

# بررسی آشوب در پاندول دوگانه با لولای متحرک

سید اسماعیل رضوی (دانشیار)

فائزه قادری\* (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی، گروه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۲)  
دوری ۲ - ۲۹، شماره ۲، ص. ۳۸-۳۳

در پژوهش حاضر معادلات حاکم بر پاندول دوگانه به صورت عددی تحلیل شده است. لولای پاندول اول تحت تابع خاصی حرکت می‌کند. برای حل این معادلات از روش نقطه‌ی میانی<sup>۱</sup> اصلاح شده و نیز روش رانگ-کوتا<sup>۲</sup> مرتبه‌ی چهارم برای بررسی احتمالی ناپایداری استفاده شده است. تمامی بررسی‌ها به صورت عددی و با نرم‌افزار متلب انجام شدند. نتایج حاصله حاکی از آن است که هرچه فرکانس حرکت لولا بزرگ‌تر شود، مقدار انرژی مورد نیاز سیستم برای رسیدن به آشوب کم‌تر می‌شود. همچنین، نمودار دوشاخگی<sup>۳</sup> و مشخصه‌های توانی لیاپانوف<sup>۴</sup> برای پارامترهای مناسب ایجاد شده که نشان‌دهنده‌ی حرکت بی‌نظم سیستم در محدوده‌هایی خاص است. در این نوشتار نشان داده شده که فرکانس لولای متحرک تأثیر عمده‌یی بر شروع آشوب<sup>۵</sup> در پاندول دوگانه دارد.

واژگان کلیدی: پاندول دوگانه، روش رانگ-کوتا، مشخصه‌های توانی لیاپانوف، نمودار دوشاخگی، سطح پوانکاره.

## مقدمه

طی دهه‌های اخیر، برای حل انواع مختلف پاندول و مشاهده‌ی رفتار بی‌نظمی در آنها تلاش زیادی شده است. به منظور بررسی آشوب و آشوب‌گذرا در پاندول غیرخطی، محققین آزمایشی انجام دادند<sup>[۱]</sup> که مقایسه‌ی نتایج حاصل از آن با داده‌های عددی حاکی از آن است که پاندول مورد آزمایش در محدوده‌ی آشوب و ابتدای آشوب پاسخ متناوب و ارزشمندی می‌دهد. در پژوهشی دیگر، یک پاندول آهنی که در میدان مغناطیسی غیریکنواخت قرار دارد، به صورت عددی مدل شد.<sup>[۲]</sup> برای آنالیز بهتر، سطح پوانکاره<sup>۶</sup> مربوط به این سیستم ایجاد شد. به علت وجود میدان مغناطیسی عبارات غیرخطی خاصی به معادلات اضافه می‌شوند.

در پژوهشی دیگر، محققین پاندول دوگانه با لولای ثابت را در ناحیه‌ی منظم و نیز آشوب‌ناک -- با توجه به مقادیر مشخصه‌ی انرژی داده شده به سیستم -- را آنالیز کردند.<sup>[۳]</sup> معادلات با روش نقطه‌ی میانی اصلاح شده حل شدند. مقدار انرژی برای شروع حرکت آشوب‌ناک با روش‌های مختلف نظیر سطح پوانکاره، نمودار دوشاخگی و مشخصه‌های لیاپانوف مورد بررسی قرار گرفت که همگی مقدار انرژی مشابهی را نشان دادند.

رفتار دینامیکی یک پاندول با طول متغیر (به صورت متناوب) مدل‌سازی و حرکت بی‌نظم آن توسط بیلیاکو و همکارانش بررسی شد.<sup>[۴]</sup> این پاندول در

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۶/۱، اصلاحیه ۱۳۹۱/۴/۱۸، پذیرش ۱۳۹۱/۵/۱۶.

حقیقت یک میله‌ی بدون وزن نوسان‌کننده، به همراه یک جرم نقطه‌یی متحرک در امتداد محور آن بود (مدلی ساده برای تاب بچه‌گانه). رفتار آشوب‌ناک این میله برحسب پارامترهای مسئله به صورت عددی بررسی شد. هرکدام از تیغه‌ی ماشین پاره‌کننده را می‌توان به صورت پاندولی با لولای متحرک (چرخان به صورت عمودی) مدل کرد.<sup>[۵]</sup> نتایج این تحقیق حاکی از این بود که به ازای تمام مقادیر پارامترهای سیستم برای هندسه و میرایی، به ازای افزایش مقدار فرکانس حرکت لولا، رفتار سیستم از عادی به آشوب‌ناک تبدیل می‌شود. در تلاش‌های اخیر برای آنالیز دوشاخگی پاندول دوگانه با اعمال نیرو، نشان داده شد که می‌توان دو نمودار دوشاخگی متمایز با توجه به نسبت ضرایب میرایی دو پاندول ایجاد کرد.<sup>[۶]</sup>

در پژوهش حاضر، پاندول دوگانه با لولای متحرک (به صورت متناوب و عمودی در راستای یک مسیر راست) مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف اصلی این تحقیق، به دست آوردن تأثیر فرکانس حرکت لولا بر مقدار انرژی مورد نیاز برای شروع آشوب در حرکت پاندول است. این مقدار با به کارگیری روش‌های مختلفی همچون سطح پوانکاره، مشخصه‌های لیاپانوف و نمودار دوشاخگی به دست می‌آید. در قسمت دوم، ضمن تشریح مدل در نظر گرفته شده برای سیستم، معادلات لاگرانژی حاکم بر پاندول محاسبه شده‌اند. در قسمت سوم، روش‌های حل و مقایسه‌ی آنها به همراه نتایج به دست آمده از این مقایسه ارائه شده‌اند. کارهای انجام شده و نتایج نهایی برای بررسی حرکت آشوب‌ناک پاندول، به ترتیب در بخش‌های چهارم و پنجم معرفی شده‌اند.

razavi@tabrizu.ac.ir  
ghaderi67@yahoo.com

## مدل مورد نظر و معادلات حاکم

مدلی که در این پژوهش از آن استفاده شده، یک پاندول دوگانه با لولای متحرک است (شکل ۱). حرکت لولا با استفاده از رابطه ۱ شرح داده می‌شود:

$$H(t) = h \cos(\omega t) \quad (1)$$

که در آن  $H$  بیان‌گر جابه‌جایی لولا،  $h$  دامنه‌ی بیشینه و  $\omega$  فرکانس حرکت است. از معادلات لاگرانژی برای تعیین روابط حاکم بر حرکت استفاده شده است. برای اطمینان از انتگرال‌پذیری پارامترهای حرکت، انرژی (که به شکل شرایط اولیه ظاهر می‌شود) به سه ناحیه تقسیم می‌شود. در نواحی با انرژی کم پارامترها انتگرال‌پذیرند، زیرا در این ناحیه یکی از موارد نوسان‌کننده‌ی هارمونیک کوپل موجود است. در نواحی با انرژی خیلی بالا نیز چون اندازه حرکت زاویه‌ی کل یک مقدار محافظ ثانویه است، انتگرال‌پذیری قابل قبول است. انرژی‌های بین این دو مقدار را «آشوب» یا «رفتار بی‌نظم» می‌نامند. در این محدوده فرض می‌شود پارامترهای مورد بررسی انتگرال‌پذیرند (هیچ اثباتی برای عدم انتگرال‌پذیری ارائه نشده است).<sup>[۷]</sup> انرژی جنبشی ( $T$ ) و پتانسیل ( $V$ ) به راحتی قابل محاسبه‌اند:

$$T = \frac{1}{2} m_1 [(l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \dot{H}^2 + 2l_1 \dot{H} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1] + \frac{1}{2} m_2 [(l_2 \dot{\theta}_2)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \dot{H}^2 - 2l_1 \dot{H} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - 2l_2 \dot{H} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)] \quad (2)$$

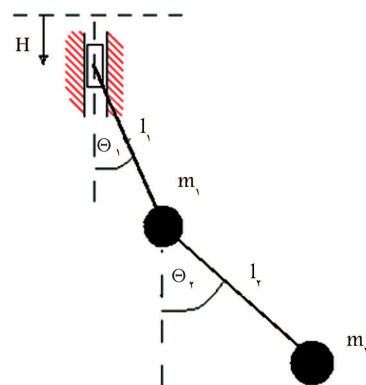
$$V = -m_1 g(l_1 \cos \theta_1 + H) - m_2 g(l_1 \cos \theta_1 + H + l_2 \cos \theta_2) \quad (3)$$

$$L = T - V \quad (4)$$

در روابط بالا،  $L$  انرژی لاگرانژ سیستم و نقطه‌ها نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به زمان است. حال با اعمال معادلات اولر-لاگرانژ به معادله‌ی ۴، روابط مرتبه‌ی دوم حرکت به دست می‌آیند (در این روند، از جملات کوچک صرف‌نظر شده است):

$$\ddot{\theta}_1 l_1 (m_1 + m_2) + \ddot{\theta}_2 (m_2 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)) = (m_1 + m_2) [\omega h \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \sin(\omega t) - g \sin \theta_1 - \omega^2 h \sin \theta_1 \cos(\omega t) - \dot{\theta}_1 h \omega \cos \theta_1 \sin(\omega t)] + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2^* \sin(\theta_2 - \theta_1) = D_1 \quad (5)$$

$$\ddot{\theta}_1 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \ddot{\theta}_2 l_2 = \omega h \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin(\omega t) - g \sin \theta_2 - \omega^2 h \sin \theta_2 \cos(\omega t) - \omega h \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \sin(\omega t) + l_1 \ddot{\theta}_1^* \sin(\theta_2 - \theta_1) = D_2 \quad (6)$$



شکل ۱. شماتیک پاندول دوگانه با لولای متحرک.

روابط ۵ و ۶ را می‌توان به چهار جمله‌ی مرتبه اول تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \Omega_1 & \dot{\theta}_2 &= \Omega_2 \\ \dot{\Omega}_1 &= \frac{D_1 l_2 - D_2 m_2 l_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_1 l_2 (m_1 + m_2) - l_1 l_2 m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \\ \dot{\Omega}_2 &= \frac{D_2 l_1 (m_1 + m_2) - D_1 l_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_1 l_2 (m_1 + m_2) - l_1 l_2 m_2 \cos^2(\theta_2 - \theta_1)} \end{aligned} \quad (7)$$

با قراردادن مقادیر زیر به عنوان فرضیات مسئله، معادلات فوق به صورت عددی قابل حل خواهند بود:

$$m_1 = 3, \quad m_2 = 1, \quad l_1 = 2, \quad l_2 = 1, \quad \Delta t = 0.25$$

شرایط اولیه بیان‌گر انرژی ورودی به سیستم است، و چون هیچ منبع ناپایستاری وجود ندارد، انرژی کل همان انرژی ورودی به سیستم است.

## مقایسه‌ی روش‌های حل

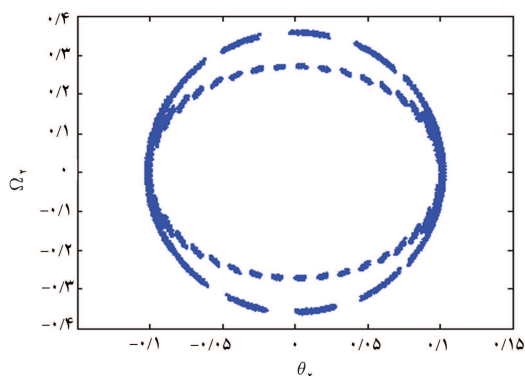
ابتدا حل سیستم معادلات ۷ به وسیله‌ی دو روش نقطه‌ی میانی اصلاح‌شده و رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم نشان داده می‌شود. در شکل ۲ مقطع پوانکاره مربوط به سیستم نشان داده شده، که با استفاده از روش نقطه‌ی میانی با  $\Delta t = 0.1^\circ$  و  $\omega = 1$  رسم شده است. مقطع پوانکاره، سطح مقطعی از نمودار سه بعدی فضای فازی است که در آن  $\theta_1$  معادل صفر است. شکل ۳ نمودار سه بعدی فضای فازی است که با همان مقدار فاصله‌ی زمانی و فرکانس کشیده شده است. در شکل ۴ مقطع پوانکاره برای سیستم با استفاده از روش رانگ-کوتا رسم شده است. شکل‌های ۲ و ۴ تشابه قابل قبولی با یکدیگر دارند. تا به اینجا شرایط اولیه‌ی سیستم در تمام اشکال مورد بحث عبارت بود از:  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 0.1, 0, 0]$ .

مقدار کل انرژی سیستم را می‌توان چنین نوشت:

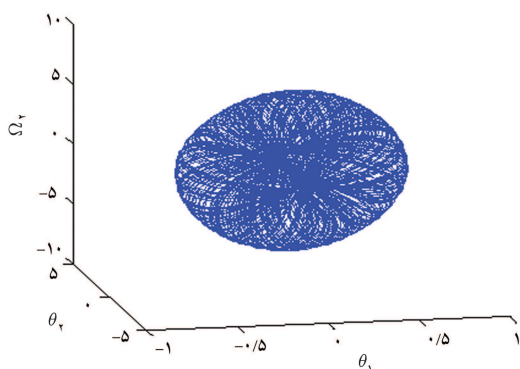
$$E_0 = V_0 + T_0 \quad (8)$$

که در آن  $V_0$  و  $T_0$  به ترتیب انرژی پتانسیل و جنبشی اولیه‌ی سیستم هستند. در این مقاله تمام سرعت‌های اولیه و  $H_0$  برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. برای داده‌های عددی ذکر شده تا به اینجا، به راحتی انرژی اولیه قابل محاسبه است:

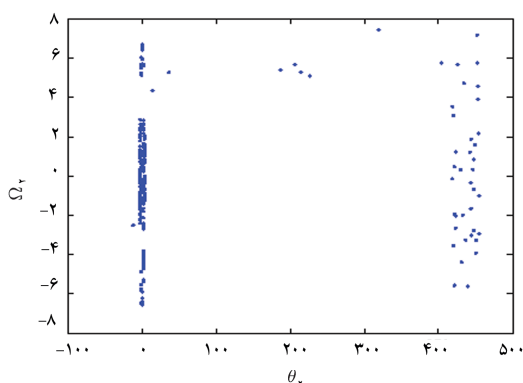
$$\begin{aligned} E_0 &= m_1 g(l_1 \cos \theta_1 + H_0) - m_2 g(l_1 \cos \theta_1 + H_0 + l_2 \cos \theta_2) \\ &= 88.15 \end{aligned} \quad (9)$$



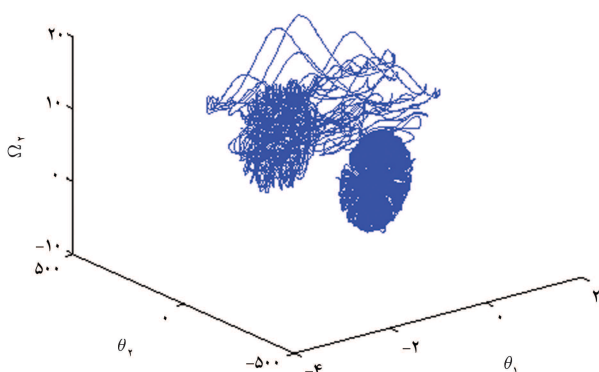
شکل ۲. مقطع پوانکاره برای حل به روش مقطع میانی با  $\Delta t = 0.1^\circ$  و  $\omega = 1$ .



شکل ۶. نمودار فضای فازی برای  $\omega = 1$  و شرایط اولیه  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 3\pi/4, 0, 0]$ .



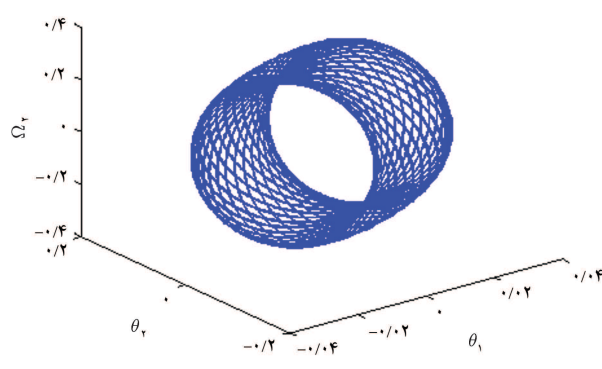
شکل ۷. مقطع پوانکاره برای  $\omega = 1$  و  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 7\pi/8, 0, 0]$ .



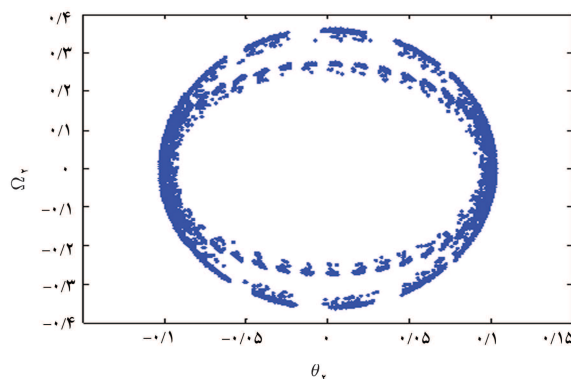
شکل ۸. نمودار فضای فازی برای  $\omega = 1$  و  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 7\pi/8, 0, 0]$  و شروع آشوب.

حال اگر مقادیر اولیه زاویه به مقادیر  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 7\pi/8, 0, 0]$  افزایش یابند، نقاط فضای فازی در مقطع پوانکاره ابتدا در یک ناحیه محدود قرار دارند و پس از مدتی از ناحیه مذکور خارج شده و محدوده آنها بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شود (شکل‌های ۷ و ۸). پس به ازای این مقدار انرژی، نظم حرکت پاندول از بین می‌رود. می‌توان گفت زاویه اولیه  $\theta_2$  که به ازای آن رفتار سیستم به سمت آشوب می‌رود ۲/۷۴۸ رادیان است.

سیستم‌های دینامیکی آشوب‌ناک با حساسیت به شرایط اولیه شناخته شده‌اند. در این نوشتار حساسیت با تعیین عددی مشخصه‌های توانی لیاپانوف — یعنی مقدار متوسط جدایش نمایی بین مسیرهای بسیار نزدیک در فضای فازی — مشخص



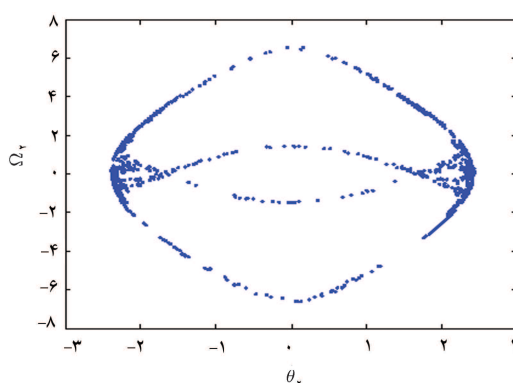
شکل ۹. نمودار سه‌بعدی فضای فازی.



شکل ۱۰. مقطع پوانکاره برای حل به روش رانگ-کوتا.

## افزایش انرژی و شروع آشوب

برای مقدار مشخص  $\omega$ ، با افزایش مقادیر شرایط اولیه — تنها مقدار اولیه زاویه پاندول دوم ( $\theta_2$ ) — در یک محدوده خاص، سیستم رفتاری بی‌نظمی از خود نشان می‌دهد. واضح است که برای هر مقدار فرکانس حرکت لولا ( $\omega$ ) این محدوده منحصر به فرد است. برای تحقیق در خصوص رفتار سیستم، ابتدا مقدار  $\omega$  ثابت در نظر گرفته شده و انرژی اولیه تغییر می‌کند. در اینجا رفتار حرکت پاندول به ازای  $\omega = 1$  بررسی می‌شود. ابتدا نمودار سه‌بعدی فضای فازی و مقطع پوانکاره برای شرایط اولیه  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 3\pi/4, 0, 0]$  را رسم می‌کنیم. به ازای این مقدار انرژی، مقطع پوانکاره و نمودار فضای فازی الگوی منظمی دارند (شکل‌های ۵ و ۶).



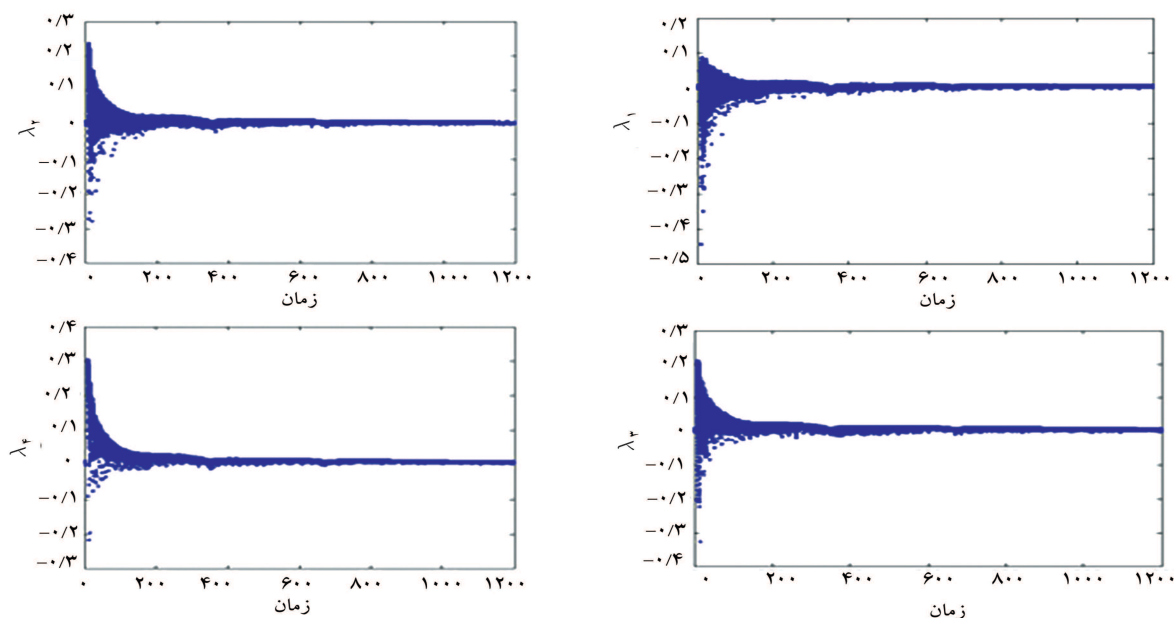
شکل ۱۱. مقطع پوانکاره برای  $\omega = 1$  و شرایط اولیه  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 3\pi/4, 0, 0]$ .

می‌شود. مقدار مشخصه‌ی لیاپانوف  $\lambda(\vec{x}_0)$  چنین می‌آید:

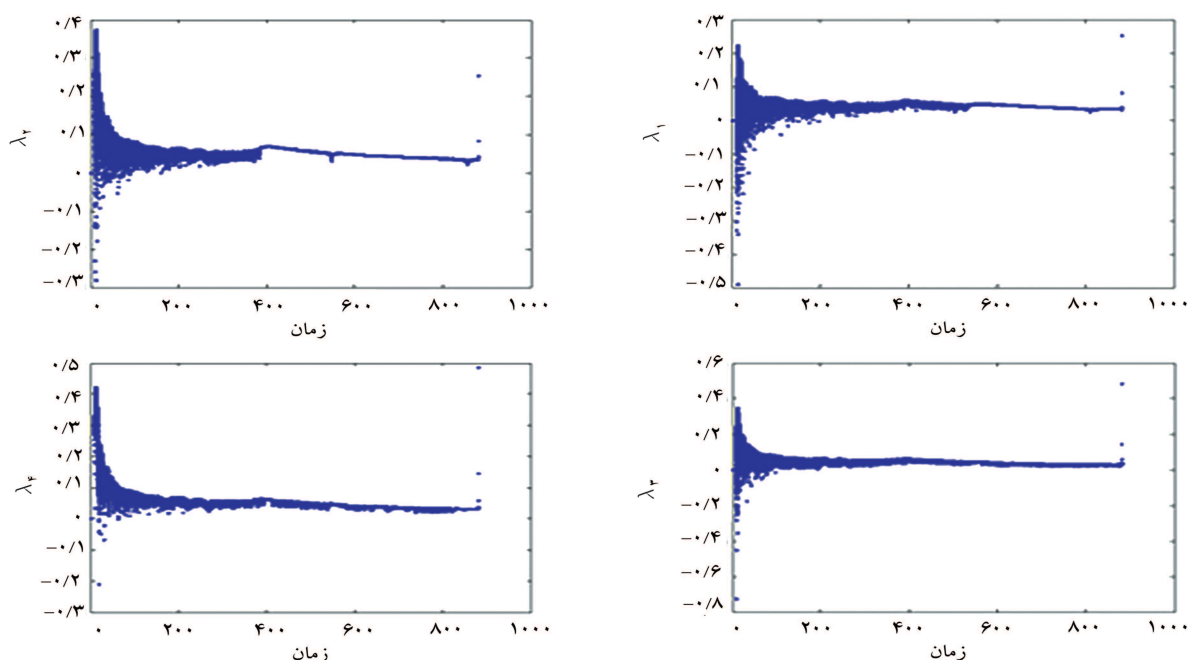
$$\lambda(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\|\Delta \vec{x}\| \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log \frac{\|\Delta \vec{x}(t)\|}{\|\Delta \vec{x}(0)\|} \quad (10)$$

که در آن  $\vec{x}_0(t)$  و  $\vec{x}_1(t)$  دو مسیری هستند که در زمان  $t = 0$  به ترتیب از  $\vec{x}_0(0)$  و  $\vec{x}_1(0)$  می‌گذرند ( $\vec{x}_0(t)$  مسیر مرجع است).  $\|\Delta \vec{x}(0)\|$  فاصله‌ی اقلیدسی<sup>۷</sup> بین دو مسیر  $\vec{x}_0(t)$  و  $\vec{x}_1(t)$  در زمان  $t = 0$  است و  $\|\Delta \vec{x}(t)\|$  فاصله‌ی اقلیدسی

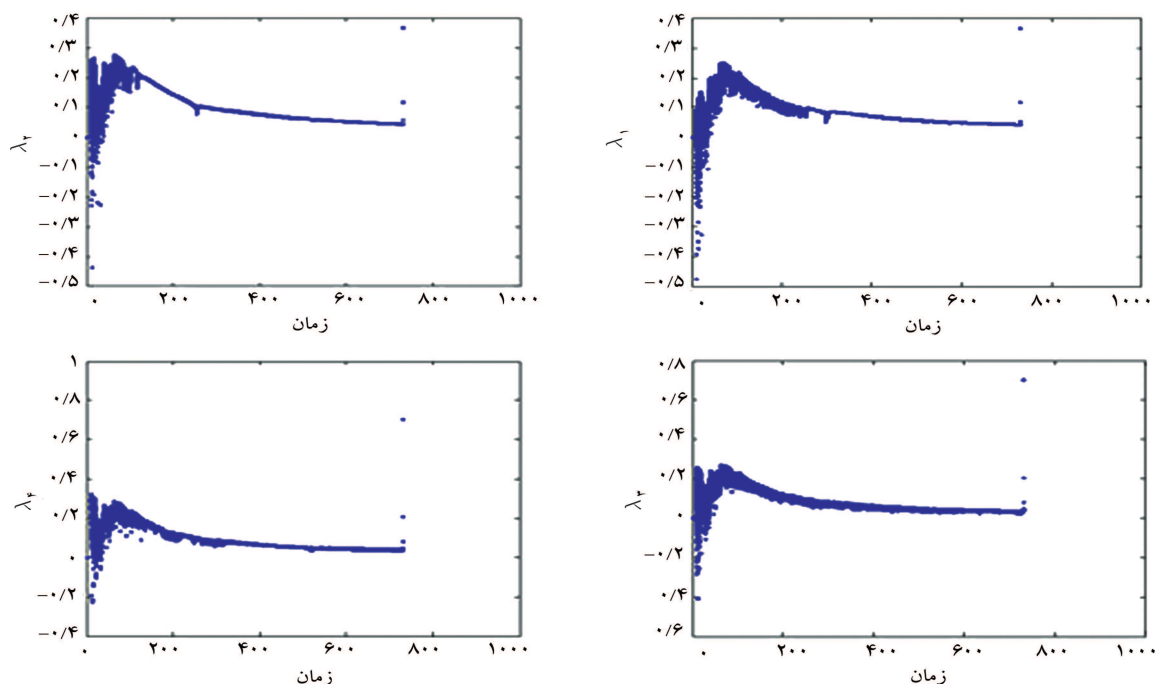
بین دو مسیر در زمان  $t$  است.<sup>[۸]</sup> یک سیستم دینامیکی در فضای  $m$  بعدی  $R^m$  با  $m$  مشخصه‌ی لیاپانوف شناخته می‌شود:  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_m$ . چهار مشخصه‌ی لیاپانوف برای سیستم پاندول دوگانه به‌وسیله‌ی روش‌های عددی محاسبه می‌شود. مقادیر حدی صفر و بینهایت، به‌ترتیب  $10^{-9}$  و  $1200$  در نظر گرفته می‌شوند. نتایج به‌کارگیری این راهکارها در شکل‌های ۹ تا ۱۱ نشان داده شده‌است. این محاسبات برای  $\omega = 1$  و مقادیر مختلف زوایای اولیه انجام شده‌اند.



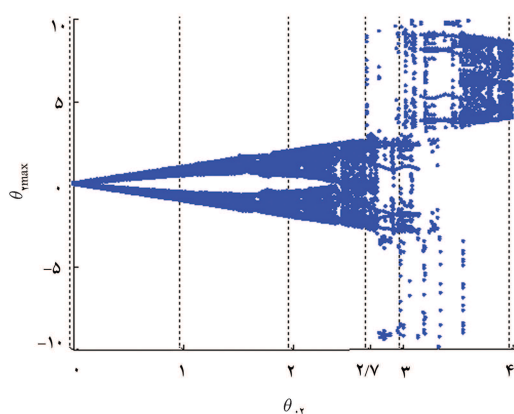
شکل ۹. نمودار مشخصه‌های لیاپانوف برحسب زمان به‌ازای شرایط اولیه‌ی  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 3\pi/4, 0, 0]$  و پایداری سیستم در زمان‌های بالا، مشخصه‌های لیاپانوف  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  به‌ترتیب مرتبط با  $\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2$ .



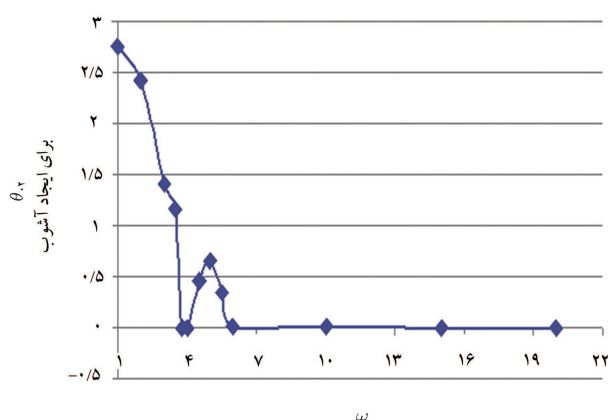
شکل ۱۰. نمودار مشخصه‌های لیاپانوف برحسب زمان و شرایط اولیه‌ی  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 7\pi/8, 0, 0]$  و ناپایداری سیستم در زمان‌های بالا، مشخصه‌های لیاپانوف  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  به‌ترتیب مرتبط با  $\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2$ .



شکل ۱۱. ناپایداری مشخصه‌های لیپانوف نسبت به زمان برای شرایط اولیه  $[\theta_1, \theta_2, \Omega_1, \Omega_2] = [0, 3, 0, 0]$ ، مشخصه‌های لیپانوف  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  به ترتیب مرتبط با  $\Omega_2, \Omega_1, \theta_2, \theta_1$ .



شکل ۱۲. نمودار دوشاخگی برای  $\omega = 1$  و نمایش تبدیل به آشوب.



شکل ۱۳. نمودار  $\theta_2$  برای ایجاد آشوب برحسب فرکانس لولا.

در حالتی که شرایط اولیه به صورت  $[0, 3\pi/4, 0, 0]$  هستند، چهار مشخصه‌ی لیپانوف برای زمان  $1200$  (s) به دست می‌آیند:

$$\lambda_1 = 0.0077$$

$$\lambda_2 = 0.0078$$

$$\lambda_3 = 0.0074$$

$$\lambda_4 = 0.0094$$

روند تغییر هر کدام از این مشخصه‌ها نسبت به زمان در شکل ۹ نشان داده شده است. برای شرایط اولیه  $[0, 7\pi/8, 0, 0]$  چهار مشخصه به سمت بینهایت میل می‌کنند و یک افزایش ناگهانی در  $t = 88$  رخ می‌دهد (شکل ۱۰). به علاوه، نمودار مشخصه‌های لیپانوف برای شرایط اولیه  $[0, 3, 0, 0]$  در شکل ۱۱ نمایش داده شده است. پس، مشخصه‌های لیپانوف مؤید محدوده‌ی شروع آشوب برای مقدار واحد فرکانس لولا است که از روش قبل به دست آمد. نمودار سه بعدی زاویه‌ی بیشینه برای پاندول دوم نسبت به زمان و زاویه‌ی اولیه همان پاندول در شکل ۱۲ رسم شده است. در این نمودار محور زمان عمود بر صفحه است. این شکل نمونه‌ی مشهود دوشاخگی است. قبل از  $\theta_2 = 2.7$  روند نمودار منظم است، اما بعد از آن آشوب رخ می‌دهد.

با انجام عملیات مذکور برای مقادیر مختلف فرکانس حرکت لولا، برای هر فرکانس آشوب در شرایط اولیه‌ی منحصر به فردی رخ می‌دهد. تغییرات مقدار  $\theta_2$  برای شروع آشوب برحسب فرکانس حرکت لولا در شکل ۱۳ نشان داده شده است. چنان که مشهود است، افت و خیزی در حدود فرکانس  $3/5$  و  $5$  وجود دارد. یکی از فرکانس‌های طبیعی سیستم  $3.9337$  است. پس کاهش غیرطبیعی در نمودار برای  $\omega = 4$  را می‌توان به فرکانس طبیعی و تأثیر تشدید ربط داد.

## نتیجه‌گیری

در بررسی رفتار پاندول دوگانه با لولای متحرک تحت تابع هارمونیک، ابتدا معادلات حرکت با دو روش نقطه‌ی میانی اصلاح‌شده و رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهار حل شدند و تطابق قابل قبولی بین آنها مشاهده شد. برای سیستم حاضر، الگوی حرکت قبل از این که مقدار انرژی اولیه به یک مقدار خاص برسد، منظم است. اما با افزایش انرژی و گذر از این مقدار خاص، سیستم رفتار آشفته از خود نشان می‌دهد. شرایط اولیه‌ی

که به‌ازای آن سیستم بی‌نظم می‌شود برای یک مقدار فرکانس حرکت لولا، توسط سه راهکار شامل مقطع پوانکاره، مشخصه‌های لیاپانوف و نمودار دوشاخگی به دست آمد. نشان داده شد که تطابق قابل قبولی بین جواب‌های هرکدام از راهکارها وجود دارد. در مرحله‌ی بعد فرکانس تغییر یافت و برای هر فرکانس، مقدار زاویه اولیه‌ی شروع آشوب محاسبه شد. هراندازه فرکانس لولا بیشتر شود، انرژی مورد نیاز برای شروع آشوب، کم‌تر می‌شود. این کاهش مقدار انرژی، جز در فرکانس طبیعی سیستم ( $\omega = 4$ ) از الگوی منظمی پیروی می‌کند.

## پانوشتها

1. modified midpoint
2. Runge-Kutta
3. bifurcation diagram
4. Lyapunov characteristic exponents
5. chaos
6. Poincare section
7. Euclidean distance

## منابع (References)

1. De Paula, A.S., Savi, M.A. and Pereira-Pinto, F.H.I. "Chaos and transient chaos in an experimental nonlinear pendulum", *Journal of Sound and Vibration*, **294**, pp. 585-595 (2006).
2. Donnagrain, M.O. and Rasskazov, O. "Numerical modelling of an iron pendulum in a magnetic field", *Physica B*, **372**, pp. 37-39 (2006).
3. Stachowiak, T. and Okada, T. "A numerical analysis of chaos in the double pendulum", *Chaos, Solitons and Fractals*, **29**, pp. 417-422 (2006).
4. Belyakov, A.O., Seyraniana, A.P. and Luongo, A. "Dynamics of the pendulum with periodically varying length", *Physica D*, **238**, pp. 1589-1597 (2009).
5. Yip, S.C. and Dimaggio, F. "Routes to chaos of a pendulum with vertically rotating pivot", *Computers & Structures*, **46**(4), pp. 725-140 (1993).
6. Jin, J.D. and Matsuzaki, Y. "Bifurcation analysis of double pendulum with a follower force", *Journal of Sound and Vibration*, **2**, pp. 191-204 (1992).
7. Ohlhoff, A. and Richter, P.H. "Forces in the double pendulum", *Z Angew Math Mech*, **80**(8), pp. 1-22 (2000).
8. Zhang, J.G., Yu, J.N., Chu, Y.D., Li, X.F. and Chang, Y.X. "Bifurcation and chaos of a non-autonomous rotational machine systems", *Simulation Modeling Practice and Theory*, **16**, pp. 1588-1605 (2000).

# NUMERICAL SIMULATION OF CHAOTIC BEHAVIOR IN DOUBLE PENDULUM WITH MOVING PIVOT

**S.E. Razavi**

razavi@tabrizu.ac.ir

**F. Ghaderi**(corresponding author)

ghaderi67@yahoo.com

**Dept. of Mechanical Engineering  
University of Tabriz**

Sharif Mechanical Engineering Journal

Volume 29, Issue 2, Page 33-38, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 23 August 2011; received in revised form 8 July 2012; accepted 6 August 2012.

## Abstract

During recent decades, much attention has been paid to solving different kinds of dynamic systems, including pendulums, to observe their chaotic behavior. The governing equations of a double pendulum are investigated numerically in this paper. The pivot of the first pendulum is considered to be moving, following a certain mathematical template. Also, the pendulum, as a dynamic system, shows regular and chaotic behavior, under different conditions of its motion, such as initial angles and velocities (as the initial energy injected into the system), and the frequency of the pivot. The Lagrange equation governs this phenomenon. The proposed solution methods include the modified midpoint, along with fourth-order Runge-Kutta, to check the conditions for probable instability. The total value of the energy of the system is in the form of initial kinetic and potential energies. All numerical evaluations of the mathematical equations were coded. To investigate the chaotic behavior, a three dimensional phase space diagram for characteristic parameters of the system was constructed. The energy of chaos onset for each value of the pivot frequency was obtained utilizing three procedures: 1) The Poincare map, which is a special section in the three-dimensional diagram of phase space, in which one of the system parameters is constant (the angle of the first pendulum with a vertical line is zero). For a regular system (not chaotic), points in the Poincare map are located in an imaginary circle with limited radius, and they do not exceed this circle, even at very large times, 2) Lyapunov characteristic exponents, which are the average exponential separation between the nearby phase space trajectories of system motion. A system with one or more

positive Lyapunov characteristic exponents is known as chaotic, and 3) The bifurcation diagram for characteristic parameters that shows the period doubling of chaos. It is a form of transition from periodicity to chaos. From this diagram, the onset of chaos is detected. The results are obtained using three methods, which depict good agreement with each other. They indicate that the more the frequency of the moving pivot, the less the initial energy required by that system to become chaotic. Initial energy decrease, which is due to frequency increase, follows a regular style, except for the natural frequency of the system. It was found that the moving pivot of the double pendulum has a dominant effect on chaos onset under certain circumstances.

**Key Words:** double pendulum, Runge-Kutta, Lyapunov characteristic exponents, bifurcation diagram, Poincare section.