

# شبیه‌سازی جریان امتزاج‌ناپذیر در مخازن نفتی با در نظر گرفتن اثرات گرانشی

مجتبی مشیری (دانشجوی دکتری)

مهرداد تقی‌زاده منظری\* (استاد)

سیامک کاظم‌زاده حنانی (استاد)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف  
دوری ۳-۱۴۹، شماره ۱، ص. ۶۸-۶۱

با افزودن اثرات گرانش به معادلات جریان امتزاج‌ناپذیر در محیط‌های متخلخل موسوم به باکلی-لورت، مشکلاتی در حل عددی پدید می‌آید. غیرمحدب بودن توابع شار اجزاء در معادلات باکلی-لورت، حل دستگاه معادلات هذلولوی مربوط به پایداری جرم را مشکل می‌کند. در صورت در نظر گرفتن اثرات گرانش، این محدب‌نبودن شدیدتر می‌شود به نحوی که با به‌کارگیری روش‌های متداول برای حل صریح دستگاه معادلات هذلولوی شوک‌های انبساطی غیرفیزیکی در پاسخ‌ها ایجاد خواهد شد. در مطالعه‌ی حاضر از روش عددی موج غالب برای رفع این مشکل در شبیه‌سازی جریان امتزاج‌ناپذیر تحت اثر جاذبه در مخازن نفتی استفاده می‌شود. این روش نیاز به تجزیه‌ی مشخصه‌ی ندارد و در عین حال میزان پخش عددی آن بسیار کم‌تر از روش‌های مرکزی متداول است. همچنین از تصحیح آنتروپی هارتن برای جلوگیری از ایجاد شوک‌های انبساطی استفاده می‌شود. در این نوشتار اثرات گرانش در یک مخزن همگن یک‌بعدی با استفاده از مدل باکلی-لورت شبیه‌سازی، و از روابط مختلف برای نفوذپذیری استفاده می‌شود.

واژگان کلیدی: اثرات گرانشی، معادلات باکلی-لورت، نفوذپذیری، قوانین پایداری، روش موج غالب، تصحیح آنتروپی.

## ۱. مقدمه

استون<sup>۲</sup> که در آن نفوذپذیری یک فاز تابع درجه‌ی اشباع فازهای دیگر نیز هست -- استفاده شود، مقادیر ویژه‌ی مختلط در ماتریس ژاکوبین به وجود خواهد آمد و در نتیجه نواحی بیضوی در معادلات تشکیل خواهد شد.<sup>[۱]</sup> ساختار چنین معادلاتی با ترکیبی از نواحی هذلولوی و بیضوی به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است.<sup>[۲-۹]</sup> گوزمن و فایز نواحی بیضوی در ساختار این معادلات را بررسی کردند<sup>[۱۰]</sup> و با استفاده از روش مشخصه‌ها و نیز با در نظر گرفتن مدل‌های مختلف نفوذپذیری، اقدام به حل معادلات باکلی-لورت سه‌فازی کردند. روش برخورد با نواحی بیضوی در روش‌های عددی عموماً استفاده از بخش حقیقی مقادیر ویژه‌ی مختلط برای محاسبه‌ی سرعت موج است.<sup>[۱۱]</sup> در این صورت می‌توان همانند معادلات هذلولوی با آن‌ها برخورد کرد. روش‌های حل عددی دسته معادلات پایداری هذلولوی مانند باکلی-لورت عمدتاً در دو دسته روش‌های بالادستی و روش‌های مرکزی جای می‌گیرند. روش‌های بالادستی از دقت مناسب برای گرفتن شوک‌ها برخوردارند ولی هزینه‌ی محاسباتی آن‌ها به‌سبب نیاز به تجزیه‌ی مشخصه‌ی زیاد است.<sup>[۱۲]</sup> این در حالی است که روش‌های مرکزی به‌سبب عدم نیاز به تجزیه‌ی مشخصه‌ی هزینه‌ی کمتری دارند. اخیراً استفاده از روش‌های مبتنی بر محاسبه‌ی شار عددی به‌شیوه‌ی رزاف<sup>۳</sup> متداول شده که در آن‌ها نیاز به تجزیه‌ی مشخصه‌ی با جایگزینی بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی سیستم هذلولوی -- به‌گونه‌ی که در تعریف شار عددی آمده -- برطرف

مدل تزریق آب به‌صورت تراکم‌ناپذیر و امتزاج‌ناپذیر در یک مخزن نفت موسوم به باکلی-لورت در تاریخچه‌ی شبیه‌سازی جریان چندفاز در محیط‌های متخلخل از اهمیت فراوانی برخوردار است. از زمان ارائه‌ی آن توسط باکلی و لورت<sup>[۱]</sup> مطالعات بسیاری بر روی ساختار ریاضی و نیز قابلیت فیزیکی این معادله انجام گرفته است.<sup>[۲-۱۲]</sup> همچنین توسعه‌ی این مدل برای حالت‌های سه‌فازی انجام گرفته است.

معادله‌ی باکلی-لورت دارای پاسخ‌هایی تحلیلی با استفاده از روش مشخصه‌ها<sup>۱</sup> است که ساختار آن‌ها وابسته به تابع شار است.<sup>[۵]</sup> پاسخ این مسئله شامل نواحی همواری است که توسط شوک‌ها و ناپیوستگی‌ها از هم جدا شده‌اند.<sup>[۵]</sup> توابع مورد استفاده برای نفوذپذیری‌های نسبی فازها تأثیر مستقیمی بر رفتار معادله‌ی باکلی-لورت (چه در حالت دوفاز و چه در حالت سه‌فاز) دارند.<sup>[۱۲]</sup> این دسته معادلات در جریان سه‌فاز با صرف‌نظر از گرانش هذلولوی است، یعنی تمام مقادیر ویژه‌ی ماتریس ژاکوبین حقیقی‌اند. با در نظر گرفتن گرانش، تنها در صورتی این دسته معادلات هذلولوی‌اند که نفوذپذیری هر فاز فقط تابع درجه‌ی اشباع همان فاز (مدل نفوذپذیری کوری) باشد.<sup>[۱۳]</sup> از طرف دیگر، اگر در دسته معادلات باکلی-لورت از مدل نفوذپذیری

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۷/۹/۱۳۸۹، اصلاحیه ۳/۹/۱۳۹۰، پذیرش ۵/۱/۱۳۹۰.

می‌شود. [۱۱] محققین یک روش عددی مرتبه‌ی دوم بر پایه‌ی روش لکس-فردریش ابداع کردند که برای شبکه‌ی جابه‌جا شده‌ی ۴ مورد استفاده در شبیه‌سازی مخازن مناسب است، [۱۲] اما پخش عددی آن با کوچک‌شدن گام زمانی افزایش می‌یابد. به همین دلیل با اصلاحی بر روش یادشده [۱۲] لزجت مصنوعی آن مستقل از زمان شد. [۱۳]

شکل نیمه‌گسسته‌ی روش کورگانوف و تادمر [۱۴] از قابلیت حل معادلات پایستگی جرم تباهیده برخوردار است. به تازگی معادلات باکلی-لورت سه‌فازی با حضور گرانش و با استفاده از روش بالادستی شبه‌گودونوف<sup>۵</sup> حل شده [۱۴] و نتایج حاصل از آن با روش مرکزی لکس-فردریش موضعی مقایسه شده است.

محققین برای حل معادلات پایستگی روشی پیشنهاد کرده‌اند که در آن به جای استفاده از بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس ژاکوبین که در روش‌های مبتنی بر روش رزائف صورت می‌گرفت، موج غالب در سیستم تشخیص داده شده و محاسبه‌ی شار عددی براساس سرعت موج غالب انجام می‌گیرد. [۱۱]

در پژوهش حاضر، از روش موج غالب پیشنهادی ادواردز [۱۱] به همراه تصحیح آنتروپی هارتن [۱۵] برای حل دسته معادلات پایستگی جرم در مدل باکلی-لورت در یک مخزن همگن یک‌بُعدی و با در نظر گرفتن اثرات گرانش، استفاده می‌شود و نتایج حاصله با حالت بدون گرانش مقایسه می‌شوند.

در ادامه‌ی این نوشتار، ابتدا مروری خواهیم داشت بر مدل فیزیکی مورد استفاده، و سپس نحوه‌ی اعمال روش موج غالب برای حل معادلات پایستگی تشریح می‌شود. در بخش نتایج، حل معادلات باکلی-لورت در حالت‌های دوفاز و سه‌فاز برای چند مسئله‌ی نمونه و با استفاده از مدل‌های مختلف نفوذپذیری ارائه می‌شوند.

## ۲. مدل فیزیکی

### ۲.۱. معادلات باکلی-لورت سه‌فاز

اگر اثرات تراکم‌پذیری و امتزاج‌پذیری سیالات صرف‌نظر شود، و جریان جزئی فاز  $\alpha$  به صورت  $f_\alpha = v_\alpha / v_t$  تعریف شود (که در آن  $v_\alpha$  نشان‌دهنده‌ی سرعت فاز  $\alpha$  بوده و  $v_t$  سرعت کلی برابر مجموع سرعت فازهاست)، معادلات پایستگی جرم برای جریان سه‌فاز هم‌دما، یک‌بُعدی، تراکم‌ناپذیر و امتزاج‌ناپذیر در یک محیط متخلخل همگن عبارت خواهد بود از: [۹]

$$\phi \frac{\partial s_\alpha}{\partial T} + v_t \frac{\partial f_\alpha}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

که موسوم به معادلات باکلی-لورت سه‌فازی است و در آن  $X$  و  $T$  به ترتیب معرف زمان و مکان بوده و  $\phi$  نشان‌گر میزان تخلخل مخزن است. همچنین  $s_\alpha$  درجه‌ی اشباع فاز  $\alpha$  است، که زیرنویس  $\alpha$  برای فازهای نفت به  $o$ ، در گاز به  $g$  و در آب به  $w$  تبدیل می‌شود. با در نظر گرفتن معادله‌ی  $1 = s_o + s_g + s_w$  که به بیان پرشدن فضا توسط سیالات موجود می‌پردازد، تنها دو تا از این درجه‌های اشباع مستقل از هم بوده که در این جا آب و گاز مستقل گرفته می‌شوند، یعنی  $\mathbf{u} = (s_w, s_g)^T$ . اگر زمان و مکان بی‌بُعد به ترتیب به صورت  $x = X/L$  و  $t = v_t T / \phi L$  تعریف شوند ( $L$  طول مخزن است)، معادلات پایستگی جرم چنین بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

که در آن  $\mathbf{f} = (f_w, f_g)^T$  بردار شار فازهاست. در معادله‌ی ۲ توابع شار  $f_w$  و  $f_g$  که به ترتیب مربوط به فاز آب و فاز گاز هستند نیز چنین تعریف می‌شوند:

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_t} \left[ 1 + k_{rg} N_g + \left( \frac{k_{ro} \mu_w}{\mu_o} + \frac{k_{rg} \mu_w}{\mu_g} \right) N_w \right]$$

$$f_g = \frac{\lambda_g}{\lambda_t} \left[ 1 - \left( \frac{k_{rw} \mu_g}{\mu_w} + \frac{k_{ro} \mu_g}{\mu_o} \right) N_g - k_{rw} N_w \right] \quad (3)$$

که در آن‌ها  $k_{r\alpha}$  نفوذپذیری نسبی و  $\mu_\alpha$  لزجت فاز  $\alpha$  است و  $\lambda_\alpha = k_{r\alpha} / \mu_\alpha$  نیز تحرک‌پذیری فاز  $\alpha$  است. اعداد گرانش گاز  $N_g$  و گرانش آب  $N_w$  چنین تعریف می‌شود: [۹]

$$N_w = \frac{(\rho_w - \rho_o) K g \frac{\partial z}{\partial x}}{v_t \mu_w}$$

$$N_g = \frac{(\rho_o - \rho_g) K g \frac{\partial z}{\partial x}}{v_t \mu_g} \quad (4)$$

که در آن‌ها  $\rho_\alpha$  چگالی فاز  $\alpha$ ،  $K$  نفوذپذیری مطلق سنگ،  $z$  عمق مخزن، و  $g$  شتاب ثقل زمین است. بنابراین  $\partial z / \partial x$  نشان دهنده‌ی شیب مخزن است. با تغییر پارامترهای گرانش گاز  $N_g$  و گرانش آب  $N_w$  شدت اثر گرانش در معادلات تغییر می‌کند و نیز با استفاده از مدل‌های گوناگون موجود برای تحرک‌پذیری  $\lambda_\alpha$  مسائل مختلفی قابل حل خواهد بود.

### ۲.۲. معادلات باکلی-لورت دو فاز

اگر تنها دو فاز وجود داشته باشد، کافی است معادله‌ی ۱ برای فاز آب حل شود. بنابراین معادله‌ی جابه‌جایی نفت توسط آب در یک مخزن شیب‌دار یک‌بُعدی، معادله‌ی باکلی-لورت اسکالر است که مطابق رابطه‌ی ۵ بیان می‌شود:

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial T} + v_t \frac{\partial f_w}{\partial X} = 0 \quad (5)$$

و در آن عبارت شار  $f_w$  از برابر صفر قراردادن نفوذپذیری نسبی فاز گاز در رابطه‌ی ۳ به دست می‌آید:

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_t} \left( 1 + k_{ro} \frac{\mu_w}{\mu_o} N_w \right) \quad (6)$$

معادله‌ی ۵ در شکل بی‌بُعد تبدیل خواهد شد به:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

که در آن  $u = s_w$  و  $f = f_w$  هستند. اگر از روابط نفوذپذیری کوری  $s_\alpha^1$  استفاده شود و اثرات فشار موئینگی مد نظر باشد، عبارت شار  $f$  در رابطه‌ی ۷ چنین خواهد بود:

$$f(u) = \frac{1}{1 + \frac{(1-u)^2}{M u^2}} \left[ 1 + \frac{N_w (1-u)^2}{M} \right] - \omega \frac{\partial}{\partial x} \left( \tau(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (8)$$

که در آن  $\omega$  و  $\tau(u)$  پارامترهای فشار موئینگی‌اند و  $M = \mu_o / \mu_w$  نسبت لزجت‌هاست. عدد گرانش آب ( $N_w$ ) نیز مطابق رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود.

### ۳. روش عددی

شبکه‌ی مورد استفاده برای گسسته‌سازی معادلات، شبکه‌ی یک‌بُعدی و یک‌نواخت با  $n$  نقطه‌ی محاسباتی برای ناحیه‌ی به طول  $L$  است. بنابراین، محل نقاط و فاصله‌ی آن‌ها عبارت‌اند از:

$$x_i = (i-1)\Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \Delta x = \frac{L}{n-1} \quad (9)$$

روش مورد استفاده در این نوشتار برای حل دسته معادلات پایستگی ۲ یا ۷، توسط ادواردز<sup>[۸]</sup> ارائه شده و بر پایه‌ی تشخیص موج غالب درون سیستم است. این روش پایستگی موضعی<sup>۷</sup> را حفظ کرده و در قالب حجم محدود ارائه می‌شود. شکل گسسته‌شده‌ی قوانین پایستگی ۲ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\hat{\mathbf{f}}_{i+1/2}^n - \hat{\mathbf{f}}_{i-1/2}^n) \quad (10)$$

سرعت موج غالب  $\lambda_{DW}$  مرتبه بالا توسط رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شود:<sup>[۱۱]</sup>

$$\lambda_{DW} = \frac{(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) \cdot (\mathbf{f}_R - \mathbf{f}_L)}{(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) \cdot (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)} \quad (11)$$

که در آن  $\mathbf{u}_R$  و  $\mathbf{u}_L$  به ترتیب حالت‌های چپ و راست مرتبه بالا<sup>۸</sup> بوده و  $\mathbf{f}_R$  و  $\mathbf{f}_L$  نیز شارهای مرتبط با این حالت‌ها هستند. مزیت اصلی این تعریف سرعت موج عدم نیاز به تجزیه‌ی مشخصه‌ی سیستم است؛ به علاوه با تشخیص موج غالب سیستم، در حد این تعریف معادل با سرعت دقیق شوک برای هر نوع موج است.<sup>[۱۱]</sup> همچنین در حالت اسکالر، سرعت موج غالب  $\lambda_{DW}$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda_{DW_{i+1/2}} = \begin{cases} \frac{f(u_R^n) - f(u_L^n)}{u_R^n - u_L^n} & |u_R^n - u_L^n| > \delta \\ \frac{\partial f(u)}{\partial u} & |u_R^n - u_L^n| < \delta \end{cases} \quad (12)$$

که  $\delta$  حد مناسب برای جلوگیری از تقسیم بر صفر است. شار عددی موج غالب چنین تعریف می‌شود:<sup>[۱۱]</sup>

$$\hat{\mathbf{f}}_{i+1/2} = \frac{1}{\gamma} (\mathbf{f}_R - \mathbf{f}_L) - \frac{1}{\gamma} |\lambda_{DW}| \mathbf{I} (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L) \quad (13)$$

که در آن  $\mathbf{I}$  ماتریس همانی است. شار ۱۳ می‌تواند برای انتگرال‌گیری سیستم با معادله‌ی ۹ به کار رود. در این جا برای محاسبه‌ی حالت‌های مرتبه بالا از دو محدودکننده‌ی مین‌مُد<sup>۹</sup> و فرام<sup>۱۰</sup> استفاده شده است. برای استفاده از محدودکننده مین‌مُد، حالت‌های چپ و راست مرتبه‌ی بالا چنین تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{x,i} \frac{\Delta x}{\gamma}, \quad \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{x,i+1} \frac{\Delta x}{\gamma}, \quad (14)$$

که در آن  $\mathbf{u}_{x,i}$  و  $\mathbf{u}_{x,i+1}$  اصطلاحاً مشتق متغیر<sup>۱۱</sup> نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{u}_{x,i} = \min\text{mod} \left( \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i}{\Delta x}, \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}}{\Delta x} \right) \quad \mathbf{u}_{x,i+1} = \min\text{mod} \left( \frac{\mathbf{u}_{i+2} - \mathbf{u}_{i+1}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i}{\Delta x} \right) \quad (15)$$

در معادلات ۱۵ محدودکننده‌ی مین‌مُد عبارت است از:

$$\min\text{mod}(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & x, y > 0 \\ \max(x, y) & x, y < 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad (16)$$

به منظور استفاده از محدودکننده‌ی فرام، باید حالت‌های مرتبه بالا را با استفاده از فرمول‌بندی ماسل<sup>۱۲</sup> و با بسط حول حالت‌های چپ  $L$  و راست  $R$  برای عناصر بردار  $\mathbf{u}$  که با  $u$  نشان داده می‌شوند، چنین نوشت:<sup>[۱۶]</sup>

$$u_L = u_i + \frac{1}{\gamma} \phi(r_{i+1/2}^+) (u_{i+1} - u_i) \quad u_R = u_{i+1} - \frac{1}{\gamma} \phi(r_{i+1/2}^-) (u_{i+1} - u_i) \quad (17)$$

که در آن  $\phi(r_{i+1/2}^+)$  و  $\phi(r_{i+1/2}^-)$  محدودکننده‌های شیب<sup>۱۳</sup> اند که تابعی از گرادینان‌های نقاط مجاورند، به طوری که:

$$r_{i+1/2}^+ = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}, \quad r_{i+1/2}^- = \frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{u_{i+1} - u_i} \quad (18)$$

تابع  $\phi$  در محدودکننده‌ی فرام مطابق رابطه‌ی ۱۹ تعریف می‌شود:

$$\phi(r) = \min \left( 2, 2r, \frac{1+r}{\gamma} \right) \quad (19)$$

روش مرتبه‌بالای تعریف‌شده در قالب معادلات ۱۰ و ۱۳ از روش مرتبه‌اول اوپلر پیش‌رو<sup>۱۴</sup> برای انتگرال‌گیری زمانی استفاده می‌کنند. بنابراین برای پایداری حل باید گام زمانی را محدود کرد. بدین منظور، عدد کورانت - فردریش - لویی (CFL)<sup>۱۵</sup> چنین تعریف می‌شود:

$$\text{CFL} = \frac{\lambda_{DW}^{\max} \Delta t}{\Delta x} \quad (20)$$

که در آن  $\lambda_{DW}^{\max}$  بزرگ‌ترین سرعت موج غالب در بازه‌ی حل است. شرط CFL وابسته به نوع محدودکننده‌ی مورد استفاده است، اما معمولاً کران بالای  $\frac{1}{\gamma}$  مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### ۱.۳. شرط آنتروپی

به منظور جلوگیری از ایجاد شوک‌های انبساطی به هنگام افزایش اثرگرانش و غیرمحدب شدن شارها، از تصحیح آنتروپی موسوم به تصحیح هارتن<sup>[۱۵]</sup> استفاده می‌شود. هارتن پیشنهاد می‌کند در صورتی که سرعت موج به دست آمده در روش عددی از مقدار معینی کم‌تر باشد، با انجام تصحیحی بر آن مقدار دیگری جایگزین این سرعت موج می‌شود. این تصحیح مطابق رابطه‌ی ۲۱ انجام می‌شود:

$$\lambda_{DW} = \begin{cases} \frac{\lambda_{DW}^* + \varepsilon^\tau}{\gamma \varepsilon} & |\lambda_{DW}| < \varepsilon \\ |\lambda_{DW}| & |\lambda_{DW}| > \varepsilon \end{cases} \quad (21)$$

در این معادله  $\varepsilon$  متغیری دلخواه است که باید با توجه به شرایط مسئله و محدوده‌ی سرعت موج‌های حاضر در مسئله تعیین شود. با تنظیم مناسب پارامتر  $\varepsilon$  می‌توان از ایجاد شوک‌های انبساطی جلوگیری کرد.

#### ۴. نتایج و بحث

در ابتدای این بخش مسئله‌ی باکلی -لورت اسکالر برای حالت‌های بدون گرانش و نیز با حضور گرانش حل خواهند شد. سپس مسائل باکلی -لورت سه‌فاز با توابع نفوذپذیری کوری، کوری تعمیم یافته و استون نوع اول حل می‌شوند.

##### ۱.۴. معادله‌ی باکلی -لورت اسکالر بدون گرانش

در مسئله‌ی اول باکلی -لورت معادله‌ی تابع شار به صورت رابطه‌ی ۸ است که در آن  $M = 4$ ،  $N_w = 0$  و  $\omega = 0$ . این مسئله در بازه  $-1 \leq x \leq 1$  تعریف شده و شرایط اولیه در آن عبارت است از:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

شرایط مرزی دیریکله در هر دو مرز بازه محاسباتی قرار داده شده است. پاسخ‌های ناشی از اعمال روش عددی موج غالب بر روی این مسئله در شکل ۱ دیده می‌شود. در اینجا از محدودکننده‌ی مین‌مد استفاده شده و  $\Delta x = 0.1$  و  $CFL = 0.5$ . زمان حل ( $t$ ) نیز برابر ۲ است. جواب‌ها به خوبی با نتایج کورگانف و تادمر<sup>[۱۳]</sup> منطبق است و نیازی به استفاده از تصحیح آنتروپی نیست. استفاده از محدودکننده‌ی شیب فرام نیز منجر به پاسخ‌های کاملاً مشابه می‌شود.

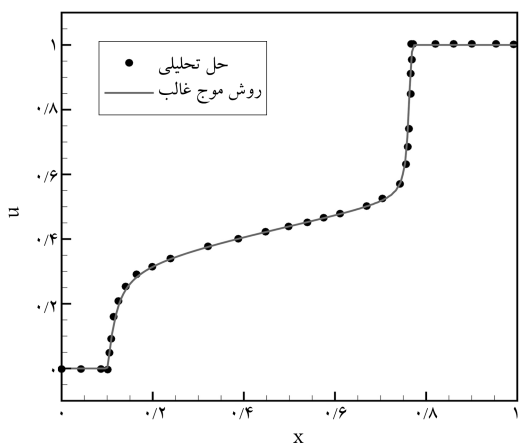
##### ۲.۴. معادله‌ی باکلی -لورت اسکالر با گرانش

مسئله‌ی بعدی معادله‌ی باکلی -لورت با گرانش است که در آن تابع شار به صورت رابطه ۸ است و در آن:

$$M = 1, \quad N_w = -5, \quad \omega = 0.1, \quad \tau(u) = 4u(1-u) \quad (23)$$

این مسئله در بازه  $0 \leq x \leq 1$  تعریف شده و شرایط مرزی دیریکله در هر دو مرز بازه محاسباتی قرار داده شده است. شرایط اولیه در این مسئله عبارت است از:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} \\ 1 & 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} \leq x < 1 \end{cases} \quad (24)$$



شکل ۲. نتایج مسئله‌ی باکلی -لورت اسکالر با گرانش با استفاده از روش موج غالب و محدودکننده فرام.

با توجه به ظاهرشدن عبارت  $\partial u / \partial x$  در تابع شار، در هر گام زمانی حل قبل از محاسبه‌ی مقدار عددی شار، عبارت مشتق  $\partial u / \partial x$  باید محاسبه شود. برای این کار از  $u$ ‌های مرحله‌ی قبل مطابق رابطه‌ی ۲۵ استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (25)$$

پاسخ‌های به دست آمده از اعمال روش عددی موج غالب و محدودکننده‌ی فرام بر مسئله‌ی اخیر در شکل ۲ برای زمان  $t = 0.2$  و  $CFL = 0.5$  نشان داده شده است. در این شکل  $\Delta x = 0.05$  است. چنان که مشاهده می‌شود، تطابق بسیار خوبی بین نتایج ناشی از اعمال روش موج غالب با حل تحلیلی وجود دارد. نتایج استفاده از محدودکننده‌ی مین‌مد نیز کاملاً مشابه شکل ۲ است.

##### ۳.۴. نتایج معادلات باکلی -لورت سه‌فاز

در مسائل باکلی -لورت سه‌فاز از روابط ۲ و ۳ استفاده می‌شود. در اینجا  $-\infty < x < \infty$  و  $t \geq 0$  بوده و شرایط اولیه‌ی مسئله عبارت است از:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases} \quad (26)$$

در ادامه، این مسئله با استفاده از توابع نفوذپذیری کوری، کوری تعمیم یافته و استون نوع اول حل می‌شود.

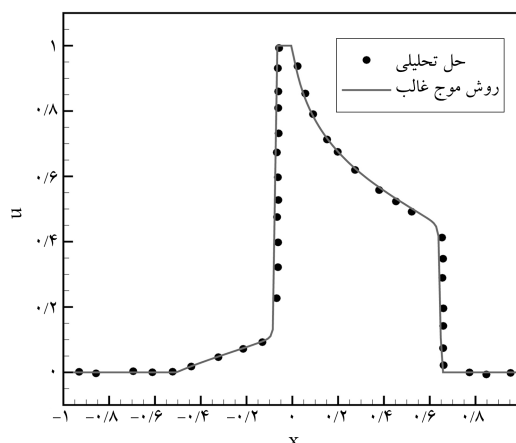
##### ۴.۴. معادلات باکلی -لورت بدون گرانش با استفاده از نفوذپذیری

###### کوری

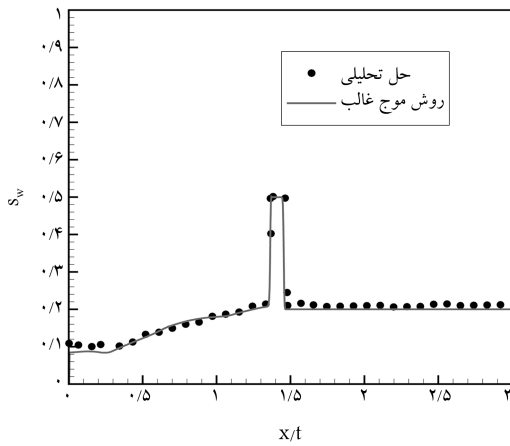
در این مسئله شرایط اولیه در رابطه‌ی ۲۵ عبارت خواهد بود از:

$$u_l = (0.1, 0.9)^T, \quad u_r = (0.2, 0.8)^T \quad (27)$$

بازه محاسباتی در این مسئله  $0 < x < 1.5$  است که در آن از ۱۰۰۰ نقطه‌ی محاسباتی با فاصله‌های برابر استفاده شده است. در اینجا گرانش در نظر گرفته نشده و اعداد گرانش عبارت‌اند از:  $N_g = N_w = 0$ . همچنین نسبت لزجت‌های مورد استفاده برابر  $1$  و  $\mu_o / \mu_w = 10$  است. در این مسئله از توابع



شکل ۱. نتایج مسئله‌ی باکلی -لورت اسکالر بدون گرانش با استفاده از روش موج غالب و محدودکننده‌ی مین‌مد.



شکل ۵. درجهی اشباع فاز آب در معادلات باکلی - لورت سه فاز با گرانش با استفاده از روابط نفوذپذیری کوری و محدودکنندهی فرام.

بازه محاسباتی  $0 < x < 1/5$  و اعداد گرانش  $N_g = 2$  و  $N_w = 1/2$  هستند. همچنین نسبت لزجت‌های مورد استفاده عبارت است از:  $\mu_o/\mu_w = 1$  و  $\mu_o/\mu_g = 1$ . در این مسئله از توابع نفوذپذیری کوری تعمیم یافته استفاده می‌شود:

$$\lambda_w = \frac{s_w^2}{s_w^2 + (1 - s_w)^2},$$

$$\lambda_g = 1 \cdot s_g,$$

$$\lambda_o = -2s_o + 3s_o^2 \quad (30)$$

در مسئله‌ی حاضر از  $1000$  نقطه‌ی محاسباتی با فاصله‌های برابر استفاده شده و حل تا زمان بی‌بعد  $t = 0.5$  پیشروی کرده است. شرط مرزی مانند مسئله‌ی قبل است. با استفاده از روش موج غالب و محدودکنندهی مین‌مد اقدام به حل این مسئله شد که استفاده از تصحیح آنتروپی هارتن لازم بوده و بدون آن پاسخ‌ها از نظر فیزیکی با مشکل مواجه شدند. پارامتر  $\varepsilon$  در معادله‌ی ۲۱ در محدوده‌ی  $0.2 < \varepsilon < 0.3$  انتخاب شد. نتایج حاصل از اعمال روش عددی موج غالب بر این مسئله در شکل‌های ۶ تا ۸ - که به ترتیب نشان‌دهنده‌ی درجه اشباع فازهای نفت، گاز و آب هستند - نشان داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود، روش مورد استفاده قادر به فراهم کردن پاسخ‌هایی کاملاً منطبق بر حل روش مشخصه‌ها<sup>[۱۰]</sup> است. استفاده از محدودکنندهی فرام منجر به پاسخ‌هایی مشابه می‌شود.

۶.۴. معادلات باکلی - لورت با گرانش با استفاده از نفوذپذیری استون مسئله‌ی بعدی مربوط به استفاده از روابط نفوذپذیری استون نوع اول است که در این حالت نیز گرانش در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه‌ی مورد استفاده عبارت است از:

$$\mathbf{u}_l = (0.27, 0.54)^T, \quad \mathbf{u}_r = (0.6, 0.7)^T \quad (31)$$

بازه محاسباتی در این مسئله  $0 < x < 5$  است که در آن از  $1000$  نقطه‌ی محاسباتی با فاصله‌های برابر استفاده شده است. همچنین اعداد گرانش گاز  $N_g = 10$  و آب  $N_w = 0.2$  بوده و نسبت لزجت‌های مورد استفاده عبارت است از:  $\mu_o/\mu_g = 4$  و  $\mu_o/\mu_w = 3/33$ .

مدل نفوذپذیری مورد استفاده، استون نوع اول است که با استفاده از پارامترهای یوکی، ال.بی.<sup>[۱۷]</sup> به دست آمده است. این روابط نفوذپذیری به صورت معادلات ۳۲

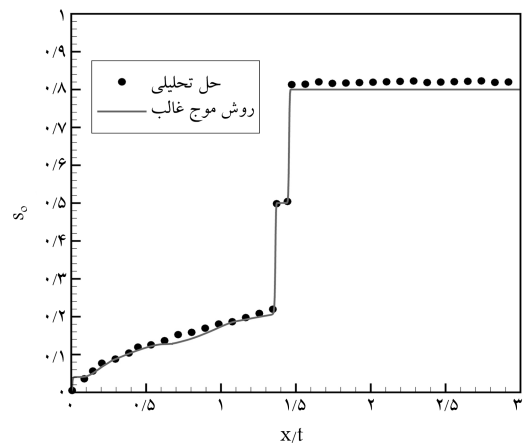
نفوذپذیری کوری به صورت رابطه‌ی ۲۸ استفاده می‌شود:

$$\lambda_w = s_w^2, \quad \lambda_g = s_g^2, \quad \lambda_o = s_o^2 \quad (28)$$

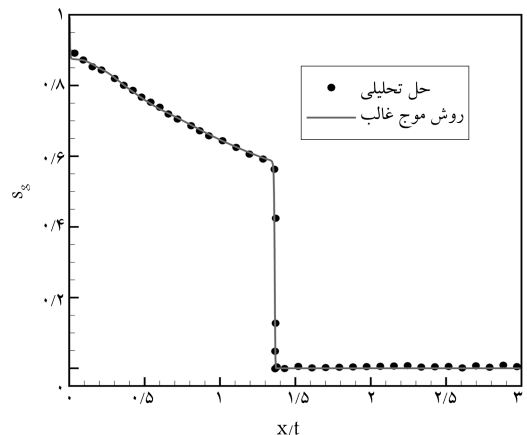
شرایط مرزی دیریکله در هر دو مرز بازه محاسباتی قرار داده شده است. نتایج حاصل از اعمال روش عددی موج غالب و محدودکنندهی فرام بر این مسئله در شکل‌های ۳ تا ۵ - که به ترتیب نشان‌دهنده‌ی درجه اشباع فازهای نفت، گاز و آب هستند - نشان داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود، روش مورد استفاده قادر به فراهم کردن پاسخ‌های کاملاً منطبق به حل روش مشخصه‌هاست.<sup>[۱۰]</sup> در این حالت نیازی به استفاده از تصحیح هارتن نیست. همچنین پاسخ این مسئله با استفاده از محدودکنندهی مین‌مد تفاوت چندانی با شکل‌های ۳ تا ۵ ندارد و استفاده از هر محدودکننده‌ی تغییر زیادی در جواب ایجاد نمی‌کند؛ مگر آن‌که محدودکنندهی مین‌مد به سبب ماهیت خود جواب را بسیار اندک بخش می‌کند.

۵.۴. معادلات باکلی - لورت با گرانش با استفاده از نفوذپذیری کوری تعمیم یافته در این مسئله شرایط اولیه عبارت است از:

$$\mathbf{u}_l = (0.1, 0.9)^T, \quad \mathbf{u}_r = (0.5, 0.7)^T \quad (29)$$



شکل ۳. درجهی اشباع فاز نفت در معادلات باکلی - لورت سه فاز با استفاده از روابط نفوذپذیری کوری و محدودکنندهی فرام.



شکل ۴. درجهی اشباع فاز گاز در معادلات باکلی - لورت سه فاز با استفاده از روابط نفوذپذیری کوری و محدودکنندهی فرام.

تا ۳۶ هستند که داده‌های مورد استفاده در آن در جدول ۱ مشاهده می‌شوند. که در آن: نفوذپذیری فاز نفت نیز از روابط زیر به دست می‌آید:

$$k_{ro}(s_w, s_g) = \frac{s_o^* k_{row} k_{rog}}{k_{rocw} (\lambda - s_w^*) (\lambda - s_g^*)} \quad (32)$$

$$s_o^* = \frac{s_o - s_{orm}}{\lambda - s_{wc} - s_{orm}},$$

$$s_w^* = \frac{s_w - s_{wc}}{\lambda - s_{wc} - s_{orm}},$$

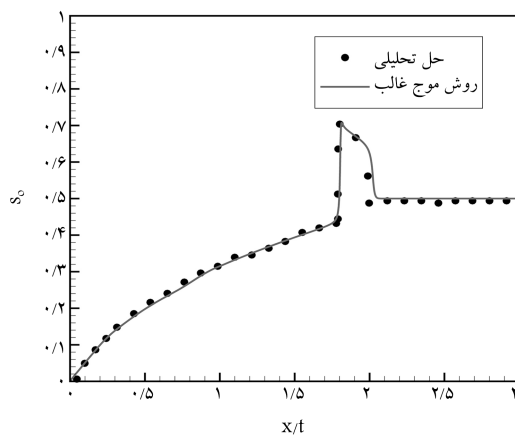
$$s_g^* = \frac{s_g}{\lambda - s_{wc} - s_{orm}} \quad (33)$$

و  $s_{orm}$  با استفاده از رابطه‌ی ۳۴ به دست می‌آید:

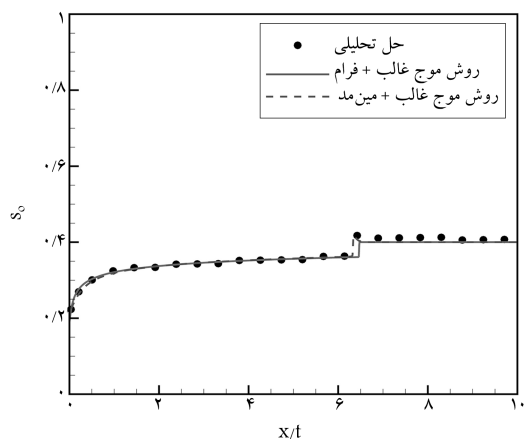
$$s_{orm} = \alpha s_{orw} + (1 - \alpha) s_{org} \quad (34)$$

جدول ۱. داده‌های تجربی نفوذپذیری‌های نسبی برای مدل استون.

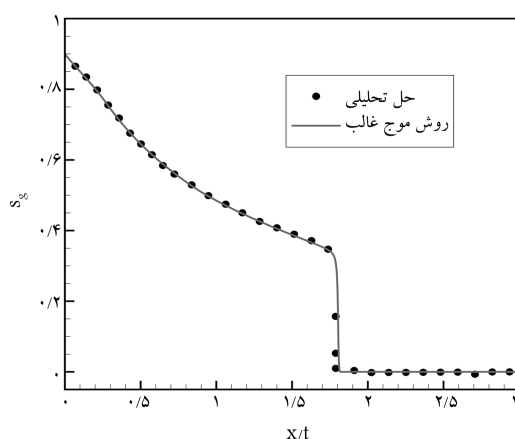
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
$s_{wc}$	۰٫۲۶۴	$k_{rwro}$	۰٫۱۰۵	$A_{og}$	۲٫۱۸۷
$s_{gc}$	۰٫۱۰۰	$k_{rgro}$	۰٫۶۲۵	$\alpha_w$	۰٫۵۶۵۵
$s_{orw}$	۰٫۲۱۵	$A_w$	۲٫۲۷۵	$\alpha_g$	۰٫۶۰۸
$s_{rorg}$	۰٫۱۸	$A_g$	۲٫۰۴۹	$\alpha_{ow}$	۰٫۷۵۴
$k_{rocw}$	۱٫۰	$A_{ow}$	۱٫۹۸۹	$\alpha_{og}$	۰٫۷۷۵



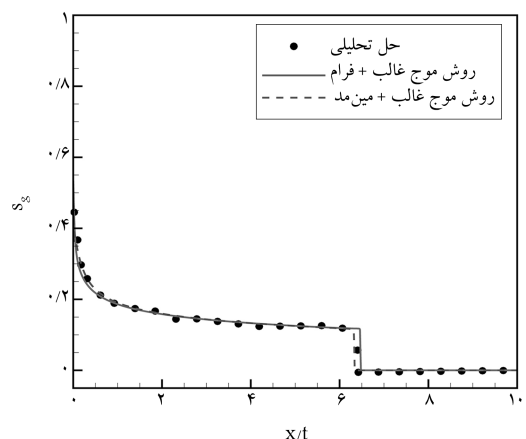
شکل ۶. درجه‌ی اشباع فاز نفت در معادلات باکلی-لورت سه فاز با گرانش با استفاده از روابط نفوذپذیری کوری تعمیم یافته و محدودکننده مین مد.



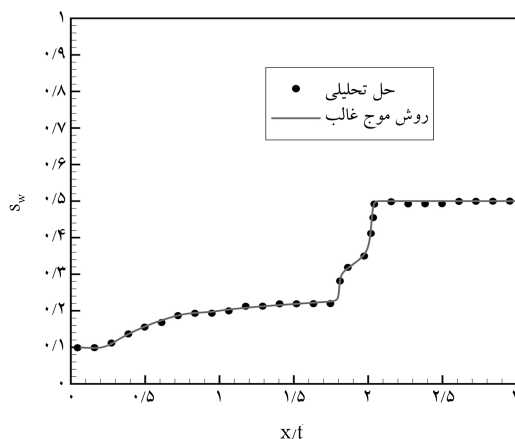
شکل ۹. درجه‌ی اشباع فاز نفت در معادلات باکلی-لورت سه فاز با گرانش با استفاده از روابط نفوذپذیری استون.



شکل ۷. درجه‌ی اشباع فاز گاز در معادلات باکلی-لورت سه فاز با گرانش با استفاده از روابط نفوذپذیری کوری تعمیم یافته و محدودکننده مین مد.



شکل ۱۰. درجه‌ی اشباع فاز گاز در معادلات باکلی-لورت سه فاز با گرانش با استفاده از روابط نفوذپذیری استون.



شکل ۸. درجه‌ی اشباع فاز آب در معادلات باکلی-لورت سه فاز با گرانش با استفاده از روابط نفوذپذیری کوری تعمیم یافته و محدودکننده مین مد.

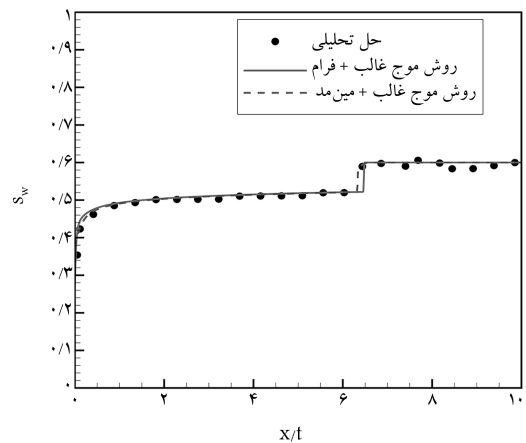
نتایج حاصل از اعمال روش موج غالب و محدودکننده‌های مین‌مد و فرام و نیز به‌کارگیری تصحیح هارتن برای سه فاز نفت، گاز و آب به ترتیب در شکل‌های ۹ تا ۱۱ آمده است. پارامتر تصحیح هارتن مانند مسئله‌ی قبل است. چنان‌که مشاهده می‌شود، نتایج با پاسخ‌های ارائه‌شده توسط گوزمن و فایرز<sup>[۱۰]</sup> مطابقت دارد و شوک‌ها و فن‌ها به‌خوبی گرفته شده‌اند.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این مطالعه اثر گراننش بر معادلات جریان در محیط‌های متخلخل بررسی شد. معادلات استفاده‌شده شامل معادله‌ی اسکالر باکلی لورت با گراننش و دسته معادلات باکلی لورت سه‌فاز با حضور گراننش بودند.

در این نوشتار از روش عددی جدیدی برای حل دسته معادلات پایستگی جرم هذلولوی که بر پایه تشخیص موج غالب سیستم بود، استفاده شد و در همه‌ی موارد پاسخ‌هایی مناسب به دست آمد. همچنین با استفاده از محدودکننده‌های شیب مختلف اقدام به توسعه‌ی روش موج غالب به مراتب بالاتر دقت شد. محدودکننده‌ی مین‌مد به‌سبب ماهیت خود مقداری پخش عددی ایجاد می‌کند. از طرف دیگر، محدودکننده‌ی فرام به‌دلیل داشتن پخش عددی بسیار کم، نوسانات خفیفی ایجاد می‌کند. همچنین شرط CFL برای محدودکننده‌ی مین‌مد می‌تواند بزرگ‌تر از حالتی باشد که در محدودکننده‌ی فرام مورد استفاده قرار می‌گیرد.

به‌منظور جلوگیری از ایجاد شوک‌های انبساطی ناشی از عدم تحدب معادلات پایستگی با حضور گراننش، از تصحیح آنتروپی هارتن استفاده شد. در تمامی موارد، استفاده از این تصحیح منجر به جلوگیری از شوک‌های انبساطی غیرفیزیکی می‌شود. البته پارامتر موجود در این تصحیح باید با دقت و براساس محدودده‌ی سرعت موج‌های موجود در مسئله‌ی مورد نظر انتخاب شود.



شکل ۱۱. درجه‌ی اشباع فاز آب در معادلات باکلی - لورت سه‌فاز با گراننش با استفاده از روابط نفوذپذیری استون.

که در آن  $\alpha = 1 - [s_g / (1 - s_{wc} - s_{org})]$ . همچنین،  $k_{row}$  و  $k_{rog}$  عبارت‌اند از:

$$k_{rol}(s_w, s_g) = k_{row} \exp \left[ -A_{ol} \left( \frac{s_l - s_{lc}}{s_{lt} - s_l} \right)^{\alpha_{ol}} \right] \quad (35)$$

که در آن  $l = w, g$  به‌ترتیب مربوط به فازهای آب و گاز هستند. نفوذپذیری فازهای آب و گاز از رابطه‌ی ۳۶ به دست می‌آیند:

$$k_{rl}(s_w, s_g) = k_{rlo} \exp \left[ -A_l \left( \frac{s_l - s_{lc}}{s_{lt} - s_l} \right)^{-\alpha_l} \right] \quad (36)$$

که در آن  $s_{gt} = 1 - s_{org}$  و  $s_{wt} = 1 - s_{orw}$ .

## پانویس‌ها

1. method of characteristics
2. Stone type
3. Rusanov
4. staggered
5. semi-Godunov
6. viscosity ratio
7. local conservation
8. higher-order states
9. minmod limiter
10. Fromm's limiter
11. variable derivative
12. MUSCL
13. slope limiter
14. first order forward-Euler
15. Courant-Friedrichs-Lewy

## منابع (References)

1. Buckley, S.E. and Leverett, M.C. "Mechanism of fluid displacement in sands", *Petroleum Transactions, AIME*, **146**, pp. 107-116 (1942).

2. Juanes, R. and Patzek, T.W. "Analytical solution to the Riemann problem of three-phase flow in porous media", *Transport in Porous Media*, **55**(1), pp. 47-70 (2004).
3. Lindquist, W.B. "Current progress in hyperbolic systems: Riemann problems and computations", *Contemporary Mathematics*, **100**, (1989).
4. Keyfitz, B.L. and Shearer, M. "Nonlinear evolution equations that change type", *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, **27**, Springer-Verlag, (1990).
5. Rhee, H.K., Aris, R. and Amundson, N.R., *First-Order Partial Differential Equations*, Courier Dover Publications (2001).
6. Marchesin, D. and Plohr, B.J. "Wave structure in WAG recovery", *SPE J.*, **6**(2), pp. 209-221 (2001).
7. Trangenstein, J.A. "Three-phase flow with gravity", In: W.B. Lindquist (ed.) *Current Progress in Hyperbolic Systems: Riemann Problems and Computations*, American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 147-159 (1989).
8. Holden, L. "On the strict hyperbolicity of the Buckley-Leverett equations for three-phase flow in a porous medium", *SIAM J. on Applied Mathematics*, **50**(3), pp. 667-682 (1990).

9. Guzman, R. and Fayers, F. "Mathematical properties of three-phase flow equations", *SPE J.*, **2**(3), pp. 291-300 (1997).
10. Guzman, R. and Fayers, F. "Solutions to the three-phase Buckley-Leverett problem", *SPE J.*, **2**(3), pp. 301-311 (1997).
11. Edwards, M.G. "The dominant wave-capturing flux: A finite-volume scheme without decomposition for systems of hyperbolic conservation laws", *J. of Computational Physics*, **218**, pp. 275-294 (2006).
12. Nessyahu, H. and Tadmor, E. "Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws", *J. of Computational Physics*, **87**(2), pp. 408-463 (1990).
13. Kurganov, A. and Tadmor, E. "New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations", *J. of Computational Physics*, **160**, pp. 241-282 (2000).
14. Karlsen, K.H., Mishra, S. and Risebro, N.H. "Semi-Godunov schemes for multiphase flows in porous media", *Applied Numerical Mathematics*, **59**(9), pp. 2322-2336 (2009).
15. Harten, A. "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *J. of Computational Physics*, **49**(3), pp. 357-393 (1983).
16. Van Leer, B. "Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method", *J. of Computational Physics*, **32**(1), pp. 101-136 (1979).
17. Fayers, F. "Extension of Stone's method 1 and conditions for real characteristics in three-phase flow", *SPE J.*, **4**(4), pp. 437-445 (1989).