

تعیین ضرایب آئرودینامیکی بال مافوق صوت با استفاده از روش اجزای مرزی

حسین شاهوردی* (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مصطفی هادی دولابی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر

مرتضی بیهانی‌نژاد (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

مهندسی مکانیک شریف
دوره‌ی ۳-۲، شماره‌ی ۱، ص. ۸۷-۹۳، (پادداشت نشی)

هدف اصلی در این نوشتار محاسبه‌ی ضرایب آئرودینامیکی بال در جریان مافوق صوت دائم بر مبنای حل جریان پتانسیل با استفاده از روش اجزای مرزی است. در این راستا ابتدا معادله‌ی حاکم بر جریان پتانسیل مافوق صوت استخراج و خطی‌سازی شده، و سپس با استفاده از روش اجزای مرزی و اعمال توابع شکل مرتبه‌ی اول، دستگاه معادلات گسسته برای محاسبات جریان تشکیل شده است. در خلال حل این معادلات مشکلات محاسباتی مربوط به تعیین ضرایب انتگرالی تکین بروز می‌کند که ناشی از قطع مخروط ماخ توسط اجزای مرزی موجود بر دامنه‌ی محاسباتی است. البته با استفاده از روش‌های عددی می‌توان مشکلات مربوطه را برطرف کرد. در نهایت برای دو بال با هندسه‌ی مشخص، محاسبات جریان مافوق صوت دائم انجام شده است. مقایسه‌ی نتایج مزبور با جواب‌های دقیق، بیان‌گر دقت خوب روش حاضر و انعطاف‌پذیری آن برای تحلیل جریان حول بال‌های سه‌بعدی است.

واژگان کلیدی: آئرودینامیک، بال، روش اجزای مرزی، جریان پتانسیل، مافوق صوت.

h_shahverdi@aut.ac.ir
hadidoolabi@yahoo.com
bnmorteza@cua.ac.ir

مقدمه

در این میان می‌توان به روش اجزای مرزی اشاره کرد. در این روش چون سطح تماس جسم با سیال به‌عنوان میدان حل در نظر گرفته می‌شود، یک بعد از ابعاد مسئله کاهش می‌یابد. این امر منجر به افزایش راندمان، سرعت انجام محاسبات و کاهش تلاش محاسباتی، به‌ویژه در تحلیل جریان حول اجسام دارای هندسه‌ی پیچیده می‌شود. استفاده از روش اجزای مرزی محدودیتی ندارد و به‌راحتی قابل اعمال به مسائل مختلف در حوزه‌ی سازه، سیال و... است که امروزه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. حتی در مسائلی به‌صورت ترکیب هیبریدی با روش‌های حجم محدود نیز برای ارزیابی و محاسبه‌ی توزیع خصوصیات مانند سرعت و فشار در میدان جریان اطراف جسم غوطه‌ور در سیال استفاده شده و کارایی خود را به اثبات رسانده است.^[۱-۴] در این راستا با الگوگرفتن از تحلیل مودال سازه‌ها، ابزار محاسباتی سریع‌تری در حوزه‌ی حل جریان‌های غیردائم مادون صوت، تحت عنوان الگوهای رتبه کاسته بر مبنای روش اجزای مرزی، ایجاد شده است.^[۵]

روش اجزای مرزی در حل جریان در رژیم‌های مختلف قابل استفاده است. در این بین تحلیل جریان مافوق صوت به‌دلیل کاربردهای بسیار زیاد -- به‌ویژه در تحلیل مسائل آئروکسسانتی مافوق صوت -- همواره مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. از آنجا که جریان پتانسیل مافوق صوت، ضمن برخورداری از محدودیت

برای حل میدان جریان حول اجسام پرنده تاکنون روش‌های متعددی ابداع و به کار گرفته شده است. با پیشرفت در زمینه‌ی علوم و فناوری اطلاعات و فراهم شدن ابزار محاسباتی قدرتمند، در چند دهه‌ی اخیر از روش‌های عددی بیش از پیش برای شبیه‌سازی رفتار پدیده‌های طبیعی جریان و حل مسائل مرتبط استفاده شده است. چرا که استفاده از این روش‌ها به‌نحو مطلوب امکان در نظرگرفتن پیچیدگی‌ها و آثار غیرخطی موجود در مسائل جریان و... را فراهم کرده و در نهایت نسبت به روش‌های تحلیلی، شبیه‌سازی دقیق‌تری از مسئله‌ی مورد نظر ارائه می‌کنند. البته همچنان تحقیق و توسعه در ارتباط با افزایش بهره‌وری و عملکرد این روش‌ها و ابداع روش‌های عددی جدید ادامه دارد.

یکی از اهداف حل میدان جریان حول اجسام پرنده، محاسبه‌ی نیروهای آئرودینامیکی به‌صورت برآ و پسا به‌منظور استفاده در طراحی و تحلیل سازه، مکانیک پرواز، یا تحلیل آئروکسسان جسم مورد نظر است. از آنجا که در میجث آئروکسسانتی به اندرکنش سازه و سیال پرداخته می‌شود، آن دسته از روش‌هایی که مجهولات روی مرز مشترک سازه و سیال را مستقیماً محاسبه می‌کنند از توجه بیشتری برخوردارند.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۰/۱۲/۲۲، اصلاحیه ۱۳۹۰/۷/۹، پذیرش ۱۳۹۰/۷/۱۸.

که در آن a سرعت صوت است. اگر دستگاه مرجع به نحوی انتخاب شود که سرعت جریان آزاد، V_∞ ، در جهت محور x باشد، سرعت صوت را می‌توان بر حسب تابع پتانسیل Φ به شکل زیر نوشت:^[۷]

$$a^2 = a_\infty^2 - (\gamma - 1) \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - V_\infty^2 \right] \right\} \quad (2)$$

که در آن γ نسبت گرمای ویژه است. تابع پتانسیل سرعت را می‌توان به صورت مجموع پتانسیل اغتشاشی، φ ، و پتانسیل جریان آزاد بیان کرد.

$$\Phi = \varphi + V_\infty x \quad (3)$$

با ترکیب سه رابطه‌ی اخیر و با جداسازی عبارت‌های خطی و غیرخطی، رابطه‌ی ۴ برحسب پتانسیل اغتشاشی به دست می‌آید.

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{a_\infty^2} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi = Q(x, y, z, t) \quad (4)$$

سمت راست رابطه‌ی ۴ بیانگر عبارت‌های غیرخطی است. این رابطه برای جریان تراکم‌پذیر در تمام رژیم‌ها قابل استفاده است. اما برای اعمال روش اجزای مرزی نیاز به تعیین جواب اساسی معادله فوق است. لذا برای به دست آوردن جواب اساسی جریان تراکم‌پذیر با توجه به رابطه‌ی ۳ باید معادله‌ی ۵ را حل کرد.

$$\nabla^2 G - \frac{1}{a_\infty^2} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 G = \delta(x - x_0, t - t_0) \quad (5)$$

که در آن G مبین جواب اساسی، t_0 زمان اعمال بار متمرکز و x_0 بیانگر محل بارگذاری است. پس از انجام چندین عملیات ریاضی، استفاده از تبدیل مختصات و ساده‌سازی معادلات، در نهایت جواب اساسی جریان مافوق صوت به شکل معادله‌ی ۶ استخراج می‌شود:

$$G = \frac{-H}{\sqrt{\pi r \beta}} [\delta(t - t_0 + \theta^+) + \delta(t - t_0 + \theta^-)] \quad (6)$$

که در آن ضریب H نیز چنین تعریف می‌شود.

$$H = \begin{cases} 1 & (x_* - x) > \beta \left[(y - y_*)^2 + (z - z_*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ 0 & (x_* - x) < \beta \left[(y - y_*)^2 + (z - z_*)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (7)$$

در عبارت‌های فوق مختصات (x_*, y_*, z_*) معرف نقطه کنترلی و $\sqrt{M^2 - 1}$ نشان‌دهنده‌ی ضریب تراکم‌پذیری است. همچنین $r \beta$ به صورت رابطه‌ی ۸ بیان می‌شود.

$$r \beta = \left[\Delta x^2 - \beta^2 (\Delta y^2 + \Delta z^2) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

که در آن Δ معرف اختلاف بین مؤلفه‌های مختصات نقطه‌ی کنترلی و نقطه‌ی رأس مخروط ماخ است. همچنین θ^\pm نشان‌دهنده‌ی تأخیرهای زمانی بوده و عبارت است از:

$$\theta^\pm = \frac{\left\{ -M \Delta x \pm \left[\Delta x^2 - \beta^2 (\Delta y^2 + \Delta z^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}}{\beta^2 a_\infty} \quad (9)$$

آیرنترئوپیک جریان در طیف وسیعی از مسائل مهندسی دارای جواب‌های مناسب است، از دیرباز تحلیل آن به روش‌های مختلف مورد بحث واقع شده است.^[۸-۶] اما به دلیل ماهیت پیچیده‌ی جریان‌های مافوق صوت، حتی با در نظر گرفتن جریان پتانسیل باز هم مشکلات متعددی در تحلیل این جریان‌ها وجود دارد. به همین دلیل فرضیه‌های ساده‌سازی بسیاری نیز برای تحلیل جریان‌های پتانسیل غیردائم مافوق صوت به مسئله اضافه شده، که شناخته‌شده‌ترین آن‌ها فرضیه‌ی پیستون است.

به هر حال برای محاسبه‌ی بارهای آئرونامیک در تحلیل اجسام سه‌بعدی پیچیده نظریه‌ی پیستون به هیچ وجه جواب‌گو نیست و به‌کارگیری روشی جامع‌تر و در عین حال کارآ ضرورت می‌یابد. در این راستا علاوه بر روش اجزای مرزی، از روش‌های دیگری نیز -- همچون اجزای محدود، کنترل محدود یا ترکیب آن‌ها -- برای تحلیل جریان مافوق صوت استفاده شده است.^[۹] در این راستا همچنین از روش دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) بر پایه‌ی حل معادلات ناور-استوکس و اویلر استفاده شده است.^[۱۰] محققین از روش اجزای مرزی در شبیه‌سازی آثار میدان جریان مافوق صوت در تحلیل آئروکشنان بال‌های مسطح استفاده کرده و نشان دادند که روش به‌کارگرفته شده در مقایسه با مراجع معتبر از دقت خوبی برخوردار است.^[۱۱] در کنار روش‌های عددی مذکور روش‌های دیگری نیز بر پایه‌ی پردازش اطلاعات به دست آمده از نتایج آزمایشگاهی ابداع و مورد استفاده قرار گرفته‌اند. به‌طور مثال می‌توان به تحقیق انجام‌شده توسط ساورین^۱ اشاره کرد. وی روش جدیدی برای محاسبه‌ی نیروهای آئرونامیکی بر مبنای اطلاعات حاصل از تکنیک توسعه‌یافته‌ی آشکارسازی جریان مافوق صوت دوبعدی و محاسبه‌ی سرعت ذرات مربوط به میدان جریان تحت عنوان روش PIV^۲ ارائه کرد و در نهایت، صحت نتایج مربوط به یک ایروپیل دوکوزی را نشان داد.^[۱۲] علاوه بر موارد ذکر شده در بسیاری از تحقیقات دانشگاهی و صنعتی از نرم‌افزار فلونت^۳ نیز برای تحلیل جریان در رژیم‌های مختلف استفاده شده است. هدف نهایی از تحقیق حاضر ایجاد یک کد محاسباتی سریع برای تحلیل پایداری آئروکشنان پرنده‌های مافوق صوت است. از طرفی به دلیل ماهیت پدیده‌های آئروکشنان و اندرکنش دو میدان سازه و سیال، تبادل اطلاعات بین این دو میدان ضرورت ویژه دارد. در این راستا، حل‌گر جریانی که با کوپل شدن به حل‌گر سازه‌ی، قادر به تحلیل جریان در زمان‌های متوالی باشد و نیز دقت مناسب و تلاش محاسباتی کمتری داشته باشد، از اهمیت به‌سزایی برخوردار است.

در این راستا می‌توان از روش اجزای مرزی به‌عنوان یک روش جامع و کارآ به‌منظور محاسبات سریع میدان‌های جریان مافوق صوت بهره جست. در عین حال اعمال این روش با پیچیدگی‌های ریاضی و عددی بسیاری مواجه است که از آن جمله می‌توان به حضور ضرایب انتگرالی تکین ناشی از قطع اجزاء محاسباتی توسط مخروط ماخ در سیستم معادلات حاکم -- که با استفاده از تکنیک‌های مشخصی مانند گوس و تبدیل تلس رفع می‌شوند -- اشاره کرد. در ادامه روش اجزای مرزی برای تحلیل جریان‌های پتانسیل مافوق صوت معرفی و نحوه‌ی اعمال آن به این نوع جریان ارائه می‌شود. در نهایت با استفاده از روش مذکور تحلیل جریان پتانسیل مافوق صوت در حالت دائم برای چندین مثال مشخص انجام و نتایج مربوطه اعتبارسنجی می‌شود.

جریان پتانسیل تراکم‌پذیر مافوق صوت

معادله‌ی حاکم بر جریان پتانسیل تراکم‌پذیر عبارت است از:

$$a^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \right)^2 \Phi \quad (1)$$

در اینجا ξ و η مختصات محلی جزء محاسباتی اند. با توجه به تعریف توابع شکل می‌توان متغیرهای Φ_0 و Ψ' را روی هر جزء از شبکه‌ی محاسباتی برحسب مقادیر مربوطه در هر کدام از گره‌ها درون‌یابی کرد.

$$\Phi = \sum_{i=1}^4 \Phi_i N_i, \quad \Psi' = \sum_{i=1}^4 \Psi'_i N_i \quad (14)$$

با توجه به شرط مرزی داده شده در رابطه‌ی ۱۲ اولین عبارت موجود در سمت راست رابطه ۱۱ مشخص است. لذا با استفاده از روابط ۱۳ و ۱۴ می‌توان ضرایب انتگرالی رابطه‌ی ۱۱ را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_j} \Psi' \frac{H}{r'_B} d \Sigma_j &= \Psi'_1 g_1 + \Psi'_2 g_2 + \Psi'_3 g_3 + \Psi'_4 g_4, \\ \iint_{\Sigma_j} \Phi \frac{\partial}{\partial N^c} \left(\frac{H}{r'_B} \right) d \Sigma_j &= \Phi_1 h_1 + \Phi_2 h_2 + \Phi_3 h_3 + \Phi_4 h_4 \quad (15) \end{aligned}$$

که در آن ضرایب معلوم متناظر با هر گره چنین تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} g_i &= \iint_{\Sigma_j} N_i \frac{H}{r'_B} d \Sigma_j, \\ h_i &= \iint_{\Sigma_j} N_i \frac{\partial}{\partial N^c} \left(\frac{H}{r'_B} \right) d \Sigma_j, \quad i = 1, \dots, 4 \quad (16) \end{aligned}$$

هنگام محاسبه‌ی ضرایب انتگرالی سه حالت ممکن است رخ دهد:

الف) در صورت واقع‌شدن جزء مرزی در داخل محدوده‌ی مخروط مایخ، مقدار ضریب H معادل با ۱ انتخاب می‌شود.

ب) در صورت واقع‌شدن جزء مرزی در خارج محدوده‌ی مخروط مایخ، مقدار ضریب H معادل با صفر انتخاب می‌شود.

ج) در این حالت قسمتی از جزء داخل و بقیه‌ی آن خارج از مخروط مایخ قرار گیرد، در اصطلاح جزء مرزی توسط مخروط مایخ قطع شده و حالت تکینگی ایجاد می‌شود.

اگر تمامی جزء در مخروط مایخ واقع باشد، هنگام محاسبه‌ی ضرایب انتگرال تکنیک خاصی مورد نیاز نیست. لذا ضرایب انتگرالی g_i و h_i توسط روش گوس قابل محاسبه است. اگر تمام جزء خارج از مخروط مایخ قرار گرفته باشد، بدیهی است که حاصل انتگرال‌های یادشده روی جزء مزبور برابر صفر خواهد بود. اما محاسبه‌ی این انتگرال‌ها هنگامی دشوار می‌شود که جزء مورد نظر توسط مرز مخروط مایخ قطع شده باشد که در این صورت مشکل محاسبه انتگرال‌های تکین ایجاد می‌شود. از آنجا که مقدار r'_B روی مرز مخروط مایخ برابر صفر است، لذا انتگرال‌های یادشده در این محل به ترتیب دارای تکینگی ضعیف و بسیار قوی هستند.^[۸] اکنون با توجه به توضیحات مطرح‌شده، رابطه‌ی ۱۱ به یک دستگاه معادلات خطی برحسب مقادیر مجهول گره‌ی Φ_0 تبدیل می‌شود.

$$\mathbf{A} \Phi_0 = \mathbf{B} \quad (17)$$

که در آن \mathbf{A} ماتریس ضرایب تأثیر و \mathbf{B} برداری معلوم و ناشی از شرایط مرزی است. پس از حل معادله‌ی ۱۷ و تعیین پتانسیل اغتشاشی روی نقاط گره‌ی واقع بر سطح بال، با استفاده از رابطه‌ی برنولی خطی‌شده برای اغتشاشات کوچک می‌توان

این بدان معناست که در جریان‌های مافوق صوت نقطه x_* ، یک بار با تأخیر θ^+ (امواج پیشرو) و یک بار با تأخیر θ^- (امواج پسرو) تحت تأثیر نقطه x قرار می‌گیرد. جواب اساسی به‌دست آمده این واقعیت را به‌خوبی نشان می‌دهد.

در ادامه با چشم‌پوشی از عبارات‌های غیرخطی در رابطه‌ی ۴، اعمال قضیه‌ی گرین و انجام عملیات جبری و ساده‌سازی آن‌ها، رابطه‌ی انتگرال مرزی ۱۰ برای محاسبه پتانسیل اغتشاشی، ϕ_* ، در محل x_* و در دستگاه مختصات پراوندتل-گلارلت^۴ استخراج می‌شود.^[۸]

$$\begin{aligned} 4\pi E_* \phi_* &= - \iint_{\Sigma} \left([\Psi']^{\theta^+} + [\Psi']^{\theta^-} \right) \frac{H}{R'} d \Sigma \\ &+ \iint_{\sigma} \left([\Phi]^{\theta^+} + [\Phi]^{\theta^-} \right) \frac{\partial}{\partial N^c} \frac{H}{R'} d \Sigma \\ &+ \iint_{\sigma} \left([\dot{\Phi}]^{\theta^+} \frac{\partial \Theta^+}{\partial N^c} + [\dot{\Phi}]^{\theta^-} \frac{\partial \Theta^-}{\partial N^c} \right) \frac{H}{R'} d \Sigma \quad (10) \end{aligned}$$

با حذف عبارات‌های وابسته به زمان از رابطه‌ی ۱۰ می‌توان معادله‌ی انتگرال مرزی را در حالت دائم چنین بیان کرد:

$$2\pi E_* \Phi_{0,*} = - \iint_{\Sigma} \Psi' \frac{H}{r'_B} d \Sigma + \iint_{\Sigma} \Phi_0 \frac{\partial}{\partial N^c} \left(\frac{H}{r'_B} \right) d \Sigma \quad (11)$$

همچنین معادله‌ی حاکم بر شرط مرزی به‌صورت رابطه‌ی ۱۲ استخراج می‌شود.

$$\Psi'_0 = - \frac{N_x}{\beta} \quad (12)$$

در روابط فوق $\Phi_{0,*}$ پتانسیل اغتشاشی بدون بعد در حالت دائم، و N^c بردار هم‌نرمال^۵ متناظر با بردار عمود بر روی N واقع بر مرز جسم و سیال است. r'_B نیز همان r_B در دستگاه مختصات پراوندتل-گلارلت است. همچنین E_* تابعی از هندسه و موقعیت نقطه‌ی محاسباتی مورد نظر است و با توجه به کیفیت مرز تعیین می‌شود.^[۷] نشان‌دهنده‌ی سطح احاطه‌شده‌ی جسم توسط سیال است. ضریب H بیان‌گر تأثیر محدوده‌ی مخروط مایخ روی حل است؛ اگر محدوده‌ی انتگرال‌گیری داخل محدوده‌ی مایخ واقع باشد این ضریب معادل ۱، و در غیر این صورت برابر صفر است.

روش اجزای مرزی

در این بحث نحوه‌ی حل عددی یا الگویی محاسباتی رابطه‌ی انتگرالی ۱۱ با استفاده از روش اجزای مرزی تشریح می‌شود. در روش اجزای مرزی میدان محاسباتی مورد نظر به اجزای کوچکتری تقسیم می‌شود. سپس با محاسبه‌ی ضرایب انتگرالی مربوط به هر جزء و با توجه به پیوستگی اجزاء از طریق گره‌های مشترک با یکدیگر، ماتریس ضرایب مربوط به کل میدان محاسباتی مونتاز شده و در نهایت دستگاه معادلات گسسته حاصل می‌شود.

گفتنی است که در بیشتر مسائل مهندسی، لبه‌ی فرار بال، مافوق صوت است، لذا در معادلات انتگرالی یادشده، مرز بال به‌تنهایی در مختصات پراوندتل-گلارلت است، زیرا دنباله درون ناحیه‌ی تأثیر قرار نخواهد گرفت.^[۸] برای محاسبه‌ی انتگرال‌های مرزی، از اجزای چهارگانه‌ی با توابع شکل (درون‌یاب) مرتبه‌ی اول استفاده شده است:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), & N_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), & N_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \quad (13) \end{aligned}$$

توزیع فشار و در نتیجه ضرایب نیروهای آیرودینامیکی را استخراج کرد: [۹]

$$C_p = \frac{2u'}{V_\infty} \quad (18)$$

که در آن u' مؤلفه‌ی سرعت اغتشاشی در هر گره است. در ادامه با استفاده از ضریب فشار محاسبه شده روی سطح جسم می‌توان ضرایب نیروی آیرودینامیکی را محاسبه کرد.

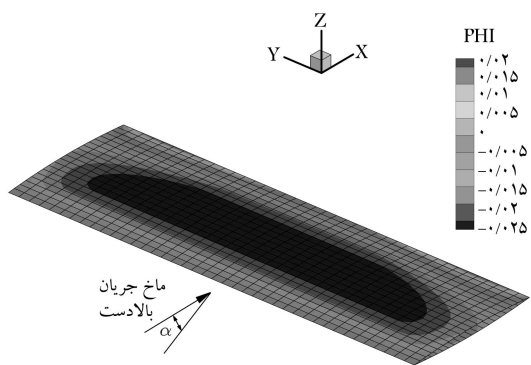
نتایج

در این قسمت، محاسبات میدان جریان مافوق صوت دائم برای چندین مثال مختلف با استفاده از روش اجزای مرزی بررسی شده و نتایج اخذ شده از طریق حل دقیق یا نتایج موجود در مراجع معتبر بررسی شده‌اند. ابتدا یک بال مستطیل شکل دوکوزی با ضریب منطری ۳، نسبت ضخامت ۵٪ و با زاویه حمله‌ی صفر درجه در نظر گرفته شده است. برای تولید شبکه‌ی محاسباتی، سطح هر نیمه‌ی بال در جهت وتر و طول آن هر کدام به ۷ قسمت تقسیم شده است. همچنین شبکه‌بندی دیگری نیز با تعداد تقسیمات ۸ در راستای وتر و طول آن در نظر گرفته شده است.

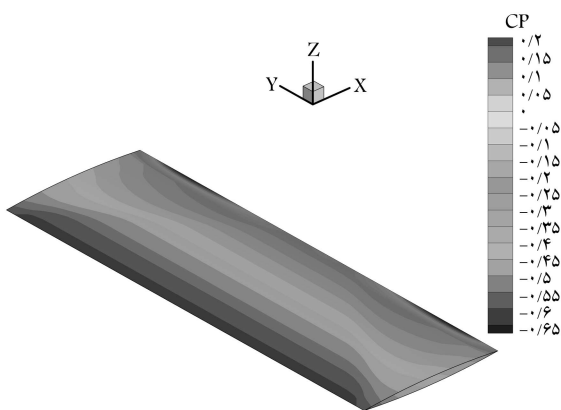
در شکل ۱ نتایج حاصل از حل جریان سه بعدی در وتر مرکزی ($y=0$) بال دوکوزی مزبور، با دو شبکه‌بندی یاد شده نشان داده شده است. چنان که ملاحظه می‌شود نتایج مربوط به شبکه‌بندی دوم کاملاً بر حل دقیق منطبق است. از آنجا که خط مرکزی بال توسط مخروط ماخ لبه‌ها تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد، این خط دقیقاً باید مطابق با یک ایرفویل دوبعدی عمل کند. بنابراین حل دقیق همان حل ایرفویل دوبعدی با نسبت ضخامت یاد شده است. علاوه بر نتایج مربوط به حل دقیق، نتایج موجود در دیگر منابع [۷] نیز در شکل مزبور ارائه شده است. مقایسه‌ی نتایج روش حاضر با موارد اشاره شده به خوبی صحت محاسبات انجام شده را نشان می‌دهد.

در شکل ۲ توزیع پتانسیل اغتشاشی محاسبه شده توسط روش اجزای مرزی روی سطح بال به همراه شبکه‌بندی 20×20 و در عدد ماخ ۱٫۳ نشان داده شده است. علت افزایش تعداد اجزا در این شکل، تشخیص بهتر تأثیر محدوده‌ی ماخ لبه‌ها روی نتایج است. چنان که در این شکل دیده می‌شود، محدوده‌ی مرکزی بال خارج از تأثیر مخروط ماخ لبه‌ها قرار دارد.

همچنین توزیع فشار محاسبه شده از این روش و حل دقیق روی خط مرکزی بال در شکل ۳ نشان داده شده است. چنان که در بالا توضیح داده شد، خط مرکزی



شکل ۲. توزیع پتانسیل اغتشاشی دائم روی سطح بال.

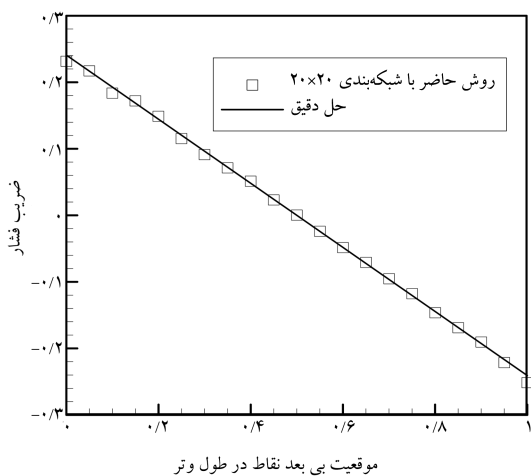


شکل ۳. توزیع ضریب فشار محاسبه شده در سطح بال.

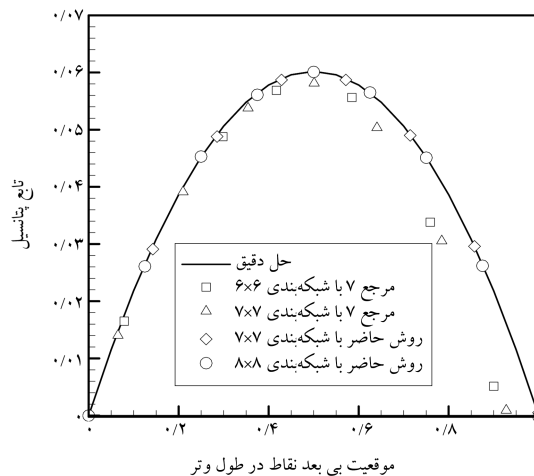
بال خارج از مخروط ماخ بوده و نشان‌دهنده‌ی یک حالت دوبعدی است. لذا برای ایرفویل دوکوزی در جریان مافوق صوت، ضریب فشار در هر نقطه از سطح ایرفویل از رابطه‌ی تحلیلی ۱۹ قابل محاسبه است: [۱۲]

$$C_{P_i} = \frac{2\theta_i}{\beta} \quad (19)$$

که در آن θ_i بیان‌گر زاویه‌ی بین خط مماس بر سطح ایرفویل با خط جریان در نقطه‌ی i است. چنان که در شکل ۴ ملاحظه می‌شود نتایج به دست آمده از روش اجزای مرزی در مقایسه با جواب‌های دقیق، تطابق خوبی نشان می‌دهند. البته خطای اندک



شکل ۴. توزیع ضریب فشار در طول وتر مرکزی بال.



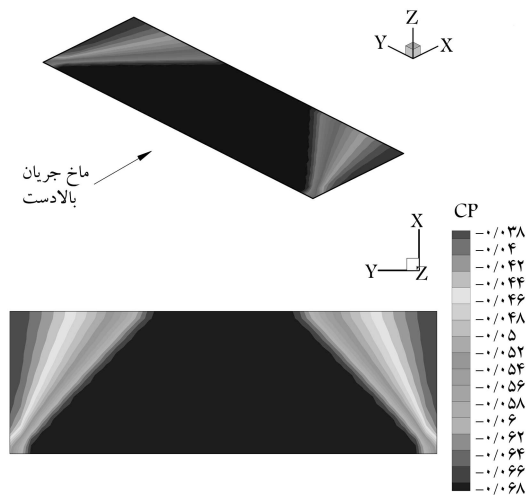
شکل ۵. توزیع پتانسیل اغتشاشی دائم در طول وتر مرکزی بال.

۲ درجه، در نظر گرفته شده است. برای تولید شبکه‌ی محاسباتی، سطح هر نیمه‌ی بال در جهت وتر و طول آن هرکدام به ۲۰ قسمت تقسیم شده است. در نتیجه سطح کل بال مربوطه به ۸۰۰ جزء چهارگوش تقسیم‌بندی شده است.

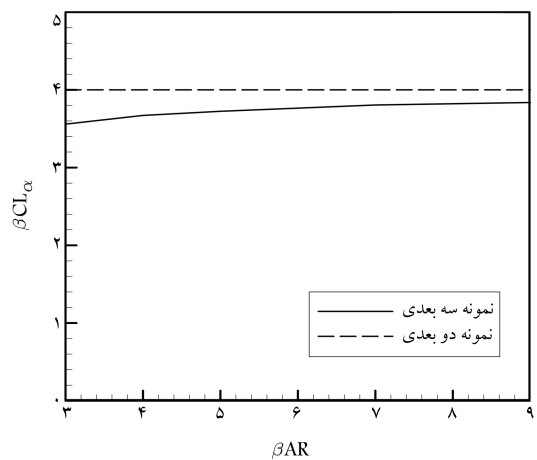
نتایج حاصل از حل جریان سه‌بعدی روی بال مزبور در عدد ماخ $M = \sqrt{2}$ انجام و توزیع فشار مربوطه در شکل ۵ نشان داده شده است. در این شکل به خوبی خطوط فشار ثابت و محدوده‌ی ماخ در لبه‌های بال مشخص بوده و با نتایج موجود^[۱۴] کاملاً مطابقت دارد. با توجه به شکل، زاویه‌ی مخروط ماخ لبه‌ها ۴۵ درجه است که با رابطه‌ی ریاضی محاسبه‌ی زاویه‌ی مخروط ماخ ($\mu = \sin^{-1} \frac{1}{M}$) کاملاً هم‌خوانی دارد. در نتیجه در این شکل، خط مرکزی بال تحت تأثیر مخروط ماخ لبه‌ها قرار نمی‌گیرد، لذا این خط دقیقاً باید مطابق با یک ایرفویل دوبعدی عمل کند. با استفاده از رابطه‌ی ۱۹، مقدار ضریب فشار -0.069 محاسبه می‌شود. نتایج ارائه‌شده نشان می‌دهد که مقدار خطای روش حاضر نسبت به حل دقیق ۱/۴ درصد است که این خطا نیز می‌تواند ناشی از خطای محاسباتی در روش عددی حاضر باشد. البته با افزایش تعداد اجزا یا افزایش مرتبه‌ی توابع شکل نیز می‌توان از میزان خطا کاست. همچنین در شکل ۶ نتایج مربوط به حل جریان سه‌بعدی روی یک بال مسطح با ضرایب منطری متفاوت در مقایسه با نتایج مربوط به حل دوبعدی نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش ضریب منطری نتایج روش اجزای مرزی به سمت حل دوبعدی همگرا می‌شوند که نشانگر اعتبار و صحت محاسبات انجام‌شده است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق با اعمال روش اجزای مرزی به معادلات خطی‌شده‌ی جریان تراکم‌پذیر مافوق صوت، معادلات گسسته‌ی حاکم بر این نوع جریان استخراج شد. به منظور اعتبارسنجی روش حاضر دو بال با هندسه‌ی مشخص در شرایط تعریف‌شده مورد تحلیل قرار گرفت و نتایج شامل توزیع پتانسیل اغتشاشی و ضرایب آنرویدینامیکی استخراج شد. مقایسه‌ی نتایج روش حاضر با نتایج مربوط به حل دقیق و مراجع معتبر، حاکی از دقت رضایت‌بخش روش مذکور در محاسبات جریان مافوق صوت دائم است. البته با اضافه‌کردن قابلیت تحلیل جریان در حالت غیر دائم می‌توان کد محاسباتی کاملی را در این زمینه، به‌ویژه برای محاسبات آنروکشسان و بارگذاری تهیه کرد که در مقایسه با سایر روش‌های عددی در مدت زمان کمتری محاسبات مشابه را انجام می‌دهد.



شکل ۵. توزیع ضریب فشار روی بال مسطح.



شکل ۶. تغییرات ضریب برآ با ضریب منطری در بال مسطح.

مربوط به لبه‌های بال را می‌توان با ریزترکردن اجزای محاسباتی در آن مناطق کاهش داد. در این شکل تغییر ضریب فشار ناشی از محدوده ماخ لبه‌ها به خوبی مشهود است. در ادامه یک بال مستطیل‌شکل مسطح با ضریب منطری ۳ و زاویه حمله‌ی

پانویس‌ها

1. Sovereign
2. particle image velocimetry (PIV)
3. FLUENT
4. Prandtl-Glauert
5. conormal

منابع (References)

1. Morino, L. and Gennaretti, M. "Boundary integral equation method for aerodynamics", *Progress in Astronautics and Aeronautics*, **146**, pp. 279-320 (1992).
2. Morino, L., Gennaretti, M., Iemma, U. and Salvatore, F.

- “Aerodynamics & aeroacoustics of wing and rotors via BEM-unsteady, transonic & viscous effects”, *Computational Mechanics*, **21**, pp. 265-275 (1998).
3. Morino, L., Gennaretti, M. and Bernardini, G. “A boundary element method for the aerodynamic analysis of aircraft in arbitrary motions”, *Computational Mechanics*, **32**, pp. 301-311 (2003).
 4. Eller, D. and Carlsson, M. “An efficient aerodynamic boundary element method for aeroelastic simulation and its experimental validation”, *Aerospace science and Technology*, **7**, pp. 532-539 (2003).
 5. Shahverdi, H., Behbahani-Nezhad, M., Nobari, A.S. and Haddadpour, H. “An efficient reduced-order modeling approach based on fluid eigenmodes and boundary element method”, *J. of Fluids and Structures*, **23**(8), pp. 143-153 (2007).
 6. Morino, L., *A General Theory of Unsteady Compressible Potential Aerodynamics*, NASA CR-2464 (1974).
 7. Morino, L. and Chen, L.T., *Inidicial Compressible Potential Aerodynamic around Complex Aircraft Configurations*, NASA SP-347, Part 2, pp. 1067-1110 (1975).
 8. Behbahani-Nejad, M. “Reduced order modeling of unsteady 3-dimensional flow using flow eigenmodes and boundary element method”, PHD Thesis, University of Tehran, Iran (In Persian) (1999).
 9. Le Rabault, C., Buffat, M. and Jeandel, D. “Numerical investigation of supersonic turbulent flows by a mixed finite volume/finite element method”, *Proceedings of the European Computational Fluid Dynamics Conference*, 1st, Brussels, Belgium, **1 & 2**. A95-95357, pp. 237-240 (1992).
 10. DeSpirito, J., Vaughn, M.E. and Washington, W.D. “Numerical investigation of aerodynamics of canard-controlled missile using planar and grid tail fins. Part 1. supersonic flow”, Storming Media LLC, Report No. A610804 (2002).
 11. Soltania, N., Esfahanian, V., Haddadpour, H. and Behbahani-Nejad, M. “Unsteady supersonic aerodynamics based on BEM, including thickness effects in aeroelastic analysis”, *J. of Fluids and Structures*, **19**, pp. 801-813 (2004).
 12. Souverein, L.J., *PIV Based Aerodynamic Loads Determination in Supersonic Flows*, Delf University of Technology, Netherlands (2006).
 13. Anderson, J.D., *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, Third ed., McGraw-Hill (2003).
 14. Shapiro, A.H. “The Dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow”, *Robert E. Krieger Publishing Company*, **II**, pp. 732 (1983).