

شبیه‌سازی یک‌بعدی اثر گرانث در مخازن نفتی با استفاده از مدل نفت سیاه و روش عددی موج غالب

مجنتی مشیری (دانشجوی دکتری)

مهرداد تقی‌زاده منظری* (استاد)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۲)
دربی ۲ - ۲۹، شماره ۲، ص. ۱۱-۲۰

مدل نفت سیاه یکی از مدل‌های پرکاربرد در حوزه‌ی شبیه‌سازی مخازن نفت است. در عین حال، دسته معادلات پایستگی جرم در این مدل غیرمحدب^۱ و دارای ساختاری پیچیده است. به همین علت استفاده از روش‌های معمول عددی با مشکلاتی همراه است. با در نظر گرفتن اثرات گرانث در معادلات حاکم، این عدم تحدب بیشتر شده و به‌ویژه در غیاب سازوکارهای پخش مانند موئینگی سبب ایجاد شوک‌های انبساطی^۲ غیرفیزیکی در پاسخ‌ها می‌شود. در این نوشتار با استفاده از روش عددی جدیدی به نام موج غالب که روشی تک‌موج و بدون نیاز به تجزیه‌ی مشخصه‌ی بوده اقدام به شبیه‌سازی جریان در مخازن با استفاده از مدل نفت سیاه می‌شود. همچنین، به منظور جلوگیری از ایجاد شوک‌های انبساطی از تصحیح آنتروپی هارتن استفاده شده است. در این مطالعه از اثرات فشار موئینگی صرف‌نظر شده و یک مخزن همگن یک‌بعدی با در نظر گرفتن اثرات گرانث شبیه‌سازی شده است.

واژگان کلیدی: مدل نفت سیاه، گرانث، قوانین پایستگی هذلولوی، روش موج غالب، تصحیح آنتروپی.

۱. مقدمه

شبیه‌سازی مخازن نفتی به منظور یافتن راهکارهایی برای افزایش برداشت، بیش از نیم قرن سابقه دارد.^[۱] امروزه گسترش توان محاسباتی رایانه‌ها و نیز ابداع روش‌های عددی کم‌هزینه‌تر و دقیق‌تر، سبب افزایش کارایی و دقت شبیه‌سازی‌های مخازن شده است. مدل‌های فیزیکی متنوعی برای توصیف جریان چندفازی درون محیط‌های متخلخل، به‌گونه‌ی که در مخازن نفتی وجود دارد، ارائه شده که طیفی از مدل ساده‌ی تک‌فازی^[۱] تا مدل چندجزئی و چندفازی ترکیبی^[۲] را شامل می‌شود. در این میان مدل نفت سیاه به سبب سادگی نسبی و ارائه‌ی تصویرکلی مناسب از جریان چندفازی درون مخزن یکی از مدل‌های پرکاربرد در شبیه‌سازی مخازن محسوب می‌شود.^[۳] در این مدل از تغییر دمای مخزن صرف‌نظر شده و جریان درون محیط متخلخل شامل سه جزء و سه فاز است. این مدل همچنین اثرات تراکم‌پذیری و انتقال جرم بین فازها را که برای شبیه‌سازی روش‌های افزایش برداشت اولیه و ثانویه مهم‌اند، در نظر می‌گیرد.^[۴]

روش‌های مختلفی برای بیان معادلات در مدل نفت سیاه وجود دارد. در این مطالعه از فرمول‌بندی ماتریسی ارائه‌شده توسط ترانگنشتاین و بل^۳ استفاده شده^[۶] که در آن معادلات جریان به یک معادله‌ی فشار سهموی و یک دسته معادلات هذلولوی پایستگی جرم اجزاء تقسیم می‌شود.

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۳/۱۶، اصلاحیه ۱۳۹۱/۹/۲۰، پذیرش ۱۳۹۱/۱۰/۰۵.

moshiri@mech.sharif.edu
mtmanzari@sharif.edu

دسته معادلات پایستگی جرم در فرمول‌بندی نفت سیاه ترانگنشتاین و بل^[۶] «تباهیدی خطی^۴» اند. مفهوم تباهیدگی خطی برای دسته معادلات پایستگی، معادل مفهوم عدم تحدب تابع شار نسبت به متغیر پایسته در مسائل اسکالر است. در مدل نفت سیاه، ماتریس ژاکوبین دسته معادلات پایستگی جرم به صورت تکیه‌ی بوده و یکی از مقادیر ویژه، که نمایان‌گر سرعت موج‌ها نیز هست، همواره بسیار نزدیک به صفر است که این امر منجر به تباهیدگی خطی معادلات می‌شود.^[۶] این مسئله کاربرد روش‌های مبتنی بر استفاده از مقادیر ویژه را مشکل می‌کند. با در نظر گرفتن اثر گرانث، این عدم تحدب بسیار شدیدتر می‌شود.^[۷]

تباهیدگی خطی، یا عدم تحدب توابع شار، چالشی عمده برای روش‌های عددی معمول در شبیه‌سازی مخازن محسوب می‌شود. در این‌گونه مسائل شوک‌ها سبب تخریب ساختار موجی شده و ساختار موجی جدید از تداخل شوک‌ها و ناپیوستگی‌های تماسی^۵ حاصل می‌شود. به منظور داشتن پاسخ‌های فیزیکی، در مسائل غیرمحدب باید شرط آنتروپی آلینیک^۶ ارضاء شود.^[۸] به سبب عدم ارضای این شرط، بیشتر روش‌های عددی صریح در برخورد با این مسائل دچار مشکل شده و شوک‌های انبساطی غیرفیزیکی ایجاد می‌کنند. این شوک‌های انبساطی به لحاظ ریاضی پاسخی صحیح برای مسئله‌اند، اما به علت عدم رعایت شرط آنتروپی، و به عبارتی نقض قانون دوم ترمودینامیک، پاسخ فیزیکی محسوب نمی‌شوند.^[۹] برای رفع این مشکل، اغلب از روش‌هایی به نام تصحیح آنتروپی استفاده می‌شود که در بیشتر موارد شامل

افزودن پخش عددی مصنوعی در نقاطی است که احتمال تولید شوک انبساطی وجود دارد. [۱۱، ۸]

برای غلبه بر پیچیدگی‌های گفته‌شده باید از روش عددی مناسبی به منظور حل دسته معادلات پایستگی جرم استفاده کرد. روش‌های مبتنی بر تجزیه‌ی مشخصه‌ی از دقت مناسب برخوردارند اما به سبب نیاز به تجزیه مشخصه‌ی و محاسبه‌ی بردارهای ویژه، هزینه‌ی محاسباتی آن‌ها -- به ویژه با توجه به ابعاد شبکه‌ی محاسباتی مورد استفاده برای مخازن نفتی -- بسیار زیاد است. [۱۲] از طرف دیگر، روش‌های مرکزی بر پایه روش رزائف^۷ قرار دارند که از بزرگ‌ترین مقدار ویژه سیستم به عنوان سرعت موج استفاده می‌کنند. [۱۳] این روش‌ها که عمدتاً به عنوان جایگزین روش‌های بالادستی معرفی می‌شوند، با وجود هزینه‌ی محاسباتی کم‌تر غالباً میزان پخش عددی بالایی دارند. [۱۴] تصحیحات مختلفی بر روی روش‌های مرکزی انجام گرفته است. محققین یک روش عددی مرتبه دوم را براساس روش لکس-فردریش ابداع کردند [۱۵] که برای شبکه‌ی جابه‌جا شده^۸ مورد استفاده در شبیه‌سازی مخازن مناسب است، اما پخش عددی آن با کوچک شدن گام زمانی افزایش می‌یابد. به همین دلیل، با اعمال اصلاحی بر این روش ابداعی، [۱۶] پخش عددی آن مستقل از زمان شد. شکل نیمه‌گسسته‌ی این روش اصلاح شده [۱۶] از قابلیت حل معادلات پایستگی جرم تابیده برخوردار است. به تازگی از این روش برای حل معادلات هذلولوی پایستگی جرم در مدل نفت سیاه بدون گرانش استفاده شده است. [۲] همچنین روش‌های جدیدتر و البته پرهزینه‌تری نیز به کار می‌رود. [۱۷-۲۰] علاوه بر این استفاده از شکل تغییر یافته‌ی روش‌های مرکزی برای غلبه بر عدم تحذب مورد مطالعه قرار گرفته است. [۱۰]

در مطالعه‌ی دیگری، روشی برای حل معادلات پایستگی پیشنهاد شد [۱۴] که در آن به جای استفاده از بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس ژاکوبین که در روش‌های مبتنی بر رزائف صورت می‌گرفت، به تشخیص موج غالب در سیستم پرداخته شده و محاسبه‌ی شار عددی براساس این موج غالب انجام می‌گیرد. به این ترتیب نیازی به محاسبه‌ی ماتریس ژاکوبین نیست و هم‌زمان با کاهش قابل ملاحظه‌ی هزینه‌ی محاسباتی -- حتی نسبت به روش‌های مرکزی معمول -- از میزان پخش عددی اضافی نیز جلوگیری می‌شود. [۱۴]

در مطالعه‌ی حاضر از روش موج غالب پیشنهادی ادواردز [۱۴] برای حل دسته معادلات پایستگی جرم در مدل نفت سیاه در یک مخزن همگن یک‌بعدی، و با در نظر گرفتن اثرات گرانش استفاده شده و از اثرات موئینگی صرف نظر می‌شود. همچنین، از تصحیح آنتروپی هارتن [۱۱] برای جلوگیری از ایجاد شوک‌های انبساطی استفاده شده و روشی برای بهینه‌سازی مقدار آن پیشنهاد می‌شود.

در ادامه، ابتدا مروری کوتاه بر معادلات در مدل فیزیکی نفت سیاه انجام شده و سپس نحوه‌ی اعمال روش عددی مورد استفاده برای حل معادلات پایستگی تشریح می‌شود. در بخش نتایج، تعدادی مسئله‌ی نمونه در حالت‌های با و بدون گرانش حل خواهد شد.

۲. مدل نفت سیاه

در این بخش فرمول‌بندی ارائه شده توسط ترانگنشتاین و بل [۶] برای مدل نفت سیاه به کار گرفته شده است. در این مدل، جریان درون محیط متخلخل شامل سه جزء نفت (o)، گاز (g) و آب (w) بوده که این اجزاء در شرایط مخزن می‌توانند حداکثر سه فاز مایع (l)، بخار (v) و آب (a) را تشکیل دهند. چنان که گفته شد، این فرمول‌بندی

شامل یک معادله‌ی سهموی برای فشار و یک دسته معادله‌ی پایستگی جرم برای اجزاء می‌شود. صرف‌نظر از فشار موئینگی، همه‌ی فازها دارای فشار یکسان خواهند بود.

بردار $\mathbf{n} = \{n_o, n_g, n_w\}$ به‌گونه‌ی تعریف می‌شود که درایه‌های آن مقدار جرم هر جزء در کل سیال بر واحد حجم فضای خالی باشد. همچنین ماتریس \mathbf{N} به‌صورت زیر تعریف می‌شود که درایه‌های آن نشان‌دهنده‌ی جرم هر جزء در هر فاز بر واحد حجم فضای خالی مخزن است:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{ol} & n_{ov} & 0 \\ n_{gl} & n_{gv} & n_{ga} \\ 0 & 0 & n_{wa} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

نحوه‌ی قرارگیری جرم اجزاء درون فازها را می‌توان با دانستن جرم اجزاء \mathbf{n} و فشار p از طریق رابطه‌ی ۲ تعیین کرد:

$$\mathbf{n} = \mathbf{N}\mathbf{e}, \quad (2)$$

که در آن $\mathbf{e} = \{1, 1, 1\}^T$ است. همچنین ماتریس نسبت‌های حل‌شدگی^۹ (\mathbf{R}) مطابق رابطه‌ی ۳ تعریف می‌شود:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & R_v & 0 \\ R_l & 1 & R_a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

که در آن $R_l = n_{gl}/n_{ol}$ ، $R_v = n_{ov}/n_{gv}$ و $R_a = n_{ga}/n_{wa}$. علاوه بر این، برای بیان ارتباط بین حجم فازها و جرم اجزاء از ماتریس قطری ضرایب حجمی سازند^{۱۰} (\mathbf{B}) استفاده می‌شود:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{n}, \quad (4)$$

که در آن \mathbf{u} بردار حجم نسبی فازها است که درایه‌های آن برابر حجم فازها به حجم فضای خالی مخزن است و \mathbf{B} ماتریسی قطری است که عناصر روی قطر آن ضرایب حجمی سازند در فازهای مختلف است.

برای به دست آوردن معادله‌ی فشار، رابطه‌ی تعادل حجم $\mathbf{e}^T \mathbf{u} = 1$ برحسب متغیرهای \mathbf{n} و p بسط داده می‌شود. در نهایت، با انجام یک سری عملیات ریاضی، معادله‌ی فشار مطابق رابطه‌ی ۵ نوشته می‌شود: [۶]

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{N} \mathbf{D}_u^{-1} \mathbf{v}) = \beta \quad (5)$$

که در آن ضرایب α و β چنین تعریف می‌شوند:

$$\alpha = -\phi \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p} + \mathbf{e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (الف)$$

$$\beta = \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u} - 1}{\Delta t} \phi \quad (ب)$$

در این روابط ϕ تخلخل مؤثر مخزن و x مختصه‌ی مکان است. همچنین \mathbf{D}_u ماتریس قطری است که عناصر روی قطر آن حجم نسبی فازهاست. با توجه به این که $\mathbf{N} \mathbf{D}_u^{-1}$ نشان‌دهنده‌ی چگالی هر جزء در هر فاز است، دسته معادلات پایستگی جرم در مدل نفت سیاه عبارت است از:

$$\frac{\partial (\phi \mathbf{n})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

برای گسسته‌سازی معادله‌ی فشار ۵، سرعت‌های کلی به صورت ضمنی وارد می‌شوند و در نتیجه فرم گسسته‌شده‌ی نهایی معادله‌ی فشار عبارت خواهد بود از:

$$\beta_i^n \Delta t + \alpha_i^n p_i^n - \left[(\zeta_t)_{i+1/2}^n - (\zeta_t)_{i-1/2}^n \right] K g \sin \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} = \left\{ \alpha_i^n + \left[(\lambda_t)_{i+1/2}^n + (\lambda_t)_{i-1/2}^n \right] K \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right\} p_i^{n+1} - \left[(\lambda_t)_{i+1/2}^n K \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right] p_{i+1}^{n+1} - \left[(\lambda_t)_{i-1/2}^n K \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right] p_{i-1}^{n+1} \quad (12)$$

باید یادآور شد که در معادله‌ی فشار بالا، زمانی که فشار کم‌تر از فشار نقطه‌ی حباب باشد، یا به عبارتی جریان زیر اشباع باشد نیز ضرایب α و β از روابط ۶ الف و ۶ ب به دست می‌آید. اما در این حالت مقادیر بردارهای \mathbf{n} و \mathbf{u} با حالت اشباع متفاوت خواهد بود.^[۶] با تعریف پارامترهای تحرک پذیری $\lambda_\alpha = k_\alpha / \mu_\alpha$ و تحرک پذیری گرانشی $\zeta_\alpha = k_\alpha \rho_\alpha / \mu_\alpha$ ، تحرک پذیری کلی و تحرک پذیری گرانشی کلی مطابق رابطه‌ی ۱۳ محاسبه می‌شود:

$$\lambda_t = \sum_{\alpha=l,v,a} \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha}, \quad \zeta_t = \sum_{\alpha=l,v,a} \frac{k_\alpha}{\mu_\alpha} \rho_\alpha \quad (13)$$

ضرایب معادله‌ی گسسته‌سازی شده در مرزهای هر سلول با متوسط‌گیری حسابی از مقادیر دو سلول همسایه محاسبه می‌شود، اما برای محاسبه‌ی پارامترهای λ و ζ چون تابع درجه اشباع و به شدت غیرخطی‌اند، از متوسط‌گیری هارمونیک استفاده می‌شود:^[۱۱]

$$\lambda_{i+1/2}^n = \frac{2 \lambda_i^n \lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}, \quad \zeta_{i+1/2}^n = \frac{2 \zeta_i^n \zeta_{i+1}^n}{\zeta_i^n + \zeta_{i+1}^n} \quad (14)$$

دستگاه معادلات حاصل از معادله‌ی ۱۲ در حالت یک‌بعدی تبدیل به یک دستگاه سه‌قطری می‌شود که با استفاده از الگوریتم توماس^[۱۲] به راحتی قابل حل است. فرم گسسته‌ی نهایی معادله‌ی پایستگی جرم (معادله‌ی ۷) با استفاده از روش حجم محدود مطابق رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$\mathbf{n}_i^{n+1} = \mathbf{n}_i^n - \frac{\Delta t}{\phi_i \Delta x} \left(\hat{\mathbf{f}}_{i+1/2} - \hat{\mathbf{f}}_{i-1/2} \right) \quad (15)$$

در این نوشتار با نگرش تریبی، ابتدا معادله‌ی فشار ۱۲ با ثابت نگه داشتن ترکیب اجزاء \mathbf{n} حل، و فشارهای جدید محاسبه می‌شوند. سپس با استفاده از این فشارها، سرعت‌های کلی و در نتیجه شارهای $\hat{\mathbf{f}}$ محاسبه می‌شوند. در نهایت نیز معادلات پایستگی جرم ۱۵ با فرض ثابت بودن فشار حل می‌شود و ترکیب جدید به دست می‌آید. در بخش بعد روش عددی موج غالب برای حل دسته معادلات ۱۵ معرفی می‌شود.

۲.۳. روش موج غالب

روشی که در این مطالعه برای حل دسته معادلات پایستگی ۱۵ مورد استفاده قرار می‌گیرد، توسط ادواردز^[۱۳] ارائه شده و مبتنی بر تشخیص موج غالب درون سیستم است. این روش علاوه بر رفع نیاز به تجزیه‌ی مشخصه‌ی، از پخش عددی موجود در روش‌های مرکزی جلوگیری می‌کند. روش موج غالب پایستگی موضعی را حفظ کرده و در قالب روش حجم محدود پیاده‌سازی می‌شود. سرعت موج غالب λ_{DW} توسط رابطه‌ی ۱۶ تعریف می‌شود:^[۱۳]

$$\lambda_{DW} = \frac{(\mathbf{n}_R - \mathbf{n}_L) \cdot (\mathbf{f}_R - \mathbf{f}_L)}{(\mathbf{n}_R - \mathbf{n}_L) \cdot (\mathbf{n}_R - \mathbf{n}_L)} \quad (16)$$

که در آن شار هر جزء به صورت $\mathbf{f} = \mathbf{RB}^{-1} \mathbf{v}$ تعریف می‌شود و بردار \mathbf{v} با تعریف سرعت کلی v_t به صورت مجموع سرعت فازها و حذف جمله‌ی گرادیان فشار در معادله‌ی دارسی محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{v} = \mathbf{Le} \frac{1}{e^T \mathbf{Le}} v_t + \left[\mathbf{I} - \mathbf{Le} \frac{1}{e^T \mathbf{Le}} e^T \right] K \mathbf{L} \rho g \sin \theta \quad (8)$$

که در آن K نفوذپذیری مطلق سنگ است و θ زاویه‌ی شیب مخزن است که به صورت پادساعت‌گرد از سطح افق اندازه‌گیری می‌شود. همچنین g شتاب ثقل زمین و \mathbf{L} ماتریس قطری تحرک پذیری^[۱۱] فازهاست که عناصر روی قطر آن از تقسیم نفوذپذیری نسبی هر فاز بر لزجت همان فاز به دست می‌آید. باید دقت داشت که چون رابطه‌ی ۸ در حالت یک‌بعدی نوشته شده، سرعت کلی v_t کمیتی اسکالر خواهد بود. همچنین، در این معادله ρ بردار چگالی فازهاست که چنین تعریف می‌شود:

$$\rho = \mathbf{RB}^{-1} \rho^{std} \quad (9)$$

که در آن چگالی اجزاء در شرایط استاندارد سطح زمین است. تنها نکته‌ی باقی‌مانده محاسبه‌ی درجه‌ی اشباع فازهاست. طبق تعریف، کسری از حجم سیال که توسط یک فاز اشغال می‌شود، درجه‌ی اشباع آن فاز نام دارد. بنابراین:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{u}}{e^T \mathbf{u}} \quad (10)$$

باید توجه داشت که در فرمول‌بندی حاضر به سبب خطی‌سازی و عدم ارضا دقیق معادله‌ی تعادل حجم $e^T \mathbf{u} = 1$ برای به دست آوردن معادله‌ی فشار ۵، حجم فازها (\mathbf{u}) و درجه‌ی اشباع فازها (\mathbf{s}) برابر نیستند. اگر این دو مقدار برابر بودند با توجه به رابطه‌ی $s_l + s_v + s_a = 1$ فقط حل دو معادله از دسته معادلات ۷ مورد نیاز بود، ولی در حال حاضر به سبب اختلاف بین آنها، حل یک معادله‌ی اضافی ضرورت دارد. حل این معادله منجر به ایجاد یک موج اضافی می‌شود که اطلاعاتی را حمل نمی‌کند و در نتیجه سرعت آن نزدیک صفر خواهد بود. به عبارت دیگر، در ماتریس ژاکوبین همواره یکی از مقادیر ویژه نزدیک صفر است که این امر منجر به تابهدگی معادلات می‌شود.^[۶]

یکی از ویژگی‌های فرمول‌بندی حاضر این است که اگر یکی از فازها به سبب تغییر فشار و ترکیب اجزاء مخزن تشکیل نشود، و حالت دوفازی یا زیراشباع در تمام یا بخشی از مخزن اتفاق افتد معادلات ماتریسی گفته شده در این قسمت ثابت مانده و تغییری نمی‌کنند. البته خواص سیال در حالت دوفازی علاوه بر فشار تابع پارامترهای زیراشباع، مانند فشار نقطه‌ی حباب^[۱۲]، نیز هست.

۳. روش عددی

۳.۱. گسسته‌سازی معادلات نفت سیاه

برای گسسته‌سازی معادلات از یک شبکه‌ی یک‌بعدی یکنواخت با n گره محاسباتی برای ناحیه‌ی به طول L استفاده می‌شود. در نتیجه محل نقاط گره و فاصله‌ی آنها از هم عبارت‌اند از:

$$x_i = (i - 1) \Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \Delta x = \frac{L}{n - 1} \quad (11)$$

اگر یک پرش محدود یا اختلاف بین حالت‌های چپ و راست وجود نداشته باشد، سرعت موج از طریق معادله‌ی ۱۶ قابل محاسبه نخواهد بود. در چنین نقاطی سرعت موج از روش لکس-فردریش موضعی به صورت زیر جایگذاری می‌شود:^[۸]

$$|\lambda_{LLF}| = \max_{[x_L, x_R]} \left(\max_j |\lambda_j| \right) \quad (22)$$

که در آن λ_j مقدار ویژه زام ماتریس ژاکوبین $\mathbf{A} = \frac{\delta \mathbf{f}}{\delta \mathbf{n}}$ است. در اینجا بزرگ‌ترین مقدار ویژه در سه حالت x_L ، x_R و $(x_L + x_R)/2$ محاسبه شده و بزرگ‌ترین آنها به عنوان سرعت موج مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۳.۳. شرط آنتروپی

به منظور جلوگیری از ایجاد شوک‌های انبساطی در هنگام افزوده شدن اثر گرانش و غیرمحدب شدن شارها، از تصحیح آنتروپی موسوم به تصحیح هارتن استفاده می‌شود. هارتن^[۹] پیشنهاد کرد در صورتی که سرعت موج به دست آمده در روش عددی از مقدار معینی کم‌تر باشد، مقدار λ_{DW} چنین تصحیح می‌شود:

$$\lambda_{DW} = \begin{cases} \frac{\lambda_{DW} + \varepsilon^2}{\varepsilon} & |\lambda_{DW}| < \varepsilon, \\ |\lambda_{DW}| & |\lambda_{DW}| > \varepsilon. \end{cases} \quad (23)$$

پارامتر ε باید با توجه به شرایط مسئله و محدوده‌ی سرعت موج‌های حاضر در مسئله تعیین شود. با تنظیم مناسب پارامتر ε می‌توان از ایجاد شوک‌های انبساطی جلوگیری کرد. اگرچه روش دقیق و قابل اعتمادی برای محاسبه‌ی ε وجود ندارد، اما در این نوشتار از یک شکل تغییر یافته از روش پیشنهادی محققین^[۱۲] استفاده می‌شود. در این روش پارامتر ε عبارت است از:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\lambda_R - \lambda_L) \quad (24)$$

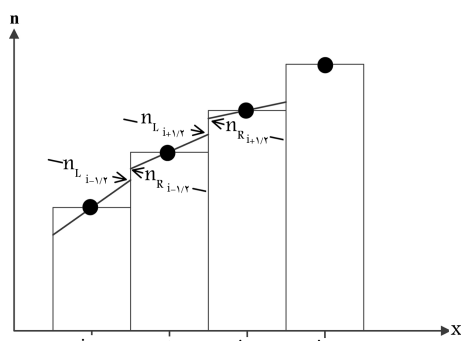
که در آن λ_L و λ_R به ترتیب بیشینه مقادیر ویژه چپ و راست‌اند که در \mathbf{n}_L و \mathbf{n}_R محاسبه می‌شوند. نتایج عددی نشان می‌دهد که در اکثر موارد با استفاده از $\varepsilon_0 = 2$ می‌توان از ایجاد شوک‌های انبساطی جلوگیری کرد.

۴. نتایج

در این بخش چهار نمونه مسئله حل شده است. در بخش اول دو نمونه مسئله‌ی یک‌بعدی نفت سیاه بدون حضور گرانش و در بخش دوم همان مسائل بار دیگر با در نظر گرفتن اثرات گرانش حل شده‌اند. مسائل به‌گونه‌ی انتخاب شده‌اند که نشان‌دهنده‌ی رژیم‌های مختلف جریان درون مخزن، یعنی حالت‌های اشباع (سه‌فازی) و زیر اشباع (دوفازی) باشند. در پایان این بخش نیز برای نشان دادن استقلال پاسخ‌ها از تعداد گره‌های شبکه، پاسخ مسئله‌ی چهارم به‌ازاء تعداد گره‌های مختلف نشان داده شده است. مشخصات مخزن و سیالات استفاده شده در مسائل در پیوست ۱ آمده است.

۱.۴. مسائل بدون گرانش

مخزن مورد استفاده در این مسائل مخزنی یک‌بعدی و افقی است که چاه تزریق در ابتدا و چاه تولیدی در انتهای آن قرار دارد. شکل ۲ شماتیک مخزن مورد استفاده در مسائل اول و دوم را نشان می‌دهد.



شکل ۱. حالت‌های مرتبه بالا در روش موج غالب.

که در آن \mathbf{n}_R و \mathbf{n}_L به ترتیب حالت‌های چپ و راست مرتبه بالا^{۱۲} بوده و \mathbf{f}_R و \mathbf{f}_L نیز شارهای مرتبط با این حالت‌ها هستند. بنابراین، λ_{DW} تابعی از اختلاف بین حالت‌های مرتبه بالای چپ L و راست R است. این حالت‌ها در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.

شکل گسسته‌شده‌ی شار مرتبه بالا به صورت رابطه‌ی ۱۷ نوشته می‌شود:

$$\hat{\mathbf{f}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\nu} (\mathbf{f}_R + \mathbf{f}_L) - \frac{1}{\nu} |\lambda_{DW_{i+\frac{1}{2}}}| \mathbf{I} (\mathbf{n}_R^n - \mathbf{n}_L^n) \quad (17)$$

که در آن \mathbf{I} ماتریس هماننی است. بدیهی است که در معادلات ۱۶ و ۱۷ با قرار دادن i و $i+1$ به ترتیب به جای R و L ، روش مرتبه‌ی اول موج غالب به دست می‌آید. برای محاسبه‌ی حالت‌های مرتبه بالای L و R از محدودکننده‌ی مین‌مد استفاده شده است. حالت‌های چپ و راست مرتبه بالا چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_L &= \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_{x,i} \frac{\Delta x}{\nu}, \\ \mathbf{n}_R &= \mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_{x,i+1} \frac{\Delta x}{\nu} \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن $\mathbf{n}_{x,i+1}$ و $\mathbf{n}_{x,i}$ اصطلاحاً مشتق متغیر نامیده شده و مطابق رابطه‌ی ۱۹ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{x,i} &= \min\text{mod} \left(\frac{\mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_i}{\Delta x}, \frac{\mathbf{n}_i - \mathbf{n}_{i-1}}{\Delta x} \right) \\ \mathbf{n}_{x,i+1} &= \min\text{mod} \left(\frac{\mathbf{n}_{i+2} - \mathbf{n}_{i+1}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{n}_{i+1} - \mathbf{n}_i}{\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

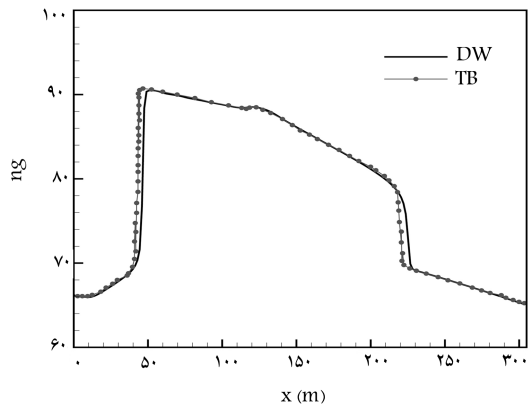
در معادلات ۱۹ محدودکننده‌ی مین‌مد عبارت است از:

$$\min\text{mod}(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & x, y > 0 \\ \max(x, y) & x, y < 0 \\ 0 & xy < 0 \end{cases} \quad (20)$$

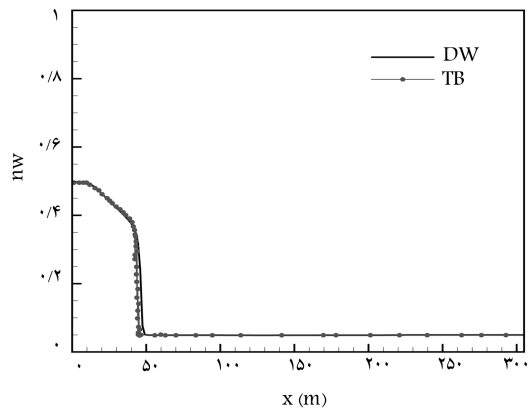
در فرمول‌بندی صریح ارائه شده توسط معادلات ۱۶ و ۱۷ باید گام زمانی توسط عدد کورانت محدود شود. عدد کورانت (C) در این حالت چنین تعریف می‌شود:

$$C = \frac{\lambda_{DW}^{\max} \Delta t}{\Delta x} \quad (21)$$

که در آن λ_{DW}^{\max} بزرگ‌ترین سرعت موج غالب در بازه حل است. میزان مجاز برای عدد کورانت وابسته به نوع محدودکننده‌ی مورد استفاده است اما معمولاً کران بالای ۰٫۵ مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۵. چگالی جرمی جزء گاز در مسئله‌ی اول پس از ۱۵۰ روز.

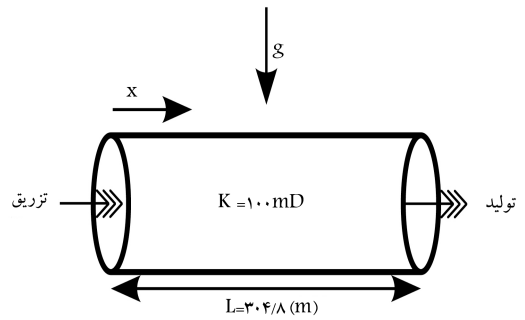


شکل ۶. چگالی جرمی جزء آب در مسئله‌ی اول پس از ۱۵۰ روز.

نفت، گاز و آب ارائه شده است. نماد TB در شکل‌ها نشان‌دهنده‌ی حل به روش گودونوف مرتبه دوم است که توسط ترانگنشتاین و بل^[۶] ارائه شده و نماد DW نشان‌دهنده‌ی نتایج روش موج غالب با استفاده از محدودکننده‌ی مین‌مد است. هر دو روش نشان داده شده از ۲۰۰ گره محاسباتی استفاده می‌کنند. عدد کورانت برابر ۰٫۵ در نظر گرفته شده و نیازی به اعمال تصحیح آنتروپی نیست. چنان‌که مشاهده می‌شود تطابق خوبی میان نتایج وجود دارد و روش موج غالب بدون بخش عددی اضافی به دقتی در حدود روش گودونوف مرتبه دوم دست یافته است.

چنان‌که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود، در تمام مخزن جریان اشباع بوده و هر سه فاز مایع، بخار و آب به‌طور هم‌زمان حضور دارند. حل مسئله از دو جنبه موج موسوم به باکلی-لورت^{۱۴} تشکیل شده که هرکدام شامل یک موج ترفیق^{۱۵} متصل به یک شوک است؛ یک موج با سرعت کم که بین اجزاء نفت و گاز قرار دارد و دیگری موج با سرعت بالا که بین اجزاء گاز و نفت است. در این مسئله، یک موج ترفیق از حدود ۱۰ متر شروع شده و تا ۴۵ متر امتداد می‌یابد و به یک شوک ختم می‌شود و موج ترفیق دیگر، از حدود ۱۲۵ متر شروع شده و به شوک در ۲۲۰ متر ختم می‌شود. مشابه همین روند در شکل‌های ۴ تا ۶ نیز وجود دارد.

افزایش درجه‌ی اشباع فاز بخار پس از موج با سرعت بالا از ۲۲۰ متر تا چاه تولیدی به‌علت اثرات کاهش فشار ناشی از چاه تولیدی است، زیرا موج گاز ترفیق شده، همان‌گونه که از شکل ۵ مشخص است، هنوز به این قسمت نرسیده است.



شکل ۲. شماتیک مخزن مورد استفاده در مسائل اول و دوم.

۱.۱.۴. مسئله‌ی اول: جریان اشباع بدون گرانش

در این مسئله جریان مخزن در حالت اشباع است و شرایط اولیه n_{ini} و تزریق n_{inj} ترکیب اجزاء عبارت‌اند از:

$$n_{ini} = \{0, 703, 70, 30, 0, 502\}^T,$$

$$n_{inj} = \{0, 0414, 66, 23, 0, 497\}^T \quad (25)$$

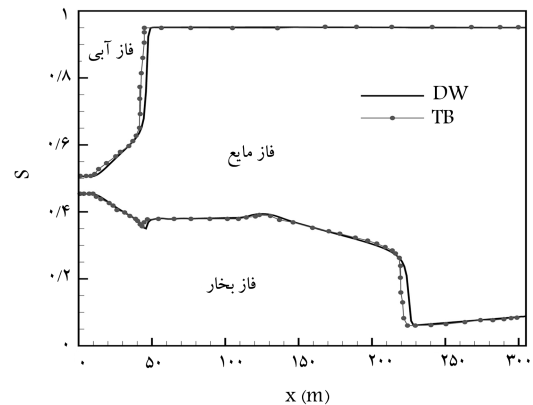
همچنین فشارهای اولیه، تزریق و تولید به ترتیب عبارت‌اند از:

$$p_{ini} = 1800 \text{ (psi)}$$

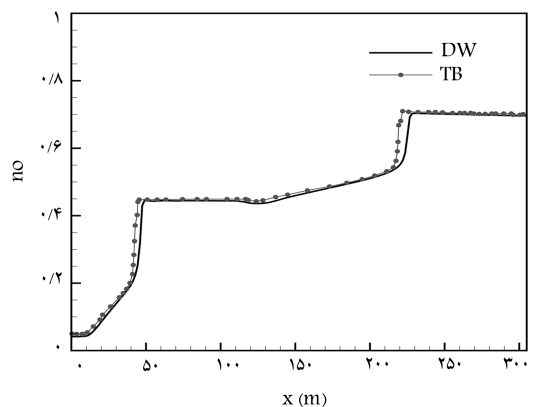
$$p_{inj} = 2000 \text{ (psi)}$$

$$p_{prod} = 1600 \text{ (psi)}$$

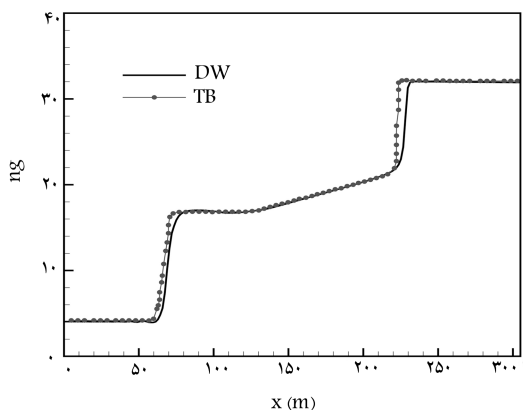
در شکل‌های ۳ تا ۶ به‌ترتیب نتایج درجه‌ی اشباع فازها و ترکیب اجزاء



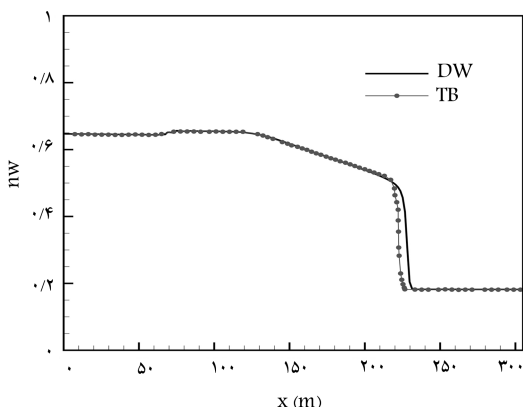
شکل ۳. پروفیل درجه اشباع مسئله‌ی اول پس از ۱۵۰ روز.



شکل ۴. چگالی جرمی جزء نفت در مسئله‌ی اول پس از ۱۵۰ روز.



شکل ۹. چگالی جرمی جزء گاز در مسئله‌ی دوم پس از ۳۰۰ روز.



شکل ۱۰. چگالی جرمی جزء آب در مسئله‌ی دوم پس از ۳۰۰ روز.

۲.۴. مسائل با گرانش

در مسائل سوم و چهارم مخزنی عمودی شبیه‌سازی شده به صورتی که چاه تزریق در بالاترین قسمت قرار گرفته است. شکل ۱۱ شماتیک مخزن مورد استفاده در این مسائل را نشان می‌دهد. میزان شتاب جاذبه $g = 9.81 (m/s^2)$ در نظر گرفته شده است.

۱.۲.۴. مسئله‌ی سوم: جریان اشباع با گرانش

این مسئله مشابه مسئله‌ی اول است که در آن اثرات گرانش در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه و مرزی مشابه مسئله‌ی اول است. با استفاده از روش موج غالب و محدودکننده‌ی شیب مین‌مد و نیز استفاده از تصحیح هارتن اقدام به حل این مسئله شد که نتایج درجه‌ی اشباع فازها و ترکیب اجزاء پس از ۱۰۰ روز در شکل‌های ۱۲ تا ۱۵ آمده است. عدد کورانت برابر ۰/۵ در نظر گرفته شده و تعداد گره‌های محاسباتی ۲۰۰ است. با توجه به این که این مسئله برای اولین بار حل می‌شود، حل مرجعی وجود ندارد و نتایج حالت بدون گرانش با نتایج حاصل از در نظر گرفتن گرانش مقایسه شده که نشان‌دهنده‌ی مشابهت قابل توجه ساختار جواب در هر دو حالت است. پارامتر مورد استفاده در تصحیح هارتن $\epsilon = 10^{-5}$ در نظر گرفته شد که از محدوده‌ی سرعت موج‌های معمول مسئله بسیار پایین‌تر است. البته با استفاده از رابطه‌ی ۲۴ به ازای $\epsilon = 2$ نیز می‌توان به جواب‌هایی کاملاً مشابه رسید، ولی به علت نیاز به محاسبه‌ی λR و λL هزینه‌ی محاسباتی افزایش خواهد یافت. در شکل‌های ۱۲ تا ۱۵، جریان اشباع بوده و هر سه فاز حضور دارند. مانند مسئله‌ی اول، حل شامل دو جبهه موج است. موج با سرعت کم ماهیتاً مشابه حالت

۲.۱.۴. مسئله‌ی دوم: جریان زیر اشباع بدون گرانش

در مسئله نمونه دوم جریان مخزن در حالت زیر اشباع بوده و شرایط اولیه و تزریق چگالی اجزاء عبارت است از:

$$\mathbf{n}_{ini} = \{0.704, 0.210, 0.1835\}^T,$$

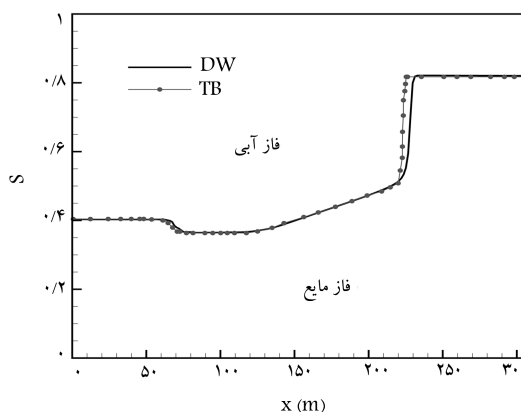
$$\mathbf{n}_{inj} = \{0.404, 0.42, 0.647\}^T \quad (26)$$

فشارهای اولیه $p_{ini} = 120$ (psi)

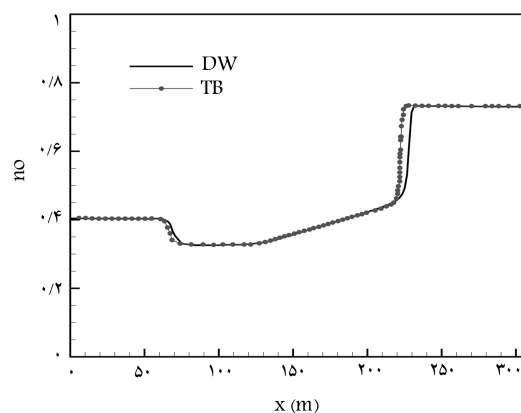
فشار تزریق $p_{inj} = 140$ (psi)

فشار تولید $p_{prod} = 100$ (psi)

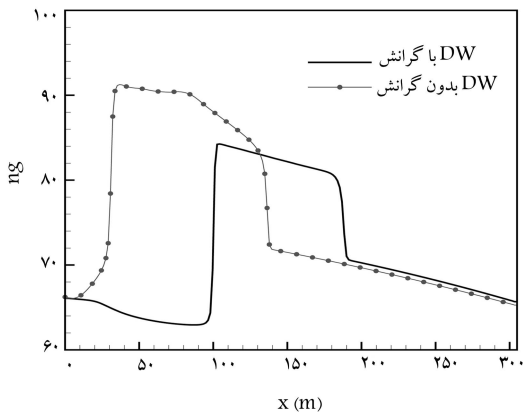
در شکل‌های ۷ تا ۱۰ به ترتیب نتایج درجه اشباع فازها و ترکیب اجزاء نفت، گاز و آب آمده است. در این جا نیز نماد TB نشان‌دهنده‌ی حل ترانگنشتاین و بل [۶] و نماد DW نمایش‌دهنده‌ی نتایج روش موج غالب و محدودکننده مین‌مد است. شبکه‌ی محاسباتی دارای ۲۰۰ گره و عدد کورانت برابر ۰/۵ است. در این مسئله نیز نیازی به اعمال تصحیح هارتن نیست. چنان که مشاهده می‌شود جواب‌ها از دقت قابل قبولی برخوردارند. از شکل ۷ مشخص است که در این مسئله، جریان همیشه در حالت زیر اشباع بوده و فاز بخار حضور ندارد. در این جا یک جبهه موج با کالی لورت با سرعت بالا وجود دارد که با یک موج تزریق از ۱۲ متر شروع شده و به شوکی در حدود ۲۰ متر ختم می‌شود. اما در این حالت، موج سرعت کم از نوع ناپیوستگی تماسی است و موج تزرقی به دنبال ندارد.



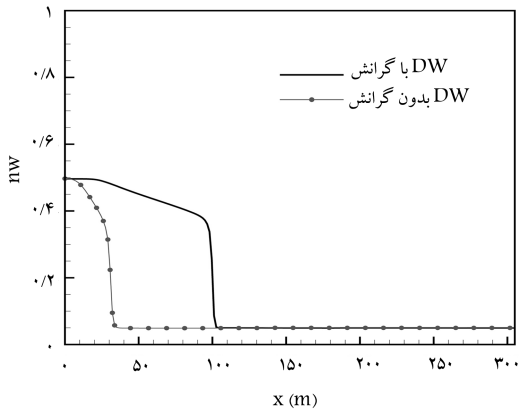
شکل ۷. پروفیل درجه اشباع مسئله‌ی دوم پس از ۳۰۰ روز.



شکل ۸. چگالی جرمی جزء نفت در مسئله‌ی دوم پس از ۳۰۰ روز.



شکل ۱۴. چگالی جرمی جزء گاز در مسئله‌ی سوم پس از ۱۰۰ روز.



شکل ۱۵. چگالی جرمی جزء آب در مسئله‌ی سوم پس از ۱۰۰ روز.

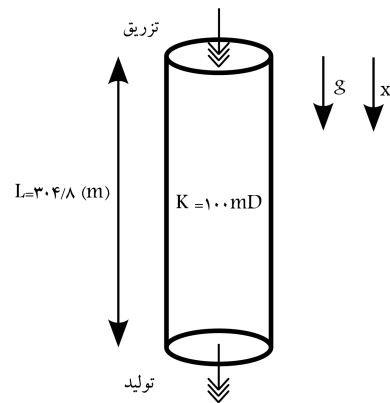
حاصل از اعمال روش موج غالب و محدودکننده‌ی شیب مین‌مد پس از ۱۵۰ روز ارائه شده است.

در این مسئله نیز از تصحیح هارتن استفاده شده و $\varepsilon = 10^{-5}$ در نظر گرفته شده است. البته با استفاده از رابطه‌ی ۲۴ و قرار دادن $\varepsilon = 2$ نیز می‌توان به جواب‌هایی کاملاً مشابه رسید. همچنین شبکه دارای ۲۰۰ گره محاسباتی است و عدد کورانت برابر ۰٫۵ در نظر گرفته شده است.

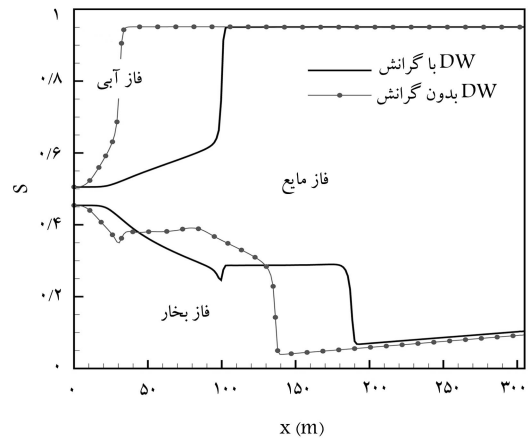
در شکل‌های ۱۶ تا ۱۹، جریان دو فازی شامل فازهای مایع و آبی ملاحظه می‌شود. در این مسئله، موج با سرعت بالا از نوع باکلی-لورت بوده که ترفیق آن از حدود ۱۰۰ تا ۲۲۵ مترگسترده شده و به یک شوک در ۲۵۵ متر متصل می‌شود. موج با سرعت پایین نیز که نمایان‌گر حل شدن جزء گاز در فاز مایع است، از نوع ناپیوستگی تماسی است. به علت هم‌جهت بودن بردارگرانش با گرادیان فشار ناشی از ترفیق، افزایش سرعت جبهه‌های موج و در نتیجه افزایش تولید نفت ملاحظه می‌شود.

۳.۴. هم‌گرایی شبکه

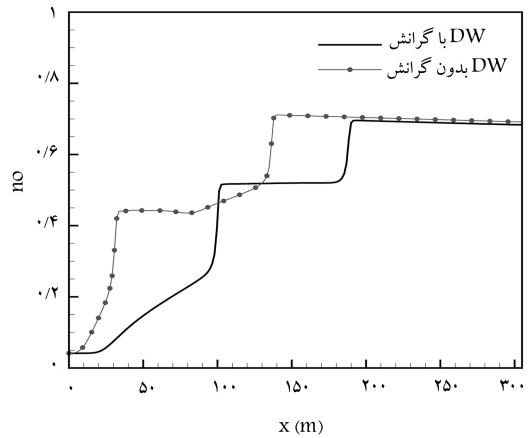
به‌منظور نشان‌دادن استقلال پاسخ‌ها از شبکه‌ی محاسباتی، نتایج درجه‌ی اشباع فازها در مسئله‌ی چهارم با بازی تعداد نقاط محاسباتی مختلف در شکل ۲۰ آمده است. این شکل نشان‌دهنده‌ی آن است که پاسخ‌ها با افزایش تعداد نقاط به بیش از ۲۰۰ نقطه تغییر چندانی نمی‌کنند. در سایر مسائل حل شده نیز همین روند مشاهده شده و نتایج مستقل از شبکه‌ی محاسباتی هم‌گرا می‌شوند.



شکل ۱۱. شماتیک مخزن مورد استفاده در مسائل سوم و چهارم.



شکل ۱۲. پروفیل درجه اشباع مسئله‌ی سوم پس از ۱۰۰ روز.

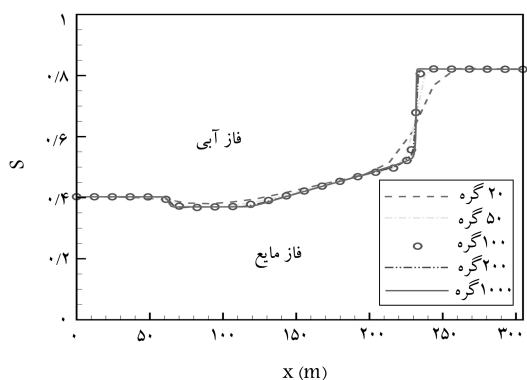


شکل ۱۳. چگالی جرمی جزء نفت در مسئله‌ی سوم پس از ۱۰۰ روز.

بدون گرانش بوده با این تفاوت که در این‌جا موج ترفیق طولانی‌تر است؛ در حالی که جبهه موج با سرعت بالا در این مسئله، برخلاف حالت بدون گرانش، از نوع ناپیوستگی تماسی است و نه از نوع باکلی-لورت که شامل یک ترفیق متصل به شوک می‌باشد.

۲.۲.۴. مسئله‌ی چهارم: جریان زیر اشباع با گرانش

این مسئله دقیقاً مشابه مسئله‌ی دوم است که در آن اثرات گرانش در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه و مرزی مشابه مسئله دوم است. در شکل‌های ۱۶ تا ۱۹ نتایج



شکل ۲. نتایج همگرایی شبکه برای مسئله‌ی چهارم پس از ۱۵ روز.

۵. نتیجه‌گیری

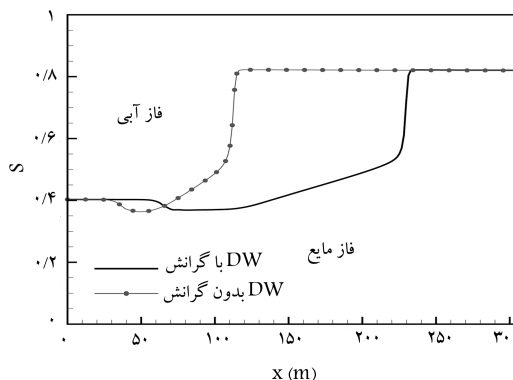
در این نوشتار نشان داده شد که از روش عددی موج غالب به‌خوبی می‌توان برای شبیه‌سازی جریان چندفازی درون محیط‌های متخلخل با حضور گرانش بهره برد. مدل مورد استفاده مدل نفت سیاه بود و نتایج نشان‌دهنده تطابق رضایت‌بخش روش موج غالب با روش بر هزینه‌تر گودونوف مرتبه دوم است. روش موج غالب استفاده شده در نوشتار علاوه بر هزینه‌ی محاسباتی پایین، پخش عددی زیادی به پاسخ‌ها اضافه نمی‌کند.

با در نظر گرفتن اثرگرانش در معادلات مدل نفت سیاه، میزان عدم تحدب تابع شار در دسته معادلات بایستگی جرم به‌نحو چشم‌گیری افزایش می‌یابد، به‌طوری‌که برای جلوگیری از ایجاد شوک‌های انبساطی نیازمند استفاده از روندهای تصحیح آنتروپی خواهیم بود. در این مطالعه نشان داده شد که استفاده از تصحیح آنتروپی هارتن می‌تواند از ایجاد شوک‌های انبساطی جلوگیری کند. البته برای جلوگیری از پخش عددی اضافی در پاسخ‌ها لازم است پارامتر تصحیح هارتن با دقت انتخاب شود.

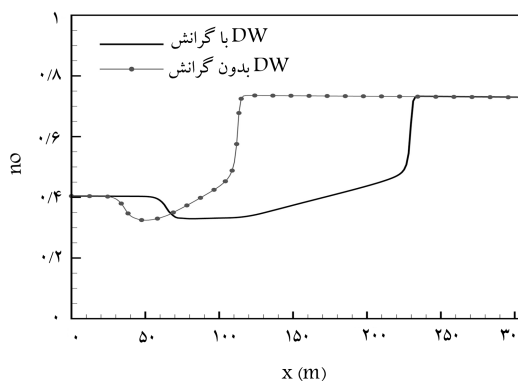
با توجه داشت که ϵ با افزایش پخش عددی در نقاط خاصی سبب جلوگیری از ایجاد شوک‌های انبساطی می‌شود و بنابراین دارای ماهیت تجربی بوده و باید در هر مسئله با سعی و خطا بهینه شود. اگر ϵ از مقدار لازم بیشتر باشد سبب افزایش پخش عددی و کاهش دقت حل خواهد شد. از طرف دیگر با کاهش بیش از حد آن نیز امکان ایجاد شوک‌های انبساطی همچنان وجود خواهد داشت.

با توجه به شدیدتر بودن اثرات عدم تحدب در مسائل یک‌بعدی، و نیز عمودی در نظر گرفتن مخزن در پژوهش حاضر، یعنی لحاظ داشتن بیشترین اثرگرانش، می‌توان در مسائل با زاویه‌ی شیب کم‌تر و نیز در مسائل دو یا سه‌بعدی میزان ϵ در تصحیح هارتن را کم‌تر از میزان پیشنهادی در اینجا در نظر گرفت و $\epsilon = 2$ را به‌عنوان بیشینه آن لحاظ کرد. نکته‌ی دیگری که باید به آن توجه داشت این است که مقدار تصحیح ϵ باید از محدوده‌ی سرعت موج‌های معمول مسئله پایین‌تر باشد، در غیر این صورت سبب تداخل با موج‌های فیزیکی مسئله شده و برخی اثرات را مانند یک فیلتر حذف می‌کند.

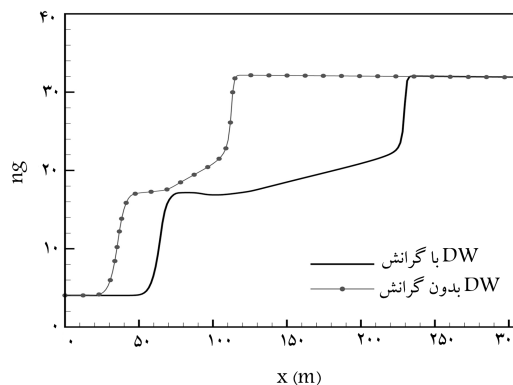
روش عددی حاضر در قالب شبکه باسازمان ارائه شده است، نحوه‌ی اعمال تصحیح در حالات چندبعدی با استفاده از شبکه‌های باسازمان مشابه و ساده است. اعمال این روش در شبکه‌های بی‌سازمان نیز در دست بررسی است.



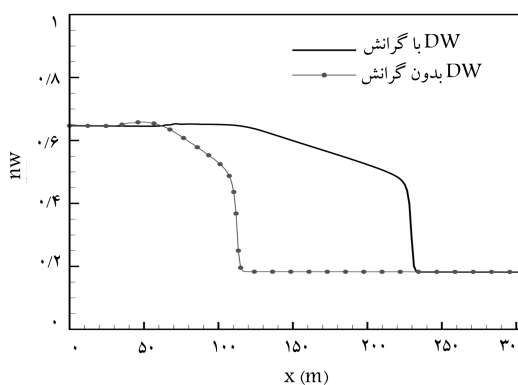
شکل ۱۶. پروفیل درجه اشباع مسئله‌ی چهارم پس از ۱۵ روز.



شکل ۱۷. چگالی جرمی جزء نفت در مسئله‌ی چهارم پس از ۱۵ روز.



شکل ۱۸. چگالی جرمی جزء گاز در مسئله‌ی چهارم پس از ۱۵ روز.



شکل ۱۹. چگالی جرمی جزء آب در مسئله‌ی چهارم پس از ۱۵ روز.

پانوشته‌ها

1. non-convex
2. expansion shock
3. Trangenstein and Bell
4. linearly degenerate
5. contact discontinuity
6. Oleinik entropy condition
7. Rusanov
8. staggered
9. solubility ratio
10. formation volume factor (FVF)
11. mobility
12. bubble point pressure
13. higher-order states
14. Buckley-Leverett
15. rarefaction

منابع (References)

1. Aronofsky, J.S. and Jenkins, R.A. "simplified analysis of unsteady radial gas flow," *Transactions of AIME*, **201**, pp. 149-154, (1954).
2. Class, H., Helmig, R. and Bastian, P. "Numerical simulation of non-isothermal multiphase multi-component processes in porous media," *Advances in Water Resources*, **25**(5), pp. 533-250 (2002).
3. Naderan, H., Manzari, M.T. and Hannani, S.K. "Application and performance comparison of high-resolution central schemes for the black oil model," *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, **17**(7), pp. 736-752 (2007).
4. Coats, K.H., Thomas, L.K. and Pierson, R.G., "Compositional and Black Oil Reservoir Simulation," *SPE Reservoir Simulation Symposium*, San Antonio, Texas (1995).
5. Chen, Z. "Formulations and numerical methods of the black oil model in porous media," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38**(2), pp. 489-514 (2000).
6. Trangenstein, J.A. and Bell, J.B. "Mathematical structure of the black-oil model for petroleum reservoir simulation," *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **49**(3), pp. 749-783 (1989).
7. Trangenstein, J.A. "Three-phase flow with gravity," in: W. B. Lindquist (ed.), *Current Progress in Hyperbolic Systems: Riemann Problems and Computations*, American Mathematical Society, Providence, RI, pp. 147 -159 (1989).
8. Laney, C., *Computational Gas Dynamics*, Cambridge University Press (1998).
9. Rhee, H.K., Aris, R. and Amundson, N.R., *First-Order Partial Differential Equations*, Dover Publication (2001).
10. Edwards, M. "Global and local central non-upwind finite volume schemes for hyperbolic conservation laws in porous media," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **64**(7), pp. 793-811 (2010).
11. Harten, A. and Hyman, J.M. "Self adjusting grid methods for one dimensional hyperbolic conservation laws," *Journal of Computational Physics*, **50**, pp. 235-269 (1983).
12. Karimi, A., Naderan, H., Manzari, M.T. and Hannani, S.K. "A comparison between high-resolution central and Godunov-based schemes for the black-oil simulation," *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, **19**(2), pp. 125-145 (2009).
13. Liu, X.D. and Osher, S., "Convex ENO high order multi-dimensional schemes without field by field decomposition or staggered grids," *Journal of Computational Physics*, **141**, pp. 1-27 (1998).
14. Edwards, M. "The dominant wave-capturing flux: A finite-volume scheme without decomposition for systems of hyperbolic conservation laws," *Journal of Computational Physics*, **218**(1), pp. 275-294 (2006).
15. Nessyahu, H. and Tadmor, E. "Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws," *Journal of Computational Physics*, **87**(2), pp. 408-463 (1990).
16. Kurganov, A. and Tadmor, E. "New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations," *Journal of Computational Physics*, **160**, pp. 241-282 (2000).
17. Karlsen, K., Mishra, S. and Risebro, N. "Semi-godunov schemes for multiphase flows in porous media," *Applied Numerical Mathematics*, **59**(9), pp. 2322-2336 (2009).
18. Cheng, H., Osako, I., Datta-Gupta, A. and King, M. "A rigorous compressible streamline formulation for two and three-phase black-Oil simulation," *SPE Journal*, **11**(4), pp. 407-417 (2006).
19. Liu, Z.F. and Wang, X.H. "Finite analytic numerical method for two-dimensional fluid flow in heterogeneous porous media," *Journal of Computational Physics*, **235**(15), pp.286-301 (2013).
20. Carlo, D.A. and Scotti, A., "A mixed finite element method for Darcy flow in fractured porous media with non-matching grids," *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, Cambridge Univ Press, **46**(2), pp. 465-489 (2012).
21. Allen, M., Behie, G. and Trangenstein, J. "Multiphase flow in porous media," **34** of *Lecture Notes in Engineering*, Springer (1988).
22. Conte, S.D. and Boor, C.W.D., *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*, McGraw-Hill Higher Education (1980).
23. Van Leer, B., Lee, W. and Powell, K. "Sonic-point capturing," Technical report, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1989).

پیوست ۱. مشخصات سنگ و سیال مخزن در مسائل

حل شده

مدل نفت سیاه مورد استفاده در این قسمت مبتنی بر معادلات ماتریسی ترانگشتاین و بل [۶] است. در این مدل جزء گاز می‌تواند در فازهای مایع و آب حل شود؛ همچنین جزء نفت می‌تواند تبخیر شده و در فاز بخار وارد شود. مشخصات مخزن مورد استفاده در مسائل حل شده نیز از ترانگشتاین و بل [۶] اقتباس شده است. مخزن یک‌بعدی با طول $L = 1000 (ft) = 304.8 (m)$ ، نفوذپذیری مطلق سنگ $K = 100$ میلی‌داریسی و تخلخل سنگ مخزن از رابطه‌ی پ ۱ به دست می‌آید:

$$\phi = 0.2 + 0.2 \times 10^{-5} p \quad (\text{پ } 1)$$

نسبت‌های حل‌شدگی R چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} R_l &= 0.105 p, \\ R_v &= 9 \times 10^{-5} - 6 \times 10^{-4} p + 1.6 \times 10^{-11} p^2, \\ R_a &= 0.105 p \end{aligned} \quad (\text{پ } 2)$$

همچنین لزجت فازهای مایع، بخار و آب در حالت اشباع به صورت رابطه‌ی پ ۳ است:

$$\begin{aligned} \mu_l &= 0.18 - 10^{-4} p, \\ \mu_v &= 0.1012 + 3 \times 10^{-5} p, \\ \mu_a &= 0.135 \end{aligned} \quad (\text{پ } 3)$$

روابط لزجت قبل برای حالت‌های زیر اشباع به رابطه‌ی پ ۴ تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \mu_l &= (0.18 - 10^{-4} p_b) \left[1 + 6.78 \times 10^{-5} (p - p_b) \right], \\ \mu_v &= 0.1012 + 3 \times 10^{-5} p, \\ \mu_a &= 0.135 \left[1 + 6.78 \times 10^{-5} (p - p_b) \right] \end{aligned} \quad (\text{پ } 4)$$

ضرایب حجمی سازند نیز در حالت اشباع چنین تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} B_l &= 1.0 + 1.5 \times 10^{-4} p, \\ B_v &= \frac{1}{6 + 0.06 p}, \\ B_a &= 1.0 - 3 \times 10^{-6} p \end{aligned} \quad (\text{پ } 5)$$

برای حالت زیر اشباع روابط ضرایب حجمی سازند عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} B_l &= \frac{1.0 + 1.5 \times 10^{-4} p_b}{1.0 + 2.31 \times 10^{-5} (p - p_b)}, \\ B_v &= \frac{1}{6 + 0.06 p} + \frac{\bar{R}_v}{R_v} \left[\frac{1}{6 + 0.06 p} - \frac{1}{6 + 0.06 p} \right], \\ B_a &= \frac{1.0 - 3 \times 10^{-6} p_b}{1.0 + 1.8 \times 10^{-5} (p - p_b)} \end{aligned} \quad (\text{پ } 6)$$

در روابط بالا p برحسب psi و لزجت‌های μ برحسب سانتی‌پویز (cp) هستند. همچنین فشار نقطه‌ی حباب (bubble point pressure) p_b و نسبت نفت فرار (volatile oil ratio) است که برای محاسبه‌ی خواص در حالت‌های مختلف زیر اشباع مورد استفاده قرار می‌گیرد. [۶]

روابط نفوذپذیری نسبی چنین در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} k_{rl} &= (1 - s_v - s_a)(1 - s_v)(1 - s_a), \\ k_{rv} &= s_v^2, \\ k_{ra} &= s_a^2 \end{aligned} \quad (\text{پ } 7)$$

چگالی فازها در شرایط استاندارد نیز عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} \rho_l^{\text{std}} &= 52.77, \\ \rho_v^{\text{std}} &= 0.0527, \\ \rho_a^{\text{std}} &= 62.38 \end{aligned} \quad (\text{پ } 8)$$

که برحسب lb/ft^3 هستند.

SIMULATION OF GRAVITATIONAL EFFECTS IN ONE-DIMENSIONAL OIL RESERVOIRS USING BLACK OIL MODEL AND DOMINANT WAVE METHOD

M. Moshiri

moshiri@mech.sharif.edu

M. T. Manzari (corresponding author)

mtmanzari@sharif.edu

School of Mechanical Engineering
Sharif University of Technology

Sharif Mechanical Engineering Journal
Volume 29, Issue 2, Page 11-20, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 6 June 2011; received in revised form 10 December 2012; accepted 25 December 2012.

Abstract

Black oil model is widely used in simulation of oil reservoirs. In this model flow in porous media consists of three chemical components (oil, gas and water). These components can form at most three phases (Liquid, vapor and aqua) which are homogeneous mixtures of components separated by fluid interfaces. The black oil model considers compressibility of fluids and mass transfer between vapor and liquid hydrocarbon phases. The black oil formulation used here is based on the Trangenstein and Bell (TB) matrix formulation. This formulation is particularly useful because it remains the same in both saturated (three-phase) and under-saturated (two-phase) cases. This formulation consists of a parabolic pressure equation together with a set of hyperbolic mass conservation equations for components. The mentioned system of equations is linearly degenerate due to complexity of flux functions which leads to singularity of Jacobian matrix.

When gravity effect is included in the governing equations, the non-convexity of flux functions is increased, and as a result, at some points the wave speed of system vanishes. Most of explicit methods for solving hyperbolic conservation equations encounter difficulties in such situations and produce non-physical expansion shocks which contradict second law of thermodynamics.

To deal with this kind of expansion shocks, numerical methods use additional artificial diffusion. In this sense, methods with inherent additional dissipation like Rusanov-based central schemes are less prone to expansion shocks. However, these methods usually produce too much dissipation and cannot provide acceptable accuracy, especially near shocks. On the other side of spectrum, upwind methods can capture shocks and discontinuities with proper accuracy. These methods can however lead to expansion shocks more frequently than central schemes. Besides, the upwind methods require characteristics decomposition that is usually computationally costly.

In this paper, an improved numerical method, the so-called Dominant Wave method, is used to simulate flow in porous media using the black oil model. The numerical method is characterized as a one-wave method for which there is no need for characteristics decomposition. Moreover, the numerical method uses a finite volume flux approximation and is formulated as a Rusanov-based central type scheme.

In order to prevent expansion shocks, Harten's entropy correction is used. This correction adds artificial dissipation just at the points with nearly zero wave speed. In this work, a homogeneous, one-dimensional reservoir is used to study the performance of the dominant wave method in simulating saturated and under-saturated flows with and without gravitational effects.

Key Words: black oil model, gravity, system of conservation equations, dominant wave method, non-convexity, entropy correction.