

توسعه‌ی روش «هیدرودینامیک ذره‌ی هموار» تعمیم‌یافته برای شبیه‌سازی حرکت اجسام جامد معلق در سیال نیوتنی

محمدرضا هاشمی (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

روح‌الله فانچی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه خلیج فارس بوشهر

مهرداد منظری* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف
دوره‌ی ۳-۲۸، شماره‌ی ۱، ص. ۶۷-۷۵

در این نوشتار با ارائه‌ی روشی جدید در اعمال شرط مرزی جامد و استفاده از رویه‌های اصلاح‌شده‌ی مشتق‌گیری مکانی، قابلیت‌های روش هیدرودینامیک ذره‌ی هموار در حل مسائل جریان سیال حاوی اجسام معلق افزایش یافته است. روش معرفی‌شده به‌منظور اعمال مرز جامد امکان محاسبه‌ی بهینه‌ی نیروهای تعاملی سیال-جامد را فراهم می‌کند، و رویه‌های اصلاح‌شده‌ی گسسته‌سازی مشتقات مکانی موجب حفظ سازگاری روش و نیز تسهیل اعمال روش جدید در مرز جامد می‌شود. نوسانات غیرفیزیکی فشار نیز با اصلاح معادله‌ی پیوستگی کاهش یافته است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی دوبعدی سقوط اجسام جامد دایره‌ی شکل در کانال حاوی سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر، با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه و اعتبار روش ارزیابی شده است.

واژگان کلیدی: هیدرودینامیک ذره‌ی هموار، شرط مرزی، تعامل سیال-جامد، جریان حاوی اجسام معلق.

۱. مقدمه

امروزه جریان سیالات حاوی اجسام جامد معلق جایگاهی ویژه در مکانیک سیالات دارد. مواد معلق (سوسپانسیون‌ها) در صنایع شیمیایی و بهداشتی، مخلوط‌های سیال-جامد در فرایند تصفیه‌ی آب، و استخراج نفت از مخازن هیدروکربنی نمونه‌هایی از این دسته جریان‌ها هستند. تعیین رفتار ماکروسکوپی جریان سیالات حاوی اجسام معلق، به‌دلیل اتصال بین معادله‌ی غیرخطی جریان سیال و معادلات حاکم بر حرکت اجسام جامد، فقط با روش‌های حل عددی ممکن است. هم‌زمان، شبیه‌سازی چنین جریان‌هایی منوط به دنبال‌کردن جسم جامد معلق و پیگیری مرز مشترک متحرک بین سیال و جامد خواهد بود. طی سال‌های اخیر، روش‌های گوناگونی برای حل چنین مسائلی پیشنهاد شده است. یکی از روش‌هایی که در حل مسائل شامل تعامل سیال-جامد کاربرد دارد، «هیدرودینامیک ذره‌ی هموار» (اس‌پی‌اچ) است که روشی لاگرانژی و بدون نیاز به شبکه‌بندی است. از آنجا که این روش نگرشی یکسان (لاگرانژی) به جریان سیال و حرکت جسم جامد دارد، دنبال‌کردن اجسام متحرک و تشخیص مرز آن‌ها با سیال، به‌سادگی امکان‌پذیر

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۸/۴، اصلاحیه ۱۳۹۰/۲/۴، پذیرش ۱۳۹۰/۲/۲۷.

mr_hashemi@mech.sharif.ir
fatehi@pgu.ac.ir
mtmanzari@sharif.ir

است. همچنین عدم نیاز به شبکه‌بندی، این روش را بی‌نیاز از شبیه‌های پیگیری مرز مشترک متحرک میان سیال و جامد می‌کند. بنابراین، اس‌پی‌اچ به‌عنوان روشی مناسب برای حل مسائل مربوط به اجسام جامد معلق در جریان سیال معرفی می‌شود.

در گسسته‌سازی روش هیدرودینامیک ذره‌ی هموار، دامنه‌ی سیال توسط ذراتی که حامل متغیرهای جریان‌اند و نقشی مشابه گره‌ها در روش‌های شبکه‌محور دارند، معرفی می‌شود. از میان‌بازی متغیرهای جریان با استفاده از یک تقریب ذره روی ذرات همسایه، مقدار این متغیرها در هر نقطه از محیط به دست می‌آید. سابقه‌ی کاربرد این روش در جریان‌های تراکم‌ناپذیر لزج به سال ۱۹۹۷ بازمی‌گردد. در این سال محققین موفق به شبیه‌سازی جریان غیرقابل تراکم در کانال بسته و اطراف یک استوانه‌ی ثابت در اعداد رینولدز کوچک شدند.^[۱] از آن زمان تاکنون توانایی این روش در حل مسائل مختلف مکانیک سیالات نشان داده شده و شیوه‌های مختلفی برای افزایش پایداری و دقت این روش پیشنهاد شده است.^[۲]

هدف این نوشتار معرفی روش اس‌پی‌اچ جدیدی است که از قابلیت شبیه‌سازی حرکت اجسام جامد معلق در جریان سیال برای مسائل با عدد رینولدز کوچک برخوردار باشد. روش اس‌پی‌اچ برای رسیدن به هدف ذکر شده مناسب است، اما

۲. روش هیدرودینامیک ذره‌ی هموار (اس‌پی‌اچ)

روش اس‌پی‌اچ، براساس میان‌یابی متغیرها روی ذرات ممین اجزاء دامنه ایجاد شده است. برای هر تابع دلخواه (u) مقدار میان‌یابی شده‌ی $\langle u \rangle$ در \vec{r} برحسب مقدار تابع برای ذرات همسایه‌ی z که مکان‌شان در داخل دایره‌ی تأثیر به مرکزیت \vec{r} قرار می‌گیرد عبارت است از:

$$\langle u(r) \rangle = \sum_j \omega_j u_j W(|\vec{r} - \vec{r}_j|, h) \quad (1)$$

که در آن ω_j حجم ذرات همسایه، h شعاع هموارسازی و W تابع هسته (هموارسازی) را نشان می‌دهند. تابع W هموارشده‌ی دلتای دیراک است و در فاصله‌ی h $|\vec{r} - \vec{r}_j| < h$ مثبت می‌ماند.^[۱۲]

۳. معادلات حاکم بر سیال

در این نوشتار جریان تراکم‌ناپذیر سیال نیوتنی در نظر گرفته می‌شود که برای آن، معادلات بقای جرم و اندازه‌ی حرکت چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (2)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g} \quad (3)$$

در این معادلات ρ چگالی سیال، P فشار و \vec{V} بردار سرعت است. همچنین \vec{g} شتاب حاصل از نیروی جسمی -- مانند شتاب گرانش -- و μ لزجت دینامیکی سیال است. برای تکمیل این دستگاه معادلات از یک معادله‌ی حالت ساده، که ارتباط میان فشار و تغییرات چگالی را مشخص می‌کند، استفاده می‌شود:

$$P - P_0 = c^2 (\rho - \rho_0) \quad (4)$$

در این رابطه c سرعت صوت در سیال را نشان می‌دهد. معادلات ۲ و ۳ به روش اس‌پی‌اچ گسسته‌سازی و حل می‌شوند. برای این منظور گسسته‌سازی مشتقات مکانی متغیرهای فشار و سرعت ضرورت می‌یابد. استفاده از یک رویه‌ی مشتق‌گیری مناسب در دقت نتایج حاصل تأثیر فراوانی دارد.

۴. مشتقات مکانی

برای گسسته‌سازی جملات شامل مشتقات مکانی در معادلات حاکم رویه‌های گوناگونی وجود دارد. برای مشتق اول، رویه‌ی معرفی شده^[۱۳] که دارای خاصیت سازگاری مرتبه‌ی اول است.^[۱۴] یعنی این رویه از قابلیت محاسبه‌ی دقیق مشتق توابع خطی برخوردار است.^[۱۵] این تقریب عددی برای $\langle \vec{\nabla} u \rangle$ از رابطه‌ی ۵ به دست می‌آید:^[۱۵، ۱۳]

$$\langle \nabla u \rangle_i = \sum_j \omega_j \vec{B}_j \cdot \vec{\nabla} W_{ij} (u_j - u_i) \quad (5)$$

که در آن $W_{ij} = W(r_{ij}, h)$ ، $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ و $\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ است. تانسور اصلاحی \vec{B} از رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود:

$$\vec{B}_i = \left[\sum_j \omega_j \vec{r}_{ij} \vec{\nabla} W_{ij} \right]^{-1} \quad (6)$$

برای استفاده از این روش به عنوان ابزاری قدرت‌مند در این‌گونه مسائل لازم است برخی ضعف‌های آن برطرف شود. تعیین دقیق نحوه‌ی حرکت اجسام جامد معلق در سیال به شدت بستگی به محاسبه‌ی دقیق نیروهای تعاملی بین سیال و سطح جامد دارد. بیشتر روش‌های مطرح شده برای اعمال مرز جامد در اس‌پی‌اچ قابلیت‌های محدودی دارند. این روش‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند: استفاده از ذرات مجازی از پیش تعیین‌شده، استفاده از ذرات مجازی آینه‌ی، اعمال نیروی بازدارنده در مرز جامد.

۱.۱. استفاده از ذرات مجازی از پیش تعیین‌شده (استاتیک)

ذرات مجازی با خصوصیات مشابه ذرات واقعی سیال، از ابتدا در چند لایه پشت مرز جامد ایجاد و در طی حل همراه با جسم جامد جابه‌جا می‌شوند.^[۳، ۱۶] در سال ۲۰۰۱ از این روش در شبیه‌سازی جریان برشی در کانال حاوی ذرات استفاده شد.^[۴]

۲.۱. استفاده از ذرات مجازی آینه‌ی

ایجاد ذرات مجازی آینه‌ی نسبت به سطح جامد -- که با سرعت عمودی خلاف جهت حرکت ذرات واقعی حرکت می‌کنند -- از نفوذ سیال به جامد جلوگیری می‌کند. این ذرات مجازی در هر گام زمانی دوباره تولید و جایگزین می‌شوند.^[۵، ۱۶] پژوهش‌گران با استفاده از همین روش مسئله‌ی برخورد یک تیغه‌ی مثلثی‌شکل جامد با سیال را حل کردند.^[۷] تجدید این ذرات آینه‌ی در مرزهای پیچیده ممکن است با مشکل تداخل ذرات اس‌پی‌اچ روبه‌رو شود.^[۸] همچنین فرایند ایجاد این ذرات در هر گام زمانی روندی پرهزینه از لحاظ الگوریتم عددی است.^[۹]

۳.۱. اعمال نیروی بازدارنده در مرز جامد

لایه‌ی از ذرات مرزی، با اعمال نیروی بازدارنده از نفوذ ذرات به داخل محیط جامد جلوگیری می‌کنند. این نیرو ممکن است از نوع نیروهای مولکولی لئارد-جونز^[۱۰] یا از جنس گرادیان تابع هسته باشد.^[۱۱] انتخاب تابع مناسب مستقیماً بر کیفیت نتایج حاصل از حل عددی مؤثر است.^[۸] تاکنون تابعی کلی که در انواع مسائل عملکرد قابل قبولی داشته باشد، معرفی نشده است. در سال ۲۰۰۳ مسئله‌ی برخورد یک جسم صلب با سطح سیال با بهره‌گیری از این روش حل شد.^[۱۱]

مشکل عمده در روش اس‌پی‌اچ، علاوه بر مشکل شرط مرزی، مربوط به رویه‌های مشتق‌گیری است. این رویه‌ها معمولاً شرط سازگاری^۱ را ارضا نمی‌کنند و در نتیجه دقت حل مسائل کاهش می‌یابد. مشکل سوم در روش اس‌پی‌اچ با تراکم‌پذیری ضعیف نهفته است. این روش ممکن است طی فرایند حل عددی معادلات حاکم بر جریان، منجر به نوسانات فشاری غیرفیزیکی شود. نوشتار حاضر در جهت رفع سه محدودیت فوق ارائه شده است.

در این نوشتار ابتدا معادلات مربوط به روش هیدرودینامیک ذره‌ی هموار اصلاح‌شده به اختصار تشریح می‌شود. سپس روش پیشنهادی اعمال شرط مرزی جامد متحرک و معادلات حرکت جسم جامد، در بخش‌های بعدی توضیح داده می‌شوند. پس از آن، الگوریتم عددی حل و نکات تکمیلی در ابتدای بخش نتایج ذکر خواهند شد. در بخش نتایج شبیه‌سازی مسائل مربوط به سقوط اجسام جامد دایره‌ی شکل در شرایط گوناگون، به‌صورت کمی و کیفی با توجه به نتایج گزارش شده در مقالات موجود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در پایان هم نتیجه‌گیری‌های به دست آمده از بررسی حاضر ارائه می‌شود.

۶. روش اعمال مرز جامد

چنان که در مقدمه ذکر شد، روش‌های گوناگون به منظور اعمال شرط مرزی جامد، در پیاده‌سازی روش اسپسی‌اچ، ابداع شده است. در این مطالعه راه حل جدیدی برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش معرفی، و با روش ذرات مجازی استاتیک^[۱۲] که در شبیه‌سازی‌های مختلفی به کار گرفته شده مقایسه می‌شود.

در روش ذرات مجازی استاتیک، به منظور اعمال شرط عدم لغزش، سرعت ذرات مرز جامد و ذرات مجازی استاتیک، به عنوان جزیی از یک جسم صلب با سرعت جسم جامد مربوطه برابر گرفته می‌شود.^[۱۱] اگرچه الگوریتم اعمال روش ذرات مجازی استاتیک در مرزهای جامد از نظر عددی سرعت خوبی دارد، مشکلاتی در محاسبه‌ی فشار مرزها ایجاد می‌کند که در نتایج به آن پرداخته می‌شود.

محاسبه‌ی صحیح نیروهای هیدرودینامیکی در شبیه‌سازی جریان‌های حاوی اجسام جامد معلق نقشی حیاتی دارد.

برای اعمال شرط مرزی جامد روشی مناسب است که میدان فشاری را به صورت هموار و با دقت خوب در اطراف جسم جامد به دست دهد. روش جدیدی که در اینجا معرفی می‌شود احتیاجی به ذرات مجازی ندارد و یک لایه ذره‌ی اسپسی‌اچ تشکیل دهنده‌ی سطح جامد آن است. چیدمان ذرات برای این روش در اطراف یک جسم دایره‌ی در شکل ۱ نشان داده شده است.

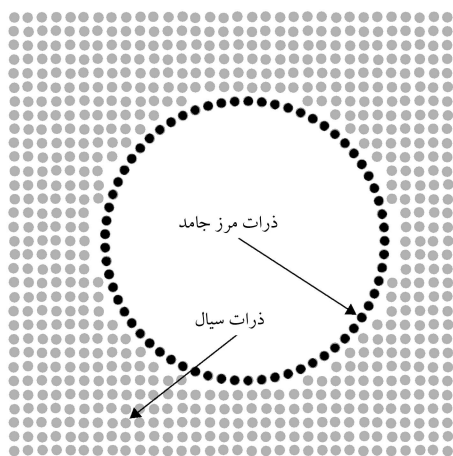
برای محاسبه‌ی فشار و چگالی ذرات مرزی، معادله‌ی جریان سیال روی مرز حل می‌شود. معادله‌ی بقای اندازه حرکت ۳ را می‌توان چنین بازنویسی کرد:

$$\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} \cdot \vec{n} = -\frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{n} + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}}{\rho} \cdot \vec{n} + \vec{g} \cdot \vec{n} \quad (12)$$

که در آن، \vec{n} بردار عمود یکه به سمت خارج و $\vec{\tau}$ تنسور تنش انحرافی است. گسسته‌سازی جمله‌ی گرادیان فشار در معادله‌ی ۱۲ برای ذره‌ی مرزی i به صورت رابطه‌ی ۱۳ انجام می‌شود.

$$\left(\sum_j \omega_j \vec{B}_i \cdot \vec{\nabla} W_{ij} \frac{P_i - P_j}{\bar{\rho}_{ij}} \right) \cdot \vec{n}_i = -\frac{d\vec{V}_i}{dt} \cdot \vec{n}_i + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}}{\rho_i} \cdot \vec{n}_i + \vec{g} \cdot \vec{n}_i \quad (13)$$

که در آن جمله‌ی $\frac{d\vec{V}_i}{dt}$ بیان‌گر شتاب ذره‌ی i است که بر اساس شتاب پیش‌بینی شده‌ی جسم جامد مربوطه در هر گام زمانی محاسبه می‌شود. بنابراین، P_i را می‌توان از



شکل ۱. چیدمان ذرات مرزی در روش جدید.

برای محاسبه‌ی جملات مربوط به لزجت در معادله‌ی جریان، گسسته‌سازی مشتق دوم سرعت ضرورت می‌یابد. در جریان‌های با عدد رینولدز پایین که در آن‌ها لزجت نقشی تعیین‌کننده دارد، باید رویه‌ی مناسب برای تقریب مشتق مرتبه‌ی دوم انتخاب شود. از میان شیوه‌های مختلف، رویه‌ی سازگار زیر معرفی شده است:^[۱۵]

$$\langle \nabla^2 u \rangle_i = \vec{B}_i : \sum_j \omega_j \vec{e}_{ij} \vec{\nabla} W_{ij} \left[\frac{(u_j - u_i)}{r_{ij}} - \langle \vec{e}_{ij} \cdot \vec{\nabla} u \rangle_i \right] \quad (7)$$

که در آن $\vec{e}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$ و جمله‌ی $\langle \nabla u \rangle_i$ از معادله‌ی ۵ محاسبه می‌شود. تنسور اصلاحی \vec{B} از دسته معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\vec{B}_i : \left[\sum_j \omega_j \vec{r}_{ij} \vec{e}_{ij} \vec{e}_{ij} \vec{\nabla} W_{ij} + \left(\sum_j \omega_j \vec{e}_{ij} \vec{e}_{ij} \vec{\nabla} W_{ij} \right) \cdot \vec{B}_i : \left(\sum_j \omega_j \vec{r}_{ij} \vec{r}_{ij} \vec{\nabla} W_{ij} \right) \right] = -\vec{I} \quad (8)$$

که در آن، \vec{I} تنسور واحد مرتبه‌ی دوم است. با استفاده از این رویه، علاوه بر افزایش دقت، سرعت حل مسائل نیز با کاهش تعداد همسایه‌ی مورد نیاز برای هر ذره به شدت بهبود می‌یابد.^[۱۵]

لازم به ذکر است که، تنسورهای اصلاحی \vec{B}_i و \vec{B}_i در جبران کمبود ذرات اسپسی‌اچ در اطراف مرز جامد، نقشی تعیین‌کننده دارند. بنابراین، این رویه‌های اصلاحی محاسبه‌ی معادلات جریان را در همسایگی و روی مرز جامد بهبود می‌بخشند. این ویژگی اعمال مرز غیر لغزشی پیشنهاد شده در این نوشتار را امکان‌پذیر می‌سازد. حل همزمان معادلات حرکت و پیوستگی در روش اسپسی‌اچ تراکم‌پذیر ضعیف، منجر به نوسانات غیرفیزیکی فشار -- به ویژه در هندسه‌های پیچیده -- خواهد شد. اصلاح اعمال شده برای جلوگیری از این مشکل در ادامه ارائه می‌شود.

۵. تصحیح معادله‌ی بقای جرم

راه حل مشکل نوسانات غیر فیزیکی فشار، که در اسپسی‌اچ تراکم‌پذیر ضعیف رخ می‌دهد،^[۱۶] اصلاح معادله‌ی بقای جرم تشخیص داده شده است.^[۱۷] با در نظر داشتن ایده‌ی مطرح شده‌ی پیشین^[۱۸] معادله‌ی اصلاح شده‌ی ۹ پیشنهاد می‌شود:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \Delta t \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} \right) \right] \quad (9)$$

که در آن $\nabla \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\rho}$ بیان‌گر دوبار مشتق‌گیری عددی از فشار است. برای هر ذره‌ی i جملات معادله‌ی ۹ چنین محاسبه می‌شود:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\rho_i} = \sum_j \omega_j \vec{B}_i \cdot \nabla W_{ij} \cdot \left(\frac{\vec{\nabla} P}{\rho_j} - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho_i} \right) \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\rho_i} = \vec{B}_i : \sum_j \omega_j \vec{e}_{ij} \vec{\nabla} W_{ij} \left(\frac{P_i - P_j}{\bar{\rho}_{ij}} - \vec{e}_{ij} \cdot \frac{\vec{\nabla} P}{\rho_i} \right) \quad (11)$$

در این معادلات $\bar{\rho}_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$ در ادامه، روش جدید اعمال شرط مرزی عدم لغزش برای حل معادلات حاکم بر جریان به روش اسپسی‌اچ توضیح داده می‌شود.

معادله‌ی ۱۳ صریحاً به دست آورد. در نهایت، چگالی ذره‌ی i با استفاده از معادله‌ی حالت ۴ محاسبه می‌شود.

۸. انتگرال‌گیری زمانی

برای حل دسته معادلات حاکم بر جریان در زمان، از یک الگوریتم پیش‌بینی-تصحیح دومرحله‌یی استفاده شده است. ابتدا سرعت و چگالی ذرات سیال در زمان میانی -- که بالا نویس * نشان‌دهنده‌ی آن است -- برآورد می‌شوند. فشار سیال به‌وسیله‌ی معادله‌ی حالت ۴ برای چگالی‌های جدید به‌روزرسانی می‌شود. برای تصحیح \vec{V} و ρ در زمان میانی دوم -- که بالا نویس ** نشان‌دهنده‌ی آن است -- معادلات ۳ و ۹ برای متغیرهایی که در زمان * برآورد شده بودند حل می‌شود. در نهایت از متوسط‌گیری مقدار پیش‌بینی‌شده در * و تصحیح‌شده در **، مقدار متغیرها در زمان جدید به دست می‌آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}^{n+1} = \frac{1}{\tau} (\vec{V}^* + \vec{V}^{**}) \\ \rho^{n+1} = \frac{1}{\tau} (\rho^* + \rho^{**}) \\ \vec{r}^{n+1} = \Delta t \vec{V}^{n+1} \end{array} \right\} \quad (19)$$

که در آن Δt فاصله‌ی بین دو گام زمانی پی در پی است و از شرط زیر پیروی می‌کند:^[۲]

$$\Delta t = \alpha_{\min} \left\{ \frac{\delta_{\min}}{U_{\max}}, \frac{\delta_{\min}^r}{\mu/\rho} \right\} \quad (20)$$

δ_{\min} کوچک‌ترین فاصله میان ذرات اس‌پی‌اچ را نشان می‌دهد، α یک مقدار ثابت و $U_{\max} = V_{\max} + c$ بیشینه سرعت مشخصه‌ی جریان سیال شبه تراکم‌پذیر است. c سرعت صوت را نشان می‌دهد و V_{\max} بیشینه سرعت ذرات اس‌پی‌اچ است. یادآور می‌شود که سرعت‌های خطی و زاویه‌یی اجسام جامد نیز در هر دو مرحله‌ی پیش‌بینی و تصحیح محاسبه شده و در انتهای هر گام زمانی متوسط‌گیری می‌شود.

طی شبیه‌سازی به‌روش اس‌پی‌اچ، مشکلاتی همچون توزیع غیریکنواخت و درهم‌شدن ذرات رخ می‌دهد. برای جلوگیری از این مشکلات، اصلاح مکان ذرات سیال به‌اندازه‌ی $\delta \vec{r}_i$ پیشنهاد شده که از رابطه‌ی ۲۱ به دست می‌آید:^[۲۰]

$$\delta \vec{r}_i = \beta V_{\max} \Delta t \sum_j \frac{\vec{r}_i^T}{r_{ij}^T} \vec{e}_{ij} \quad (21)$$

در این رابطه N_i نشان‌گر تعداد ذرات در همسایگی ذره‌ی i است. مقدار مناسب برای ضریب ثابت β بین 0.1 تا 0.100 گزارش شده است. برای جلوگیری از رشد خطا، سایر متغیرها نیز باید با استفاده از بسط سری تیلور تصحیح شوند.^[۲۰]

در تمام شبیه‌سازی‌های این مطالعه از تابع هسته‌ی وندلند مرتبه‌ی پنج^[۲۱] با طول هموارسازی h ، که برابر فاصله‌ی اولیه‌ی ذرات سیال (δ_0) است، استفاده می‌شود. این تابع عبارت است از:

$$W_0 = \begin{cases} W(|\vec{r} - \vec{r}_j|) & 0 \leq \frac{|\vec{r} - \vec{r}_j|}{h} < 1 \\ 0 & \frac{|\vec{r} - \vec{r}_j|}{h} > 1 \end{cases} \quad (22)$$

که در دو بعد، $W_0 = \frac{V}{\pi h^2}$ برای مسائلی که در آن‌ها از راه حل ذرات مجازی استاتیک در مرز جامد استفاده شده است، با توجه به نسبت $\frac{h}{\delta_0}$ باید سه لایه ذرات مجازی

۷. معادلات حرکت جسم جامد

سرعت و مکان اجسام جامد با توجه به قانون حرکت نیوتن، در هرگام زمانی با یک روش صریح به دست می‌آید. برای جسم جامد s معادلات حرکت خطی و زاویه‌یی عبارت‌اند از:

$$M_s \frac{d\vec{V}_s}{dt} = \vec{f}_s + \vec{b}_s \quad (14)$$

$$I_s \frac{d\vec{\Omega}_s}{dt} = \vec{m}_s \quad (15)$$

که در آن‌ها M_s جرم جسم جامد، و I_s گشتاور لختی آن است. همچنین $\vec{\Omega}_s$ سرعت زاویه‌یی و \vec{b}_s بردار نیروی جسمی را نشان می‌دهد. به‌جای معرفی گرانش به‌عنوان نیروی جسمی وارد بر کل دامنه‌ی حل سیال-جامد می‌توان نیروی شناوری^۲ را در معادله‌ی ۱۴ اعمال کرد.^[۱۹] به این ترتیب، برای جسم جامد s می‌توان نوشت:

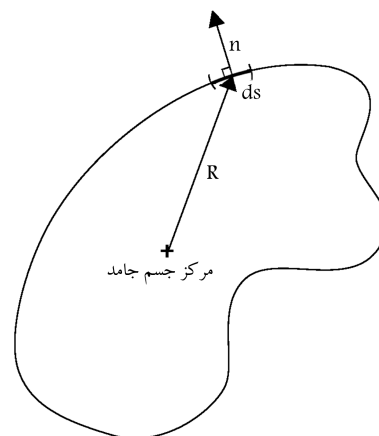
$$\vec{b}_s = (M_s - \rho_{fluid} \bar{V}_s) \vec{g} \quad (16)$$

که در آن \bar{V}_s حجم جسم جامد است. بنابراین در معادله‌ی حاکم بر جریان، P نمایان‌گر فشار دینامیکی سیال است و \vec{g} حذف می‌شود. در معادلات ۱۴ و ۱۵ \vec{f}_s و \vec{m}_s بیان‌گر نیرو و گشتاور وارده از سیال بر سطح جسم جامد s هستند و از روابط ۱۷ و ۱۸ محاسبه می‌شوند:

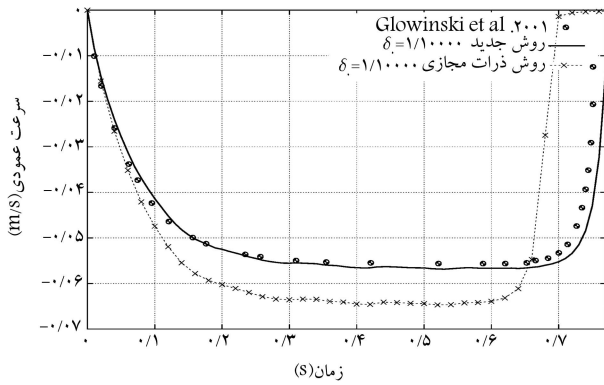
$$\vec{f}_s = \int_{boundary} (-P \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{\tau}) ds \quad (17)$$

$$\vec{m}_s = \int_{boundary} \vec{R} \times (-P \vec{n} + \vec{n} \cdot \vec{\tau}) ds \quad (18)$$

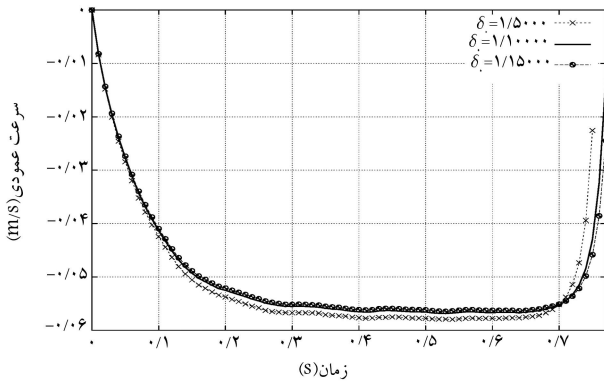
بردار \vec{R} و المان سطحی ds در شکل ۲ مشخص شده‌اند. مقدار تقریبی این دو انتگرال از تجمیع نیروها روی ذرات مرزی به دست می‌آید.



شکل ۲. شمای کلی جسم جامد.



شکل ۴. سرعت عمودی جسم جامد به دست آمده از روش پیشنهادی، در مقایسه با روش ذرات مجازی و روش های پیشین. [۲۲]



شکل ۵. هم‌گرایی نتایج مربوط به سرعت عمودی، برای گسسته‌سازی‌های مختلف.

خطای برآورد فشار در اطراف جسم جامد، که از راه حل ذرات مجازی محاسبه شده، به ایجاد اختلاف جدی با نتیجه‌ی مورد نظر منجر می‌شود.

زمانی که جسم جامد به سرعت حدی حین سقوط می‌رسد، نوساناتی در سرعت جسم نمایان می‌شود که ناشی از نوسانات موج‌های فشاری ایجاد شده در سیال با تراکم‌پذیری ضعیف است. این شبیه‌سازی برای $\delta = 1/5000$ (m) و $1/15000$ (m) تکرار شده و نتایج مربوط به سرعت عمودی مرکز استوانه‌ی دایره‌ی شکل، در شکل ۵ نشان داده شده است. اختلاف میان نتایج سرعت عمودی برای $\delta = 1/15000$ (m) و $\delta = 1/10000$ (m)، کم‌تر از $1/10000$ (m) است، که نشان از هم‌گرایی روش برای فاصله‌ی ذرات کوچک‌تر از $\delta = 1/10000$ (m) دارد. کانتورهای فشار دینامیکی در زمان 0.64 (s) در شکل ۶ نمایش داده شده است. در این مسئله استراتژی خاصی برای برخورد جامد - جامد در نظر گرفته نشده است. بنابراین نتایج تا جایی نماینده‌ی فیزیک جریان است که فاصله‌ی عمودی میان سطوح جامد بیش از طول هموارسازی (h) باشد.

۲.۹. سقوط دو استوانه‌ی دایره‌ی شکل در کانال بسته‌ی حاوی سیال

در این مسئله تعامل هیدرودینامیکی بین دو جسم دایره‌ی شکل مشابه بررسی می‌شود که تحت اثر شتاب گرانش $g = 9.81$ (m/s²) در حال سقوط در کانال بسته‌ی حاوی سیال اند. شمای کلی هندسه‌ی مسئله مشابه مسئله‌ی قبل است و مراکز اجسام جامد در لحظه‌ی آغاز حرکت در $y = 0.05$ (m) و $y = 0.53$ (m) و روی خط مرکزی کانال قرار دارند. جسم عقبی پس از مدتی در جریان دنباله‌ی جسم جلویی قرار می‌گیرد و با سرعت بیشتری نسبت به آن سقوط می‌کند؛ این پدیده

پشت مرز استفاده شود. برای اطمینان از تقریب صحیح شرط عدم تراکم‌پذیری، سرعت صوت (c) طوری انتخاب می‌شود که از 10° برابر (در این جا حدوداً 20° برابر) سرعت پیشینه‌ی ذرات در دامنه‌ی حل بیش‌تر باشد. [۱] ثابت α در معادله‌ی 20° برابر تعیین شده است. برای ثابت β در رابطه‌ی مربوط به جابه‌جایی ذرات سیال (رابطه‌ی ۲۱) بازه‌ی 0.01 تا 0.05 نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد.

۹. نتایج

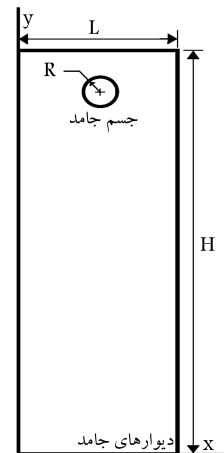
در این بخش نتایج شبیه‌سازی مسائل دوبعدی با عدد رینولدز کوچک - مربوط به سقوط اجسام جامد دایره‌ی شکل در کانال حاوی سیال نیوتنی - ارائه شده است. مسئله‌ی سقوط یک استوانه‌ی دایره‌ی شکل صلب، به‌عنوان مسئله‌ی مبنا، به‌منظور سنجش روش پیشنهادی و مقایسه‌ی نتایج حاصل از آن با روش ذرات مجازی استاتیک برای مرز جامد ارائه شده است. اثر حضور جسم جامد ثانویه در کانال بسته‌ی حاوی سیال در مسئله‌ی دوم بررسی می‌شود. در پایان، نتیجه‌ی شبیه‌سازی سقوط یک جسم جامد دایره‌ی شکل در حضور یک مانع ثابت ارائه می‌شود.

۱.۹. سقوط استوانه‌ی دایره‌ی شکل در کانال بسته‌ی حاوی سیال

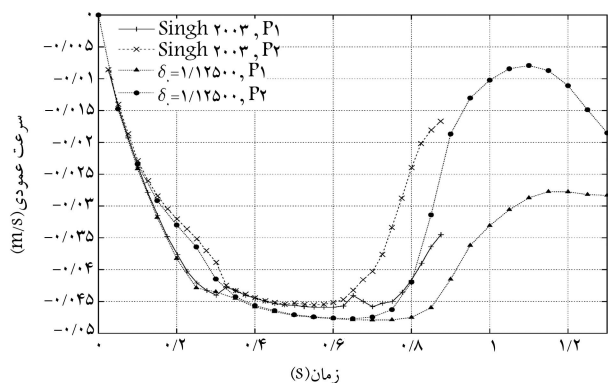
در این مسئله شتاب گرانش $g = 9.81$ (m/s²) عامل شروع حرکت جسم جامد دایره‌ی شکل در کانال سیال است. با انتخاب متغیرهای سیال و کانال، [۲۲] شمای کلی مسئله در شکل ۳ نمایش داده شده است.

خلاصه‌ی از خصوصیات مسئله عبارت است از: ابعاد دامنه‌ی حل $H = 0.06$ (m) و $L = 0.02$ (m)؛ شعاع جسم جامد $R = 0.00125$ (m)؛ مکان اولیه‌ی مرکز جسم جامد $(0.004, 0.01)$ ؛ چگالی جامد $\rho_s = 1250$ (kg/m³)؛ چگالی سیال $\rho_f = 1000$ (kg/m³)؛ لزجت سیال $\mu = 0.01$ (Pa.s).

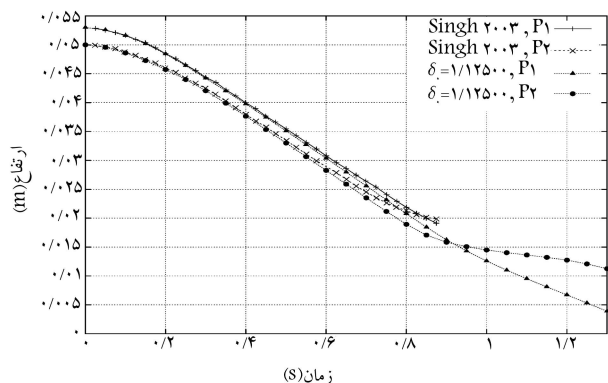
در این مسئله $\beta = 0.02$ و $c = 170$ (m/s) تعیین شده است. برای پیش‌گیری از جدایش ذرات، به‌هم‌ریختگی با اندازه‌ی پیشینه‌ی 0.05δ در توزیع اولیه‌ی ذرات اس‌پی‌اچ سیال وارد شده است. در شکل ۴ سرعت عمودی جسم جامد که با گسسته‌سازی $\delta = 1/10000$ (m) برای راه حل پیشنهادی و ذرات مجازی استاتیک در مرز جامد به دست آمده، با نتیجه‌ی گزارش‌شده‌ی قبلی [۲۲] مقایسه شده است که نشانگر هم‌خوانی خوب نتیجه‌ی حاصل از راه حل جدید است.



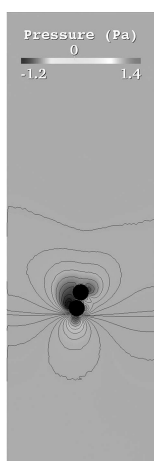
شکل ۳. شمای کلی مسئله‌ی سقوط استوانه‌ی دایره‌ی شکل در کانال بسته.



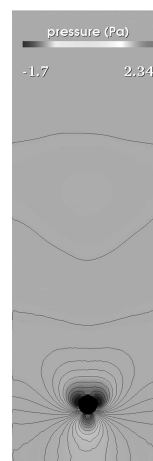
شکل ۷. سرعت عمودی اجسام جامد دایره‌یی شکل، در مقایسه با [۲۵].



شکل ۸. ارتفاع اجسام جامد دایره‌یی شکل، در مقایسه با [۲۵].



شکل ۹. کانتورهای فشار دینامیکی در زمان (s) ۰٫۷۷۵.



شکل ۱۰. کانتورهای فشار دینامیکی در زمان (s) ۰٫۶۴.

«پس‌راندن^۳» نامیده می‌شود. پس از آن سطوح دو جسم تقریباً در تماس با هم قرار می‌گیرند، که این مرحله را «بوسیدن^۴» می‌نامند. در نهایت، مجموعه‌ی دو جسم چرخیده و جسم عقبی و جلویی جابه‌جا می‌شوند. این مرحله که به جدایی اجسام دایره‌یی شکل از هم می‌انجامد «غلطیدن^۵» نامیده می‌شود. این پدیده که به صورت تجربی برای دو کره دیده شده، [۲۳] اولین بار در سال ۱۹۹۲ به صورت عددی شبیه‌سازی شد. [۲۴] در اینجا، مسئله‌یی مشابه مسئله‌ی مطرح‌شده‌ی پیشین [۲۵] حل شده و شبیه‌سازی و نتیجه‌ی آن با نتیجه‌ی گزارش شده در آن مقایسه می‌شود. نتایج گزارش شده‌ی قبلی [۲۵] برای گسسته‌سازی‌های مختلف، تفاوت‌هایی جزئی با هم دارند. این تفاوت‌ها به خصوص در مرحله‌ی بوسیدن -- برخورد بین دو جسم جامد -- دیده می‌شوند. خلاصه‌یی از خصوصیات محیط در ادامه می‌آید: ابعاد دامنه‌ی حل $H = 0.06$ (m) و $L = 0.02$ (m) شعاع اجسام جامد $R = 0.001$ (m)؛ چگالی جامد $\rho_s = 1100$ (kg/m³)؛ چگالی سیال $\rho_f = 1000$ (kg/m³)؛ لزجت سیال $\mu = 0.005$ (Pa.s).

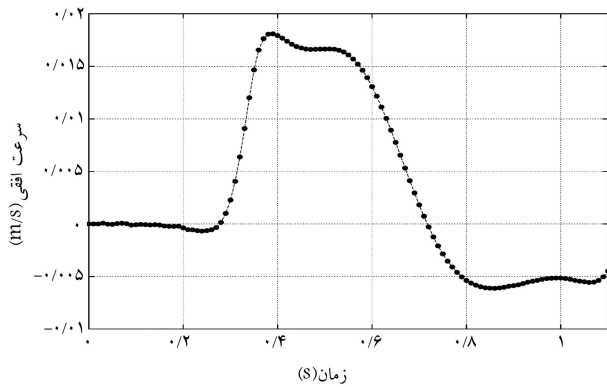
در این مسئله $\beta = 0.02$ و $c = 170$ (m/s) انتخاب شده و به هم‌ریختگی با اندازه‌ی بیشینه‌ی 0.056 در توزیع اولیه‌ی ذرات اسپری‌اج سیال وارد شده است. فاصله‌ی اولیه‌ی ذرات برابر با $1/125000$ (m) در نظر گرفته شده تا نسبت قطر به این فاصله مقدار ثابتی برابر با $R/\delta = 25$ -- در مقایسه با مسئله‌ی قبل -- بماند. در شبیه‌سازی‌های عددی، در نظر گرفتن لایه‌ی بسیار نازک سیال بین سطوح به هم‌رسیده‌ی جامد ممکن نیست. در نتیجه برای حالت‌های بحرانی، یک نیروی بازگشتی مجازی [۲۲] یا روغن‌کاری [۲۶] برای پیش‌گیری از تداخل سطوح و اختلال در فرایند حل در نظر گرفته می‌شود. در این نوشتار از نیروی بازگشتی با تابع مربوطه [۲۷] استفاده می‌شود:

$$\vec{F}_{sq} = \begin{cases} 0 & d > 2R + \varepsilon \\ k(\vec{r}_s - \vec{r}_q) [(2R + \varepsilon)^2 - d^2] & d \leq 2R + \varepsilon \end{cases} \quad (23)$$

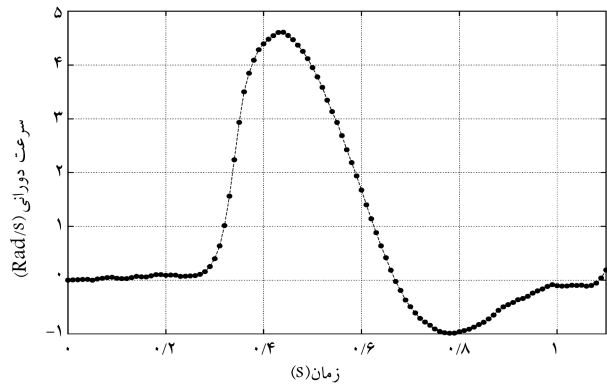
در رابطه‌ی ۲۳، نیرویی \vec{F}_{sq} است که به مرکز جرم جسم جامد s ، حین تعامل با جسم جامد q -- یعنی زمانی که فاصله‌ی آن‌ها، $d = |\vec{r}_s - \vec{r}_q|$ ، کوچک‌تر از ε است -- وارد می‌شود. ثابت‌های $k = 1.5 \times 10^6$ (kg/m³s) و $\varepsilon = 3\delta$ برای این مسئله تعیین شده‌اند. شکل‌های ۷ و ۸ سرعت عمودی و ارتفاع اجسام را در زمان‌های مختلف، در مقایسه با نتایج گزارش‌شده، [۲۵] نشان می‌دهد. تا قبل از مرحله‌ی بوسیدن، هم‌خوانی خوبی بین نتایج وجود دارد. یادآور می‌شود که نتایج

شبیه‌سازی‌های مختلف برای این مسئله پس از برخورد جامد-جامد، تنها از نقطه نظر کیفی قابل مقایسه‌اند و تغییر گسسته‌سازی و یا تابع نیروی بازگشتی، بر نتایج حاصل از یک روش نیز تأثیر می‌گذارد. شکل‌های ۹ و ۱۰ نمایان‌گر کانتورهای فشار دینامیکی در زمان‌های (s) ۰٫۷۷۵ و (s) ۰٫۹۵ هستند. این لحظات به آغاز و پایان مرحله‌ی غلتیدن مربوط‌اند.

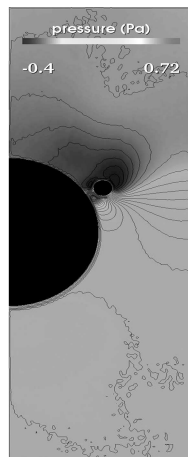
۳.۹. سقوط یک جسم جامد دایره‌یی شکل در حضور یک مانع ثابت
در این مسئله اثرات دیواره بر جابه‌جایی جسم جامد بررسی می‌شود. چنان که در شکل ۱۱ نشان داده شده، جسم دایره‌یی شکل در یک کانال بسته‌ی حاوی سیال از



شکل ۱۳. سرعت افقی جسم جامد دایره‌یی شکل در حضور مانع ثابت.



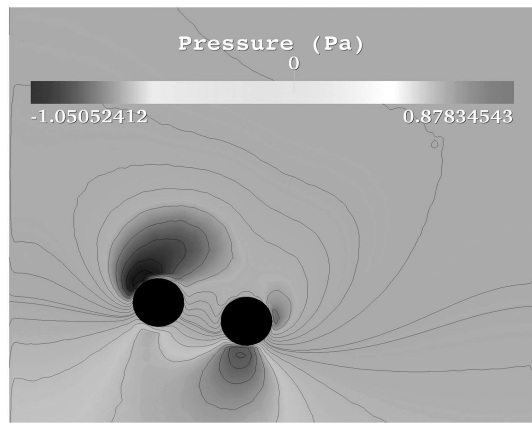
شکل ۱۴. سرعت زاویه‌یی جسم جامد دایره‌یی شکل در حضور مانع ثابت.



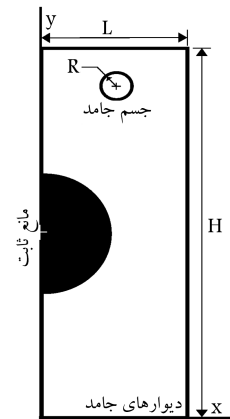
شکل ۱۵. کانتورهای فشار دینامیکی در زمان (s) ۰٫۳۴.

۱۰. نتیجه‌گیری

در این مطالعه یک روش هیدرودینامیک ذره‌ی هموار ارائه شد که از قابلیت شبیه‌سازی حرکت اجسام جامد معلق در سیال برخوردار است. به منظور محاسبه‌ی صحیح نیروهای وارد بر اجسام جامد متحرک، روش‌های معمول برای اعمال شرط مرزی جامد مورد بازنگری قرار گرفت و روش جدیدی ارائه شد. استفاده از این روش منوط به محاسبه‌ی دقیق‌تر مشتقات متغیرهای مسئله، با توجه به توزیع ناقص ذرات در اطراف مرزهای جامد است. بنابراین، از روش‌های اصلاح‌شده‌ی مشتق‌گیری مرتبه اول و دوم بهره گرفته شد. همچنین به منظور کنترل نوسانات مصنوعی فشار یک معادله‌ی



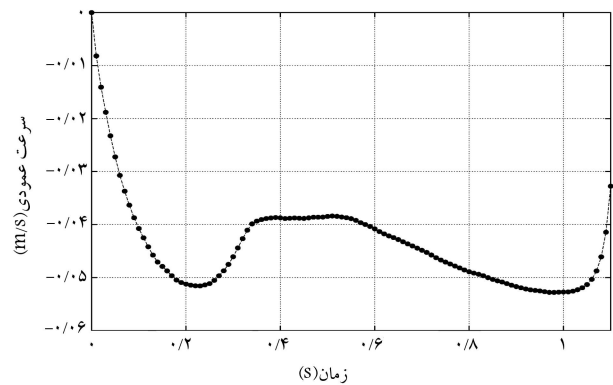
شکل ۱۰. کانتورهای فشار دینامیکی در زمان (s) ۰٫۹۵.



شکل ۱۱. شمای کلی مسئله‌ی سقوط استوانه‌ی دایره‌یی شکل در کانال بسته.

مقابل مانعی به‌شکل نیم‌دایره -- که شعاع آن نصف عرض کانال است -- سقوط می‌کند. متغیرهای روش و مشخصات سیال و جامد، برابر با اعداد ارائه شده در مسئله‌ی سقوط استوانه‌ی دایره‌یی شکل در کانال بسته هستند. این شبیه‌سازی برای $\delta = 1.1 \times 10^{-5}$ (m) انجام شده و مکان اولیه‌ی جسم جامد در $x = 0.1$ (m) و $y = 0.5$ (m) قرار دارد.

شکل‌های ۱۲ تا ۱۴ به ترتیب، سرعت‌های عمودی، افقی و زاویه‌یی جسم جامد را نشان می‌دهند. در شکل ۱۵ نیز کانتورهای فشار دینامیکی در $t = 0.34$ (s) که جسم تقریباً در نزدیک‌ترین فاصله با سطح مانع قرار دارد، نشان داده شده است.



شکل ۱۲. سرعت عمودی جسم جامد دایره‌یی شکل در حضور مانع ثابت.

- ρ : چگالی، (kg/m^3)
- \vec{V} : بردار سرعت، (m/s)
- t : زمان، (s)
- μ : ویسکوزیته، ($\text{Pa}\cdot\text{s}$)
- \vec{g} : بردار گرانش، (m/s^2)
- P : فشار، (Pa)
- c : سرعت صوت، (m/s)
- \vec{B} : بردار اصلاحی مشتق دوم
- \vec{I} : تانسور واحد
- \vec{e} : بردار یکه مکان
- \vec{T} : تانسور تنش انحرافی، (Pa)
- \vec{n} : بردار یکه نرمال
- M : جرم جسم جامد، (kg)
- I : ممان اینرسی جسم جامد، (kg/m^2)
- \vec{f} : نیروی وارد بر جسم جامد، (N)
- \vec{b} : نیروی شناوری، (N)
- $\vec{\Omega}$: بردار سرعت زاویه‌یی، (Rad/s)
- α : ضریب ثابت گام زمانی
- δ : فاصله ذرات SPH، (m)
- β : ضریب ثابت اصلاح مکان ذرات SPH
- V_{\max} : ماکزیمم سرعت ذرات SPH، (m/s)

اصلاح شده به‌جای معادله‌ی پیوستگی معمول در اس‌پی‌اچ جایگزین شد. محاسبه‌ی معادلات مربوط به حرکت سیال در روش حاضر پیچیده‌تر از روش اس‌پی‌اچ معمول است، اما در این روش امکان بهره‌گیری از تعداد کم‌تر (حدود ۲۱) ذره‌ی همسایه فراهم شده است؛ این مسئله حتی به کاهش نسبی زمان اجرا نیز انجامید. در این نوشتار قابلیت‌های روش پیشنهادی برای حل مسائل مربوط به سقوط اجسام جامد دایره‌یی شکل در کانال بسته‌ی حاوی سیال تراکم‌ناپذیر نیوتنی نشان داده شد. در این مسائل، تعامل هیدرودینامیکی دو استوانه‌ی جامد و اثرات دیواره بر سقوط جسم جامد دایره‌یی شکل بررسی شده است. در مسئله‌ی سقوط دو استوانه‌ی جامد دایره‌یی به‌منظور جلوگیری از برخورد سطوح جامد، از نیروی بازگشتی استفاده شد. در شبیه‌سازی مخلوط‌های پرتراکم سیال-جامد، که برخوردهای پی در پی جامد-جامد رخ می‌دهد، استفاده از شیوه‌های دقیق‌تر برای تحلیل چنین برخوردهایی موجب بهبود عملکرد روش حاضر خواهد شد.

جدول علائم

- w : حجم ذرات SPH، (m^3)
- w : تابع هسته، ($1/\text{m}^3$)
- h : طول هموارسازی، (m)
- \vec{r} : بردار مکان، (m)
- r : فاصله، (m)
- \vec{B} : تانسور اصلاحی مشتق اول

پانویس

1. consistency
2. buoyancy
3. drafting
4. kissing
5. tumbling

منابع (References)

1. Morris, J.P.; Fox, P.J. and Zhu, Y. "Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH", *Journal of Computational Physics*, **136**(1), pp. 214-226 (1997).
2. Monaghan, J.J. "Smoothed particle hydrodynamics", *Reports on Progress in Physics*, **68**, pp. 1703-1759 (2005).
3. Shao, S. and Lo, E.Y.M. "Incompressible SPH method for simulating newtonian and non-newtonian flows with a free surface", *Advances in Water Resources*, **26**(7), pp. 787-800 (2003).
4. Potapov, A.; Hunt, M. and Campbell, C. "Liquid-solid flows using smoothed particle hydrodynamics and the discrete element method", *Powder Technology*, **116**(2-3), pp. 204-213 (2001).
5. Cummins, S.J. and Rudman, M. "An SPH projection method", *Journal of Computational Physics*, **152**(2), pp. 584-607 (1999).
6. Colagrossi, A. and Landrini, M. "Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics", *Journal of Computational Physics*, **191**(2), pp. 448-475 (2003).
7. Oger, G.; Doring, M.; Alessandrini, B. and Ferrant, P. "Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries", *Journal of Computational Physics*, **213**(2), pp. 803-822 (2006).
8. Monaghan, J. and Kajtar, J. "SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries", *Computer Physics Communications*, **180**(10), pp. 1811-1820 (2009).
9. Shao, S. "Incompressible SPH simulation of water entry of a free-falling object", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **59**(1), pp. 91-115 (2009).
10. Liu, M. and Liu, G. "Smoothed particle hydrodynamics (SPH): An overview and recent developments", *Archives of Computational Methods in Engineering*, **17**(1), pp. 25-76 (2010).

11. Monaghan, J.; Kos, A. and Issa, N. "Fluid motion generated by impact", *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, **129**, pp. 250 (2003).
12. Gingold, R.A. and Monaghan, J.J. "Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to nonspherical stars", *Astrophysical Journal*, **181**, pp. 275-389 (1977).
13. Randles, P.W. and Libersky, L.D. "Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**(1-4), pp. 375-408 (1996).
14. Belytschko, T.; Krongauz, Y.; Organ, D.; Fleming, M. and Krysl, P. "Meshless methods: An overview and recent developments", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**(1-4), pp. 3-47 (1996).
15. Fatehi, R. and Manzari, M.T. "Error estimation in smoothed particle hydrodynamics and a new scheme for second derivatives", *Submitted to Computers & Mathematics with Applications* 61 (2), pp.482-498 (2011).
16. Lee, E.S.; Moulinec, C.; Xu, R.; Violeau, D.; Laurence, D. and Stansby, P. "Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method", *Journal of Computational Physics*, **227**(10), pp. 8417-8436 (2008).
17. Fatehi, R. and Manzari, M. "A remedy for numerical oscillations in weakly compressible smoothed particle hydrodynamics", *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, (under publication) (2010).
18. Rhie, C.M. and Chow, W.L. "Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation", *AIAA Journal*, **21**(11), pp. 1525-1532 (1983).
19. Perrin; A. and Hu, H. "An explicit finite difference scheme with spectral boundary conditions for particulate flows", *Journal of Computational Physics*, **227**(20), pp. 8776-8791 (2008).
20. Xu, R.; Stansby, P. and Laurence, D. "Accuracy and stability in incompressible SPH (ISPH) based on the projection method and a new approach", *Journal of Computational Physics*, **228**(18), pp. 6703-6725 (2009).
21. Wendland, H. "Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree", *Advances in Computational Mathematics*, **4**(1), pp. 389-396 (1995).
22. Glowinski, R.; Pan, T.; Hesla, T.; Joseph, D. and Periaux, J. "A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for the simulation of flow around moving rigid bodies: Application to particulate flow", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **184**(2-4), pp. 241-267 (2000).
23. Fortes, A.F.; Joseph, D.D. and Lundgren, T.S. "Non-linear mechanics of fluidization of beds of spherical particles", *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, **177**(1), pp. 467-483 (1987).
24. Hu, H.; Joseph, D. and Crochet, M. "Direct simulation of fluid particle motions", *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **3**(5), pp. 285-306 (1992).
25. Singh, P.; Hesla, T. and Joseph, D. "Distributed lagrange multiplier method for particulate flows with collisions", *International Journal of Multiphase Flow*, **29**(3), pp. 495-509 (2003).
26. Yan, Y.; Morris, J. and Koplik, J. "Hydrodynamic interaction of two particles in confined linear shear flow at finite Reynolds number", *Physics of Fluids*, **19**, pp. 113305 (2007).
27. Zhang, Z. and Prosperetti, A. "A method for particle simulation", *Journal of Applied Mechanics*, **70**, pp. 64 (2003).