مهندسی مکانیک شریف، (بهار ۱۳۹۳)
دوره‌ی ۳۰-۲، شماره‌ی ۱، ص. ۱۱-۱۷

Original Article

تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌یی هدف‌مند تحت بارگذاری محوری با روش بی‌شبکه‌ی محلی پتروف گلرکین براساس نظریه‌ی پوسته‌ی فلوگه

آزاده ارژنگ‌پی (دانشجوی دکتری)
رضا انصاری* (استادیار)
منصور درویزه (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

در این نوشتار روش بی شبکه‌ی محلی پتروف گلرکین MLPG [۱] برای تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌یی هدف‌مند تحت بارگذاری محوری بررسی شده است. در این تحلیل معادلات میدان جابه‌جایی برمبنای نظریه‌ی فلوگه استخراج شده و پوسته متشکل از ترکیب پیوسته‌ی سرامیک و فلز فرض شده است. بنابراین مشخصات مکانیکی ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی پوسته‌ی استوانه‌یی، مطابق با توزیع کسر حجمی توانی در راستای ضخامت تغییر می‌کند. معادلات پایداری حاکم بر پوسته به‌صورت عددی با روش MLPG حل شده است. بدین‌منظور، فرم جدیدی از تابع تغییر طبق یک روش شبه معکوس در نظرگرفته شده که منجر به دست‌یابی ماتریس‌های سفتی شده و در نهایت بارهای بحرانی در شرایط مرزی مختلف محاسبه شده‌اند. نتایج حاصل از مطالعه‌ی تغییرات کسرهای حجمی، مشخصات هندسی پوسته، و شرایط تکیه‌گاهی مختلف به‌خوبی بیان‌گر همگرایی و دقت بالا در روش مورد استفاده است.

واژگان کلیدی: روش بی شبکه‌ی محلی پتروف گلرکین، کمانش محوری، پوسته‌های استوانه‌یی، نظریه‌ی فلوگه، مواد هدف‌مند.

azadeh.arjangpay@gmail.com
r_ansari@guilan.ac.ir
darvizeh@guilan.ac.ir

۱. مقدمه

اخیراً روش‌های بی شبکه در بین روش‌های عددی به‌دلیل انعطاف‌پذیری بیشتر برای حل مسائل مکانیک جامدات با شرایط مرزی مختلف بسیار مورد توجه قرارگرفته است.[۱] در این میان، روش MLPG به‌دلیل این‌که برخلاف سایر روش‌ها از هیچ نوع المانی به‌صورت آشکار یا پنهان استفاده نمی‌کند، در بین روش‌های بدون شبکه جایگاه ویژه‌یی دارد. اساس این روش فرم ضعیف محلی و درون‌یابی است و در تحلیل انجام‌شده از تقریب حداقل مربعات متحرک MLS[۲] به‌عنوان تابع درون‌یاب استفاده شده است. با توجه به کاربرد توابع آزمون مختلف در روش باقی‌مانده‌ی وزنی، روش بی‌شبکه‌ی یادشده به شش دسته ــ از MLPG۱ تا MLPG۶ ــ تقسیم شده است.[۲و۳]

پوسته‌ی استوانه‌یی متشکل از مواد هدف‌مند FGM[۳] کامپوزیتی با ریزساختار ناهمگن است که خواص مکانیکی آنها به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. این مواد اولین بار در سال ۱۹۸۴ توسط دانشمندان علم مواد در ژاپن معرفی شد.[۴و۵] نوع رایج آن ترکیب پیوسته‌یی از سرامیک و فلز است که در آن تغییر فلز و سرامیک از یک سطح به سطح دیگر کاملاً پیوسته است، به‌گونه‌یی که یک سطح از جنس سرامیک خالص و یک سطح فلز خالص است و بین دو سطح ترکیب پیوسته‌یی از هردو است.

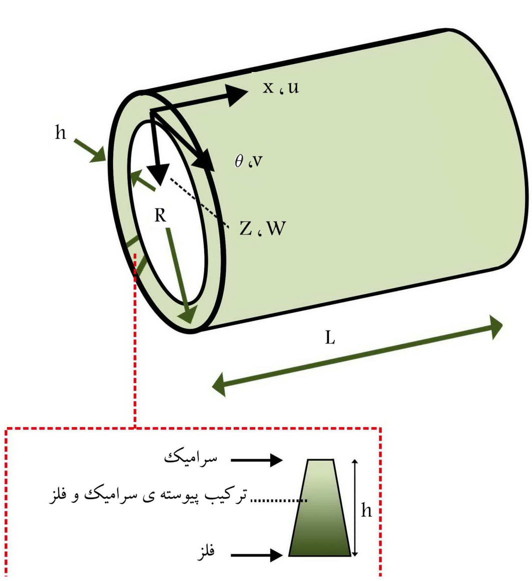
در این مقاله کمانش کشسان پوسته‌های استوانه‌یی FGM تحت بارگذاری محوری در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرارگرفته است. با توجه به این که کمانش در فازکشسان فقط در پوسته‌های خیلی نازک اتفاق می‌افتد، از نظریه‌ی کلاسیک فلوگه استفاده شده است. معادلات حاکم به‌صورت عددی حل شده‌اند تا بار بحرانی کمانش تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد نظر به دست آید.

۲. معادلات پوسته‌ی استوانه‌یی

پوسته‌ی استوانه‌یی جدارنازکی به‌طول L، ضخامت h و شعاع متوسط R (شعاع پیش از تغییر شکل) چنان در نظرگرفته می‌شود که $h << R$. سطح میانی استوانه همانند شکل ۱ به دستگاه مختصات استوانه‌یی θ, x ارجاع داده شده و فاصله از سطح میانی با مختصات z اندازه‌گیری می‌شود. براساس فرض‌های اولیه، پوسته‌ی جداره نازک و کرنش‌ها کوچک است؛ همچنین مقطع مسطح که در ابتدا عمود بر

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۰/۱۱/۱۷، اصلاحیه ۱۳۹۱/۸/۷، پذیرش ۱۳۹۱/۱۲/۱.



شکل ۱. سیستم مختصات و هندسه‌ی پوسته.

سطح میانی بوده، پس از تغییر شکل نیز مسطح و همچنان عمود بر سطح میانی تغییر شکل یافته، باقی می‌ماند.

با استفاده از بسط تیلور، براساس نظریه‌ی مرتبه‌ی اول برشی مؤلفه‌های تغییر مکان سه‌بعدی u_x, u_θ, u_z در جهات x، θ و z عبارت خواهد بود از:

$$
\begin{aligned}
u_x(x,\theta,z) &= u(x,\theta) - z\frac{\partial w}{\partial x}(x,\theta)\\
u_\theta(x,\theta,z) &= v(x,\theta) - z\frac{\partial w}{\partial \theta}(x,\theta)\\
u_z(x,\theta,z) &= w(x,\theta)
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در آن w, v, u تغییر مکان‌های سطح مرجع‌اند. معادلات حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌یی برمبنای نظریه‌ی فلوگه و برحسب نیروها و ممان‌های منتجه چنین تعریف می‌شوند:[۶]

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = P\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
&\frac{1}{R}\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} = P\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\
&\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x\partial\theta} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} = P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
\end{aligned}
\tag{۲}
$$

که در آن P بار محوری اعمالی است. نیروها و ممان‌های منتجه و همچنین ماتریس D نیز مطابق رابطه‌های ۳ و ۴ تعریف می‌شود:

$$
\begin{bmatrix} N_x\\ N_\theta\\ N_{x\theta}\\ M_x\\ M_\theta\\ M_{x\theta}\end{bmatrix} = [D]\begin{bmatrix} \varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_{x\theta}\\ k_x\\ k_\theta\\ k_{x\theta}\end{bmatrix}
\tag{۳}
$$

$$
[D] = \begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0\\
A_{12} & A_{21} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0\\
0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0\\
B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0\\
B_{12} & B_{12} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66}
\end{bmatrix}
\tag{۴}
$$

درایه‌های ماتریس فوق برای یک پوسته‌ی استوانه‌یی FGM عبارت خواهد بود از:[۷]

$$
(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2)dz
\tag{۵}
$$

Q_{ij}ها نیز چنین تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2}\\
Q_{12} &= \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu(z)^2}\\
Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

کرنش‌ها و انحناها در سطح میانی (تغییر شکل‌ها) در پوسته‌های استوانه‌یی طبق رابطه‌ی ۷ بیان می‌شود:

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_{x\theta}\\ k_x\\ k_\theta\\ k_{x\theta}\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{1}{R}\\
\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\
0 & 0 & \frac{-\partial^2}{\partial x^2}\\
0 & \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{-1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\
0 & \frac{2}{R}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{-2}{R}\frac{\partial}{\partial x\partial\theta}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u\\ v\\ w\end{bmatrix}
\tag{۷}
$$

۳. مواد هدف‌مند (FGM)

FGMها مواد کامپوزیتی هستند که به‌لحاظ میکروسکوپی غیرهمگن‌اند و خصوصیات مکانیکی آنها به‌طور محسوس و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌یابد. این امر با تغییر ترکیب ماده‌ی FGM ــ ناشی از تغییر پیوسته در کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده ــ رخ می‌دهد. مواد FGM به‌ویژه در محیط‌های با گرادیان دمایی بالا کاربرد دارند و عموماً از ترکیب یک سرامیک (با قابلیت‌های خاص در دماهای بالا) و یک فلز (با خواص مکانیکی مطلوب) ساخته می‌شوند. پوسته‌یی از ترکیب پیوسته‌ی سرامیک و فلز در نظر گرفته شده (شکل ۱)، که خواص مکانیکی آن با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌یی در جهت ضخامت دارد. به این صورت که:

$$
\begin{aligned}
E(z) &= E_m + E_{cm}V_f(z), E_{cm} = E_c - E_m\\
\nu(z) &= \nu_m + \nu_{cm}V_f(z), \nu_{cm} = \nu_c - \nu_m\\
\rho(z) &= \rho_m + \rho_{cm}V_f(z), \rho_{cm} = \rho_c - \rho_m
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

در روابط ۸ اندیس‌های m و c نشانگر خواص مربوط به فلز و سرامیک‌اند و $V_f(z)$ تابع توزیع کسر حجمی توانی است که چنین تعریف می‌شود:

$$
V_f(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^N
\tag{۹}
$$

جدول ۱. خواص مکانیکی مواد تشکیل‌دهنده‌ی پوسته‌ی **FGM**.

	فولاد بدون زنگ		دی اکسید زیرکونیوم	
	$\boldsymbol{E}$ $(\mathrm{N/m^2})$	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{E}$ $(\mathrm{N/m^2})$	$\boldsymbol{v}$
P_{-1}	۰	۰	۰	۰
P_0	$۲۰۱٫۰۴\times۱۰^{۹}$	۰٫۳۲۶۲	$۲۴۴٫۲۷\times۱۰^{۹}$	۰٫۲۸۸
P_1	$۳٫۰۸\times۱۰^{-۴}$	-۲×۱۰^{-۴}	$۱٫-۳۷\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۱۳\times۱۰^{-۴}$
P_2	$-۶٫۵۳\times۱۰^{-۷}$	$۳٫۸\times۱۰^{-۷}$	$۱٫۲۱\times۱۰^{-۶}$	۰
P_3	۰	۰	-۳٫۸۶	۰
ρ	۸۱۶۶ $(\mathrm{Kgm^3})$		۵۷۰۰ $(\mathrm{Kgm^3})$	

مقدار N نشان‌دهنده‌ی تغییرات مواد در راستای ضخامت است. به‌عنوان مثال $N=0$ یا $N=\infty$ نشان‌دهنده‌ی پوسته‌ی ایزوتروپیک ساخته شده از سرامیک یا فلز است. مواد هدف‌مند تحمل حرارتی بالایی دارند و نمی‌توان از ارتباط بین دما و خواص مکانیکی صرف نظر کرد. P_i به‌عنوان خاصیت مکانیکی ماده به‌صورت تابعی از دما بیان خواهد شد:[۸]

$$P_i = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \qquad (10)$$

خواص مکانیکی مواد تشکیل‌دهنده‌ی یکی از انواع مواد هدف‌مند در جدول ۱ ارائه شده است.[۹] (دما برحسب کلوین است).

۴. تقریب حداقل مربعات متحرک و روش MLPG

در حالت کلی هر روش بدون شبکه با استفاده از یک درون‌یاب یا تقریب محلی، نشان‌گر تابع امتحان با مقادیر مجازی از متغیرهای مجهول در تعدادی از گره‌های تصادفی در هر زیر دامنه است. در این میان تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) دقت بسیار بالایی دارد و به‌راحتی برای مسائل n بعدی قابل استفاده است.

اگر Ω_x دامنه‌ی تعریف تقریب برای تابع میدان جابه‌جایی در گره x باشد که روی دامنه‌ی کلی مسئله واقع شده است، به‌منظور تقریب‌زدن توزیع تابع v در Ω_x برای تعداد گره‌هایی (x_I) که در این زیردامنه واقع شده‌اند، MLS به جای v، $v^h(x)$ را تعریف میکند:

$$v^h(x) = \sum_{I=1}^{m} q_I(x) b_I(x) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) \qquad (11)$$

که در آن $\mathbf{q}^T(\mathbf{x})$ شامل پایه‌های تک‌جمله‌یی و m تعداد توابع پایه، و همچنین $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ برداری شامل ضرایب مجهول هستند. برای مثال در مسائل یک‌بعدی $\mathbf{q}^T(\mathbf{x})$ ممکن است مطابق رابطه‌ی ۱۲ باشد:

$$\mathbf{q}^T = \left[1, x, x^2, x^3\right], m = 4 \qquad (12)$$

بردار $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ با مینی‌مایزکردن نرم L_2، چنین به‌دست می‌آید:

$$\Gamma = \sum_{I=1}^{n} \omega(\mathbf{x}-\mathbf{x_I})(\mathbf{q}^T(\mathbf{x_I})\mathbf{b}(\mathbf{x}) - v_I)^2 \qquad (13)$$

که در آن $\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)$ یا $\omega(\mathbf{x_I})$ تابع وزن نسبت به گره Iام است که همواره برای تمام xهای واقع در Ω_x خواهیم داشت: $\omega(\mathbf{x_I}) > 0$. n تعداد گره‌های موجود در زیردامنه‌ی مذکور و v_I مقادیر گره‌یی هستند. کمینه‌کردن Γ منجر به رابطه‌ی خطی ۱۴ خواهد شد:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{v} \qquad (14)$$

که در آن:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \omega(\mathbf{x}-\mathbf{x_I})\mathbf{q}(\mathbf{x_I})\mathbf{q}^T(\mathbf{x_I}) \qquad (15)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = [\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\mathbf{q}(\mathbf{x}_1), ..., \omega(\mathbf{x}-\mathbf{x_n})\mathbf{q}(\mathbf{x_n})] \qquad (16)$$

پس با محاسبه‌ی $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ از رابطه‌ی ۱۴ و جایگذاری آن در رابطه‌ی ۱۱ معادله‌ی ۱۷ به‌دست خواهد آمد:

$$v^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} \mathrm{N}_I(\mathbf{x}) v_I \qquad (17)$$

که در آن تابع شکل $\mathrm{N}_I(\mathbf{x})$ عبارت است از:

$$\mathrm{N}_I(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{q_I}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}-\mathbf{x_I}) \qquad (18)$$

توابع وزن نقش مهمی در روش‌های بدون شبکه ایفا می‌کنند. در این مقاله تابع اسپیلاین درجه ۳ به‌عنوان تابع وزن در نظر گرفته شده که تابعی از d_w یا شعاع دامنه‌ی تعریف شده برای تقریب است:

$$\omega(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3, & s \le \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3, & \frac{1}{2} < s \le 1, \quad s = \frac{|x-x_I|}{d_w} \\ 0, & s > 1 \end{cases} \qquad (19)$$

در روش بدون شبکه‌ی محلی پتروف گلرکین معمولاً برای رسیدن به فرم ضعیف از روش باقی‌مانده‌ی وزنی استفاده می‌شود. در صورتی که تابع آزمون به‌کار گرفته شده مشابه تابع میدان باشد، روش به‌صورت MLPG۶ یا روش بی‌شبکه‌ی محلی گلرکین خواهد بود.

۵. حل معادلات میدان

در این نوشتار در فرمول‌بندی روش بی‌شبکه‌ی پتروف گلرکین به جای استفاده از روش باقی‌مانده‌ی وزنی از فرم تغییرات در هر زیردامنه استفاده شده است. فرم تغییرات در زیردامنه حول هر گره انتگرال‌گیری می‌شود. همچنین فرم تغییرات معادلات فلوگه برحسب جابه‌جایی‌ها، مطابق رابطه‌ی ۲۰ بیان خواهد شد:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_K(u,v,w) + \Pi_{K_g}(u,v,w) \\ \Pi_K(u,v,w) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_s} \left(\left[A_{11}u_{,x} + \frac{1}{R}A_{12}(v_{,\theta}+w)\right] u_{,x} \right. \\ &\quad + \left[A_{12}u_{,x} + \frac{1}{R}A_{22}(v_{,\theta}+w)\right]\frac{1}{R}(v_{,\theta}+w) \\ &\quad + A_{66}\left(\frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x}\right)^2 + (D_{11}w_{,xx} - \frac{D_{12}}{R^2}w_{,\theta\theta})w_{,xx} \\ &\quad \left. + \frac{1}{R}[D_{12}w_{,xx} - \frac{D_{22}}{R^2}w_{,\theta\theta}]\frac{1}{R^2}w_{,\theta\theta} + D_{66}(\frac{1}{R^2}w_{,x\theta})^2 \right) d\Omega_s \\ \Pi_{K_g}(u,v,w) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_s} P\left((u_{,x})^2 + (v_{,x})^2 + (w_{,x})^2\right) d\Omega_s \end{aligned} \qquad (20)$$

با اعمال روش جداسازی، متغیرهای میدان برای یک پوسته‌ی استوانه‌یی را می‌توان به‌صورت توابعی از مدهای محیطی و محوری در نظر گرفت. یعنی می‌توان نشان داد که برای هر مد محیطی n، مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی به‌صورت معادلات ۲۱ قابل تعریف‌اند:

$$u(x,\theta) = U(x)\cos(n\theta)$$
$$v(x,\theta) = V(x)\sin(n\theta)$$
$$w(x,\theta) = W(x)\cos(n\theta) \qquad (۲۱)$$

که در آن مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در سمت راست تساوی با حروف بزرگ، توابعی از مدهای محوری‌اند و n شماره‌ی مد محیطی است. با به‌کارگیری روش جداسازی فوق و جایگذاری آنها در فرم تغییرات معادلات پوسته، رابطه‌ی ۲۲ به‌دست خواهد آمد:

$$\Pi = \frac{۱}{۲}\pi R \int\int_{\Omega_s} (\mathbf{B^T D B} + \mathbf{G^T I G}) dx d\theta \qquad (۲۲)$$

و سیستم معادلات عبارت خواهد بود از:

$$([\mathbf{K}] - P_{cr}[\mathbf{K_g}])\{\mathbf{X}\} = ۰ \qquad (۲۳)$$

بردار $\mathbf{X}$ برداری شامل جابه‌جایی گره‌هاست و چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T, w = \begin{bmatrix} w_w & w_\theta \end{bmatrix}^T \qquad (۲۴)$$

ماتریس سفتی $[\mathbf{K}]$ و ماتریس سفتی هندسی $[\mathbf{K_g}]$ نیز عبارت‌اند از:

$$[\mathbf{K}] = \frac{۱}{۲}\pi R \int\int_{\Omega_s} (\mathbf{B^T D B}) dx d\theta \qquad (۲۵)$$

$$[\mathbf{K_g}] = \frac{۱}{۲}\pi R \int\int_{\Omega_s} (\mathbf{G^T I G}) dx d\theta \qquad (۲۶)$$

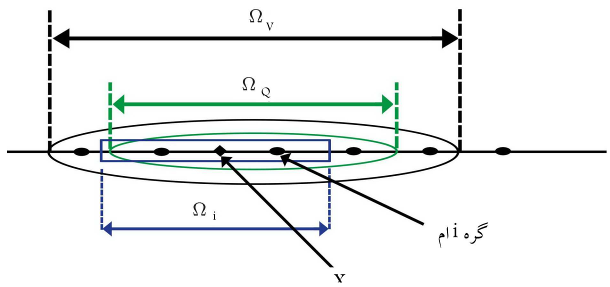
ماتریس D طبق معادله‌ی ۴ بیان می‌شود و سایر ماتریس‌ها به‌صورت معادلات ۲۷ و ۲۸ قابل تعریف‌اند:

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{I,x} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{n}{R}N_I & \frac{۱}{R}N_I^w & \frac{۱}{R}N_I^\theta \\ -\frac{n}{R}N_I & N_{I,x} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -N_{I,xx}^w & N_{I,xx}^\theta \\ ۰ & \frac{n}{R^۲}N_I & \frac{n^۲}{R^۲}N_I^w & \frac{n^۲}{R^۲}N_I^\theta \\ ۰ & \frac{۲}{R}N_{I,x} & \frac{۲n}{R}N_{I,x}^w & \frac{۲n}{R}N_{I,x}^\theta \end{bmatrix} \qquad (۲۷)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} N_{I,x} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & N_{I,x} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & N_{I,x}^x & N_{I,x}^\theta \end{bmatrix} \qquad (۲۸)$$

که در آنها N_I همان تابع شکل MLS، N_I^w و N_I^θ توابع شکل تعمیم‌یافته[۴]، n شماره مد محیطی و I ماتریس همانی هستند. با جایگذاری ماتریس‌های فوق، حل یک مسئله مقدار ویژه (معادله‌ی ۲۳) به‌صورت یک‌بعدی، منجر به یافتن بارهای بحرانی کمانشی خواهد شد.

برای حل معادلات ۲۵ و ۲۶ از روش انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود، که در این نوشتار تربیع گاوسی به‌کارگرفته شده است. برای هر گره x_i به یک دامنه‌ی انتگرال‌گیری برای به‌کارگیری تربیع گاوسی نیاز است، و در هر نقطه‌ی گاوسی (x_Q) دامنه‌ی درون‌یابی مشخص می‌شود (شکل ۲). در روش به‌کار برده شده دامنه‌ی انتگرال‌گیری و دامنه‌ی تابع آزمون یکسان‌اند.



شکل ۲. دامنه‌ی تابع آزمون Ω_v، دامنه‌ی انتگرال‌گیری Ω_Q برای گره iام،دامنه درون‌یابی Ω_i برای نقطه گاوسی x_Q.

۶. شرایط مرزی

در شرایط مختلف، بسته به این که انتهای پوسته به‌صورت تکیه‌گاه ساده یا مفصلی، بسته یا گیردار، و آزاد باشد روابط ۲۹ تا ۳۱ برقرار است:

دو انتها ساده:

$$v = w = M_{xx} = N_{xx} = ۰, at: x = ۰, x = L \qquad (۲۹)$$

دو انتها گیردار:

$$u = v = w = w_{,x} = ۰, at: x = ۰, x = L \qquad (۳۰)$$

در $x = ۰$ بسته و انتهای دیگر آزاد:

$$u = v = w = w_{,x} = ۰, at: x = ۰$$
$$N_{xx} = M_{xx} = N_{x\theta} + M_{x\theta} = M_{xx,x} + M_{x\theta,x} = ۰,$$
$$at: x = L \qquad (۳۱)$$

۷. بحث و جمع‌بندی

خواص مؤثر ماده (P_i)، نظیر مدول یانگ (E_i) یا ضریب انبساط گرمایی (α_i)، برای لایه‌ی FGM به‌صورت تابعی غیر خطی از دما در نظر گرفته شده است. چنان که پیش‌تر اشاره شد مواد FGM تحمل حرارتی بالایی دارند و نمی‌توان از ارتباط بین دما و خواص مکانیکی آن صرف‌نظر کرد. مقادیر استاندارد مدول یانگ، چگالی و ضریب پواسون برای پوسته‌یی متشکل از فولاد زنگ‌نزن و دی‌اکسید زیرکونیوم در جدول ۱ ارائه شده است.

در ادامه نمودارهایی به‌منظور پیش‌بینی بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌یی هدف‌مند در دمای اتاق ارائه شده است. دقت و سودمندی روش بی‌شبکه‌ی محلی پتروف گلرکین در تحلیل کمانشِ پوسته‌های استوانه‌یی تحت بارگذاری محوری، با مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل دقیق آن بررسی شده است. قابل ذکر است که در

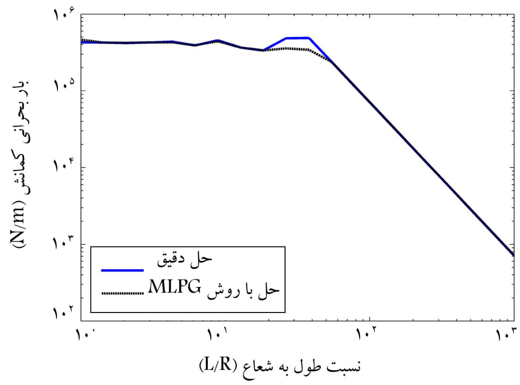
شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده، پاسخ زیر در معادلات دیفرانسیل ۲ صدق می‌کند.

$$u(x,\theta)=\sum_{m,n=1}^{\infty}U_{mn}\cos(n\theta)\cos(\frac{m\pi}{l}x)$$
$$v(x,\theta)=\sum_{m,n=1}^{\infty}V_{mn}\sin(n\theta)\sin(\frac{m\pi}{l}x)$$
$$w(x,\theta)=\sum_{m,n=1}^{\infty}W_{mn}\cos(n\theta)\sin(\frac{m\pi}{l}x) \quad (۳۲)$$

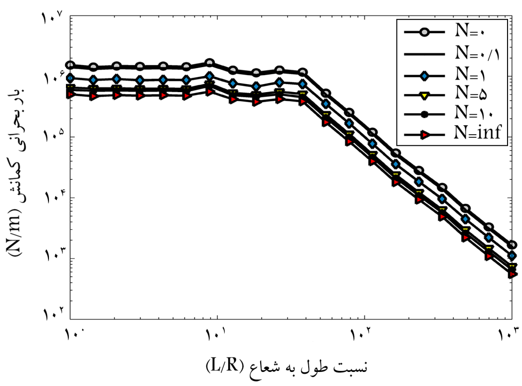
که در آن m و n شماره مدهای محوری و محیطی‌اند. بنابراین در شرایطی که دو انتها روی تکیه‌گاه ساده قرار گرفته‌اند، با جایگذاری روابط ۳۲ در معادلات حاکم، معادله‌ی ساده‌ی $\left([\mathbf{K}]-\tilde{N}_x[\mathbf{K_g}]\right)\{\mathbf{X}\}=0$ به دست خواهد آمد، که حل آن درواقع همان حل دقیق مسئله خواهد بود. درایه‌های ماتریس‌های سفتی و سفتی هندسی در پیوست ارائه شده است.

در شکل ۳ منحنی بار بحرانی برحسب نسبت طول به شعاع استوانه برای پوسته‌ی استوانه‌ییِ هدف‌مند با ضخامتی معادل ۰٫۰۱ شعاع استوانه و در دمای اتاق، طبق نظریه‌ی فلوگه با روش MLPG و همچنین منحنی حاصل از حل دقیق نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده از حل دقیق و روش عددی به‌خوبی با هم مطابقت دارند.

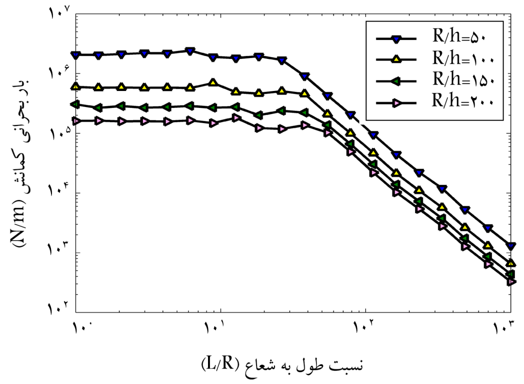
در شکل ۴ منحنی بار بحرانی برحسب نسبت طول به شعاع استوانه برای پوسته‌ی استوانه‌ییِ FGM، با ضخامتی معادل ۰٫۰۱R و در دمای اتاق، به‌ازای



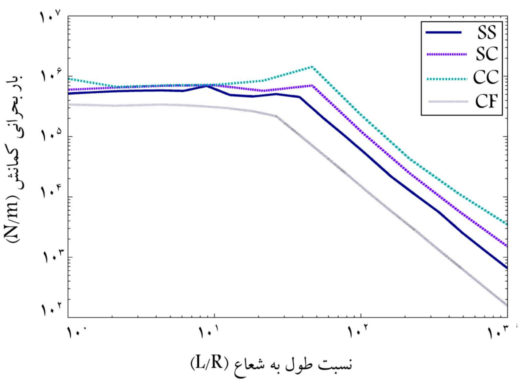
شکل ۳. منحنی بار بحرانی برحسب نسبت طول به شعاع استوانه برای پوسته‌ی استوانه‌یی FGM با روش MLPG و مقایسه با حل دقیق ($R/h=100$).



شکل ۴. منحنی بار بحرانی برحسب نسبت طول به شعاع استوانه برای پوسته‌ی استوانه‌یی FGM، به‌ازای مقادیر مختلف توان در رابطه‌ی قانون توازی.



شکل ۵. تأثیر ضخامت پوسته‌ی استوانه‌یی بر رفتار کمانش پوسته.



شکل ۶. تأثیر شرایط مرزی بر رفتار کمانش پوسته‌ی استوانه‌یی فولاد بدون زنگ /دی‌اکسید زیرکونیوم ($R/h=100$).

مقادیر مختلف توان در رابطه‌ی قانون توازی نشان داده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد پوسته‌ی فلزی (یعنی در حالت $N=\infty$) کم‌ترین بار کمانشی، و پوسته‌ی سرامیکی (یعنی در حالت $N=0$) بیشترین بار کمانشی بحرانی را دارد. این رفتار قابل انتظار است، چراکه سفتیِ پوسته‌ی فلزی در مقایسه با پوسته‌ی سرامیکی کم‌تر است. منحنی مربوط به دیگر مقادیر N هم در بین این دو محدوده، مابین فلز خالص و سرامیک خالص، قرار گرفته‌اند. این امر ناشی از تغییر خواص مکانیکی پوسته‌ی FGM از سرامیکی به فلزی است. در شکل ۵، تأثیر ضخامت پوسته استوانه‌یی بر منحنی‌های بار بحرانی برحسب نسبت طول به شعاع استوانه، برای پوسته‌ی استوانه‌یی فولاد بدون زنگ /دی‌اکسید زیرکونیوم با شاخص کسر حجمی $N=10$ ــ تحت بارگذاری محوری ــ نشان داده شده است. مقایسه‌ی مقادیر مختلف $R/h=50$ تا $R/h=200$ در این نمودار نشان می‌دهد که کاهش ضخامت یا افزایش نسبت R/h موجب کاهش قابل ملاحظه‌ی بارکمانشی خواهد شد. یعنی می‌توان گفت با کاهش ضخامت، مقاومت پوسته در برابر بار محوری کاهش می‌یابد.

تأثیر شرایط مرزی روی رفتار کمانش پوسته‌های استوانه‌یی فولاد بدون زنگ /دی‌اکسید زیرکونیوم با شاخص حجمی $N=10$ درحوزه‌ی وسیعی از نسبت طول به شعاع در شکل ۶ نشان داده شده است. چنان که مشخص است، بار کمانشی پوسته در شرایط مرزی دو سر گیردار در مقایسه با پوسته‌ی استوانه‌یی با شرایط دیگر بیشتر است. همچنین پوسته‌ی یک سر آزاد و یک سر گیردار دارای کم‌ترین بار کمانشی است.

نکته‌ی دیگری که می‌توان از این شکل دریافت، این است که به‌ازای مقادیر

خاصی از نسبت L/R، برای مثال در شرایط مرزی دو سر ساده تا حدوداً ۹۰، مقدار بار بحرانی کمانش مستقل از تأثیر پارامتر هندسی L/R است، ولی به‌ازای نسبت‌های بزرگ‌تر، بار بحرانی کمانش شدیداً تحت تأثیر پارامتر هندسی L/R قرار دارد.

۸. نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج به دست آمده به طور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که پارامترهای هندسی روی بار بحرانی کمانش پوسته اثر قابل توجهی دارند. کاهش ضخامت یا افزایش نسبت R/h موجب کاهش چشم‌گیر بار کمانشی خواهد شد. اثر شرایط مرزی روی بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌یی محسوس است. پوسته‌ی دارای شرایط مرزی دو سر گیردار بیشترین بار کمانشی را نسبت به پوسته‌ی استوانه‌یی با شرایط دیگر دارد. نتایج به‌خوبی گواه بر دقت و سرعت بالا در روش بی‌شبکه‌ی محلی پتروف گلرکین (MLPG) است. از آنجا که این روش براساس روابط محلی پایه‌گذاری شده، پس می‌تواند تمامی روش‌های بی‌شبکه‌ی دیگر را که بر روابط کلی پایه‌گذاری شده‌اند، در برگیرد.

یکی دیگر از مزایای روش MLPG بی‌نیازی از سرهم کردن ماتریس سفتی المان‌ها برای تشکیل ماتریس سفتی کل ــ همانند روش المان محدود ــ است. با تغییر کسر حجمی (N) خواص پوسته‌ی استوانه‌یی از سرامیک به فلز تغییر می‌کند، به‌گونه‌یی که یک سطح از جنس سرامیک خالص و یک سطح فلز خالص، و بین دو سطح ترکیب پیوسته‌یی از هر دو جنس است. یکی از مزایای مواد FGM، در مقایسه با مواد کامپوزیت لایه‌یی، عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌هاست.

پانوشت‌ها

1. Meshless Local Petrov-Galerkin
2. Moving least squares
3. Functionally graded material
4. generalized moving least squares

منابع (References)

1. Liew, K.M., Zhao, X, and Ferreira, A.J.M. "A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells", *Composite Structures*, **93**, pp. 2031-2041 (2011).
2. Atluri, S.N. and Shen, S.P. "The meshless local petrov-galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element methods", *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, **3**(1), pp. 11-51 (2002).
3. Atluri, S. and Zhu, T. "A new meshless local petrov galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Comput Mech*, **22**, pp. 117-27 (1998).
4. J.B. Holt,"Functionally Gradient Materials", Michigan: American Ceramic Society (1993).
5. Koizumi, M. "The concept of FGM ceramic transactions", *Funct Gradient Mater,* **34**, pp. 3-10 (1990).
6. Jones, I.A. "Flugge shell theory and solution for orthotropic cylindrical shells under pinching loads", *Composite Structures*, **42**(1), pp. 53-72 (1998).
7. Naeem, M.N. "Prediction of natural frequencies for functionally graded cylindrical shells", PhD thesis, UMIST, UK (2004).
8. Touloukian, Y.S., *Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials*, New York, Macmillian (2004).
9. Ansari, R. and Darvizeh M. "Prediction of dynamic behavior of FGM shells under arbitrary boundary conditions", *Composite Structures*, **85**, pp. 284-292 (2008).

پیوست

در حل دقیق، ماتریس‌های $\mathbf{K}$ و $\mathbf{K_g}$ که از جایگذاری معادلات ۳۲ در معادلات حاکم به‌دست می‌آیند عبارت‌اند از:

ماتریس سفتی هندسی ($\mathbf{K_g}$):

$$[\mathbf{K_g}] = \begin{bmatrix} -(\frac{m\pi}{L})^2 & 0 & 0 \\ 0 & -(\frac{m\pi}{L})^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\frac{m\pi}{L})^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سفتی $(\mathbf{K})$:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & \mathbf{L}_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = -(A_{11} + \frac{B_{11}}{R})(\frac{m\pi}{L})^{2} - (\frac{n^{2}}{R^{2}})(A_{66} - \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{R^{2}})$$

$$L_{12} = \frac{n}{R}(A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12}}{R} + \frac{B_{66}}{R})(\frac{m\pi}{L})$$

$$L_{13} = (B_{11} + \frac{D_{11}}{R})(\frac{m\pi}{L})^{3} + \frac{1}{R}(A_{12} + \frac{n^{2}}{R}B_{12} + \frac{2n^{2}}{R}B_{66} - \frac{n^{2}}{R^{2}}D_{66})(\frac{m\pi}{L})$$

$$L_{21} = -L_{12}$$

$$L_{22} = -(A_{66} + \frac{3}{R}B_{66} + \frac{3}{R^{2}}D_{66})(\frac{m\pi}{L})^{2} - (\frac{n^{2}}{R^{2}})(A_{22} + \frac{n^{2}}{R}B_{22})$$

$$L_{23} = -(\frac{n}{R^{2}})(A_{22} + \frac{n^{2}}{R}B_{22}) + \frac{n}{R}(B_{12} + 2B_{66} + \frac{D_{12}}{R} + \frac{3}{R}D_{66})$$

$$L_{31} = L_{13}$$

$$L_{32} = -L_{23}$$

$$L_{33} = D_{11}(\frac{m\pi}{L})^{4} + \frac{2}{R}(B_{12} + \frac{n^{2}}{R}D_{12} + \frac{2n^{2}}{R}D_{66})(\frac{m\pi}{L})^{2} + \frac{1}{R^{2}}(A_{22} + (\frac{2n^{2}-1}{R})B_{22} + (\frac{n^{2}-1}{R})^{2}D_{22})$$