

بررسی رفتار کمانش ناپایدار در گنبد‌های شبکه‌یی کم ارتفاع و ارائه روشی برای تحلیل مسیر پس کمانش

علیرضا حیدری (کارشناس ارشد)

ابرج محمودزاده‌کنی (استاد)

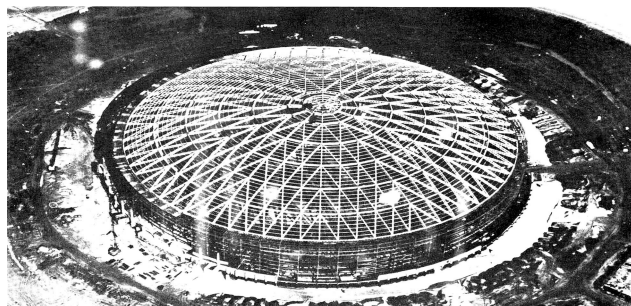
پردیس دانشکده‌های فنی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه تهران

در این نوشتار روشی برای محاسبه‌ی مسیر دوشاخگی^۱ در سازه‌های فضا کارگنبدی با آثار غیرخطی مادی و هندسی ارائه شده است. این روش در یک برنامه‌ی غیرخطی مادی و هندسی تحلیل سازه‌های فضا کار پایه‌ریزی شده است. در روش ارائه شده برای تحلیل مسیر پس کمانش، احتیاجی نیست که سازه با نقص هندسی به برنامه معرفی شود. سازه بدون نقص توسط برنامه دریافت، و در مرحله‌ی نخست مسیر بنیادی منحنی بار - تغییر مکان سازه به دست می‌آید و همچنین عبور از نقطه‌ی دوشاخه به کاربر اطلاع داده می‌شود. در مرحله‌ی دوم، با استفاده از شیوه‌ی تشریح شده سازه‌ی بدون نقص هندسی به پایین‌ترین مسیر کمانش هدایت می‌شود.

واژگان کلیدی: مسیر بنیادی، مسیر دوشاخگی، نقاط حدی و دوشاخگی، ماتریس سختی مماسی، گنبد شبکه‌یی کم ارتفاع.

alborz.dimas@gmail.com
imkani@ut.ac.ir

مقدمه



شکل ۱. استادبوم شهر هوستن در تگزاس آمریکا. قطر خارجی این پوشش گنبدی که استادبوم ورزشی بازی‌های بیس بال و فوتبال آمریکایی را می‌پوشاند در حدود ۲۱۷ متر، و دهانه‌ی آزاد آن ۱۹۶ متر است و می‌تواند جای نشستن برای ۶۶۰۰۰ نفر را در خود تأمین کند.

بیش از چهار سال است که محققین در زمینه‌ی ناپایداری گنبد‌های مشبک تحقیق می‌کنند.^[۱] در سال‌های اخیر پوسته‌های مشبک به منظور پوشش دهانه‌های بزرگ بدون تکیه‌گاه‌های داخلی و با نسبت بسیار کم وزن مصالح سازه‌یی به واحد سطح زیر بنا کاربرد گسترده‌یی داشته‌اند. این سازه‌های فضا کار، چنان که در شکل ۱ نیز نشان داده شده است،^[۱] از عناصر پیش‌ساخته با عملکرد تیر-ستون فولادی تشکیل شده‌اند که به راحتی در کارگاه به یکدیگر متصل و مونتاژ می‌شوند. در تحلیل پوسته‌های مشبک، خرابی گنبد تالار بخارست در سال ۱۹۶۳^[۲]، به علت بارگذاری غیر یکنواخت ناشی از برف و سیستم نامناسب اتصالات، باعث تحقیقات زیادی در خصوص رفتار کمانش و پس‌کمانش در پوسته‌های مشبک شده است.^[۳] برای بررسی عددی کمانش پوسته‌های تک‌لایه دو روش عام مورد استفاده قرار گرفته است. در روش اول پوسته‌ی مشبک با یک پوسته‌ی معادل پیوسته^[۴] شبیه‌سازی می‌شود؛ روش دوم نیز مبتنی بر استفاده از مدل‌های ریاضی منفصل است که در برنامه‌ی رایانه‌یی به تفصیل مورد استفاده قرار می‌گیرد.^[۵-۱۰] پوسته‌های مشبک مورد نظر در این نوشتار از نوع قاب‌های فضایی با اتصالات صلب است که دارای انحنای مثبت هستند (گنبدی شکل‌اند)، از یک شبکه‌ی مثلثی تشکیل می‌شوند و عناصر تشکیل دهنده‌ی آنها رفتار تیر-ستون دارند.

علاوه بر لنگر خمشی تحت نیروهای فشاری بالا هستند و این مسئله بر حساسیت نسبت به نقص هندسی می‌افزاید. ناپایداری حاصله در این پوسته‌ها توأم با رفتار غیرخطی مادی و هندسی است و تغییر قابل توجهی در شکل اولیه‌ی گنبد حاصل می‌شود. لذا لازم است برنامه‌ی رایانه‌یی مورد استفاده از قابلیت کمانش موضعی و کلی برخوردار باشد. کمانش پوسته‌های مشبک از نوع ناپایدار است و کمانش یک عنصر یا گره به سرعت در بخش وسیعی از گنبد منتشر می‌شود. این مسئله، به خصوص در گنبد‌های تک‌لایه با انحنای مثبت که موضوع بحث ما در این نوشتار است، اهمیت

علی‌رغم مطالعات اولیه‌ی اوپلر در مورد رفتار کمانش پایدار ستون‌ها، در سال ۱۹۶۷ پس از ترجمه‌ی تز دکترای Koiter مشخص شد که رفتار ماورای کمانش پوسته‌ها ممکن است ناپایدار باشد^[۱۱] و هرگونه نقص هندسی می‌تواند تأثیر قابل ملاحظه‌یی در رفتار آنها داشته باشد. در گنبد‌های مشبک مورد نظر، تمامی عناصر

آنالیز، ضریب بارگذاری در آن نقاط بحرانی تخمین زده می شود و در مرحله ی دوم آنالیز، به صورت اتوماتیک سازی اولیه به پایین ترین مسیر دوشاخه هدایت می شود.

تبدیل خطی معادلات سختی افزایشی

ماتریس سختی سازه (\underline{K}_T) که به آن ماتریس سختی مماسی^۲ نیز می گویند در طول تاریخچه ی تغییر شکل ثابت نیست، و علت آن در نظر گرفتن اثرات غیر خطی مادی و هندسی^[۷] در محاسبه ی ماتریس سختی \underline{K}_T است. بین این ماتریس و ماتریس های ستونی افزایش بار و تغییر مکان رابطه ی ۱ برقرار است:

$$\underline{K}_T \cdot \Delta \underline{U} = \Delta \underline{P} \quad (۱)$$

با توجه به رابطه ی ۱ درمی یابیم که در یک افزایش یا تکرار محاسباتی، بین بردارهای $\Delta \underline{U}$ و $\Delta \underline{P}$ یک تبدیل خطی انجام داده ایم. بردارهای $\Delta \underline{U}$ و $\Delta \underline{P}$ می توانند در فضای n بعدی برحسب بردارهای متعامد و مستقل خطی \underline{V}_i بسط داده شوند. هر بردار \underline{V}_i دارای این خصوصیت است که مؤلفه ی i ام آن برابر با واحد و مابقی برابر با صفرند. لذا خواهیم داشت:

$$\Delta \underline{U} = \Delta U_1 \cdot \underline{V}_1 + \dots + \Delta U_n \cdot \underline{V}_n \quad (۲)$$

$$\Delta \underline{P} = \Delta P_1 \cdot \underline{V}_1 + \dots + \Delta P_n \cdot \underline{V}_n \quad (۳)$$

که در آن ΔU_i بیانگر یک جابه جایی یا چرخش افزایشی است و ΔP_i برابر نیرو یا لنگر متناظر است.

دستگاه بردارهای $\{\underline{V}_i\}$ یک پایه برای تبدیل خطی در معادله ی ۱ تشکیل می دهند. طبیعتاً در صورتی که از مجموعه بردارهای مبنای متعامد دیگری نظیر $\{\underline{\bar{V}}_i\}$ استفاده شود آنگاه ماتریس سختی \underline{K}_T تغییر خواهد کرد. با ارجاع به مجموعه بردارهای جدید معادلات ۲ و ۳ چنین خواهند شد:

$$\Delta \underline{U} = \Delta \bar{U}_1 \cdot \underline{\bar{V}}_1 + \dots + \Delta \bar{U}_n \cdot \underline{\bar{V}}_n \quad (۴)$$

$$\Delta \underline{P} = \Delta \bar{P}_1 \cdot \underline{\bar{V}}_1 + \dots + \Delta \bar{P}_n \cdot \underline{\bar{V}}_n \quad (۵)$$

در دستگاه مختصات جدید معادله ی ۱ عبارت خواهد بود از:

$$\underline{\bar{K}}_T \cdot \Delta \underline{\bar{U}} = \Delta \underline{\bar{P}} \quad (۶)$$

برای محاسبه ی $\underline{\bar{K}}_T$ اولین مرحله بیان بردارهای $\underline{\bar{V}}_i$ برحسب بردارهای \underline{V}_k (بردارهای قدیم) است:

$$\underline{\bar{V}}_i = \sum_{k=1}^n q_{ik} \cdot \underline{V}_k ; \quad i = 1, \dots, n \quad (۷)$$

با قرار دادن معادله ی ۷ در معادله ی ۴ و مقایسه ی آن با معادله ی ۲ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \vdots \\ \Delta U_r \\ \vdots \\ \Delta U_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & \dots & q_{j1} & \dots & q_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q_{1i} & \dots & q_{ji} & \dots & q_{ni} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ q_{1n} & \dots & q_{jn} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \\ \vdots \\ \Delta \bar{U}_r \\ \vdots \\ \Delta \bar{U}_r \end{bmatrix} \quad (۸)$$

$$\Delta \underline{U} = \underline{Q}^T \cdot \Delta \underline{\bar{U}} \quad \text{و} \quad \underline{Q} = [q_{ij}] \quad (۹)$$

به سزایی دارد. چون بار مرده ی پوسته های مشبک اندک است، بار باد یا بار برف با تأثیرات نامتقارن خود تشکیل دهنده ی بارهای اصلی وارده اند و باعث افزایش احتمال کمانش نامتقارن سازه می شوند. پوسته های مشبک تک لایه رفتار غیرخطی شدیدی همراه با نرم شوندگی (کاهش سختی با افزایش بار) از خود نشان می دهند. لذا در نظر گرفتن رفتار غیرخطی هندسی ناشی از آثار کمانش و تغییر مکان های بزرگ و رفتار غیر خطی مادی ناشی از رخداد خمیرسانی در فولاد، در دست یابی به رفتار کامل پوسته الزامی است. در دهانه های بزرگ رفتار غیر خطی هندسی از اهمیت بیشتری برخوردار است و در دهانه های کوچک رفتار غیرخطی مادی نیز تأثیرگذار خواهد بود. تحقیقات انجام شده نشان داده اند که بار کمانش خطی ممکن است ۳۰ تا ۶۰ درصد بیشتر از بار کمانش غیرخطی باشد و تنها در صورتی که فروپاشی گنبد ناشی از کمانش موضعی اعضا باشد می توان به تخمین ناشی از تحلیل خطی اعتماد کرد.^{[۱۲][۱۳]} در ارتباط با رفتار غیرخطی مادی در مورد پوسته های با دهانه ی متوسط^[۱۴] اختلافات بین نتایج تحلیل غیرخطی هندسی و تحلیل غیرخطی کامل برای عملکرد به صورت قاب فضایی زیاد است، اما برای عملکرد به صورت خرپای فضایی ناچیز است. در این نوشتار از یک برنامه ی تحلیل غیرخطی مرکب برای سازه های فضاکار (CNASS) که تغییر مکان های بزرگ (ولی کرنش های کوچک)، اثر ناپایداری ناشی از تنش های فشاری و رفتار کشسانی - خمیری فولاد به صورت دوخطی (با معیار تسلیم سه بعدی) را در نظر می گیرد و براساس روش تغییر مکان اجزای محدود نوشته شده^[۱۵]، استفاده شده است.

رفتار عمومی پوسته های مشبک و برنامه ی تحلیل

در یک پوسته ی ایده آل کاهش پایداری ممکن است به دو صورت حاصل شود:

۱. با رسیدن به نقطه ی حدی که در آن سختی سازه در حالت کمانش مورد نظر تدریجاً در اثر نزدیک شدن به نقطه ی بحرانی به صفر می رسد (شکل ۲، منحنی بالایی).
۲. با رسیدن به نقطه ی دوشاخه که در آن مسیر اولیه به وسیله ی مسیر تعادلی ناپایدار ثانویه قطع می شود و سازه مسیر اولیه را ترک و وارد مسیر ثانویه می شود (شکل ۲).

در برنامه ی مورد استفاده برای نقاط مختلف تعادلی مسیر با روش افزایشی-تکراری براساس روش نیوتن-رفسان به دست می آیند. المان های مورد استفاده در برنامه از نوع المان تیرستون سه گرهی هم پارامتر غیر خطی است که در آن گره داخلی برای سهولت استفاده، با احتساب آثار غیر خطی، حذف استاتیکی شده است.^[۵-۷] جهت عبور از نقاط حدی برنامه قابلیت استفاده از روش کنترل تغییر مکان^[۱۷] و روش های طول کمان^{[۱۸][۱۹]} را دارد. آثار غیر خطی مادی در برنامه با انتگرال گیری عددی در طول المان و همچنین روی سطح مقطع با تقسیم بندی آن به المان های جزئی و محاسبه ی کرنش ها و تنش ها در این المان های جزئی به عمل می آید.

وجود نقص هندسی در موقعیت گره ها در یک پوسته ی مشبک اجرا شده باعث کاهش باربری سازه به میزانی کم تر از بار دوشاخگی در این سازه ها می شود. بنابراین تعیین اتوماتیک نقطه ی دوشاخه شدن و مسیر پس کمانش بعد از این نقطه از اهمیت فوق العاده ی برخوردار است. در الگوریتمی که در این نوشتار مورد بحث قرار خواهد گرفت و در برنامه ی CNASS پیاده شده است، مسیر دوشاخه طی دو مرحله آنالیز سازه بدون نیاز به ایجاد نقص هندسی در آن به دست می آید. در اولین مرحله ی

با انجام عملیات ماتریسی مشابه و ساده داریم:

$$\Delta P = \underline{Q}^T \cdot \Delta \bar{P} \quad (10)$$

$$\underline{K}_T = (\underline{Q}^T)^{-1} \cdot \underline{K}_T \cdot \underline{Q}^T \quad (11)$$

با توجه به معادله ۱۱ درمی یابیم که بسته به انتخاب $\{\bar{V}_i\}$ ، فرم‌های متفاوتی از \underline{K}_T به دست خواهد آمد. یک حالت مهم که پایه الگوریتم ما برای تحلیل خودکار نقطه دوشاخه است موقعی است که دستگاهی از بردارهای ویژه \underline{K}_T به عنوان سیستم مبنای تبدیل انتخاب شود. با توجه به این که بردارهای ویژه کاملاً مستقل از یکدیگرند و برای یک ماتریس حقیقی متقارن متعامدند، یک سیستم مبنای مناسب برای تشکیل فضای n بعدی است.

به خاطر تعریف بردارهای \bar{V}_k ، بردارهای ویژه که به عنوان پایه انتخاب شده اند تشکیل دهنده‌ی ردیف‌های ماتریس \underline{Q} و ستون‌های ماتریس \underline{Q}^T هستند. با کاربرد بردارهای ویژه در شکل نرمالیزه خواهیم داشت:

$$(\underline{Q}^T)^{-1} = \underline{Q} \quad (12)$$

$$\underline{K}_T = \underline{Q} \cdot \underline{K}_T \cdot \underline{Q}^T \quad (13)$$

با توجه به تعریف بردارهای ویژه $\{\bar{V}_i\}$ داریم:

$$\underline{K}_T \cdot \bar{V}_i = \lambda_i \cdot \bar{V}_i \quad (14)$$

لذا ماتریس \underline{K}_T که از معادله ۱۳ به دست می آید یک ماتریس قطری با ویژگی‌های زیر است:

$$\underline{K}_T = \underline{\Lambda}; \quad \underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$\Delta \bar{P} = \underline{\Lambda} \cdot \Delta \bar{U} \quad (16)$$

تحلیل سیستم معادلات افزایشی

در ابتدای تحلیل (بارگذاری اولیه) ماتریس سختی \underline{K}_T در معادله ۱ به صورتی است که برای هر بردار جابه‌جایی $\Delta \underline{U}$ خواهیم داشت:

$$\Delta \underline{U}^T \cdot \underline{K}_T \cdot \Delta \underline{U} \geq 0 \quad (17)$$

علت آن است که $\Delta \underline{U}^T \cdot \underline{K}_T \cdot \Delta \underline{U}$ (۱/۲) انرژی کرنشی ذخیره شده در سیستم برای بردار جابه‌جایی $\Delta \underline{U}$ را نشان می‌دهد. در جبر خطی، ثابت شده است که کوچک‌ترین مقدار ویژه ماتریس سختی \underline{K}_T ، λ_1 ، رابطه ۱۸ را ارضا می‌کند.

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{\Delta \underline{U}^T \cdot \underline{K}_T \cdot \Delta \underline{U}}{\Delta \underline{U}^T \cdot \Delta \underline{U}} \right\} \quad (18)$$

بنابراین در ابتدای تحلیل خواهیم داشت:

$$\lambda_1 \geq 0.$$

با مقید کردن حرکات جسم صلب سازه کلیه‌ی مقادیر ویژه صفر حذف شده و برای مقادیر خاص ماتریس سختی مماسی خواهیم داشت:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \leq \lambda_n \quad (19)$$

اما در فرایند تحلیل ممکن است تعدادی از مقادیر ویژه منفی شود که درخصوص منفی شدن مقادیر ویژه با توجه به این که پایه‌ی روش ما برای تحلیل خودکار است، در ادامه بحث خواهیم کرد.

گام‌های پایه‌ی در روش کنترل بار

معادله سختی ۱ را می‌توان به صورت رابطه ۲۰ نشان داد: [۷]

$$\underline{K}_T \cdot \Delta \underline{U} = \Delta \beta \cdot \underline{p} + (\underline{R} - \underline{F}) \quad (20)$$

که در آن:

\underline{K}_T : ماتریس سختی مماسی

$\Delta \underline{U}$: بردار افزایشی- تکراری جابه‌جایی

\underline{p} : بردار بارگذاری گره‌ی روی سازه

$\Delta \beta$: ضریبی که بیان‌گر مقدار بار اضافه شده در افزایش بعد است؛

\underline{R} : بارگذاری گره‌ی که تاکنون روی سازه اضافه شده؛

\underline{F} : ماتریس نیروهای گره‌ی معادل المان یا به عبارت دیگر درک سازه از بارگذاری خارجی؛

بردار $(\underline{R} - \underline{F})$ مقدار نیروی خارج از تعادل یا بالانس را در هر مرحله نشان می‌دهد.

روش حذف گاوسی^۲

فرایند حذف گاوسی در برنامه‌ی رایانه‌ی به منظور تبدیل ماتریس سختی \underline{K}_T به یک ماتریس بالامتثلی^۴ به صورتی که ذیلاً اشاره می‌شود به کار برده می‌شود. تبدیل ماتریس \underline{K}_T در معادله ۲۰ به صورت یک ماتریس بالامتثلی، شامل پیش ضرب ماتریس \underline{K}_T در یک سری ماتریس‌های \underline{L}_i^{-1} است: [۱۶]

$$\underline{K}_T \cdot \Delta \underline{U} = \Delta \underline{P} \quad (21)$$

$$\underline{L}_{n-1}^{-1} \dots \underline{L}_2^{-1} \cdot \underline{L}_1^{-1} \cdot \underline{K}_T = \underline{S} \quad (22)$$

که در آن \underline{S} ماتریس نهایی بالامتثلی است و داریم:

$$\underline{L}_i^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{i+1,i} & & \\ & & -l_{i+2,i} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & -L_{n,i} & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

که در آن:

$$l_{i+j,i} = \frac{K_T^{(i)}(i+j, i)}{K_T^{(i)}(i, i)} \quad (24)$$

عناصر $l_{i+j,i}$ مضارب گاوسی هستند و بالانویس i در معادله ۲۴ بیانگر این مسئله است که عنصر مربوطه از ماتریس $\underline{K}_T \cdot \underline{L}_1^{-1} \cdot \underline{L}_2^{-1} \cdot \dots \cdot \underline{L}_{i-1}^{-1}$ استخراج شده است. کلیه عناصر ماتریس \underline{L}_i^{-1} که نشان داده نشده‌اند برابر صفرند. با استفاده از معادله ۲۲ خواهیم داشت:

$$\underline{K}_T = \underline{L} \cdot \underline{S} \quad (25)$$

که در آن:

$$\underline{L} = \underline{L}_1 \cdot \underline{L}_2 \cdot \dots \cdot \underline{L}_{n-1} \quad (26)$$

از آنجا که \underline{S} یک ماتریس بالامثلثی است که عناصر قطری آن، عناصر مؤثر در روش حذف گاوسی هستند، پس می‌توان نوشت: $\underline{S} = \underline{D} \cdot \underline{\bar{S}}$ ؛ به طوری که \underline{D} ماتریسی قطری است که عناصر قطری ماتریس \underline{S} را در خود جای داده است (یعنی $d_{ii} = S_{ii}$). با قرار دادن \underline{S} در معادله ۲۵، با توجه به این که \underline{K}_T یک ماتریس متقارن است و تجزیه‌ی آن منحصر به فرد است، باید $\underline{\bar{S}} = \underline{L}^T$ باشد؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\underline{K}_T = \underline{L} \cdot \underline{D} \cdot \underline{L}^T \quad (27)$$

$\underline{L} \cdot \underline{D} \cdot \underline{L}^T$ تجزیه‌ی ماتریس سختی \underline{K}_T است که در حل معادله ۲۱، طبق دو مرحله‌ی زیر کاربرد مؤثری خواهد داشت؛ زیرا اکنون عناصر قطری ماتریس مثلثی ما واحد هستند:

$$\underline{L} \cdot \Delta \underline{V} = \Delta \underline{P} \quad (28)$$

$$\underline{D} \cdot \underline{L}^T \cdot \Delta \underline{U} = \Delta \underline{V} \quad (29)$$

فرایند تحلیل توضیح داده شده تا زمانی امکان پذیر است که عناصر قطر اصلی d_{ii} ماتریس \underline{D} صفر نباشند. این مسئله برای $K_T^{(i)}(i, i)$ در معادله ۲۴ نیز صادق است و در شروع تحلیل هنگامی اتفاق می‌افتد که سازه‌ی ما در معرض حرکت جسم صلب^۵ قرار گیرد و سازوکار^۶ آن تشکیل شود. در غیر این صورت چنان که در ادامه ثابت خواهد شد کلیه عناصر قطر اصلی در شروع تحلیل مثبت خواهند بود. با توجه به این که درمیتان یکی از نامتغیرهای ماتریس است داریم:

$$\det \underline{K}_T = \det \underline{\bar{K}}_T = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \quad (30)$$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n$$

به همین صورت از معادله ۲۷ خواهیم داشت:

$$\det \underline{K}_T = \det \underline{L} \cdot \det \underline{D} \cdot \det \underline{L}^T = \det \underline{D} = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \dots \cdot d_{nn} \quad (31)$$

بنابراین از رابطه ۳۰ و ۳۱ با استفاده از علامت ضرب خواهیم داشت:

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \prod_{i=1}^n d_{ii} \quad (32)$$

از آنجا که همواره $(\lambda_i > 0)$ است، خواهیم داشت:

$$\prod_{i=1}^n d_{ii} > 0 \quad (33)$$

اما هنوز استنباط نمی‌شود که d_{ii} برای کلیه i ها، بزرگ‌تر از صفر باشد. به منظور اثبات: $(d_{ii} > 0)$ ($i = 1, \dots, n-1$)، هنگامی که ماتریس سختی \underline{K}_T مثبت معین است ضرایب مثلثی \underline{K}_T را با $\underline{G}_T^{(i)}$ مقایسه می‌کنیم. (به طوری که \underline{K}_T از $\underline{G}_T^{(i)}$ با حذف i سطر و ستون آخر به دست آمده است.) فرض می‌کنیم که عوامل \underline{L} و \underline{D} از ماتریس سختی \underline{K}_T طبق رابطه ۲۷ محاسبه شده باشند، برای مسئله‌ی کاهش یافته خواهیم داشت:

$$\underline{G}_T^{(i)} = \underline{L}^{(i)} \cdot \underline{D}^{(i)} \cdot (\underline{L}^{(i)})^T \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (34)$$

که در آن $\underline{L}^{(i)}$ و $\underline{D}^{(i)}$ نظیر $\underline{G}_T^{(i)}$ هستند.

از آنجا که \underline{L} یک ماتریس پایین مثلثی و \underline{D} یک ماتریس قطری است، عوامل $\underline{L}^{(i)}$ و $\underline{D}^{(i)}$ به ترتیب از \underline{L} و \underline{D} با حذف i سطر و ستون آخر به دست می‌آیند. به دلیل خاصیت توالی-تسلسل^۷ مقادیر ویژه^۷ $\underline{G}_T^{(i)}$ بزرگ‌تر از λ_1 هستند [۱۶] بنابراین کلیه آنها مثبت‌اند. از معادلات ۳۰ و ۳۱ خواهیم داشت:

$$\det \underline{G}_T^{(i)} = \prod_{j=1}^{n-i} \lambda_j^{(i)} = \prod_{j=1}^{n-i} d_{jj} > 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (35)$$

همچنین برای $i = 1$ داریم:

$$d_{nn} = \left(\frac{\prod_{j=1}^n d_{jj}}{\prod_{j=1}^{n-1} d_{jj}} \right) > 0. \quad (36)$$

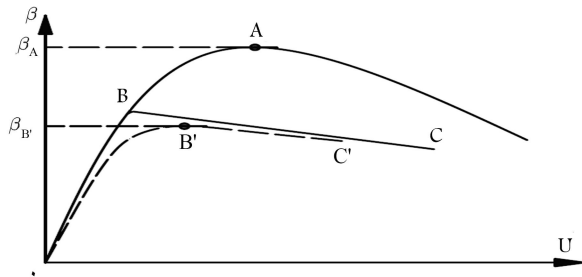
و برای $i = 2$ داریم:

$$d_{(n-1)(n-1)} \cdot d_{nn} = \left(\frac{\prod_{j=1}^n d_{jj}}{\prod_{j=1}^{n-2} d_{jj}} \right) > 0. \quad (37)$$

از معادلات ۳۶ و ۳۷ داریم: $(d_{(n-1)(n-1)} > 0)$ و همین‌طور با ادامه‌ی مراحل بالا خواهیم داشت:

$$d_{kk} = \left(\frac{\prod_{j=1}^k d_{jj}}{\prod_{j=1}^{k-1} d_{jj}} \right) > 0. \quad k = 1, \dots, n \quad (38)$$

بنابراین اگر ماتریس سختی \underline{K}_T مثبت معین باشد کلیه عناصر قطری \underline{D} باید مثبت باشند. اما چنان که می‌دانیم به خاطر آثار غیر خطی مادی و هندسی، \underline{K}_T در طول برنامه تغییر می‌کند. اگر در برخی مراحل یکی یا تعدادی از d_{ii} منفی شوند کوچک‌ترین مقدار ویژه^۷ $\underline{G}_T^{(i)}$ نیز منفی می‌شود و در نتیجه λ_1 از ماتریس سختی \underline{K}_T منفی خواهد شد. ما در نقاط بحرانی در منحنی رفتاری سازه با تغییر علامت مقادیر ویژه مواجه خواهیم شد. در این موقع با مشاهده‌ی علامت d_{ii} ها وجود نقطه‌ی بحرانی را تأیید می‌کنیم.



شکل ۳. نقاط حدی و دوشاخه.

به دست آوردن موقعیت تعادل کمی قبل و بعد از این نقطه‌ی حدی با استفاده از شیوه‌های کنترل تغییر مکان^[۱۷] و روش طول قوس امکان‌پذیر است.^[۱۸،۱۹] به علت نقص‌های هندسی تصادفی^[۲۰] که به صورت طبیعی در سازه‌های گنبدی واقعی وجود دارد، مؤلفه‌ی $\Delta \bar{P}_i$ که در بالا به آن اشاره شد ممکن است همیشه غیر صفر یا مقدار خیلی کوچکی باشد. بنابراین در موقعیت‌هایی که یک نقطه‌ی دوشاخه وجود دارد، این نقص‌های هندسی موجب نمایان شدن این نقاط به صورت حدی (مثل نقطه B' در شکل ۳) می‌شوند. تفاوت‌های بین ظرفیت باربری نظری β_A و ظرفیت‌های باربری واقعی $\beta_{B'}$ ممکن است در حالت واقعی خیلی بزرگ باشد.

با توجه به نکات و مسائل یادشده، مراحل شش‌گانه‌ی زیر برای به‌دست آوردن مسیر پس‌کمانش دوشاخه به‌کار گرفته شده‌اند:

۱. با انجام یک تحلیل افزایشی-تکراری روی سازه، مسیری بنیادی نظیر $OACD$ در شکل ۴ به دست می‌آید. در حین این مرحله از تحلیل، با کنترل کردن اعضای ماتریس قطری \underline{D} توسط برنامه، وجود یا عدم وجود نقطه‌ی دوشاخه اعلام می‌شود.

۲. در نزدیکی موقعیت تعادل، قبل از اولین نقطه‌ی دوشاخه (نقطه‌ی E در شکل ۴)، λ_i و \bar{V}_i که به ترتیب کوچک‌ترین مقدار ویژه و بردار ویژه متناظر آن هستند از ماتریس سختی مماسی \underline{K}_T به‌شیوه‌ی تکرار معکوس^۱ به دست می‌آیند.^[۱۸]

۳. بردار \bar{V}_i به‌صورت یک بردار واحد نرمالیزه شده و بزرگ‌ترین مؤلفه‌ی آن (از لحاظ قدر مطلق) پیدا می‌شود. علامت این مؤلفه، $\bar{V}_i(j)$ ، طوری تنظیم می‌شود که با علامت تغییر مکان این نقطه در تحلیل سازگار باشد.

۴. در نقطه‌ی E در شکل ۴ افزایش به‌صورت کنترل تغییر مکان خواهد بود. در این حالت بردار بار زنده‌ی p در معادله‌ی ۲۰ با \bar{V}_i بردار ویژه‌ی $\bar{V}_i(j)$ جایگزین می‌شود. بعد درجه‌ی آزادی زام با مقداری کوچک در جهت مشابه $\bar{V}_i(j)$ افزایش داده می‌شود. برای این تحریک کوچک، اگر درجه آزادی به‌صورت جابه‌جایی باشد مقدار 0.1 میلی‌متر، و چنانچه به‌صورت چرخشی باشد مقدار 0.1° رادیان در نظر گرفته شده است. این مقدار می‌تواند به‌صورت اختیاری و با توجه به دسترس‌ی به برنامه تغییر کند. در نتیجه یک موقعیت تعادل E' به دست می‌آید که خیلی نزدیک به مسیر BB' در شکل ۴ است.

۵. تا بعد از ۳ افزایش دیگر (که عدد ۳ می‌تواند با توجه به حساسیت سازه و دیگر مسائل و قضاوت‌ها تغییر کند) بار زنده‌ی که روی سازه اعمال می‌شود مطابق بردار p از معادله‌ی ۲۰ به‌علاوه‌ی \bar{V}_i بردار ویژه است. برای این افزایش‌ها کنترل تغییر مکان یا روش طول قوس به‌کار برده می‌شود.

مسیرهای دوشاخه و حساسیت به نقص هندسی^۱ در سازه‌های فضاکار گنبدی شکل

ماتریس سختی مودال \underline{U} در معادله‌ی ۱۶ با شدت بارگذاری سازه تغییر می‌کند. در یک نقطه‌ی بحرانی، یکی از مقادیر ویژه شاید بزرگ‌تر از صفر شده و در پی آن تغییر علامت می‌دهد. فرض کنید که λ_i آن مقدار ویژه‌ی باشد که تغییر علامت می‌دهد آنگاه داریم:

$$\lambda_i \cdot \Delta \bar{U}_i = \Delta \bar{P}_i \quad (39)$$

معنی ریاضی معادله‌ی ۳۹ در نقطه‌ی بحرانی این است که اگر ما \bar{P}_i را در مقابل \bar{U}_i مطابق شکل ۲ ترسیم کنیم، $\lambda_i = 0$ هنگامی رخ می‌دهد که در دو نقطه‌ی C_1 و C_2 مجاور یکدیگر به‌ازای تغییر \bar{U}_i هیچ‌گونه تغییری در \bar{P}_i رخ ندهد؛ به بیان دیگر در مجاورت نقطه‌ی بحرانی که در آن $\lambda_i = 0$ است هر تغییر کوچک $\Delta \bar{P}_i$ که مبتنی بر یک سیستم بارگذاری موازی با بردار ویژه \bar{V}_i است، یک $\Delta \bar{U}_i$ نسبتاً بزرگ تولید می‌کند (که البته با سیستم جابه‌جایی موازی با بردار ویژه‌ی مذکور، معادل است).

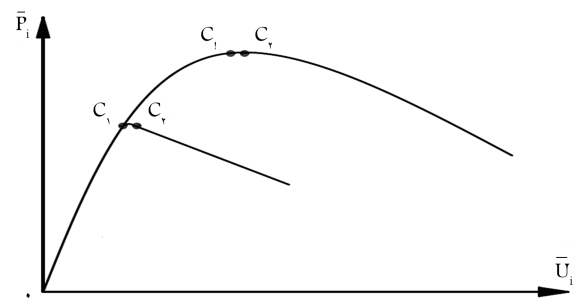
با توجه به معادله‌ی ۱۰، معکوس آن را می‌توان چنین نوشت:

$$\Delta \bar{P} = \underline{Q} \cdot \Delta P \quad (40)$$

ماتریس \underline{Q} که ردیف‌های آن شامل امتدادهای ویژه‌ی ماتریس \underline{K}_T است، با شدت بارگذاری تغییر می‌کند. با تغییر اسم \underline{Q} به \underline{Q}_c در نقطه‌ی بحرانی، که در آن $\lambda_i = 0$ خواهد بود، داریم:

$$\Delta \bar{P} = \underline{Q}_c \cdot \Delta P \quad (41)$$

در چنین نقطه‌ی بردار بار افزایشی مودال $\Delta \bar{P}$ که از معادله‌ی ۴۱ محاسبه شده، ممکن است مؤلفه‌ی \bar{U}_i آن صفر یا غیر صفر باشد. در حالتی که $\Delta \bar{P}_i = 0$ است بردار بار افزایشی $\Delta \bar{P}$ بر امتداد ویژه‌ی \bar{V}_i عمود است و معادله‌ی ۳۹ ارضا می‌شود. در چنین حالتی، نقطه‌ی بحرانی یک نقطه‌ی دوشاخه است. در چنین نقطه‌ی (مثل نقطه‌ی B در شکل ۳) یک آنالیز افزایشی متعارف، هیچ‌گونه تغییرات شدیدی در منحنی رفتاری بروز نمی‌دهد و مسیر OA در شکل ۳ به دست می‌آید. همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد در چنین نقطه‌ی یکی از اعضای قطری ماتریس \underline{D} تغییر علامت می‌دهد. در حالت دیگر، اگر $\Delta \bar{P}_i$ یک مقدار غیر صفر باشد نقطه‌ی بحرانی به‌صورت نقطه‌ی حدی ظاهر می‌شود (مثل نقطه‌ی A در شکل ۳) در این حالت یک $\Delta \bar{U}_i$ بزرگ و نامحدود از معادله‌ی ۳۹ به دست خواهد آمد. با این وجود



شکل ۴. نقاط بحرانی.

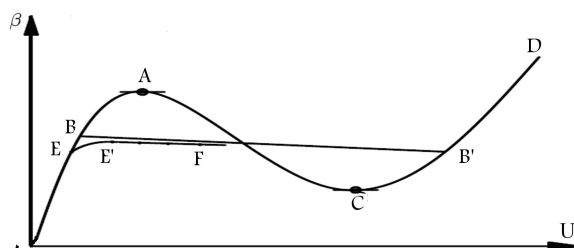


شکل ۵. مدل آزمایشگاهی.

چنان که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، گره ۲۱ در جهت عکس محور کلی y سازه بارگذاری شده است. با تحلیل سازه‌ی کامل (سازه‌ی بدون نقص)، مطابق مدلی که توضیح داده شد، نتایج حاصل شده است که در ادامه ارائه خواهد شد. منحنی بار تغییر مکان برای ۱۲۲ درجه آزادی در شکل ۸ ترسیم شده است. همراه این منحنی نتایج زیر نیز از فیلد خروجی برنامه گزارش می‌شود (درجه آزادی ۱۲۲، درجه آزادی قائم گره ۲۱ است). بین بارهای ۰/۵۹ تا ۰/۷۱ کیلو نیوتن دو عضو قطری منفی در ماتریس D ظاهر می‌شود که این مطابق با ۲ حالت کمانشی سازگار در نقطه‌ی ۲۱ است. لازم به ذکر است که این دو حالت کمانشی با عنایت به

جدول ۱. مختصات تئوری گره‌های گنبد ۲۴ عضوی.

گره	X(mm)	Y(mm)	Z(mm)
۱	۰/۰۰	۸۲/۱۶	۰/۰۰
۲	۲۵۰/۰۰	۶۲/۱۶	۰/۰۰
۳	۱۲۵/۰۰	۶۲/۱۶	-۲۱۶/۵۰
۴	-۱۲۵/۰۰	۶۲/۱۶	-۲۱۶/۵۰
۵	-۲۵۰/۰۰	۶۲/۱۶	۰/۰۰
۶	-۱۲۵/۰۰	۶۲/۱۶	۲۱۶/۵۰
۷	۱۲۵/۰۰	۶۲/۱۶	۲۱۶/۵۰
۸	۴۳۳/۰۰	۰/۰۰	-۲۵۰/۰۰
۹	۰/۰۰	۰/۰۰	-۵۰۰/۰۰
۱۰	-۴۳۳/۰۰	۰/۰۰	-۲۵۰/۰۰
۱۱	-۴۳۳/۰۰	۰/۰۰	۲۵۰/۰۰
۱۲	۰/۰۰	۰/۰۰	۵۰۰/۰۰
۱۳	۴۳۳/۰۰	۰/۰۰	۲۵۰/۰۰



شکل ۴. تحلیل خودکار مسیر کمانش.

۶. بردار بار زنده‌ی p در پنجمین افزایش بعد از نقطه‌ی E به مقدار اصلی خودش باز می‌گردد. در نتیجه مسیر تعادلی جدید $OEE'F$ در شکل ۴ شامل ۲ قسمت است. یکی قسمت OE که همان مسیر پایه است و دیگری قسمت $E'F$ که خیلی نزدیک به مسیر دوشاخه‌ی BB' است.

آنالیز حساسیت

در مثال‌های متعددی، پایین‌ترین مسیر دوشاخه با روش یاد شده و به کمک برنامه‌ی $CNASS$ به دست آمده است. [۵] کلیه‌ی این مثال‌ها با روش یاد شده و با تحریک ۰/۱ میلی‌متر یا ۰/۰۱ رادیان به‌طور خودکار به مسیر دوشاخه هدایت شدند و هیچ نوع حساسیتی نسبت به این مقدار تحریک توسط مثال‌های عددی [۲۲، ۲۱] نشان داده نشد، به‌قسمی که هیچ نیازی به تغییر این مقادیر برای مسائل مختلف و یا وابستگی آن به شکل گنبد یا نحوه‌ی بارگذاری آن مشاهده نشد. این شیوه‌ی محاسبه‌ی خودکار مسیر دوشاخه روی یک سازه‌ی گنبدی شبکه‌ی ۲۴ عضوی انجام گرفته و در ادامه، نتایج آن با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. [۵]

سازه‌ی گنبدی شکل ۲۴ عضوی

در شکل ۵ این مدل ساخته و آزمایش شده، قبل از شروع آزمایش در انتهای آزمایش نشان داده شده است. [۷-۵] این گنبد شبکه‌ی کم‌ارتفاع دارای ۲۴ عضو است، و پلان و نمای مدل سازه‌ی این گنبد در شکل ۶ نشان داده شده‌اند. همچنین این مدل دارای ۱۳ گره فیزیکی است که مختصات نظری آن در جدول ۱ بیان شده است. سیستم مختصات در نظر گرفته شده برای تحلیل مطابق شکل‌های ۶ الف و ۶ ب هستند. از این ۱۳ گره فیزیکی، یک گره مرکزی، ۶ گره حلقوی و ۶ گره تکیه‌گاهی است که طراحی و ساخت آن به صورت کاملاً گیردار هستند.

عضوهای سازه‌ی فوق از میله‌های فولادی با سطح مقطع دایره‌شکل و قطر ۴/۷۶ میلی‌متر ساخته شده‌اند. یک آزمایش کششی به‌منظور تعیین مشخصات مادی مصالح مصرفی انجام شده که نتایج آن چنین گزارش شده‌اند.

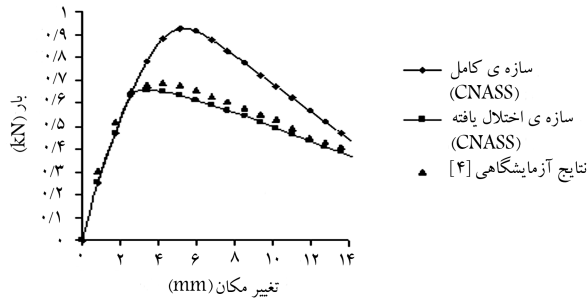
$$\sigma_y = 0.68 \quad (GPa) \quad \text{تنش جاری شدن:}$$

$$E = 209.12 \quad (GPa) \quad \text{مدول الاستیسیته:}$$

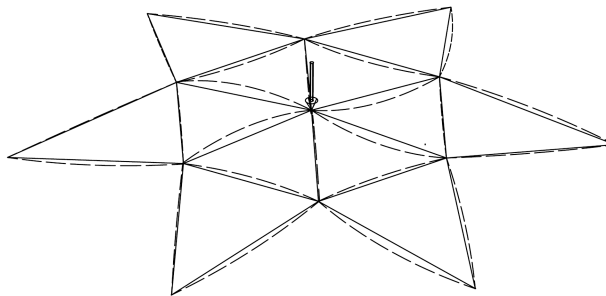
$$E_T = 0.32 \quad (GPa) \quad \text{مدول مماسی:}$$

$$H' = 0.32 \quad (GPa) \quad \text{پارامتر سخت شوندگی:}$$

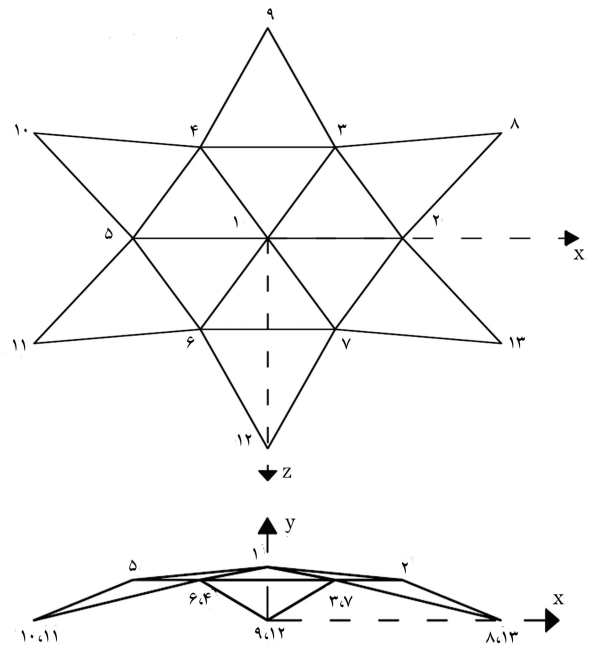
یک مدل عددی از این گنبد ۲۴ عضوی در شکل ۷ نشان داده شده است. این مدل تحت بارگذاری قائم متمرکز در گره مرکزی مورد آزمایش و تحلیل عددی قرار گرفته که نتایج آن در این بحث ارائه می‌شود.



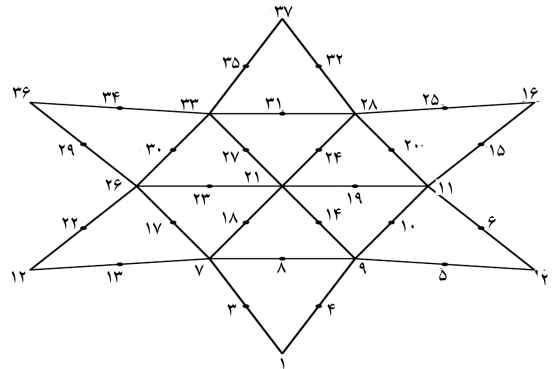
شکل ۹. گنبد ۲۴ عضوی با بار متمرکز روی گره مرکزی.



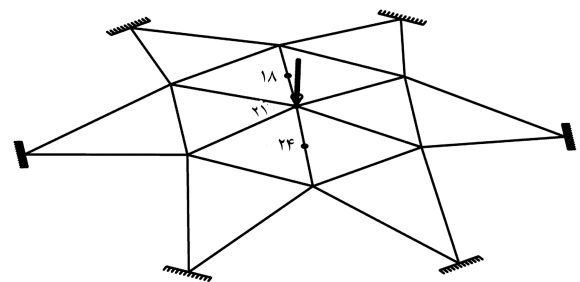
شکل ۱۰. حالت کمانشی در گنبد ۲۴ عضوی.



شکل ۶. پلان و نمای سازه ی گنبدی شکل ۲۴ عضوی.



شکل ۷. نقاط در گنبد ۲۴ عضوی (اختصاص ۲ المان به هر عضو).



شکل ۸. بارگذاری گنبد ۲۴ عضوی.

و بعد از آن مشخنی به صورت نزولی کاهش می یابد و تا انتها تعداد عناصر منفی قطر اصلی ۴ عدد باقی می ماند. نتیجه ی تحلیل مرحله ی اول معرف آن است که نقطه ی دوشاخه قبل از نقطه ی حدی در سازه ی کامل وجود دارد. بنابراین در مرحله ی دوم تحلیل، یک سازه ی مختل^{۱۱} تشکیل می شود و به صورت خودکار به سمت پائین ترین مسیر دوشاخه سوق داده می شود. کوچک ترین مقدار ویژه و به دنبال آن بردار ویژه در بار ۰/۶۲ کیلونیوتن، هنگامی که ماتریس سختی مماسی K_T هنوز مثبت معین است، محاسبه می شود که این حالت کمانشی در شکل ۱۰ نشان داده شده است. چنان که توضیح داده شد، برای این فرایند روش تکرار معکوس به کار گرفته می شود و بعد از ۱۸ تکرار، کوچک ترین مقدار ویژه که برابر با $10^{-2} \times 0.237$ کیلونیوتن بر میلی متر است به دست می آید. سپس سازه به صورت خودکار وارد مسیر دوشاخه می شود و بار حدی در این حالت ۰/۶۲ کیلونیوتن به دست می آید، که این بار ۳٪ کم تر از مقدار نظیر آن در سازه ی کامل است.

نتایج آزمایشگاهی حاصله^[۵] نشان می دهد که نقاط که مربوط به این نتایج خیلی نزدیک به سازه ی کامل در شاخه ی بارگذاری، و سازه ی مختل در مسیر کمانشی یا ثانویه هستند. بار حدی ناشی از تحلیل آزمایشگاهی $0.7 kN$ به دست می آید که ۴٪ از سازه ی مختل بیشتر است.

نتیجه گیری

۱. تعیین ظرفیت باربری گنبد های فضاکار باید با توجه به مسیر ثانویه^{۱۲} که از مسیر بنیادی جدا می شود انجام پذیرد. کمانش در گنبد های شبکه یی از نوع ناپایدار بوده و در این حالت با توجه به این که ظرفیت باربری سازه به شدت کاهش می یابد، تحلیل مسیر ثانویه ضروری است.
۲. نقطه ی دوشاخه ممکن است بعد یا قبل از رخداد حالت غیرخطی مادی به وقوع بپیوندد، همچنین با توجه به این که سختی در سازه های گنبدی مشبک به شدت

مختصات گره ها در این مرحله از تحلیل نشان می دهد که با کمانش خمشی اعضا در ارتباط است. در بارهای بین ۰/۷۱ تا ۰/۸۱ یک عنصر قطری منفی دیگر، طبق کمانش پیشینی گره ۲۱، ظاهر می شود. در بین بارهای ۰/۹۴ تا ۰/۹۶ تعداد عناصر منفی در قطر اصلی به ۴ عدد افزایش می یابد که علت آن فروجهش گره ۲۱ است. مقدار بار ۰/۹۶ کیلونیوتن بار حدی سازه ی کامل یعنی سازه ی بدون نقص اولیه است

گنبدی تا مجاورت نقطه‌ی کمانش ممکن است ماتریس سختی به علت آثار غیرخطی هندسی دستخوش تغییرات زیادی شده باشد و نمی‌توان از تحلیل خطی کمانش برای این کار استفاده کرد؛ لذا محاسبه‌ی مشخصات کمانش با این ماتریس سختی به‌هنگام شده ما را به سوی جواب‌های واقعی سوق می‌دهد.

در این حالت خاص نمی‌توان از نرم‌افزارهایی استفاده کرد که بدون در نظر گرفتن مطالب ذکر شده مشخصات کمانش را از سازه‌ی تغییر شکل نیافته به دست می‌آورند. علاوه بر این، چگونگی رفتار بعد از کمانش نیز از نظر میزان تأثیر نقص‌های هندسی حائز اهمیت است که با شیوه‌های توضیح داده شده با دقت مناسب قابل دست‌یابی است.

متأثر از تغییر شکل و توزیع تنش در سازه است، بررسی رفتاری این سازه‌ها باید با یک برنامه‌ی غیر خطی مادی و هندسی صورت گیرد.

۳. ثابت شد که اگر یکی از مقادیر ویژه‌ی ماتریس سختی \underline{K}_{TT} منفی شود در تجزیه‌ی $\underline{L} \cdot \underline{D} \cdot \underline{L}^T$ یکی از عناصر ماتریس قطری \underline{D} منفی خواهد شد؛ این نظریه می‌تواند مبنای تحلیل خودکار مسیر ثانویه قرار گیرد.

در این مرحله مهم‌ترین مطلبی که به‌عنوان یکی از خصوصیات برنامه‌ی ارائه‌شده مطرح است، محاسبه‌ی حالت کمانشی سازه در حوالی نقطه‌ی دوشاخه است. این مطلب در تحلیل سازه‌های گنبدی بسیار مهم و ظریف است، زیرا در سازه‌های

پانویس

1. bifurcation path
2. tangent stiffness matrix
3. gaussian elimination
4. upper triangular matrix
5. rigid body motion
6. mechanism
7. sturm-sequence property
9. imperfection
10. inverse iteration technique
11. perturbed structure
12. secondary path

منابع

1. Makowski, Z.S. (ed), "Analysis, design and construction of braced domes", Granda Publ. Ltd. London, (1984).
2. Wright, D.T. "Membrane forces and buckling in reticulated shells", *Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE*, ST1, pp. 173-201 (1965).
3. Soare, M.V. "Investigation of the collapse of a large span braced dome", in *Analysis, Design and Construction of Braced Domes* (ed. Z. S. Makowski), Granada Publ. Ltd, London (1984).
4. Gioncu V. "Buckling of reticulated shells, state-of-the-art", *Int. J. of Space Structures*, **10**(1), pp.1-46 (1995).
5. Kani, I.M. "A theoretical and experimental investigation of the collapse of shallow reticulated domes", Ph.D, Thesis, Department of Engineering, Cambridge University, (1986).
6. Kani I.M. and McConnel R.E., "Single layer shallow lattice domes, general behavior and collapse", *Int. J. of Space Structures*, **3**(2), pp. 64-73 (1988).
7. Kani I.M. and McConnel R.E. "Collapse of shallow lattice domes", *J. Str. Eng. ASCE*, **113**(8), pp. 1806-1819 (1987).
8. Rothert, H. and Gebbeken, N. "On numerical results of reticulated shell buckling", *Int. J. of Space Structures*, **7**(4), pp. 299-320 (1992).
9. Borri, C. and Chiostrini, S. "Numerical approaches to the nonlinear stability analysis of single-layer reticulated and grid-shell structures", *Int. J. of Space Structures*, **7**(4), pp. 285-298 (1992).
10. Papadrakakis, M. "Nonlinear solution methods for shell and spatial structures", In *Nonlinear Analysis and Design of Shell and Spatial Structures*, (eds. Y. Hangai et al.), IASS Symp., Tokyo, 73-83, (Oct. 1993).
11. Koiter, W.T. "On the stability of elastic equilibrium", Ph.D, Thesis, Delft, (1945), NASA Tech. Trans. 833, (1967).
12. Suzuki, T.; Ogawa, T.; Ikarashi, K. "Elasto-plastic buckling analysis of rigidly jointed single layer reticulated domes with random initial Imperfections", *Int. J. of Space Structures*, **7**(4), pp. 265-274 (1992).
13. Murakami, M. and Heki, K. "On the analysis of elastic buckling of single layer latticed domes with regular hexagonal plan under gravity load", *In Spatial Structures at the Turn of the Millennium, IASS Symp., Copenhagen*, **3**, pp. 101-108, (1991).
14. Ueki, T. and Kato, S.; Kubodera, I. and Mukaiyama, Y. "Study on the elastic and elasto-plastic buckling behavior of single layered domes composed of members having axial and bending springs at the ends", *In Spatial Structures at the Turn of the Millennium, IASS Symp., Copenhagen*, **3**, pp. 93-100 (1991).
15. Han, Q.H. and Liu, X.L. "Ultimate bearing capacity of the welded hollow spherical joints in spatial reticulated structure", *Engineering Structures*, **26**(1), pp. 73-82, (2004).
16. Bathe, K.J. "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, (1982).
17. Lock, A.C. "The application of finite elements to linear and nonlinear static and dynamic analysis of shallow structures", Ph.D. Thesis, Department of Civil and

- Structural Engineering, Univ. College, Cordiff, U.K. (1971).
18. Crisfield, M.A. "A fast incremental/iterative solution that handles snap-through", *Computers and Structures*, **12**, pp. 55-62 (1980).
 19. Riks, E. "Some computational aspects of stability analysis of nonlinear structures", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **47**, pp. 219-250 (1984).
 20. Gourlay, AR.; Watson, G.A. "Computational methods for matrix eigenproblems", Unwin Brothers limited, (1973).
 21. Kani, I.M. and Heidari, A. "Collapse and post-collapse of shallow lattice domes", *In Proceedings of the 7 th International Congress on Civil Engineering*, Tarbiat Modarres University, Tehran, **1**, (20) (2006).
 22. Kani, I.M. and Heidari, A. "Automatic two-stage calculation of bifurcation path of perfect shallow reticulated domes", *J. Str. Eng. ASCE*, **133**(2), pp. 185-194 (Feb. 2007)

