1, \dots, Q \quad (2) \end{aligned}$$

سپس ضمن انتخاب شعاع و مرکز بزرگ‌ترین کره محاطی مماس بر این قیود نامساوی، تابع هدف خطی‌شده به دست می‌آید به‌طوری که مرکز کره در داخل فضای قابل قبول تعریف‌شده توسط قیود نامساوی و در سمت کاهش تابع هدف قرار داشته باشد؛ مرکز کره نیز باید در جایی قرار گیرد که اندازه‌ی شعاع کره مماسی کوچک‌تر یا مساوی با اندازه‌ی فاصله نقطه مرکز کره تا هریک از قیود باشد (شکل ۱). با این کار مرکز به دست آمده در داخل فضای قابل قبول بوده و فاصله‌ی آن از قیود فعال تقریباً یکسان است. حال مرکز کره به دست آمده به‌عنوان نقطه‌ی جدید طراحی در نظر گرفته می‌شود و دوباره این فرایند حول این نقطه‌ی جدید تکرار شده تا به تدریج با این تکنیک فضای طراحی قابل قبول محدودتر شده و مرکز کره به سمت نقطه‌ی بهینه حرکت کند و تبعاً شعاع آن نیز به تدریج کاهش می‌یابد. یادآور می‌شود برای حفظ دقت تقریب خطی‌سازی و همچنین به‌منظور غلبه بر حالتی که نقطه‌ی جواب نهایی در یک زیرفضا قرار دارد، باید علاوه بر قیود مورد بررسی به قید محدودیت اندازه حرکت نیز توجه شود. روش مرکزها ویژگی‌های مناسبی دارند که برخی از آن‌ها عبارت‌اند از: ۱. حذف موقتی قیود غیربحرانی و توجه صرف به قیود فعال و نیمه فعال که این امر باعث کاهش حجم مسئله می‌شود. ۲. حرکت نقطه‌ی طراحی در داخل فضای قابل قبول نسبت به قیود نامساوی؛ براین اساس، هرگاه به هر دلیل فرایند بهینه‌سازی متوقف شود نقطه‌ی به دست آمده از دید طراح یک جواب قابل قبول



شکل ۱. شماتیک روش کره‌های محاطی در فضای دوبعدی.

خواهد بود. ۳. نقطه‌ی به دست آمده در هر دوره نسبت به قیود حاکم در فاصله‌ی تقریباً یکسانی قرار دارد که باعث می‌شود نسبت به قیود دارای ضریب اطمینان تقریباً برابر باشد. ۴. به دلیل حرکت داخل فضای طراحی نسبت به خطی کردن قیود این روش حساسیت کم‌تری نشان خواهد داد. به بیان ریاضی می‌توان مسئله‌ی یافتن مرکز کره را چنین نشان داد:

$$\text{Maximize : } r_p$$

Subject to :

$$\begin{aligned} r_p &\leq l_{ineq}^{(p)}; \quad (\text{برای قیود نامساوی}), \quad ineq = 1, \dots, Q \\ r_p &\leq l_f^{(p)} \\ \vec{l}_{(p)}^L &\leq \vec{S}_{(p)} \leq \vec{l}_{(p)}^U \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن -- چنان‌که پیش‌تر بیان شد --  $r_p$  شعاع کره محاطی در دوره‌ی  $p$ ام،  $\vec{S}_{(p)}$  بردار حرکت از نقطه‌ی قبلی به مرکز کره جدید،  $\vec{l}_{(p)}^U$  و  $\vec{l}_{(p)}^L$  مقدار حد بالا و پایین برای مؤلفه‌های بردار حرکت،  $l_{ineq}^{(p)}$  فاصله‌ی مرکز کره تا قیود نامساوی انتخاب شده، و  $l_f^{(p)}$  فاصله‌ی مرکز کره تا تابع هدف، که همگی در دوره‌ی  $p$ ام بوده و مطابق رابطه‌ی ۴ به دست می‌آیند (شکل ۱):

$$l_{ineq}^{(p)} = \frac{g_j(\vec{x}_p) + \vec{S}_p^T \cdot \vec{\nabla} g_j(\vec{x}_p)}{|\vec{\nabla} g_j(\vec{x}_p)|}, \quad l_f^{(p)} = \frac{-\vec{S}_p^T \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}_p)}{|\vec{\nabla} f(\vec{x}_p)|} \quad (4)$$

که در آن  $(\vec{x}_p)$  بردار نقطه‌ی طراحی در سیکل  $p$ ام (مرکز کره به دست آمده از سیکل قبلی)، بردار  $\vec{\nabla}$  عملگر گرادینان،  $f(\vec{x})$  تابع هدف مسئله، و  $g_j(\vec{x})$  قیود نامساوی انتخاب شده هستند. ملاحظه می‌شود که مسئله‌ی ارائه شده در رابطه‌ی ۳ یک برنامه‌ریزی خطی است که متغیرهای آن را مؤلفه‌های بردار  $\vec{S}_p$  و  $r_p$  تشکیل می‌دهند.

### ۳. قیود تساوی در روش کره‌های محاطی

وجود قیود تساوی خطی در بهینه‌سازی مانع بزرگی نیست و فقط به راحتی باعث کاهش بعد فضا می‌شود. اما قیود تساوی غیرخطی اگرچه در انتهای فرایند بهینه‌سازی، همانند قیود خطی باعث کاهش بعد فضا می‌شوند، این امر به راحتی امکان پذیر نخواهد بود. قیود بررسی شده در برخی مراجع<sup>[۱۸، ۱۷]</sup> همگی شامل قیود نامساوی‌اند. چنان که بیان شد هدف این تحقیق افزودن توانایی روش کره‌های محاطی است به طوری که بتوان قیود تساوی غیرخطی و قیود نامساوی را به صورت توأمان به کمک این روش ارضا کرد.

وجود قید تساوی بدین معناست که جواب نهایی باید روی این قید، یا به زبان ریاضی روی این زیرفضا قرار گیرد. همچنین در صورت وجود چند قید تساوی جواب نهایی باید روی فصل مشترک قیود تساوی و به عبارتی در زیرفضای حاصل از تقاطع این قیود قرار داشته باشد. برای این که بتوان قید تساوی غیرخطی را در روش کره‌های محاطی وارد کرد می‌توان از چند شیوه‌ی مختلف استفاده کرد. در ادامه سه روش برای غلبه بر این مشکل ارائه شده است.

#### ۱.۳. شیوه‌ی ۱

یکی از ساده‌ترین روش‌های متصور استفاده از شیوه‌ی تصویرکردن نیوتن است که در روش تصویرگرادیان نیز استفاده می‌شود،<sup>[۲۵]</sup> بدین صورت که در روش کره‌های

محاطی ابتدا هر دوره را صرفاً با در نظر گرفتن قیود نامساوی حل می‌کنند. سپس با به دست آمدن مرکز کره، این نقطه‌ی جدید با استفاده از ماتریس تصویر که توسط گرادینان قیود تساوی حول این نقطه به دست می‌آید بر زیرفضای مشترک قیود تساوی تصویر شده و نقطه‌ی جدیدی به دست می‌آید. در صورت وجود قیود تساوی غیرخطی ممکن است فقط با یک بار انجام این حرکت بازگشتی نقطه‌ی جدید به طور کامل روی زیرفضای مشترک قیود تساوی قرار نگیرد. این حرکت بازگشتی با استفاده از نقطه‌ی جدید تکرار می‌شود تا دقت مورد نظر حاصل آید.<sup>[۲۵]</sup>

#### ۲.۳. شیوه‌ی ۲

روش دوم پیشنهادی برای در نظر گرفتن قیود تساوی به صورت زیر است. در روش کره‌های محاطی چنانچه با استفاده از تمهیداتی مرکز کره،  $\vec{x}_{p+1}$ ، مجبور به قرارگیری روی قیود تساوی باشد، هدف مسئله به دست خواهد آمد. لذا برای دست‌یابی به این منظور ابتدا قیود تساوی غیرخطی حول نقطه‌ی جاری،  $\vec{x}_p$ ، خطی می‌شوند:

$$\tilde{h}_k^{(p)}(\vec{x}) = h_k(\vec{x}_p) + (\vec{x} - \vec{x}_p)^T \vec{\nabla} h_k(\vec{x}_p), \quad k = 1, \dots, K \quad (5)$$

$$(\vec{x} - \vec{x}_p) = \vec{S}_p \quad (6)$$

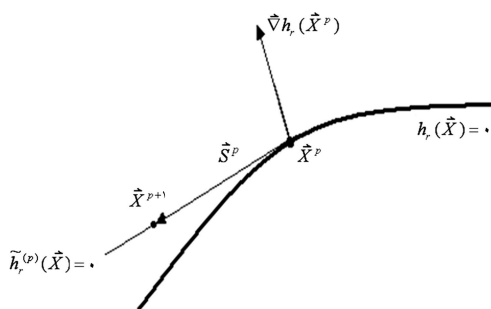
مقدار تابع خطی شده در نقطه‌ی  $\vec{x}_{p+1}$  برابر است با:

$$\tilde{h}_k^{(p)}(\vec{x}_{p+1}) = h_k(\vec{x}_p) + (\vec{x} - \vec{x}_p)^T \vec{\nabla} h_k(\vec{x}_p) = 0 \quad (7)$$

با توجه به تعریف بیان شده، از آنجا که هم نقطه‌ی فعلی  $(\vec{x}_p)$  و هم نقطه‌ی جدید بعدی  $(\vec{x}_{p+1})$  هر دو روی قید تساوی خطی شده قرار دارند (شکل ۲)، در رابطه‌ی ۷ مقادیر  $h_k(\vec{x}_p)$  و  $\tilde{h}_k^{(p)}(\vec{x}_{p+1})$  برابر صفرند. با توجه به تعریف بردار حرکت،  $\vec{S}_p$ ، که به صورت رابطه‌ی ۶ است، قید زیر با قراردادن برای بردار حرکت به دست می‌آید.

$$\vec{S}_p^T \vec{\nabla} h_k(\vec{x}_p) = 0 \quad (8)$$

تعبیر هندسی این قید در شکل ۳ ارائه شده است. در واقع این قید بردار حرکت،  $\vec{S}_p$ ، را بر روی سطح قید خطی شده تصویر می‌کند که در واقع بیانگر عمود بودن مماس بر گرادینان است. چنان که ملاحظه می‌شود رابطه‌ی ۸ رابطه‌ی خطی برحسب  $\vec{S}_p$  است که می‌توان آن را به راحتی به رابطه‌ی ۳ افزود. با این کار در برنامه‌ریزی خطی بزرگ‌ترین کره محاطی به گونه‌ی انتخاب می‌شود که مرکز این کره بر خطی شده‌ی این قیود تساوی قرار گیرد. در نتیجه در هر دوره مرکز کره که نقطه‌ی جواب است، علاوه بر این که در داخل فضای قابل قبول قرار دارد به طور تقریب روی سطح قیود تساوی نیز قرار می‌گیرد. بدیهی است در صورت وجود بیش از یک قید تساوی مرکز کره روی فصل مشترک این زیرفضای خطی شده قرار می‌گیرد. همچنین در انتهای هر دوره،



شکل ۲. تعبیر هندسی شیوه‌ی ۲.

برای ارضاء دقیق قیود تساوی می‌توان با استفاده از شیوهی تصویرکردن، نظیر روش تصویرگرادیان، مرکز کره محاطی را روی این قیود تساوی تصویر کرد.

### ۳.۳. شیوهی ۳

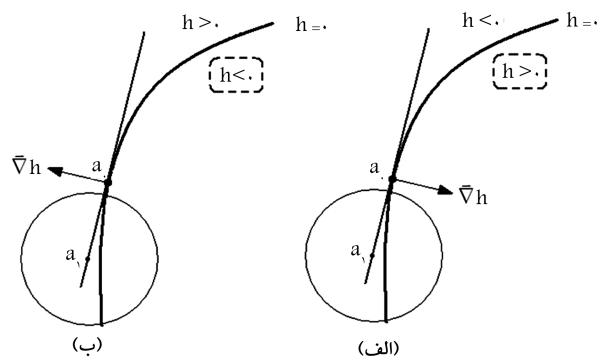
روش پیشنهادی سوم را می‌توان چنین بیان کرد که در روش کره‌های محاطی قیود تساوی غیرخطی مانند قیود نامساوی در نظر گرفته شوند. به عبارت دیگر ابتدا این قیود نیز مانند قیود نامساوی حول نقطه‌ای جاری،  $\vec{x}_p$ ، خطی می‌شوند. اما بزرگ‌ترین کره محاطی را باید به‌گونه‌ای جست که این کره بر تمامی قیود تساوی، به عبارت دیگر خطی‌شده‌ی آن‌ها، مماس باشد. به عبارت دیگر کافی است به‌منظور در نظر گرفتن قیود تساوی، روابط ۹ به رابطه‌ی ۳ افزوده شود.

$$r_p = l_{eq}^{(p)}; \quad (eq \text{ قیود تساوی}), \quad eq = 1, \dots, K \quad (9)$$

$$l_{eq}^{(p)} = \frac{h_k(\vec{x}_p) + \vec{S}_p^T \cdot \vec{\nabla} h_k(\vec{x}_p)}{|\vec{\nabla} h_k(\vec{x}_p)|} \quad (10)$$

با توجه به این موضوع مرکز کره به دست آمده، که نقطه‌ی جدید برای سیکل بعدی است، روی قیود تساوی قرار ندارد. اما می‌توان دید که با پیشروی دوره‌ی فرایند بهینه‌سازی شعاع کره به‌تدریج کوچک می‌شود، مرکز کره به‌تدریج به قیود تساوی نزدیک‌تر می‌شود به‌طوری که در انتهای کار مرکز کره بر روی قیود تساوی خواهد نشست. اگر در ابتدای کار حرکت در سمت محدب قیود تساوی انجام پذیرد و با توجه به این که فاصله تا حد امکان از قیود (چه قیود تساوی و چه قیود نامساوی) تقریباً یکسان خواهد بود احتمال رسیدن به جواب بهینه‌ی محلی پایین خواهد آمد.

برای یافتن سمت محدب قیود تساوی می‌توان چنین عمل کرد: مطابق شکل ۳ یک قید تساوی را در نظر بگیرید که در فضای دوبعدی ترسیم شده است. با توجه به این که در ابتدا مشخص نیست که مقادیر تابع  $h$  در کدام طرف قید مثبت و کدام طرف منفی است، در نقطه‌ی اولیه ( $a_0$ ) قید را خطی کرده و کره محاطی با استفاده از شیوهی ۲ (قرارگرفتن مرکز کره روی خطی‌شده‌ی قید) رسم می‌شود. فرض می‌شود که نقطه‌ی به دست آمده  $a_1$  باشد. در این نقطه مقدار قید ( $a_1(h)$ ) حساب می‌شود. منفی بودن مقدار تابع  $h$  در این نقطه (شکل ۳الف)، بدان معناست که بردار گرادیان،  $\vec{\nabla} h$ ، سمت محدب فضا را نشان می‌دهد و لذا قید  $h = 0$  به‌صورت  $h \geq 0$  در نظر گرفته می‌شود. مثبت بودن مقدار تابع  $h$  در این نقطه (شکل ۳ب) نشان‌دهنده‌ی این موضوع است که بردار گرادیان،  $\vec{\nabla} h$ ، در سمت مقعر فضا است و بنابراین قید  $h = 0$  به‌صورت  $h \leq 0$  و به عبارتی به‌صورت  $-h \geq 0$  در نظر گرفته می‌شود. با این کار جهت بردار گرادیان تابع  $h$  به سمت داخل فضای محدب تابع خواهد بود و باعث می‌شود مرکز کره در آن سمت قرار گیرد.



شکل ۳. طبقه‌ی یافتن سمت محدب یک قید تساوی.

### ۴. مثال‌های عددی

اکنون این سؤال مطرح است که استفاده از کدامیک از شیوه‌های تشریح شده مناسب و کارآمدتر خواهد بود. برای روشن شدن روش ارائه‌شده و مقایسه‌ی شیوه‌های مطرح شده چند مثال ساده ارائه می‌شود. مثال اول یک مثال نسبتاً ساده است که تصویر بهتری از سه شیوه‌ی ارائه‌شده ارائه می‌دهد. چهار مثال بعدی به‌گونه‌ای از مسائل کاربردی مهندسی انتخاب شده‌اند که هم قید تساوی غیرخطی و هم قید نامساوی را شامل باشند که بتوان کاربرد عملی این روش را مشاهده کرد.

#### ۱.۴. مثال اول

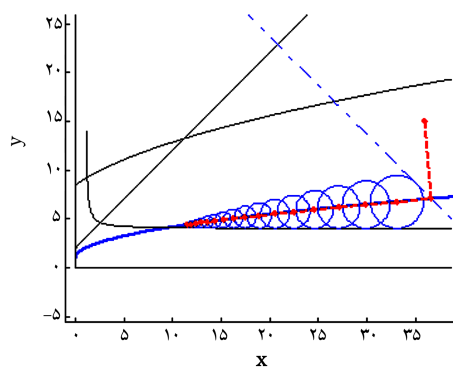
مسئله‌ی بهینه‌سازی زیر را که دارای دو متغیر است در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min f(x, y) &= -y + x \\ \text{s.t. } g_1(x, y) &= y - \frac{1}{x-2} - 4 \geq 0, \\ g_2(x, y) &= -y + \sqrt{5x + 12} + 5 \geq 0, \\ g_3(x, y) &= -y + x + 2 \geq 0, \\ h_1(x, y) &= -y + \sqrt{x} + 1 = 0, \\ g_4(x, y) &= x \geq 0, \\ g_5(x, y) &= y \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

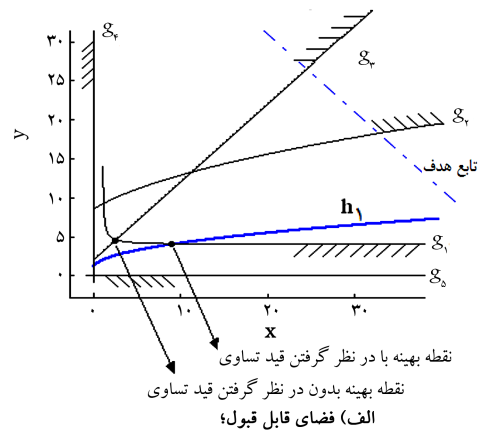
فضای قابل قبول طراحی برای این مثال در شکل ۴الف ارائه شده است. در شکل ۴ب روش حل این مسئله با استفاده از شیوه‌ی اول نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که در هر دوره بعد از به دست آمدن نقطه‌ی مرکز، این نقطه روی قید تساوی تصویر می‌شود و از نقطه‌ی  $b$  به بعد، جایی که دست‌کم یکی از قیود شروع به نقض شدن می‌کند، به‌هنگام تصویرکردن باید هر دو قید — هم قید تساوی و هم قید نقض‌شده — را در نظر گرفت. در این مثال به‌دلیل دومتغیره بودن، مشخص شدن دو قید به‌معنای معلوم‌شدن نقطه‌ی بهینه است. اما در مسئله‌ی با تعداد متغیر بیشتر باید در ادامه برای رسیدن به جواب بهینه از روش تصویرگرادیان عمومی استفاده کرد. همچنین چنانچه مسئله به‌گونه‌ای باشد که در نقطه‌ی  $b$  بیش از یک قید نقض‌شدگی نشان دهد، باید در بین قیود نقض‌شده قیدی را انتخاب کرد که نقض‌شدگی بیشتری نشان می‌دهد.

در شکل ۴ج روش حل این مسئله با استفاده از شیوه‌ی ۲ نشان داده شده است. چنان که در شکل مشخص است در ابتدای هر دوره باید با استفاده از عمل تصویرکردن، نقطه‌ی جاری روی قیود تساوی ارجاع داده شود و سپس دایره‌ی بعدی با در نظر داشتن قید معادله‌ی ۷ رسم شود. با این کار نقطه‌ی طراحی روی قید تساوی حرکت کرده و به‌تدریج با نزدیک‌شدن به نقطه‌ی بهینه، شعاع دایره کوچک‌تر می‌شود.

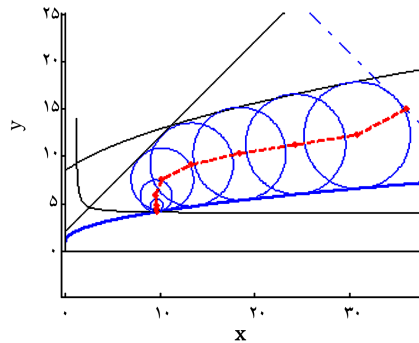
طبقه‌ی استفاده از شیوه‌ی ۳ در این مثال در شکل ۴د و شکل ۴ه نشان داده شده است. چنان که ملاحظه می‌شود در هر دوره دایره روی قید تساوی مماس است و با نزدیک‌تر شدن به نقطه‌ی بهینه فاصله‌ی مرکز دایره از قید تساوی کم‌تر می‌شود. در شکل ۴د حرکت دایره در سمت مقعر قید تساوی است حال آن که در شکل ۴ه دایره در فضای محدب این قید حرکت می‌کند. از مقایسه‌ی این دو شکل به دست می‌آید که در این مثال حرکت در فضای محدب می‌تواند باعث آرام‌تر شدن حرکت



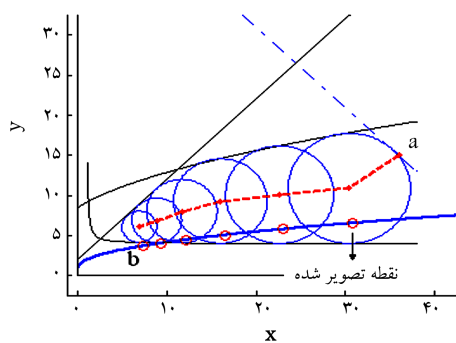
ج) استفاده از شیوه ی ۲؛



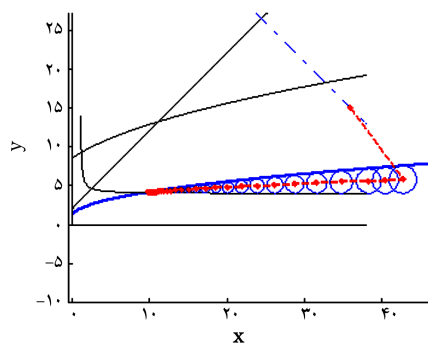
الف) فضای قابل قبول؛



د) استفاده از شیوه ی ۳ حرکت در سمت مقعر قید تساوی؛



ب) استفاده از شیوه ی ۱؛



ه) استفاده از شیوه ی ۳ حرکت در سمت محدب قید تساوی.

شکل ۴. مثال اول.

قید تساوی در آن غیرخطی اند؛ این مسئله پیش تر توسط محققین بررسی شده است. [۲۶، ۲۷]

$$\begin{aligned} \min f(X) &= x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4 \\ \text{s.t. } g_1(X) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leq 1, \\ g_2(X) &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_2 \leq 10, \\ h_1(X) &= 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_2 - x_4 = 5. \end{aligned} \quad (12)$$

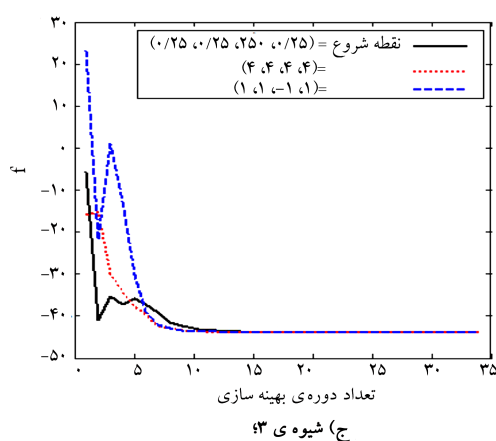
نقطه ی جواب بهینه در این مثال عبارت است از  $X^* = (2, 1, 0, -1)$  و مقدار تابع هدف در این نقطه برابر است با  $f(X^*) = 44$ ؛ تغییرات مقدار تابع هدف و مقدار شعاع کره محاطی برحسب تعداد دوره ی بهینه سازی در شکل ۵ نشان داده شده است. چنان که ملاحظه می شود مسئله ی فوق با سه نقطه ی آغازین متفاوت

به سوی نقطه ی بهینه، خصوصاً در نزدیکی جواب، شود که این نقیصه را می توان با بهره گیری از شیوه های شتاب دهنده گری جبران کرد.

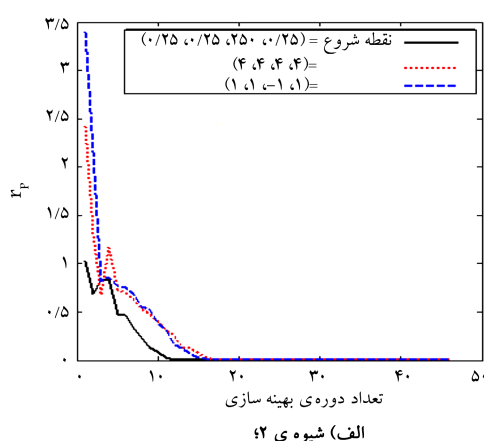
در اینجا مسئله یک مثال دوبعدی است. اما در مسائل چندبعدی و نیز هنگامی که قیود تساوی بیش از ۱ است حرکت در سمت فضای محدب قیود تساوی، احتمال رفتن به سوی جواب بهینه ی محلی را در مقایسه با حرکت در سمت دیگر فضا یا استفاده از شیوه ی ۲ کاهش می دهد. استفاده از شیوه ی ۲ این مزیت را دارد که هر نقطه ی جدید قیود تساوی را به طور تقریبی ارضا می کند. در مقابل در شیوه ی ۳ هر زمان که نیاز به قطع فرایند بهینه سازی باشد تنها با یک بار عمل تصویر کردن جواب به دست می آید.

## ۲.۴. مثال دوم

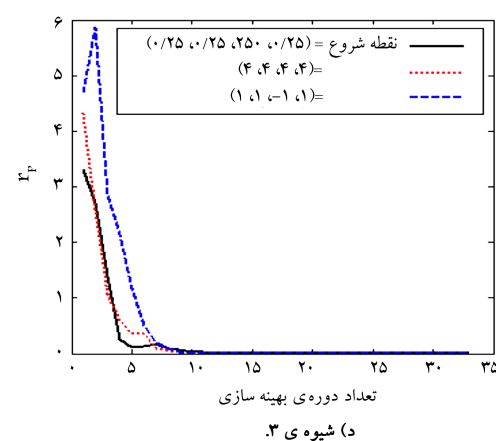
مثال دوم چهار متغیر دارد که در آن هم تابع هدف و هم دو قید نامساوی و



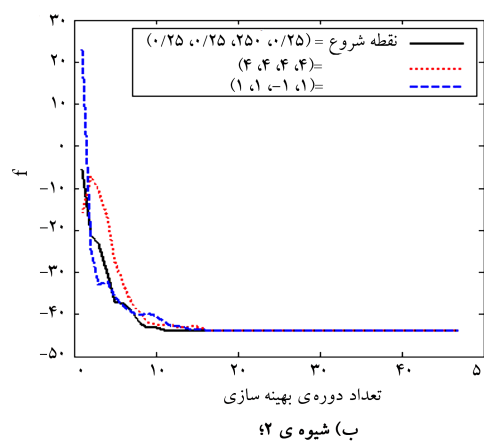
ج) شیوه ی ۳



الف) شیوه ی ۴



د) شیوه ی ۵



ب) شیوه ی ۶

شکل ۵. چگونگی تغییرات تابع هدف و شعاع کره محاطی بر حسب تعداد دوره ی بهینه‌سازی در مثال ۲.

#### ۴.۴. مثال چهارم

این مثال نیز که برگرفته از دیگر منابع است [۲۸، ۷۱] (HS ۱۱۴)، مثالی بزرگ‌تر و شامل ۱۰ متغیر است. این مثال در مهندسی شیمی در فرایند آلکیل دار کردن برای بهینه‌کردن شرایط کاری مورد استفاده قرار می‌گیرد. صورت ریاضی این مثال عبارت است از:

$$\min f(X) = 5.4x_1 + 0.35x_2 + 1.0x_3 + 3.36x_4 - 0.63x_5x_6$$

$$s.t. \quad g_1(X) = 35.82 - 0.222x_1 - 0.9x_4 \geq 0,$$

$$g_2(X) = -133 + 3x_6 - 0.99x_1 \geq 0,$$

$$g_3(X) = -35.82 + 0.222x_1 + \frac{1}{0.9}x_4 \geq 0,$$

$$g_4(X) = 133 - 3x_6 + \frac{1}{0.99}x_1 \geq 0,$$

$$g_5(X) = 1.12x_1 + 0.13167x_1x_4 - 0.0667x_1x_4^2 - 0.99x_2 \geq 0,$$

$$g_6(X) = 57.425 + 1.098x_4 - 0.38x_4^2 + 0.325x_6 - 0.99x_7 \geq 0,$$

$$g_7(X) = -1.12x_1 - 0.13167x_1x_4 + 0.0667x_1x_4^2 + \frac{1}{0.99}x_2 \geq 0,$$

#### ۳.۴. مثال سوم

مثال سوم که برگرفته از دیگر منابع است [۲۸] (HS ۷۱) عبارت است از:

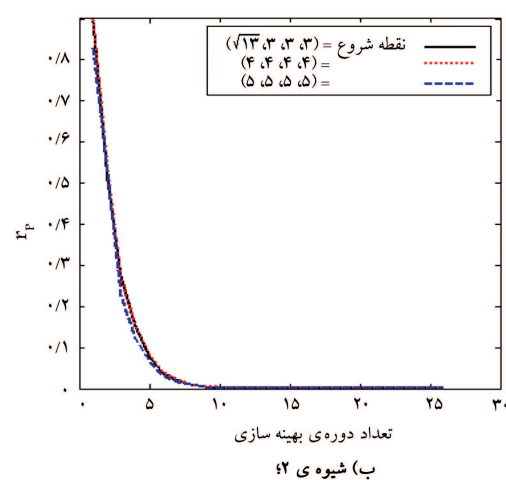
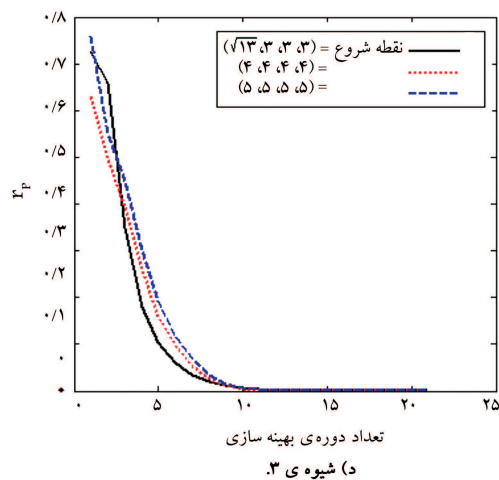
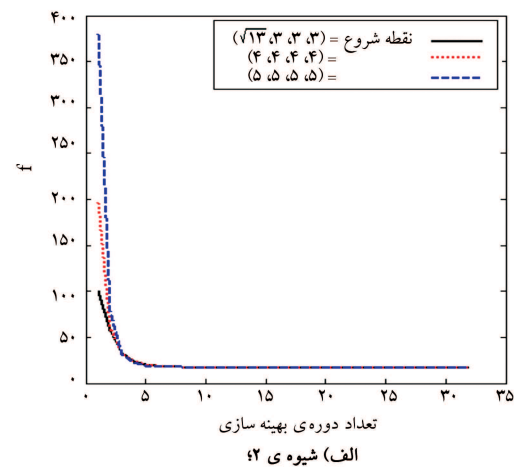
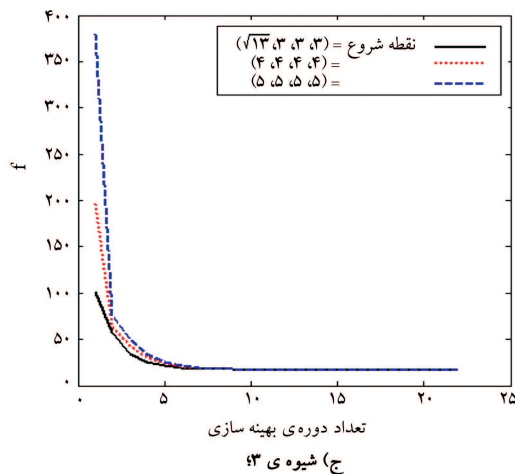
$$\min f(X) = x_1x_2(x_1 + x_2 + x_3) + x_2$$

$$s.t. \quad g_1(X) = x_1x_2x_3x_4 - 25 \geq 0,$$

$$h_1(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 40 = 0,$$

$$1 \leq x_i \leq 5, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (13)$$

در شکل ۶ نتایج به دست آمده برای این مثال توسط شیوه ی ۲ و ۳ ارائه شده است. چنان که مشاهده می‌شود مانند مثال پیشین با حرکت از نقطه ی شروع اولیه ی مختلف، نتایج به دست آمده برابر است. نقطه ی جواب بهینه عبارت است از  $X^* = (1, 4.7430, 3.8212, 1.3794)$  از  $f(X^*) = 17.0140$  برابر است با.



شکل ۶. چگونگی تغییرات تابع هدف و شعاع کره محاطی بر حسب تعداد دوره ی بهینه سازی در مثال سوم.

ملاحظه می شود بعد از حدود ۱۰ دوره مسیر حرکت کره مشخص شده و به صورت یکنواخت و پایدار به سمت جواب حرکت می کند.

#### ۵.۴. مثال پنجم

مثال پنجم عبارت است از بهینه سازی وزن یک سازه ی خرابا که تحت قیود تنش و جابه جایی قرار دارد و در مهندسی عمران و مکانیک کاربرد فراوان دارد. چنانچه این مسئله در فرمولاسیون روش نیرو بیان شود<sup>[۲۹]</sup> ارضاء قیود تساوی غیرخطی ضروری است<sup>[۳۰]</sup> صورت ریاضی یک نمونه مثال خرابای سه عضوی که تحت دو حالت مختلف بارگذاری قرار دارد<sup>[۳۲،۳۱]</sup> عبارت است از:

$$\begin{aligned} \min f(X) &= 14/1421(x_1 + x_2) + 10x_2 \\ \text{s.t. } g_1 \&g_2 &= -2e4 \leq \frac{0/3536e5 - 0/7071x_2}{x_1} \leq 2e4, \\ g_2 \&g_3 &= -2e4 \leq \frac{0/7071x_2}{x_2} \leq 2e4, \\ g_5 \&g_6 &= -2e4 \leq \frac{1/0607e5 - 0/7071x_2}{x_2} \leq 2e4, \\ g_7 \&g_8 &= -2e4 \leq \frac{0/3536e5 - 0/7071x_5}{x_1} \leq 2e4, \end{aligned}$$

$$g_8(X) = -57/425 - 1/098x_8 + 0/038x_8^2 - 0/325x_6 - \frac{1}{0/99}x_7 \geq 0,$$

$$h_1(X) = 1/22x_2 - x_1 - x_5 = 0,$$

$$h_2(X) = \frac{98000x_2}{1000x_2 + x_2x_4} - x_6 = 0,$$

$$h_3(X) = \frac{x_2 + x_5}{x_1} - x_8 = 0,$$

$$0/000001 \leq x_1 \leq 2000, \quad 0/000001 \leq x_2 \leq 16000,$$

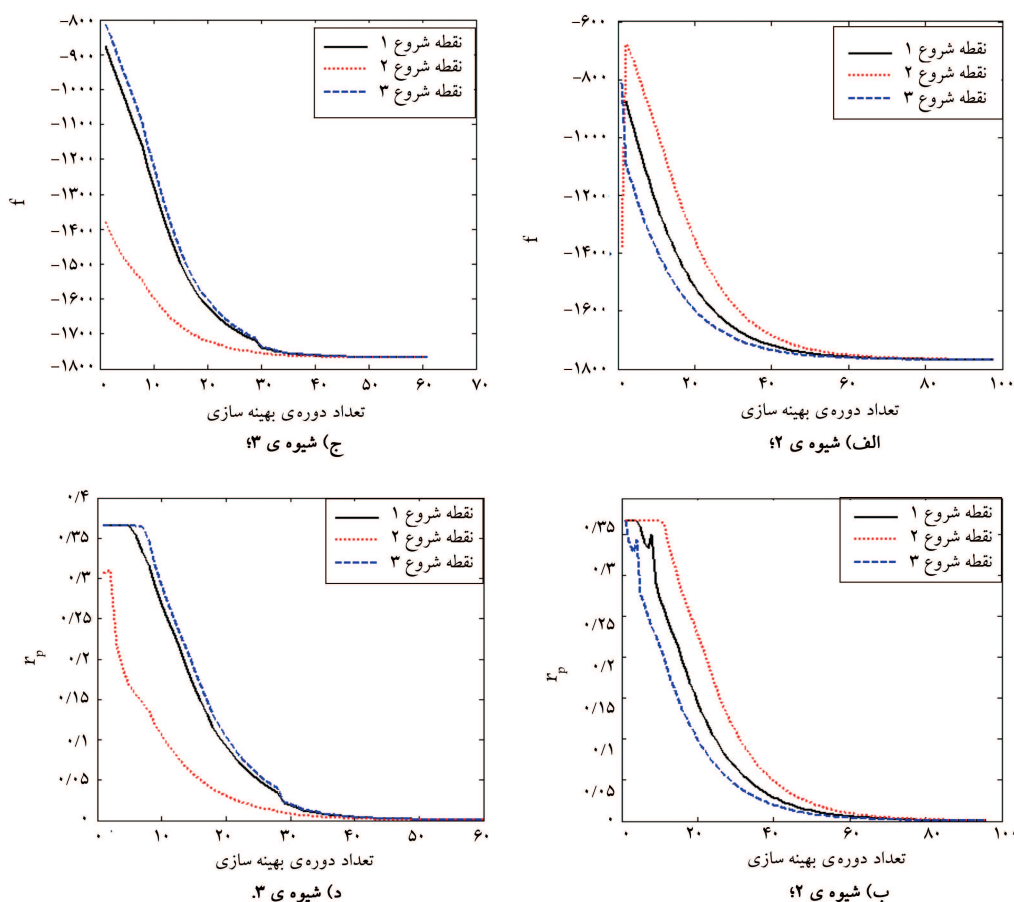
$$0/000001 \leq x_3 \leq 120, \quad 0/000001 \leq x_4 \leq 5000,$$

$$0/000001 \leq x_5 \leq 2000, \quad 85 \leq x_6 \leq 93,$$

$$90 \leq x_7 \leq 95, \quad 3 \leq x_8 \leq 12,$$

$$1/2 \leq x_9 \leq 4, \quad 145 \leq x_{10} \leq 162. \quad (14)$$

در شکل ۷ نمودار کاهش تابع هدف و شعاع کره محاطی برای مثال ۴ نشان داده شده است. برای این مثال نیز سه نقطه ی شروع متفاوت در نظر گرفته شده است که اولین نقطه ی پیشنهادی، توسط محققین در سال ۱۹۸۱ ذکر شده است.<sup>[۲۸]</sup> مقدار تابع هدف در نقطه ی بهینه،  $X^*$ ، برابر است با  $f(X^*) = 1768/806$ . چنان که



نقطه شروع ۱: (۱۴۵، ۳/۶، ۸، ۹۲/۸، ۹۲/۲، ۱۹۷۴، ۳۰۴۸، ۱۱۰، ۱۲۰۰۰، ۱۷۴۴).  
 نقطه شروع ۲: (۱۴۵، ۳، ۵، ۹۰، ۲۰۰، ۳۰۰۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰۰، ۱۵۰۰).  
 نقطه شروع ۳: (۱۶۲، ۴، ۱۲، ۹۵، ۹۳، ۲۰۰۰، ۲۹۰۰، ۱۲۰، ۱۰۰۰۰، ۱۶۰۰).  
 جواب بهینه  $X^*$ : (۱۵۳/۵۳۵، ۱/۵۶۲، ۱۰/۴۹۳، ۹۵، ۹۰/۱۱۵، ۲۰۰، ۳۰۳۱/۲۲۶، ۵۴/۱۰۲، ۱۵۸۱۸/۷۳، ۱۶۹۸/۰۹۸).

شکل ۷. چگونگی تغییرات تابع هدف و شعاع کره محاطی برحسب تعداد دوره‌ی بهینه‌سازی در مثال چهارم، نقطه‌ی شروع ۱ نقطه‌ی پیشنهادی است. [۲۸]

$$h_1(X) = -\frac{0.117866}{x_1} - \frac{0.353563}{x_3} + \left( \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_1} + \frac{3.23233 \times 10^{-6}}{x_2} + \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_3} \right) x_2 = 0,$$

$$h_2(X) = -\frac{0.117866}{x_1} + \frac{0.117866}{x_3} + \left( \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_1} + \frac{3.23233 \times 10^{-6}}{x_2} + \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_3} \right) x_5 = 0,$$

$$0.1 \leq x_i, \quad i = 1, \dots, 3 \quad (15)$$

چنان‌که در شکل ۸ مشاهده می‌شود مقدار تابع هدف و شعاع کره محاطی برحسب تعداد دوره‌ی بهینه‌سازی در هر دو شیوه‌ی ۲ و ۳ کاهش یکنواخت دارد، به‌طوری‌که میزان افت تابع هدف در چند دوره‌ی اولیه چشم‌گیر است. در این مثال نیز با در نظر گرفتن سه نقطه‌ی شروع اولیه‌ی مختلف، جواب‌های به دست آمده با یکدیگر برابرند و تابع هدف مقدار  $10^0$  را در نقطه‌ی بهینه اتخاذ می‌کند. چنان‌که مشاهده می‌شود در چنین مثال‌هایی که تعداد قیود در آن‌ها زیاد است با استفاده از روش کره‌های محاطی تعداد قیود لازم به تعداد متغیرهاست، که این امر سبب کاهش چشم‌گیر محاسبات می‌شود. عموماً در مسائل کاربردی تعداد متغیرها اندک است و

$$g_9 \& g_{10} = -2e4 \leq \frac{0.7071x_5}{x_2} \leq 2e4,$$

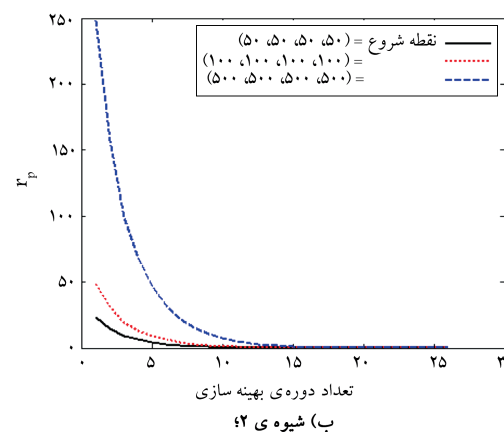
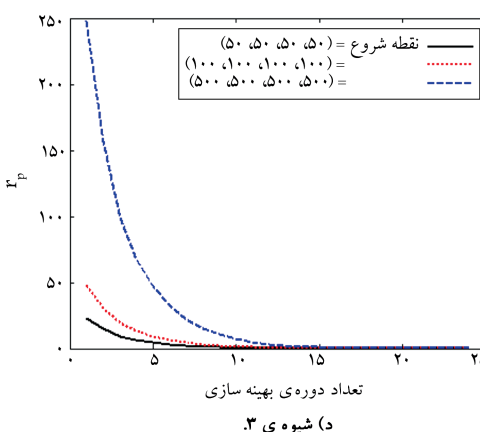
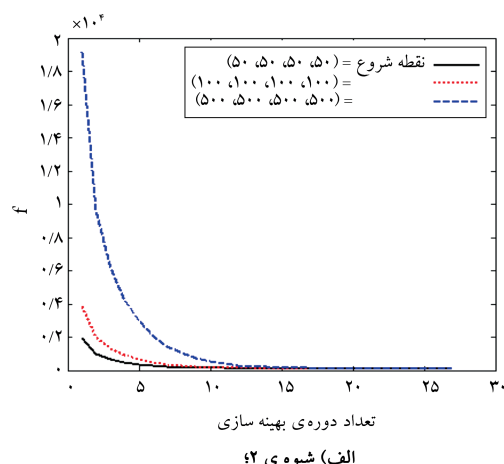
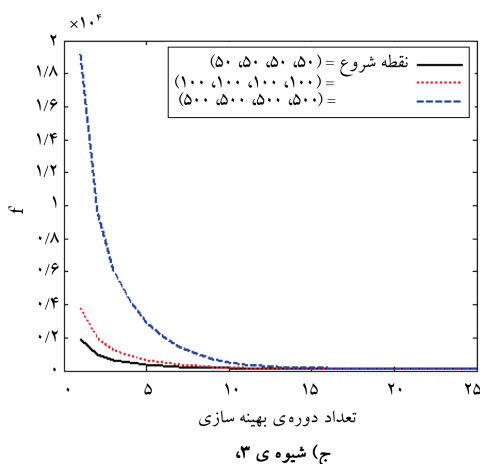
$$g_{11} \& g_{12} = -2e4 \leq \frac{-0.353563e5 - 0.7071x_5}{x_3} \leq 2e4,$$

$$g_{13} \& g_{14} = -0.2 \leq \frac{0.117866}{x_1} - \frac{0.353563}{x_3} + \left( -\frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_1} + \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_3} \right) x_2 \leq 0.2,$$

$$g_{15} \& g_{16} = -0.05 \leq -\frac{0.117866}{x_1} - \frac{0.353563}{x_3} + \left( \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_1} + \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_3} \right) x_2 \leq 0.05,$$

$$g_{17} \& g_{18} = -0.2 \leq \frac{0.117866}{x_1} + \frac{0.117866}{x_3} + \left( -\frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_1} + \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_3} \right) x_5 \leq 0.2,$$

$$g_{19} \& g_{20} = -0.05 \leq -\frac{0.117866}{x_1} + \frac{0.117866}{x_3} + \left( \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_1} + \frac{2.35698 \times 10^{-6}}{x_3} \right) x_5 \leq 0.05,$$



جواب بهینه  $X^*$ : (۱۹۲۳۰/۷۶۹۲، ۵۷۶۹۲/۳۰۷۷، ۳/۲۶۳۵۷، ۳/۸۴۶۱۵، ۱/۰۸۷۸).

شکل ۸. چگونگی تغییرات تابع هدف و شعاع کره محاطی بر حسب تعداد دوره‌ی بهینه‌سازی در مثال پنجم.

خواهد شد؛ همچنین ممکن است به جواب محلی نیز همگرا شود. بنابراین چنانچه از این شیوه در انتهای فرایند بهینه‌سازی، جایی که قیود فعال مسئله مشخص شده است، استفاده شود باعث تسریع حرکت خواهد شد.

از شیوه ۲ -- که در آن مرکزکره باید روی خطی شده قیود قرارگیرد -- می‌توان استفاده کرد اما به‌هنگام استفاده از این شیوه، به‌خصوص وقتی میزان غیرخطی زیاد است، ممکن است به‌دلیل استفاده از تقریب جواب کاملاً روی قیود تساوی قرار نگیرد و لذا در ابتدای هر دوره حرکت بازگشتی ضرورت می‌یابد که این امر به افزایش حجم محاسبات می‌انجامد. همچنین وقتی تعداد قیود تساوی زیاد باشد استفاده از این شیوه به‌تنهایی می‌تواند احتمال رسیدن به جواب بهینه‌ی محلی را افزایش دهد.

استفاده از شیوه ۳ -- نامساوی در نظرگرفتن قیود تساوی و مجبورکردن کره به تماس بودن بر این قیود -- در مقایسه با شیوه ۲ احتمالاً نیاز به تعداد دوره‌های بیشتری دارد. چراکه وجود هر قید تساوی می‌تواند فضای قابل قبول از دید دیگر قیود نامساوی را به دو قسمت تقسیم کند و لذا (با توجه به تعداد کل قیود تساوی) از کل فضای قابل قبول تنها یک بخش کوچک را در نظر گرفته و در آن قسمت حرکت می‌کند. بنابراین احتمال آهسته‌شدن حرکت کره در فضا به سمت جواب کمی بیشتر خواهد شد که مطابق اظهارات پیشین، این مسئله با استفاده از شیوه‌های شتاب‌دهندگی قابل مرتفع‌شدن خواهد بود. همچنین حرکت در سمت فضای محدب

تعداد قیود ممکن است بسیار زیاد باشند. در چنین حالتی کارایی این روش بسیار مشهود خواهد بود.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق قابلیت افزودن قیود تساوی غیرخطی به روش مرکزها که از شیوه‌ی روش کره‌های محاطی بهره می‌جوید، مورد بررسی قرارگرفت. برای نیل به این منظور سه شیوه ارائه شد. این سه شیوه به‌گونه‌یی در نظرگرفته شده‌اند که ماهیت روش کره‌های محاطی، و به بیان دیگر حرکت در فضای قابل قبول حتی‌الامکان به دور از قیود و تأثیرپذیری کم‌تر از تقریب خطی روی جواب به دست آید؛ همچنین بهبود سریع تابع هدف در چند دوره‌ی اولیه تا حد امکان حفظ شود بدون آن که به افزودن متغیرهای اضافی نیازی باشد.

حال این سؤال مطرح است که استفاده از کدام یک از شیوه‌های ارائه‌شده مناسب‌تر است. برای یافتن جواب مناسب باید به این نکته توجه داشت که به‌دلیل به‌کارگیری تقریب خطی بسط تیلور در روش کره‌های محاطی، استفاده از شیوه ۱ (تصورکردن) در ابتدای روش اگرچه باعث قرارگرفتن جواب به دست آمده روی زیرفضای قیود تساوی می‌شود (هدف نهایی مسئله) استفاده از آن در بعضی از مسائل به‌تنهایی میسر نیست و استفاده از روش‌های دیگر در ادامه‌ی مسیر لازم

میانی قیود تساوی را ارضا می‌کنند ولی در شیوه‌ی ۳ این نقاط به‌طور تقریبی قیود تساوی را ارضا خواهند کرد که با افزایش تعداد دوره‌ها این دقت بالاتر می‌رود. با این وجود در شیوه‌ی ۳ مقدار محاسبات کم‌تر خواهد بود و هرگاه در میانه‌ی مسیر به هر دلیلی نیاز به توقف فرایند بهینه‌سازی باشد تنها با یک بار استفاده از حرکت بازگشتی قیود تساوی نیز به‌طور کامل ارضا می‌شوند.

نسبت به قیود تساوی با بهره‌گیری از شیوه‌ی بیان‌شده در متن، خصوصاً وقتی تعداد قیود تساوی افزایش یابد، احتمال رفتن به جواب محلی را کاهش خواهد داد. نتایج به دست آمده از حل مثال‌های مختلف، که در این نوشتار به چند نمونه‌ی آن اشاره شد، نشان از کارایی لازم شیوه‌ی ۳ است. در مقایسه‌ی شیوه‌ی ۲ و ۳ باید به این نکته اشاره کرد که در شیوه‌ی ۲، نقاط

## پانویس

1. penalty function method
2. feasible direction
3. augmented lagrangian method
4. generalized reduced gradient method
5. generalized gradient projection
6. sequential linear programming
7. sequential quadratic programming
8. hypersphere
9. ellipsoidal technique
10. design centering
11. Hessian ellipsoid
12. ellipsoid algorithm

## منابع (References)

1. Fiacco, A.V. and McCormick, G.P. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, New York, John Wiley and Sons (1968).
2. Zoutendijk, G. "Methods of feasible directions", Amsterdam, Elsevier (1960).
3. Pierre, D.A. and Lowe, M.J., *Mathematical Programming Via Augmented Lagrangians*, Applied Mathematics and Computation Series, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1975).
4. Abadie, J. and Carpentier, J., *Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints*, In Optimization, R. Fletcher, ed. Academic Press, New York, pp. 37-47 (1969).
5. Rosen, J.B. "The gradient projection method for nonlinear programming - part II: nonlinear constraints", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, pp. 514-532 (1961).
6. Kelley, J.E. "The cutting plane method for solving convex programs", *Journal of SIAM*, **8**, pp. 702-712 (1960).
7. Edgar, T.F.; Himmelblau, D.M. and Lasdon, L.S. "Optimization of chemical processes", McGraw-Hill (2001).
8. Huard, P. "Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centers", In: J. Abadie (Ed.), *Nonlinear Programming*, North-Holland, Amsterdam, pp. 207-219 (1967).
9. Huard, P. "A method of centers by upper-bounding functions with applications in nonlinear programming", *Proceeding of A Symposium*, J.B. Rosen, O.L. Mangasarian, and K. Ritter (Eds.), Academic Press: New York, **26**, pp. 1-30 (1970).
10. Auslender, A. "Numerical methods for nondifferentiable convex optimization", *Mathematical Programming Study*, **30**, pp. 102-126 (1987).
11. Wiest, E.J. and Polak, E. "On the rate of convergence of two minimax algorithms", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **71**(1), pp. 1-30 (1991).
12. Wiest, E.J. and Polak, E. "A generalized quadratic programming-based phase I-phase II method for inequality constrained optimization", *Applied Mathematics and Optimization*, **26**, pp. 223-252 (1992).
13. Polak, E. and He, L. "Unified steerable phase I-phase II method of feasible directions for semi-infinite optimization", *Mathematical Programming*, **59**(1), pp. 83-107 (1991).
14. Roubi, A. "A method of centers for generalized fractional programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **7**(1), pp. 123-143 (2000).
15. Mifflin, R. "Rates of convergence for a method of centers algorithm", *Journal of Optimization Theory and Applications*, **18**(2), pp. 199-228 (1976).
16. Roubi, A. "Some properties of methods of centers", *Computational Optimization and Applications*, **19**, pp. 319-335 (2001).
17. Baldur, R. "Structural optimization by inscribed hyperspheres", *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **98**(3), pp. 503-518 (1972).
18. Schmit, L. and Farshi, B. "Some approximation concepts for structural synthesis", *AIAA Journal*, **12**(5), pp. 692-699 (1974).
19. Schmit, L. and Farshi, B. "Optimum laminate design for strength and stiffness", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **7**, pp. 516-536 (1973).
20. Schmit, L. and Farshi, B. "Optimum design of laminated fiber composite plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 623-640 (1977).
21. Bland, R.G.; Goldfarb, D. and Todd, M.J. "The ellipsoid method: A survey", *Operations Research*, **29**, pp. 1039-109 (1981).
22. Khachiyan, L.G. and Todd, M. "On the complexity of approximating the maximal inscribed ellipsoids for a polytope", *Technical Report N 893*, Cornell University (1990).

23. Primak, M.E. and Kheyfets, B.L. "A modification of the inscribed ellipsoid method", *Mathematics and Computational Modelling*, **21**(11), pp. 69-76 (1995).
24. Shah, S.; Mitchell, J. and Kupferschmid, M. "An ellipsoid algorithm for equality-constrained nonlinear programs," *Computers and Operations Research*, **28**, pp. 85-92 (2001).
25. Haftka, R.T. and Gurdal, Z. "Elements of structural analysis", Kulwer Academic Pub. (1992).
26. Charalambous, C. "Nonlinear least pth optimization and nonlinear programming," *Mathematics Programming*, **12**, pp. 195-225 (1977).
27. Fung, R.Y.K.; Tang, J. and Wang, D. "Extension of a hybrid Genetic algorithm for nonlinear programming problems with equality and inequality constraints", *Computers and Operations Research*, **29**, pp. 261-274 (2002).
28. Hock, W. and Schittkowski, K. "Tests examples for nonlinear programming codes", *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 187 (1981).
29. Kaveh, A. and Rahami, H. "Analysis, design and optimization of structures using force method and genetic algorithm," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **65**, pp. 1570-1584 (2006).
30. Przemieniecki, J.S. "Theory of matrix structural analysis", New York, McGraw-Hill (1968).
31. Patnaik, S.N.; Gendy, A.S.; Berke, L. and Hopkins, D.A. "Modified fully utilized design (MFUD) method for stress and displacement constraints", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, pp. 1171-1194 (1998).
32. Makris, P.A. and Provatidis, C.G. "Weight minimisation of displacement-constrained truss structures using a strain energy criterion," *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, **191**, pp. 2159-2177 (2002).