

# بررسی تأثیر تعداد گره‌های المان بر دقت نتایج انتشار موج کشسان عرضی در ورق کامپوزیتی، با استفاده از روش المان طیفی

حمزه آخرت دوست\* (کارشناسی ارشد)

مصطفی صفدری شادلو (کارشناسی ارشد)

منوچهر صالحی (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهندسی مکانیک شریف  
دوره‌ی ۳-۱۴، شماره‌ی ۱، ص. ۳۰-۳۳

در این مقاله از روش المان طیفی برای تحلیل انتشار موج در ورق کامپوزیتی استفاده می‌شود. ویژگی اصلی این روش قطری بودن ماتریس جرم است که باعث می‌شود زمان تحلیل در مقایسه با روش المان محدود معمولی بسیار کوتاه‌تر شود. شبیه‌سازی برای المان‌های ۹، ۲۵ و ۳۶ گره، با قید رسیدن به هم‌گرایی ۲ درصد انجام می‌شود. از مقایسه‌ی نتایج نهایی (سرعت گروهی) به دست آمده با حل تحلیلی درخواهیم یافت که با افزایش تعداد گره‌های المان، در برخی حالات نتایج اندکی بهبود می‌یابد ولی در ازاء این افزایش دقت، زمان حل افزایش قابل توجهی پیدا می‌کند. بنابراین در این مسئله، استفاده از المان‌هایی با تعداد گره از نظر زمان محاسباتی ارجح است، اگرچه با افزایش تعداد گره‌های المان دقت تقریب تنش و کرنش بیشتر می‌شود.

hamzeh.a.d@gmail.com  
safdari@mech.sharif.edu  
msalehi@aut.ac.ir

واژگان کلیدی: انتشار موج، ورق کامپوزیتی، روش المان طیفی، دقت محاسباتی.

## ۱. مقدمه

انتشار موج ناشی از ضربه در مواد کامپوزیتی را به صورت تحلیلی شبیه‌سازی کرد. [۵] او انتشار موج تنش در راستای ضخامت را مورد توجه قرار داد. همچنین جنبه‌هایی از شبیه‌سازی عددی انتشار موج لام در ورق کامپوزیتی با استفاده از روش المان محدود و به کمک تحلیل دینامیکی صریح ارائه شد. [۶] برای شرح دقیق و مؤثر موج تحریکی و دریافتی به وسیله‌ی محرک و سنسور پیزوالکتریک، اثر تماس بین سطح دیسک‌های پیزوالکتریک و ورق کامپوزیتی با استفاده از نیروی برشی، ممان خمشی و جابه‌جایی معادل مدل شد.

روش المان طیفی در سال ۱۹۸۴ به وسیله‌ی پاترا پیشنهاد شد. [۷] ایده‌ی این روش بسیار شبیه به روش المان محدود معمولی است و تنها در تابع تقریبی مورد استفاده با آن تفاوت دارد. در این روش گره‌های المان در محل سفرهای تابعی متعامد مثل لژاندر<sup>۱</sup> قرار داده می‌شوند. نتیجه‌ی این انتخاب قطری شدن ماتریس جرم است که موجب می‌شود هزینه محاسباتی در این روش بسیار کم‌تر از روش المان محدود معمولی باشد. به همین دلیل این روش در حل مسائل مهندسی از قبیل دینامیک سیالات، [۸] انتقال حرارت، [۹] آکوستیک [۱۰] و... مورد توجه محققان و دانشمندان قرار گرفته است.

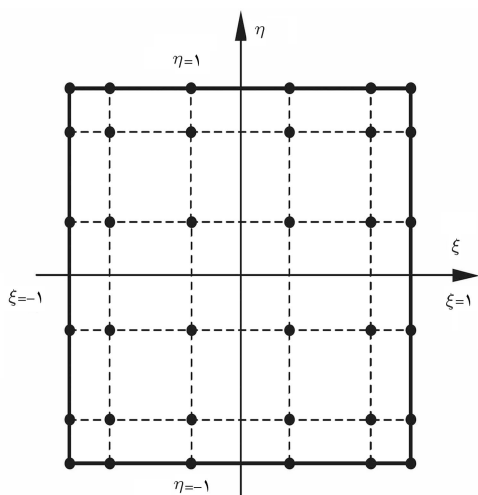
همچنین در سال‌های اخیر، روش المان طیفی در حل مسائل موج کشسان در سازه‌های کامپوزیتی مورد استفاده قرار گرفته است. [۱۱] و [۱۲] محققین با بررسی انتشار موج تنش عرضی در ورق کامپوزیتی تحت اثر بار خارج از صفحه‌ی که بر مرکز ورق وارد می‌شد چگونگی ارتباط سرعت موج کشسان عرضی در ماده کامپوزیتی

مسئله‌ی اصلی در انتشار موج کشسان با فرکانس‌های بالا در سازه‌های کامپوزیتی، به المان‌بندی فضا مربوط می‌شود. برای به دست آوردن حل دقیقی از معادله‌ی حرکت باید تعداد درجات آزادی زیادی در نظر گرفته شود. کاربرد روش‌های معمول برای محدوده‌های فرکانس بالا از نظر محاسباتی غیر بهینه خواهد بود زیرا نمی‌توانند به خوبی شکل مودهای بالا را در نظر بگیرند. روش‌های متداول مدل‌سازی انتشار موج عبارت‌اند از: تفاضل محدود، المان محدود، المان مرزی، المان نواری محدود، تبدیل فوریه سریع و غیره. [۱]

در یک روش ماتریسی که برای حل مسئله‌ی انتشار موج در محیط غیرایزوتروپ چندلایه، تحت اغتشاش هارمونیک ارائه شد [۲] نیروی اغتشاش در هر لحظه به صورت یک بار سطحی روی سطح بالایی ورق اعمال می‌شود. در بررسی دو نوع از امواج منتشره در ورق کامپوزیتی چندلایه، [۳] برای به دست آوردن حل تقریبی صریح از روش اغتشاش استفاده شد و امواج منتشره در راستای ضخامت و نیز امواج درون‌صفحه‌ی مورد بررسی قرار گرفت. در روشی که محققین برای تحلیل انتشار موج صفحه‌ی در ورق کامپوزیتی ارائه دادند، [۴] ورق براساس فرضیات موج صفحه‌ی و سختی‌های مؤثر ورق مدل شد. آنان نشان دادند که سرعت انتشار تابعی از فرکانس ورودی، چیدمان لایه‌ها، جهت انتشار و نوع ماده‌ی به کار رفته است. پارگا -لاندا

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۹/۳۰، اصلاحیه ۱۳۹۰/۳/۱، پذیرش ۱۳۹۰/۵/۱۱.



شکل ۱. موقعیت گره‌ها در المان ۳۶ گره<sup>[۱]</sup>

با جهت و نسبت حجمی الباف را نشان دادند.<sup>[۱]</sup> آنان روش المان طیفی را برای بررسی انتشار موج کشسان در محیط‌های دوبعدی و سه‌بعدی غیرایزوتروپیک مورد بررسی قرار دادند<sup>[۱۱]</sup> و با مقایسه‌ی نتایج این روش با نتایج یک روش تحلیلی برای حل انتشار موج در یک محیط ایزوتروپیک عرضی دوبعدی از یک سو، و مقایسه‌ی نتایج آن با نتایج روش دیفرانسیل محدود برای تحلیل انتشار موج در محیط ناهمگن و غیرایزوتروپ دوبعدی از سوی دیگر، دقت و صحت نتایج آن را نشان دادند. به علاوه، عمومیت و انعطاف‌پذیری این روش را با مدل‌کردن انتشار موج در محیط سه‌بعدی ایزوتروپیک عرضی نشان دادند. در تحقیقی دیگر، روش شبه‌طیفی به منظور بررسی انتشار موج در سازه‌های ناهمگن و غیرایزوتروپ مورد استفاده قرار گرفت.<sup>[۱۲]</sup> از این نوع المان‌بندی برای سازه‌های ایزوتروپ، اورتوتروپ و سازه‌های هوشمند استفاده شد و با تحلیل مسائل استاتیکی، ارتعاشات آزاد، و انتشار موج درستی نتایج تحلیل با این نوع المان مورد بررسی قرار گرفت.

از آنجا که انتخاب بین «تعداد المان‌های زیاد با تعداد گره کم در هر المان» و «تعداد المان‌های کم‌تر با تعداد گره بیشتر در هر المان» در روش‌های المان محدود بر دقت حل مسئله و همچنین زمان محاسبات بسیار تأثیرگذار است، بررسی عملکرد انتخاب نوع المان بر مباحث ذکر شده ضرورت ویژه‌ی خواهد یافت. هدف این نوشتار بررسی تأثیر انتخاب المان‌های با گره‌های متفاوت بر دقت و زمان حل روش المان طیفی است. برای این منظور سرعت گروهی در مسئله‌ی انتشار موج کشسان در ورق کامپوزیتی، تحت اثر بار ضربه‌ی با المان‌های ۹، ۲۵ و ۳۶ گره شبیه‌سازی شده و نتایج با حل تحلیلی مقایسه شده است. همچنین زمان محاسباتی -- عمدتاً شامل زمان‌های ایجاد ماتریس و مونتاژ ماتریس کل المان -- محاسبه و ارائه شده که می‌تواند معیاری برای انتخاب بهینه‌ی نوع المان در روش یادشده باشد.

و برای المان ۹ گره داریم:

$$\xi_m, \eta_m \in \{\pm 1, 0\} \quad (4)$$

## ۲.۲. توابع شکلی المان

می‌توان به‌وسیله گره‌های موجود، مجموعه‌ی توابع شکلی را مشخص کرد. این توابع با توجه به نحوه‌ی انتخاب محل گره‌ها متعامدند. یعنی:

$$\int_{-1}^1 N_i(\xi) N_j(\xi) d\xi = w_{e_i} w_{e_j} \delta_{ij} \quad (5)$$

که در آن  $w_e$  وزن گوس-لوباتو<sup>[۱۳]</sup> و  $\delta_{ij}$  تابع دلتای کرونیگر است. متعامد بودن توابع شکلی باعث قطری شدن ماتریس جرم می‌شود. در شکل ۲ دو تابع شکلی انتخابی مربوط به المان ۳۶ گره نشان داده شده است.

## ۳.۲. معادلات المان محدود

مدل المان محدود مربوط به معادلات خارج از صفحه برای ورق کامپوزیتی متقارن عبارت است از:<sup>[۱]</sup>

$$M^e \ddot{U}^e + K^e U^e = F^e \quad (6)$$

که در آن  $M^e$  و  $K^e$  به ترتیب ماتریس‌های جرم و سختی المان هستند؛ در حالی که بردار  $F^e$  بردار نیروی المان است و  $\ddot{U}^e$  نیز مشتق دوم بردار جابه‌جایی نسبت به زمان است. ماتریس جرم المان ۳۶ گره برای ورق متقارن عبارت است از:

$$M^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T I N \det(J) d\xi d\eta \quad (7)$$

که در آن ماتریس  $I$  برابر است با:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_T & 0 \\ 0 & 0 & I_T \end{bmatrix} \quad (8)$$

## ۲. شکل‌بندی المان صفحه‌ی طیفی

### ۱.۲. تعریف گره‌های المان

در سیستم مختصات محلی  $(\xi - \eta)$ ، گره‌های المان در محل ریشه‌های چندجمله‌ی متعامد لژاندر بیان می‌شود که عموماً عبارت است از:

$$\begin{cases} (1 - \xi^2) p'_n(\xi) = 0 \\ (1 - \eta^2) p'_n(\eta) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

در این معادله  $\xi, \eta \in [-1, 1]$  و  $p'_n$  چندجمله‌ی  $m$  لژاندر است و علامت پریم بیان‌گر مشتق مرتبه‌ی اول است. گفتنی است در این روش گره‌های المان در سیستم مختصات محلی مشخص می‌شوند. به‌عنوان مثال، برای المان ۳۶ گره از چندجمله‌ی لژاندر مرتبه پنجم استفاده شده، و ۳۶ گره در مختصات المان مشخص می‌شود که این نقاط عبارت‌اند از:<sup>[۱۳]</sup>

$$\xi_m, \eta_m \in \left\{ \pm 1, \pm \sqrt{\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3\sqrt{7}}} \right\} \quad (2)$$

در شکل ۱ موقعیت این گره‌ها نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که برخلاف روش المان محدود معمولی فاصله‌ی گره‌ها یکسان نیست.

در بررسی حاضر، علاوه بر المان ۳۶ گره از المان ۲۵ و ۹ گره نیز استفاده شده و نتایج آن با المان ۳۶ گره مقایسه شده است. نقاط گره در المان ۲۵ گره عبارت‌اند از:

$$\xi_m, \eta_m \in \{\pm 1, \pm \sqrt{3/7}, 0\} \quad (3)$$

ماتریس  $D$  نیز ماتریس ضرایب کشسان است که برای ورق کامپوزیتی متقارن عبارت است از:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{\phi\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{\delta\delta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

برای ورق کامپوزیتی تحت بار عرضی که نیروی متمرکز  $f(t)$  بر گره واقع در مرکز ورق وارد می‌شود. برای المان‌هایی که شامل این گره هستند، بردار نیروی  $F^e$  عبارت است از:

$$F^e = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad f_k(t) \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}^T \quad (14)$$

که در آن نیرو در گره  $k$ ام اعمال شده است. برای سایر گره‌ها تمام درایه‌های بردار نیروی المان صفر است.

پس از محاسبه‌ی ماتریس‌های سختی و جرم و بردار نیروی همه‌ی المان‌ها، در مرحله‌ی بعد با مونتاژ این ماتریس‌ها و بردارها، ماتریس‌های سختی و جرم کل ورق و نیز بردار نیروی کل ورق به دست می‌آید که عبارت است از:

$$M\ddot{U} + KU = F(t) \quad (15)$$

در برنامه‌ی المان محدود از شرط مرزی تکیه‌گاه ساده استفاده شده است. برای اعمال این شرط مرزی، باید در ماتریس سختی کل، تمام درایه‌های مربوط به سطر و ستون متناظر با درجه آزادی خیز گره مرزی، به جز درایه‌ی روی قطر اصلی برابر با صفر قرار داده شود و درایه‌ی روی قطر اصلی برابر با ۱ در نظر گرفته شود. برای حل معادله‌ی ۱۵ در حوزه زمان از روش دیفرانسیل محدود میانی استفاده می‌شود. با اعمال این روش خواهیم داشت:

$$U_{i+\tau} = U_{i+1} - U_i + M^{-1} \Delta t^\tau (F_{i+1} + KU_{i+1}) \quad (16)$$

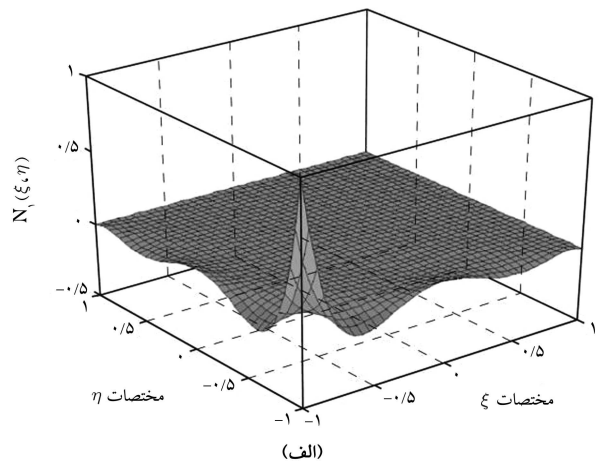
که در آن  $\Delta t$  بیانگر تغییر دیفرانسیلی زمان،  $i$  بیانگر اندیس مربوط به زمان، و  $M^{-1}$  بیانگر معکوس ماتریس جرم است. چنان که مشاهده می‌شود، در معادله‌ی ۲۶ فقط به محاسبه‌ی معکوس ماتریس جرم نیاز است و از آنجا که ماتریس جرم یک ماتریس قطری است و زمان لازم برای محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس قطری بسیار کم است، محاسبات مربوط به حل المان طیفی به زمان اندکی نیاز دارد و بیشتر زمان حل مسئله به ساختن ماتریس‌های سختی و جرم المان و سپس مونتاژ ماتریس‌های سختی و جرم کل ورق مربوط می‌شود.

### ۳. حل عددی

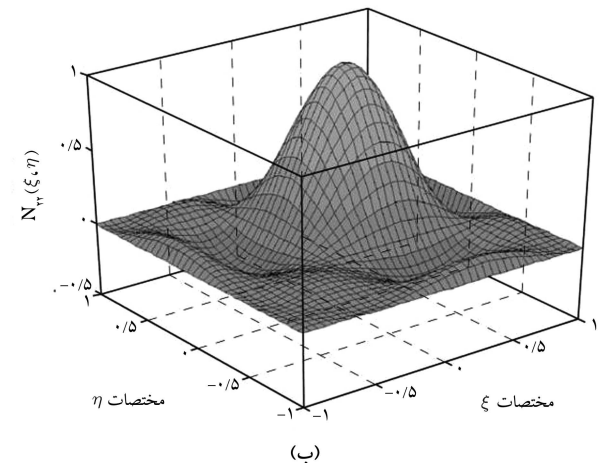
#### ۳.۱. تعریف هندسه و خواص مواد و بارگذاری

هندسه‌ی مورد استفاده در این مطالعه یک ورق مربعی ده‌لایه‌ی اورتوتروپ شیشه-اپوکسی با زاویه‌ی الیاف صفر و به طول و عرض ۱ متر و ضخامت ۱۰ میلی‌متر است که نیروی تحریک در مرکز آن اعمال شده است. خواص الیاف و ماتریس عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} E_g &= 66.5 \text{ GPa}, & \nu_g &= 0.23, & \rho_g &= 2250 \text{ kg/m}^3 \\ E_e &= 3.43 \text{ GPa}, & \nu_e &= 0.35, & \rho_e &= 1250 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (17)$$



(الف)



(ب)

شکل ۲. توابع شکلی انتخابی (گره‌های ۱ و ۲۲). [۱]

و  $J$  ماتریس ژاکوبین است که براساس تعریف عبارت است از:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ماتریس سختی المان را نیز می‌توان چنین نوشت:

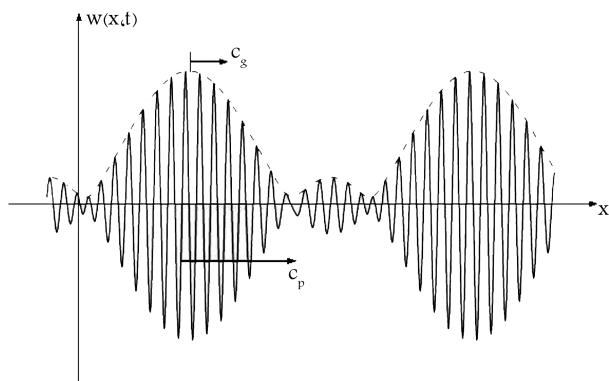
$$K^e = \int_{\Omega^e} B^T D B d\Omega \quad (10)$$

که در آن ماتریس  $B$  ماتریس کرنش-جابجایی است. به‌عنوان مثال برای المان ۳۶ گره، ماتریسی با ۵ سطر و ۱۰۸ ستون است:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_1^*}{\partial x} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_{\tau\phi}^*}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1^*}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_{\tau\phi}^*}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^*}{\partial x} & \frac{\partial N_1^*}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_{\tau\phi}^*}{\partial x} & \frac{\partial N_{\tau\phi}^*}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial x} & 0 & N_1^* & \dots & \frac{\partial N_{\tau\phi}^*}{\partial x} & 0 & N_{\tau\phi}^* \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial y} & N_1^* & 0 & \dots & \frac{\partial N_{\tau\phi}^*}{\partial y} & N_{\tau\phi}^* & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

که در آن:

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial N_1^*}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial y} \end{matrix} \right\} = J^{-1} \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial N_1^*}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1^*}{\partial \eta} \end{matrix} \right\} \quad (12)$$



شکل ۳. مثالی از سرعت فازی و سرعت گروهی. [۱۴]

به علاوه، با بررسی دقیق جزئیات حرکت، می‌توان دید که موج درون کپه‌ها با سرعت  $c_p$  در حال حرکت است. یادآور می‌شود که اصطلاح موج پخشی برای امواج با سرعت فازی وابسته به فرکانس به کار می‌رود. به عبارت دیگر، سرعت فازی موج با فرکانس تغییر می‌کند، و چون مؤلفه‌های موج که فرکانس‌های متفاوت دارند با سرعت‌های متفاوت منتشر می‌شوند، ساختمان موج در حین حرکت تخریب می‌شود. از طرفی یک موج غیرپخشی همواره شکل خود را حفظ می‌کند، زیرا همه‌ی مؤلفه‌های آن با فرکانس‌های مختلف با سرعت یکسان حرکت می‌کنند. موج طولی در یک فنر کشیده‌شده از آن جمله است.

مقدار سرعت فازی به راحتی از رابطه  $c_p = \omega/k$  به دست می‌آید. برای یک ماده‌ی ایزوتروپ سرعت فازی و سرعت گروهی جهت‌های یکسانی دارند (جهت انتشار موج منطبق بر جهت بردار عدد موج است)، و اندازه‌ی آن‌ها مستقل از جهت انتشار است.

در مواد غیرایزوتروپ، سرعت گروهی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد. با توجه به این که  $k_x = k \cos \phi$  و  $k_y = k \sin \phi$  روابط ۲۴ به دست می‌آید:

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2, \quad \tan \phi = \frac{k_y}{k_x} \quad (24)$$

با استفاده از رابطه‌های ۲۴، مقادیر مشتقات حاصله عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial k_x} &= \frac{k_x}{k} = \cos \phi \\ \frac{\partial k}{\partial k_y} &= \frac{k_y}{k} = \sin \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial k_x} &= -\frac{k_y}{k_x^2} \cos^2 \phi = -\frac{\sin \phi}{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial k_y} &= \frac{\cos^2 \phi}{k_x} = \frac{\cos \phi}{k} \end{aligned} \quad (25)$$

با توجه به تعریف سرعت گروهی و قانون مشتق زنجیره‌ی داریم:

$$\begin{aligned} c_{gx} &= \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_x} + \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial k_x} \\ c_{gy} &= \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k_y} + \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial k_y} \end{aligned} \quad (26)$$

از جایگذاری معادلات ۲۵ در معادلات ۲۶، مؤلفه‌های سرعت گروهی را می‌توان به صورت:

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \cos \phi - \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \frac{\sin \phi}{k}$$

که در آن  $g$  بیان‌گر شیشه و  $e$  نماینده‌ی اپوکسی است. برای رسیدن به همگرایی ۲ درصد، در ورق‌ی با المان ۳۶ گره، ورق به  $60 \times 60$  المان و برای ورق با المان‌های ۲۵ و ۹ گره، ورق به ترتیب به  $100 \times 100$  و  $200 \times 200$  المان تقسیم شده است. مسئله تا زمان ۰٫۰۱۲ ثانیه تحلیل شده که برای حل، این زمان به  $5000$  قسمت تقسیم شده است. معادله‌ی نیروی تحریک عبارت است از:

$$f(t) = 50 \sin(2\pi\omega t)(1 - \cos(2\pi\omega t/3)) \quad (18)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس تحریک و برابر ۲۵ کیلوهرتز در نظر گرفته شده است. مدت زمان اعمال نیرو ۱۲۰ میکروثانیه است.

### ۲.۳. نحوه‌ی استخراج نتایج نظری

در این بخش به بیان مفهوم سرعت فازی و سرعت گروهی [۱۴] خواهیم پرداخت. سرعت گروهی به سرعت انتشار گروهی از امواج با فرکانس یکسان، یا سرعت پخش انرژی مربوط می‌شود. ساده‌ترین توضیح تحلیلی برای حالت یک‌بعدی را می‌توان با در نظر گرفتن انتشار دو موج هارمونیک با دامنه‌ی یکسان اما دارای فرکانس‌های مختلف و نزدیک به هم بیان کرد. سیگنال موج را می‌توان به صورت جمع آثار دو موج بیان کرد:

$$w(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad (19)$$

که با استفاده از روابط مثلثاتی، می‌توان این معادله را چنین نوشت:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= 2A \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \\ &\quad \times \cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2} x - \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right) \end{aligned} \quad (20)$$

با توجه به این که تابع کسینوس یک تابع زوج است، می‌توان جایگذاری را انجام داد:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}, \quad \Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2}, \\ \omega &= \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}, \quad k = \frac{k_2 + k_1}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

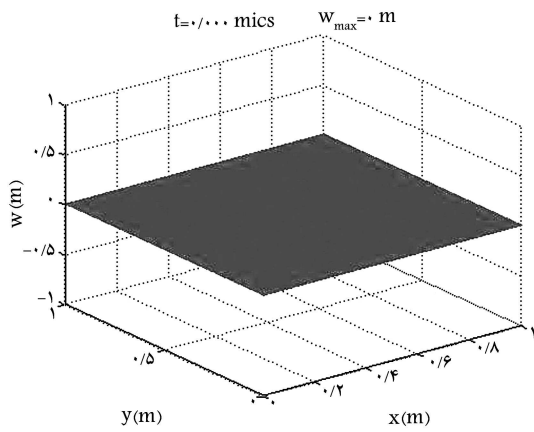
بنابراین:

$$w(x, t) = 2A \underbrace{\cos(\Delta k x - \Delta\omega t)}_{\text{low-frequency term}} \underbrace{\cos(kx - \omega t)}_{\text{high-frequency term}} \quad (22)$$

این معادله یک موج حامل با مؤلفه‌ی فرکانس بالای  $\omega$  و سرعت فازی  $c_p = \omega/k$  و یک مدولاسیون  $\cos(\Delta k x - \Delta\omega t)$  با مؤلفه‌ی فرکانس پایین  $\Delta\omega$  و سرعت انتشار  $\Delta\omega/\Delta k$  ارائه می‌دهد. باید توجه داشت که مؤلفه‌ی فرکانس پایین سرعت انتشاری به نام سرعت گروهی ( $c_g = \Delta\omega/\Delta k$ ) دارد که در حالت حدی عبارت است از:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (23)$$

سرعت حامل  $c_p$  است در حالی که سرعت گروهی  $c_g$ ، سرعت مدولاسیون و یا سرعت انتقال انرژی است. موج منشره در راستای  $x$  در شکل ۳ نشان داده شده است. اگر به جای توجه به جزئیات حرکت تنها به حرکت کپه‌های موج توجه شود، می‌توان مشاهده کرد که موج با سرعت برابر با سرعت گروهی  $c_g$  در حال حرکت است.



شکل ۴. نمودار سه بعدی خیز ورق در لحظه  $t = 0 \mu s$ .

مقادیر سه پارامتر  $y_{max}$ ،  $L$  و  $x_0$  به دست می‌آید. در برنامه‌ی مربوطه با تغییر این مقادیر در یک بازه منطقی، مقداری از این پارامترها -- که به‌ازاء آن‌ها مقدار تابع در سه نقطه‌ی انتخابی کم‌ترین خطا را دارد -- به‌عنوان مقادیر تقریبی به دست آمده است. به‌عنوان مثال، مقدار پارامتر  $x_0$  در بازه‌ی بین کم‌ترین مقدار فاصله‌ی مکانی و بیشترین فاصله‌ی مکانی تغییر داده شده است. پس از این مرحله نمودار به دست آمده از این تقریب روی نمودار موج قرار داده شده است (نمودار مشخص شده با خط چین در شکل ۴). برای محاسبه‌ی سرعت گروهی فقط به پارامتر  $x_0$  نیاز است. زیرا این پارامتر بیان‌گر مرکز جبهه‌ی موجی است که توسط نیروی اعمالی در ورق منتشر شده است. برای به دست آوردن مقدار سرعت گروهی می‌توان اختلاف مکانی مرکز جبهه‌ی موج را در لحظه‌ی زمانی مورد نظر بر فاصله‌ی زمانی متناظر با آن تقسیم کرد. از طرف دیگر از آنجا که برای فرکانس و نیروی مورد استفاده، زمان مربوط به اعمال نیسی از نیرو برابر با  $60^\circ$  میکروثانیه است، می‌توان با تقسیم «اختلاف مکانی مرکز موج از مرکز ورق» بر «اختلاف زمانی مربوطه با زمان  $60^\circ$  میکروثانیه» سرعت متوسط را به دست آورد.

#### ۴. نتایج

با حل معادلات المان محدود خیز ورق در هر لحظه به دست می‌آید. در شکل‌های ۴ تا ۸ نمودار سه‌بعدی خیز برای چند زمان مختلف نشان داده شده است. این نتایج براساس المان‌های ۹ گره به دست آمده‌اند. اما برای المان‌های ۲۵ و ۳۶ گره نیز نتایج شکل مشابهی دارند. چنان‌که مشاهده می‌شود، با گذشت زمان موج از مرکز دورتر شده و به لبه‌های ورق نزدیک‌تر می‌شود. به‌دلیل اختلاف سرعت موج در جهات مختلف شکل موج در هر لحظه به صورت یک بیضی است. با گذشت زمان شکل موج دچار تغییر شده است. در حالی که در لحظات اولیه قله‌های موج مربوط به جهات  $x$  و  $y$  روی بیضی‌های یکسانی هستند. این قله‌ها در زمان‌های بعدی روی بیضی‌های مختلفی قرار می‌گیرند. همچنین مشاهده می‌شود که با گذشت زمان مقدار خیز بیشینه، که در قسمت بالایی هر شکل نوشته شده، کم می‌شود.

در شکل‌های ۹ و ۱۰ نمودار دوبعدی خیز روی خط میانی ورق، به ترتیب موازی با محورهای  $x$  و  $y$  برای لحظه‌ی زمانی  $30^\circ$  میکروثانیه رسم شده است. در این شکل‌ها نحوه‌ی محاسبه‌ی سرعت موج نشان داده شده است. در جدول‌های ۱ و ۲ مقادیر سرعت موج به ترتیب برای جهت انتشار صفر و  $90^\circ$  درجه نشان داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود، مقادیر سرعت در چهار

$$c_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \sin \phi + \frac{\partial \omega \cos \phi}{\partial \phi} \frac{1}{k} \quad (27)$$

یا به فرم ماتریسی:

$$\begin{Bmatrix} c_{gx} \\ c_{gy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial k} \\ \frac{\partial \omega}{k \partial \phi} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

بیان کرد. بنابراین سرعت گروهی و زاویه‌ی انحراف<sup>۲</sup> عبارت‌اند از:

$$c_g = \sqrt{c_{gx}^2 + c_{gy}^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{c_{gy}}{c_{gx}} - \phi \quad (29)$$

برای موج کشسانی که در ورق‌های ایزوتروپ منتشر می‌شود، جهت سرعت گروهی بر جهت بردار عدد موج منطبق است و زاویه‌ی انحراف را برابر با صفر می‌کند. برای موج کشسانی که در ورق‌های غیرایزوتروپ منتشر می‌شود راستای سرعت موج بر راستای بردار عدد موج منطبق نیست، و این موضوع می‌تواند باعث غیر صفر شدن زاویه‌ی انحراف شود. در یک جهت با بردار عدد موج مشخص  $\phi$  مقدار  $\partial \omega / \partial k$  در معادله‌ی ۲۸ را می‌توان از رابطه‌ی بین فرکانس و عدد موج به دست آورد. با توجه به عبارت  $\partial \omega / \partial \phi$  در معادله‌ی ۲۸، یک روش ساده برای به دست آوردن تقریبی مقدار آن به کار می‌رود. جهت بردار عدد موج به مقدار  $\phi + \Delta \phi$  تغییر داده می‌شود، که در آن  $\Delta \phi$  به‌اندازه‌ی کافی کوچک است. از رابطه‌ی بین فرکانس و عدد موج، مقدار فرکانس در زاویه‌ی جدید به دست می‌آید. بنابراین،  $\partial \omega / \partial \phi$  به صورت تقریبی برابر است با:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \phi} \approx \frac{\omega(k)|_{\phi+\Delta\phi} - \omega(k)|_{\phi}}{\Delta\phi} \quad (30)$$

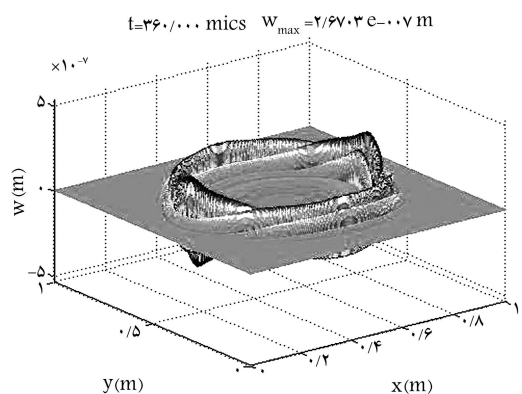
سپس مؤلفه‌های سرعت گروهی را می‌توان با جایگذاری مقدار  $\partial \omega / \partial k$  و معادله‌ی ۳۰ در معادله ۲۸ به دست آورد.

#### ۳.۳. نحوه‌ی استخراج نتایج حل المان طیفی

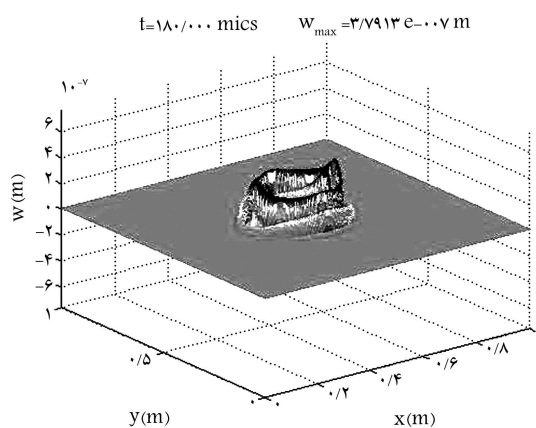
برای مقایسه‌ی نتایج سرعت گروهی مربوطه به حل المان محدود، با نتایج حاصل از نمودار پخش موج چنین عمل می‌شود: از آنجا که تابع نیروی اعمال شده بر مرکز ورق به صورت حاصل ضرب یک موج سینوسی در یک موج کسینوسی است (معادله‌ی ۱۸)، می‌توان خیز حاصل از این بارگذاری را به صورت ضرب یک تابع سینوسی در یک تابع کسینوسی در نظر گرفت. معادله‌ی نیروی بیان شده در معادله‌ی ۱۸ شامل دوجمله‌ی  $\sin(2\pi\omega t)$  و  $(1 - \cos(2\pi\omega t/3))$  است؛ جمله‌ی اول موج اصلی است و جمله‌ی دوم که دارای فرکانس کم‌تر (و در نتیجه دوره‌ی تناوب بیشتر) است، دامنه‌ی موج اول را تعیین می‌کند. به‌طور مشابه، برای خیز نیز می‌توان موج آن را به صورت حاصل ضرب یک تابع سینوسی در یک تابع کسینوسی در نظر گرفت، به‌گونه‌ی که تابع کسینوسی دامنه‌ی تابع سینوسی را تعیین کند. این تابع کسینوسی برای یک زمان مشخص می‌تواند چنین باشد:

$$f(x) = 0.05 y_{max} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{L} (x - x_0 + \frac{L}{4}) \right) \quad (31)$$

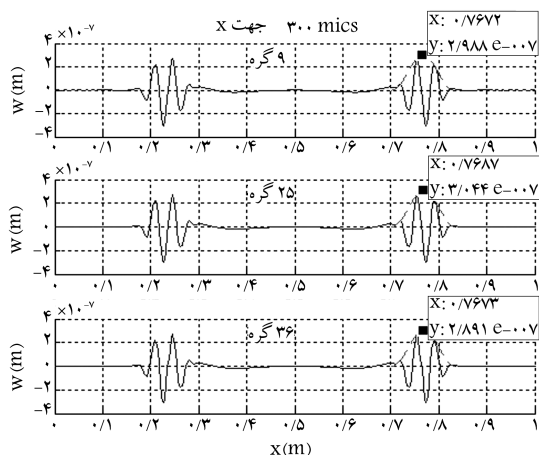
که در آن پارامترهای  $y_{max}$ ،  $L$  و  $x_0$  مجهول‌اند. برای به دست آوردن مقادیر این پارامترها مقدار خیز و فاصله‌ی مکانی برای سه نقطه‌ی بیشینه محلی روی نمودار خیز برحسب مکان -- در یک لحظه‌ی زمانی مشخص -- (شکل ۴). استخراج می‌شود و با این سه جفت عدد و به‌وسیله‌ی برنامه‌ی که برای این منظور نوشته شده،



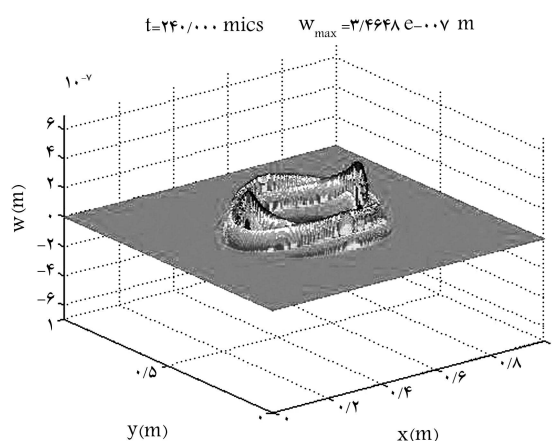
شکل ۸. نمودار سه بعدی خیز ورق در لحظه  $t = 360 \mu s$



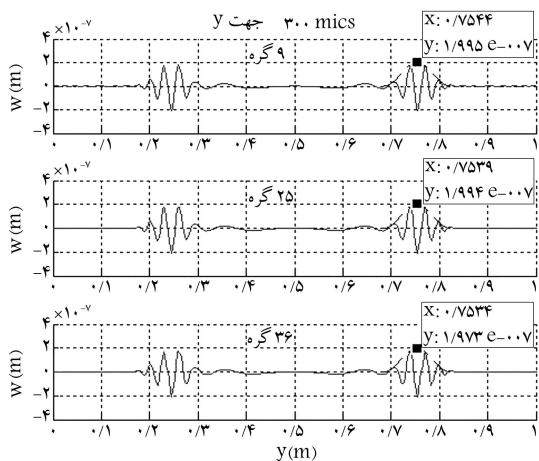
شکل ۵. نمودار سه بعدی خیز ورق در لحظه  $t = 180 \mu s$



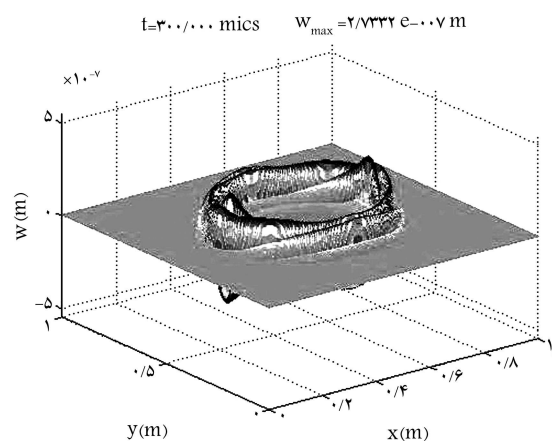
شکل ۹. نمودار خیز ورق در لحظه  $300^\circ$  میکروتانیه روی خط میانی موازی با محور x.



شکل ۶. نمودار سه بعدی خیز ورق در لحظه  $t = 240 \mu s$



شکل ۱۰. نمودار خیز ورق در لحظه  $300^\circ$  میکروتانیه روی خط میانی موازی با محور y.



شکل ۷. نمودار سه بعدی خیز ورق در لحظه  $t = 300 \mu s$

درصد اختلاف با مقدار نظری افزایش پیدا می‌کند؛ در جهت انتشار  $90^\circ$  درجه نیز با افزایش تعداد گره‌ها این اختلاف زیاد می‌شود.

برای حل المان محدود از برنامه‌ی مشابهی برای سه نوع المان استفاده شده است. بنابراین می‌توان زمان مورد نیاز برای قسمت‌های مختلف برنامه مربوط به سه نوع المان را با هم مقایسه کرد. در جدول ۴ زمان مربوط به ساختن ماتریس سختی المان و نیز زمان مونتاژ ماتریس کل برای سه نوع المان ۹، ۲۵ و ۳۶ گره با

زمان مختلف برای المان‌های مختلف به دست آمده که این مقادیر -- به استثناء یک مورد -- همواره کوچک‌تر از مقدار نظری است. با گذشت زمان مقادیر به دست آمده بیشتر شده و به مقادیر نظری نزدیک‌تر می‌شود.

برای مقایسه‌ی بهتر نتایج به دست آمده با استفاده از گره‌های مختلف، در جدول ۳ مقادیر بیشینه و کمینه‌ی درصد اختلاف مقادیر سرعت موج، به دست آمده از حل المان محدود با مقدار نظری، در دو جهت صفر و  $90^\circ$  درجه نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که عموماً در جهت صفر درجه با افزایش تعداد گره‌های المان

جدول ۱. مقادیر سرعت موج برای جهت انتشار صفر درجه (m/s).

تعداد گره	زمان (میکروثانیه)				مقدار نظری
	۱۸۰	۲۴۰	۳۰۰	۳۶۰	
۹	۱۱۰۹٫۲	۱۱۰۴٫۵	۱۱۱۳٫۱	۱۱۲۰٫۱	۱۱۴۴٫۵
۲۵	۱۱۰۵٫۷	۱۱۰۴٫۱	۱۱۱۹٫۶	۱۱۱۶٫۰	
۳۶	۱۰۹۵٫۶	۱۰۹۶٫۳	۱۱۱۳٫۹	۱۱۲۰٫۸	

جدول ۲. مقادیر سرعت موج برای جهت انتشار ۹۰ درجه (m/s).

تعداد گره	زمان (میکروثانیه)				مقدار نظری
	۱۸۰	۲۴۰	۳۰۰	۳۶۰	
۹	۱۰۴۷٫۷	۱۰۶۴٫۱	۱۰۶۰٫۲	۱۰۶۱٫۶	۱۰۶۸٫۳
۲۵	۱۰۴۷٫۷	۱۰۶۲٫۰	۱۰۵۸٫۰	۱۰۵۹٫۷	
۳۶	۱۰۴۹٫۷	۱۰۴۷٫۴	۱۰۵۵٫۹	۱۰۵۹٫۶	

جدول ۳. مقایسه درصد اختلاف با مقدار نظری.

تعداد گره	جهت انتشار صفر درجه		جهت انتشار ۹۰ درجه	
	بیشینه درصد اختلاف	کمینه درصد اختلاف	بیشینه درصد اختلاف	کمینه درصد اختلاف
۹	۳٫۴۹	۲٫۱۳	۱٫۹۲	۰٫۳۹
۲۵	۳٫۵۳	۲٫۱۷	۱٫۹۲	۰٫۵۹
۳۶	۴٫۲۷	۲٫۰۷	۱٫۹۶	۰٫۸۱

جدول ۴. زمان مربوط به حل با المان‌های مختلف.

تعداد گره	زمان ایجاد ماتریس المان (ثانیه)	زمان مونتاژ ماتریس کل (ثانیه)	زمان کل (ثانیه)
۹	۱۴	۵۶۳۸	۵۶۵۲
۲۵	۱۱۹۸	۲۷۸۷۱	۲۹۰۶۹
۳۶	۲۰۰۵۳	۸۱۶۸	۲۸۲۲۱

هم مقایسه شده است. سپس مجموع این دو زمان نیز برای مقایسه‌ی بیشتر آورده شده است. گفتنی است کلیدی نتایج با استفاده از یک رایانه خانگی با سرعت ۲ گیگاهرتز محاسبه شده‌اند. چنان که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد گره‌های المان، زمان مورد نیاز به طور قابل ملاحظه‌ی افزایش پیدا می‌کند، به طوری که زمان ایجاد

ماتریس المان برای المان‌های ۲۵ و ۳۶ گره به ترتیب بیش از ۸۵ و ۱۴۳۲ برابر همین زمان برای المان ۹ گره با تعداد نقاط یکسان است. همچنین زمان مونتاژ ماتریس کل در این المان‌ها نیز به ترتیب برای المان‌های ۲۵ و ۳۶ گره ۵ و ۱٫۷ برابر تشکیل این ماتریس در المان ۹ گره است که در مجموع در حدود ۵ برابر افزایش زمان کل را به همراه دارد.

مشهود است که برای نزدیک شدن بسیار اندک نتایج به جواب تحلیلی، آن هم فقط در برخی حالات، هزینه‌های محاسباتی فراوانی را متحمل می‌شویم. البته یادآور می‌شود که برای المان‌های با تعداد گره‌های کم تر و در نتیجه مرتبه‌ی پایین تر، ممکن است شرایط پیوستگی تنش و کرنش برقرار نشوند، زیرا تنش و کرنش ورق با دوبار مشتق‌گیری از خیز به دست می‌آیند و برای المان‌های مرتبه پایین تابع چندجمله‌یی مورد استفاده از مرتبه پایین است. به عنوان مثال برای المان ۹ گره تابع مورد استفاده از مرتبه ۲ است و با دوبار مشتق‌گیری مقدار انحنای این تابع به دست می‌آید. از آنجا که این انحنا مقداری ثابت است، نمی‌تواند برای المان‌های مجاور یکی باشد زیرا در این صورت باید برای تمام المان‌ها یکی باشد. در نتیجه از هر المان به المان مجاور یک ناپیوستگی در تنش و کرنش وجود خواهد داشت. اما این مسئله برای المان‌های مرتبه بالاتر وجود ندارد، زیرا در آن المان‌ها با دوبار مشتق‌گیری به تابعی غیر ثابت می‌رسیم و ناپیوستگی تنش و کرنش کم تر می‌شود.

در کل اگر تنها زمان و حجم محاسباتی مورد نظر باشد، المان‌های ۹ گره ارجحیت می‌یابد، ولی اگر از نظر شرایط پیوستگی متغیرهای تنش و کرنش و در نتیجه تقریب بهتر مسئله مورد بررسی قرار گیرد، مزیت المان‌های مرتبه بالاتر بیشتر است.

## ۵. نتیجه‌گیری

در مطالعه‌ی حاضر تأثیر انتخاب گره‌های المان بر دقت انتشار موج کشسان عرضی در ورق کامپوزیتی با استفاده از روش المان طیفی مورد مطالعه قرار گرفت. برای بررسی این موضوع از سه نوع المان مختلف ۹، ۲۵ و ۳۶ گره استفاده شده و سرعت گروهی هر یک محاسبه شده است. با دقت در نتایج به دست آمده، مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد گره‌های المان، با قید رسیدن به هم‌گرایی ۲ درصد، نتایج بسیار به هم نزدیک‌اند و اختلاف‌شان با یکدیگر کم تر از ۲ درصد است. با وجود تغییرات بسیار اندک در جواب‌های مسئله برای المان‌هایی با گره‌های مختلف، زمان حل با افزایش تعداد گره‌های المان به شدت افزایش پیدا می‌کند و لذا استفاده از المان‌هایی با تعداد گره‌های کم تر مناسب تر خواهد بود. این در حالی است که استفاده از المان‌های با مرتبه بالاتر به پیوستگی بیشتر در نتایج تنش و کرنش می‌انجامد.

## پانویس‌ها

1. Legendre
2. skew angle

## منابع (References)

1. Kudela, P., Zak, A., Krawczuk, M. and Ostachowicz, W. "Modelling of wave propagation in composite plate using

the time domain spectral element method", *J. of Sound and Vibration*, **302**, pp. 728-745 (2007).

2. Mal, A.K. "Wave propagation in layered composite laminates under periodic surface loads", *J. of Wave Motion*, **10**, pp. 257-266 (1988).
3. Walker, J.D. and Folias, E.S. "Effect of stress wave on laminated composite plates", *J. of Solid Structures*, **20**(2), pp. 145-170 (1992).
4. Lee, J. "Plate waves in multi-directional composite laminates", *J. of Composite Structures*, **45**, pp. 289-297 (1999).

5. Parga-Landa, B., Vlegels, S., Hernandez-Olivares, F. and Clark, S.D. "Analytical simulation of stress wave propagation in composite materials", *J. of Composite Structures*, **45**, pp. 125-129 (1999).
6. Yang, Ch., Ye, L., Su, Z. and Bannister, M. "Some aspects of numerical simulation for lamb wave propagation in composite laminates", *J. of Composite Structures*, **75**, pp. 267-275 (2006).
7. Patera, A.T. "A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion", *J. of Computational Physics*, **54**, pp. 468-488 (1984).
8. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, Berlin (1988).
9. Spall, R. "Spectral collocation methods for one dimensional phase change problems", *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, **15**, p. 2743-2748 (1995).
10. Dauksher, W. and Emery, A.F. "The use of spectral methods in predicting the reflection and transmission of ultrasonic signals through flaws", in: D.O. Thompson, D.E. Chimenti (Eds.), *Review of Progress in Quantitative Non-destructive Evaluation*, **15**, pp. 97-104 (1996).
11. Komatitsch, D., Barnes, C.H. and Tromp, J. "Simulation of anisotropic wave propagation based upon a spectral element method", *Geophysics*, **65**, pp. 1251-1260 (2000).
12. Sridhar, R., Chakraborty, A. and Gopalakrishnan, S. "Wave propagation in a anisotropic and inhomogeneous uncracked and cracked structures using pseudospectral finite element method", *Int. J. of Solids and Structures*, **43**, pp. 4997-5031 (2006).
13. <http://mathworld.wolfram.com>
14. Wang, L. "Elastic wave propagation in composites and least-squares damage localization technique", M.Sc. Thesis, Dept. of Aerospace Eng., North Carolina State University (2004).