

حل دقیق میدان صوتی نامتقارن تابش یافته از کره کشسان ضخیم مستغرق

سیدحسام موسوی اکبرزاده* (استادیار)
گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد اسلامشهر

سیده محمد هاشمی نژاد (استاد)
دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

یاسر میرزایی (استادیار)
گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دماوند

به منظور بررسی خصوصیات تابش صوتی هارمونیک نامتقارن از کره کشسان ضخیم، پر شده از سیال ایده آل و مستغرق در سیال ایده آل دیگر و تحت تحریک هارمونیک دلخواه روی سطح داخلی و/یا خارجی، از روش نظریه ی کشسانی سه بعدی و نیز روش جداسازی متغیرها بهره گرفته شده است. با به کارگیری تبدیلات لژاندر و فوریه در دو جهت محیطی حول کره به فرم کلی پاسخ در حوزه ی فرکانس رسیده و با اعمال شرایط مرزی و حل دستگاه معادلات خطی، حل دقیقی برای میدان های فشار سیال داخل و خارج، و نیز جابه جایی میدان جامد کشسان حاصل می شود. به منظور صحت یابی، نتایج حاصله با اطلاعات ارائه شده توسط دیگر محققین مقایسه شد. نتایج تحلیلی برای چندین مثال عددی بیان شده و تأثیر نوع و فرکانس تحریک روی فشار برای سیال خارج، الگوی فشار دوردست و قدرت صوتی حاصله مورد بحث قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: تقابل سازه-سیال، پوسته ی کروی، ضخامت متغیر، تابش آکوستیکی.

۱. مقدمه

بیش از نیم قرن است که مسائل مربوط به کنش و واکنش بین سازه ها و سیال به صورت وسیعی در صنایع مختلف - نظیر نفت، هوا و فضا، و دریا - مورد بررسی قرار گرفته است.^[۱-۳] این سازه ها در تجهیزات صنایع یادشده نقش کلیدی ایفا می کنند. لذا محققین بسیاری با به کارگیری نظریه های کلاسیک و درجات بالاتر پوسته های نازک، از فرضیات ساده کننده به منظور مطالعه ی رفتار و ابرو آکوستیک از پوسته های استوانه یی یا کروی نازک یا تا حدی ضخیم، تحت بارهای مکانیکی استفاده کرده اند.^[۴-۷] در اولین مطالعه ی اساسی در این زمینه، میدان جابه جایی پوسته های کروی و استوانه یی نامحدود تحت تأثیر نیروهای هارمونیک با استفاده از نظریه ی پوسته ی نازک محاسبه شد.^[۸] در ادامه ی این مطالعه، با استفاده از نظریه ی پوسته ی ضخیم (با لحاظ اینرسی های چرخشی و برشی) و چندجمله یی های لژاندر به عنوان یک مجموعه تابع پایه، ارتعاشات اجباری غیرچرخشی و همسانگرد یک پوسته ی کروی مستغرق تحت یک نیروی نقطه یی (با فرض تقارن محوری) مورد بررسی قرار گرفت.^[۹] تغییر مکان دینامیکی و فشار سیال از نتایج مورد بررسی در کار این محققین بوده و اثبات می شود که در فرکانس های پایین مودهای خمشی پوسته غالب اند.

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۳/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۲/۷/۱۳، پذیرش ۱۳۹۲/۷/۲۰.

mousavi@iaui.ac.ir
hashemi@iust.ac.ir
mirzaei@damavandiau.ac.ir

پژوهشگران با ترکیب یک رهیافت توزیع منبع برای محیط آکوستیکی و مدل سازی المان محدود پوسته، روشی برای ارزیابی جابه جایی و فشار سطحی روی یک پوسته ی کروی مستغرق در سیال ارائه کردند.^[۱۰] سپس با بهره گیری از مسئله ی تابش آکوستیکی از یک پوسته ی کروی مستغرق، به بحث درخصوص بازه اعتبار نتایج چند روش تقریبی در این حوزه پرداختند.^[۱۱] آنها نشان دادند که در فرکانس های میانی نزدیک به تشدید (رزونانس)، دقت این روش ها اندک است و استفاده از روش های دقیق الزامی است.

با استفاده از روش المان مرزی مزدوج کشسانی آکوستیکی، تابش و بازتابش صدا از اجسام کشسان با شکل دلخواه، که توسط یک پوسته ی توخالی کروی داخلی تحریک می شدند، مورد مطالعه قرار گرفت.^[۱۲] محققین دیگری نیز با استفاده از روش ماتریس انتقال و توابع گرین توانستند روشی برای برآورد تابش آکوستیکی از پوسته های پیچیده ی محتوی سازه های داخلی ارائه کنند.^[۱۳] با استفاده از بسط چندجمله یی های لژاندر نیز توان صوتی تابیده شده از یک پوسته ی کروی نازک مستغرق در سیال تحت دو بار مکانیکی حلقوی و با تقارن محوری محاسبه شد.^[۱۴] بعد از بررسی صورت گرفته ثابت شد که برای تولید بیشترین توان صوت استفاده از بارگذاری متمرکز بهترین روش است.

در ادامه ی مطالعات، به منظور برآورد ارتعاشات و تابش آکوستیکی از یک پوسته ی

مانده برای پوسته‌ی کروی مستغرق در سیال بی‌نهایت، تحت اثر برخورد موج تخت به دست آمد.^[۲۹]

محققین با استفاده از تبدیل لاپلاس روی زمان، بسط بردارهای ویژه در خلاف برای دینامیک سازه‌ی بی و فرمولاسیون انتگرال مرزی برای سیال، پاسخ‌گذاری دوبعدی از پوسته‌های مستغرق تحت تحریک آکوستیکی ضعیف با مکانیکی را مورد بررسی قرار داده‌اند.^[۳۰] اخیراً نیز با استفاده از نظریه‌ی کشسانی سه‌بعدی، به‌همراه روش حل ماتریس انتقال و روش فاز ثابت، پاسخ وایبروآکوستیک حالت پایدار از پوسته‌های FGM با ضخامت دلخواه و تحت تحرک هارمونیک بارهای دلخواه مکانیکی ارائه شده است.^[۳۱،۳۲] مطالعه‌ی یادشده به‌روشنی نشان می‌دهد که علی‌رغم کارهای قابل‌ذکری که در زمینه‌ی تقابل سازه-سیال از پوسته‌های کروی نازک وجود دارد، تحلیلی برای تابش آکوستیکی به‌صورت سه‌بعدی (نامتقارن) از پوسته‌های کروی با ضخامت پوسته‌ی غیریکنواخت تحت بارهای سطحی دلخواه، موجود نیست.

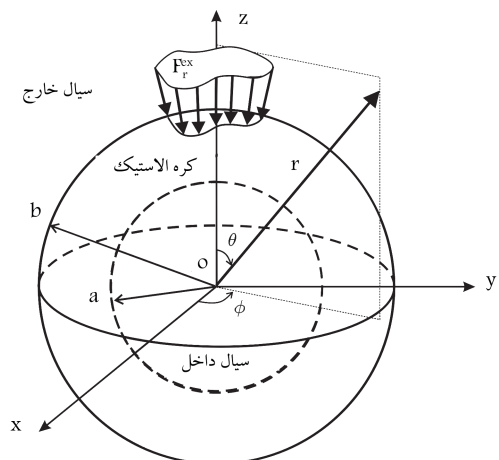
۲. معادلات حاکم

چنان‌که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، هندسه‌ی مسئله به‌گونه‌ی بی است که در آن یک کره کشسان توخالی پر شده از سیال تراکم‌پذیر و غیرلزج با چگالی ρ_{in} و سرعت صوت c_{in} ، مستغرق در سیال ایده‌آل دیگری با چگالی ρ_{ex} و سرعت صوت c_{ex} ، تحت تحریک هارمونیک دلخواه به‌صورت شعاعی و عرضی با فرکانس دایره‌ی ω در مرزهای داخلی $(F_{r,\theta,\phi}^{in})$ و/یا خارجی $(F_{r,\theta,\phi}^{ex})$ است. (توجه شود که به‌منظور سادگی در شکل ۱ فقط بارگذاری خارجی به‌صورت شعاعی نمایش داده شده است.) با فرض این که p^{in} و p^{ex} نشان‌گر فشار آکوستیکی در سیال داخل و خارج باشد، می‌توان معادله‌ی کلاسیک خطی موج را برای آنها مطابق رابطه‌ی ۱ نوشت:^[۳۳]

$$\nabla^2 p^j + k_j^2 p^j = 0, \quad (1)$$

که در آن:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$



شکل ۱. هندسه مسئله.

کروی مستغرق تحت یک بار همسانگرد، از روش اصلاح‌شده‌ی جداسازی مودال المان محدود/المان مرزی استفاده شد.^[۱۵] همچنین خطوط جریان انرژی تابیده و منعکس شده از یک پوسته‌ی کروی نازک تحت دو نوع بارگذاری -- یک نیروی داخلی و یک منبع صوت خارجی واقع در نزدیکی سطح داخلی پوسته -- مورد مطالعه قرار گرفت.^[۱۶] سپس تابش صوتی از یک پوسته‌ی کروی نازک تقویت‌شده با یک پوسته‌ی نازک دایره‌ی در داخل آن که با نیروی متمرکز هارمونیک تحریک می‌شود مورد بررسی قرار گرفت.^[۱۷] با استفاده از بسط مودال حاصل از روش المان محدود، تشعشع هارمونیک و همسانگرد آکوستیکی پوسته‌های کروی به‌واسطه‌ی نیروهای مکانیکی نیز مورد مطالعه قرار گرفت.^[۱۸] با ارائه‌ی یک الگوریتم عددی پایدار برای حل معادله‌ی موج در مختصات کروی، پاسخ مسائل تشعشع و بازتابش آکوستیکی از پوسته‌های کروی چندلایه در حوزه‌ی زمان و فرکانس مورد مطالعه قرار گرفت.^[۱۹] همچنین با استفاده از روش کشسانی سه‌بعدی برای یک کره با تقارن محوری و بهره‌گیری از تکنیک لژاندر، تشعشع آکوستیکی از یک پوسته‌ی کروی ضخیم تک‌لایه، ناشی از یک نیروی هارمونیک حلقوی همسانگرد داخلی مورد مطالعه قرار گرفت.^[۲۰] سرعت نرمال پوسته، فشار سیال روی سطح پوسته، فشار دوردست و ادیپتانس انتقال از نتایج مورد بررسی در این پژوهش هستند. بعد از بررسی به‌عمل آمده ثابت شد که تغییرات سرعت پوسته به‌شدت وابسته به ضخامت پوسته است اما فشار روی پوسته و فشار دوردست به‌شدت وابسته به مود جسم صلب انتقالی ($n = 1$) پوسته است؛ که در فرکانس‌های پایین‌تر این موضوع بیشتر نمایان می‌شود.

پژوهش‌گران با ارائه‌ی فرمولاسیون مربوط به نظریه‌ی مدهای تابشی، از آن (به‌عنوان نمونه) در بررسی خصوصیات دینامیکی و آکوستیکی پوسته‌های کروی با تحریک هارمونیک به‌صورت تقارن محوری بهره جستند.^[۲۱] روش ارائه‌شده توسط آنها مبتنی است بر استفاده از حساب تغییرات برای تقابل بین پوسته و سیال و نیز استفاده از سری ریتز برای مؤلفه‌های فشار سطحی و جابه‌جایی پوسته. محققین همچنین با استفاده از اصل تغییرات سطحی براساس بسط سری‌های ریتز توانستند نتایجی تحلیلی برای تابش و بازتابش اجسام مستغرق با اشکال نامناسب برای تحلیل با معادله‌ی هلمهولتز ارائه دهند. نویسندگان این رهیافت را برای حالت پوسته‌ی کشسان همسانگرد کروی که تحت تأثیر یک تحریک غیرهمسانگرد است بررسی کردند.^[۲۲] سپس با استفاده از حل مود نرمال ریلی، نظریه‌ی تابش رزونانسی را معرفی و تابش آکوستیکی از یک پوسته‌ی کروی مستغرق تحت تأثیر نیروی هارمونیک داخلی را مورد مطالعه قرار دادند.^[۲۳] برای ارتعاشات و تابش آکوستیکی هارمونیک از یک پوسته‌ی کروی نازک تقویت شده با یک ورق داخلی یک پاسخ نیمه‌تحلیلی ارائه شد.^[۲۴] همچنین با استفاده از توابع دلتای دیراک و سری‌های لژاندر یک پاسخ نیمه‌تحلیلی برای ارتعاشات و تابش آکوستیکی از پوسته‌ی دولایه‌ی کروی نازک مستغرق تقویت شده با چندین ورق داخلی ارائه شد.^[۲۵] برای پوسته‌ی کروی از نظریه‌ی فلاگ برای خمش پوسته‌ها استفاده شده و پوسته‌ی دایره‌ی داخلی نیز به‌صورت تنش صفحه‌ی مدل شده است. پارامترهای میدانی نیز با استفاده از بسط لژاندر ارائه شد و متعاقب آن فشار، توان صوت و سرعت متوسط پوسته مورد مطالعه قرار گرفت.^[۲۵] در راستای همین مطالعات، با به‌کارگیری فرمول‌بندی انتگرال بورتون-میبار در فضای زمان، روش المان مرزی برای مدل‌سازی تابش آکوستیکی گذرای خارجی از اجسام سه‌بعدی بسته با تقارن محوری -- نظیر پوسته‌های کروی مستغرق -- استفاده کرده‌اند.^[۲۶،۲۷] در مطالعه‌ی دیگر، حل تحلیلی دوقطبی گذرا بر پایه تبدیل لاپلاس کلاسیک برای میدان صوتی خارجی، ایجاد شده توسط حرکت مرزهای کروی متقارن گذرا، به دست آمد.^[۲۸] همچنین حل دقیقی بر پایه‌ی روش پتانسیل

با استفاده از روش جدایی متغیرها حل معادلات اسکالر هلمهولتز در دستگاه مختصات کروی مطابق دستگاه معادلات ۸ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, \phi, \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{nm} j_n(\alpha r) + b_{nm} y_n(\alpha r)] P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \\ \psi(r, \theta, \phi, \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [c_{nm} j_n(\beta r) + d_{nm} y_n(\beta r)] P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \\ \chi(r, \theta, \phi, \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [e_{nm} j_n(\beta r) + f_{nm} y_n(\beta r)] P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \\ p^{in}(r, \theta, \phi, \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n g_{nm} j_n(k_{in} r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \\ p^{ex}(r, \theta, \phi, \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n q_{nm} h_n^{(1)}(k_{ex} r) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \end{aligned} \quad (8)$$

y_n, j_n توابع بسل کروی مرتبه‌ی اول و دوم از درجه‌ی n ام، و $h_n^{(1)}$ تابع هنکل کروی مرتبه‌ی اول و از درجه‌ی n ام و P_n^m تابع لژاندر متناظر است. به کمک معادلات ۶ و ۷ نیز می‌توان روابط تنش و جابه‌جایی را به دست آورد.

۳. شرایط مرزی

به منظور تعیین ضرایب مجهول a_{nm} تا q_{nm} لازم است شرایط مرزی بین محیط جامد و سیال مد نظر قرار گیرد. به این ترتیب شرط پیوستگی بین جابه‌جایی شعاعی ذرات سیال با جابه‌جایی شعاعی پوسته، شرط پیوستگی فشار سیال و تنش نرمال پوسته به همراه پیوستگی تنش - برشی در مرزهای داخلی و خارجی کره با محیط سیال چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho_{in,ex} \omega^2 u_r(r=a, b; \theta; \phi; \omega) - \frac{\partial p^{in,ex}(r, \theta, \phi, \omega)}{\partial r} \Big|_{r=a,b} &= 0, \\ \sigma_{rr}(r=a, b; \theta; \phi; \omega) + F_r^{in,ex}(r=a, b; \theta; \phi; \omega) &+ p^{in,ex}(r=a, b; \theta; \phi; \omega) = 0, \\ \sigma_{r\theta}(r=a, b; \theta; \phi; \omega) + F_{\theta}^{in,ex}(r=a, b; \theta; \phi; \omega) &= 0, \\ \sigma_{r\phi}(r=a, b; \theta; \phi; \omega) + F_{\phi}^{in,ex}(r=a, b; \theta; \phi; \omega) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

با به کارگیری معادلات ۶ تا ۸ و استفاده از خاصیت تعامد کلاسیک برای هارمونیک‌های کروی، و مشتق‌های آنها نسبت به مختصه‌ی θ (معادله‌ی ۹) بعد از انجام محاسباتی، دو مجموعه‌ی مجزا برای موده‌های نصف‌النهاری $m=0$ و $m \neq 0$ برای هر یک از شرایط مرزی داخل و خارج به دست خواهد آمد که در اینجا فقط به معادلات

Δ^2 عملگر لاپلاس در دستگاه مختصات کروی است، و j اندیس هر یک از in یا ex ، و $k_j = \omega/c_j$ عدد موج آکوستیکی متناظر است. همچنین تابعیت زمانی هارمونیک $\exp(-i\omega t)$ در ادامه‌ی معادلات حذف شده است. بردار جابه‌جایی شعاعی سیال چنین استخراج می‌شود: [۲۳]

$$U_r^j = \frac{1}{\rho_j \omega^2} \frac{\partial p^j}{\partial r}. \quad (2)$$

با فرض این که ماده‌ی کشسان خطی، همگن و ایزوتروپیک باشد، میدان جابه‌جایی در غیاب نیروهای خارجی به شکل معادله‌ی کلاسیک ناپیر و با در نظر گرفتن شرایط مرزی مناسب نوشته می‌شود: [۲۴]

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (3)$$

که در آن ρ چگالی، λ و μ ثابت لامه‌اند. \mathbf{u} بردار تغییر مکان است که می‌توان آن را برحسب سه پتانسیل اسکالر φ ، ψ و χ بیان کرد: [۲۴]

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{L} + (\mathbf{M} + \mathbf{N}) \\ &= \nabla \varphi + [\nabla \times (\mathbf{e}_r \psi) + b \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_r \chi)], \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن \mathbf{e}_r بردار یک‌ه‌ی شعاعی و b شعاع خارجی کره است؛ پتانسیل‌های جابه‌جایی (φ, ψ, χ) نیز معادله‌ی هلمهولتز را ارضا می‌کنند. [۲۴]

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \alpha^2) \varphi &= 0, \\ (\nabla^2 + \beta^2) (\psi, \chi) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن، $\alpha^2 = \omega^2/c_p^2$ و $\beta^2 = \omega^2/c_s^2$ همچنین، $c_p^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ سرعت انتشار موج عمودی (انبساطی)، $c_s^2 = \mu/\rho$ سرعت انتشار موج برشی (چرخشی) در یک محیط بی‌نهایت است. حال با در نظر داشتن تجزیه‌ی ۴ و حل معادلات اسکالر هلمهولتز (رابطه‌ی ۵)، میدان تغییر مکان پوسته‌ی کروی را می‌توان چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(r, \theta, \phi, \omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n [a_{nm} \mathbf{L}_{mn}^{[1]}(r, \theta, \phi, \omega) + b_{nm} \mathbf{L}_{mn}^{[2]}(r, \theta, \phi, \omega) + c_{nm} \mathbf{M}_{mn}^{[1]}(r, \theta, \phi, \omega) + d_{nm} \mathbf{M}_{mn}^{[2]}(r, \theta, \phi, \omega) + e_{nm} \mathbf{N}_{mn}^{[1]}(r, \theta, \phi, \omega) + f_{nm} \mathbf{N}_{mn}^{[2]}(r, \theta, \phi, \omega)] \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن a_{nm} تا f_{nm} ضرایب نامعلوم مودال هستند و با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند. عبارات مناسب برای $\mathbf{L}_{mn}^{[i]}(r, \theta, \phi, \omega)$ ، $\mathbf{M}_{mn}^{[i]}(r, \theta, \phi, \omega)$ و $\mathbf{N}_{mn}^{[i]}(r, \theta, \phi, \omega)$ برای $(j, i = 1, 2)$ در پیوست بیان شده است. همچنین میدان تنش نیز برحسب بردار تغییر مکان بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla), \quad (7)$$

شرایط مرزی سطح داخل اشاره شده است.

$$e_{1^{\circ}}, e_{2^{\circ}}, \dots, e_{N^{\circ}}; f_{1^{\circ}}, f_{2^{\circ}}, \dots, f_{N^{\circ}}; \\ g_{\dots}, g_{1^{\circ}}, \dots, g_{N^{\circ}}; q_{\dots}, q_{1^{\circ}}, \dots, q_{N^{\circ}}]^T, \\ \mathbf{b}_{\circ} = \left[\begin{array}{l} \circ, \dots, \circ; F_{r, \dots}^{in}, F_{r, 1^{\circ}}^{in}, \dots, F_{r, N^{\circ}}^{in}; \\ F_{\theta, 1^{\circ}}^{in}, F_{\theta, 2^{\circ}}^{in}, \dots, F_{\theta, N^{\circ}}^{in}; F_{\phi, 1^{\circ}}^{in}, F_{\phi, 2^{\circ}}^{in}, \dots, F_{\phi, N^{\circ}}^{in}; \\ \circ, \dots, \circ; F_{r, \dots}^{ex}, F_{r, 1^{\circ}}^{ex}, \dots, F_{r, N^{\circ}}^{ex}; \\ F_{\theta, 1^{\circ}}^{ex}, F_{\theta, 2^{\circ}}^{ex}, \dots, F_{\theta, N^{\circ}}^{ex}; F_{\phi, 1^{\circ}}^{ex}, F_{\phi, 2^{\circ}}^{ex}, \dots, F_{\phi, N^{\circ}}^{ex} \end{array} \right]^T.$$

به طور مشابه برای مدهای $m \neq \circ$ برای $m = 1, 2, \dots, m + N, n = m, m + 1$ سیستم معادلات خطی $m \neq \circ$ به معادلات کوتاه شده ۱۳ خواهیم رسید.

$$\mathbf{A}_m \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_m,$$

$$\mathbf{x}_m = [a_{mm}, a_{(m+1)m}, \dots, a_{Nm}; b_{mm}, b_{(m+1)m}, \dots, b_{Nm}; \\ c_{mm}, c_{(m+1)m}, \dots, c_{Nm}; d_{mm}, d_{(m+1)m}, \dots, d_{Nm}; \\ e_{mm}, e_{(m+1)m}, \dots, e_{Nm}; f_{mm}, f_{(m+1)m}, \dots, f_{Nm}; \\ g_{mm}, g_{(m+1)m}, \dots, g_{Nm}; q_{mm}, q_{(m+1)m}, \dots, q_{Nm}]^T, \\ \mathbf{b}_m = \left[\begin{array}{l} \circ, \dots, \circ; F_{r, mm}^{in}, F_{r, (m+1)m}^{in}, \dots, F_{r, Nm}^{in}; \\ F_{\theta, mm}^{in}, F_{\theta, (m+1)m}^{in}, \dots, F_{\theta, Nm}^{in}; \\ F_{\phi, mm}^{in}, F_{\phi, (m+1)m}^{in}, \dots, F_{\phi, Nm}^{in}; \\ \circ, \dots, \circ; F_{r, mm}^{ex}, F_{r, (m+1)m}^{ex}, \dots, F_{r, Nm}^{ex}; \\ F_{\theta, mm}^{ex}, F_{\theta, (m+1)m}^{ex}, \dots, F_{\theta, Nm}^{ex}; \\ F_{\phi, mm}^{ex}, F_{\phi, (m+1)m}^{ex}, \dots, F_{\phi, Nm}^{ex} \end{array} \right]^T. \quad (13)$$

۴. بسط مودال نیروهای محرک و تعریف قدرت صوتی تابش یافته

در اینجا، ارائه‌ی تعریف برای بارگذاری کلی شعاعی و عرضی روی موقعیت دلخواه، بر سطوح خارجی یا داخلی کره توخالی -- که با نماد $F_{(r, \theta, \phi)}^{in}(\theta, \phi, \omega)$ و/یا $F_{(r, \theta, \phi)}^{ex}(\theta, \phi, \omega)$ نشان داده می‌شود -- ضرورت می‌یابد. این نیروها را می‌توان در مختصات کروی بسط داد:

$$F_{(r, \theta, \phi)}^{in, ex}(\theta, \phi, \omega) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_{(r, \theta, \phi), nm}^{in, ex}(\omega) Y_n^m(\theta, \phi), \quad (14)$$

که در آن $Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ تابع هارمونیک کروی [۲۵] است. مؤلفه‌های مودال بارهای شعاعی و عرضی مطابق رابطه‌ی ۱۵ تعریف می‌شوند:

$$F_{(r, \theta, \phi), nm}^j = \frac{2n+1}{4\pi(-1)^m} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_{(r, \theta, \phi)}^j(\theta, \phi, \omega) \\ Y_n^{-m}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi, \quad (15)$$

که در آن $(k = 1, 2; j = in, ex)$. در این نوشتار به منظور سادگی نتایج عددی از در نظر گرفتن بارهای عرضی صرف نظر شده و فقط دو نوع بارگذاری شعاعی مد نظر قرار گرفته است. اولین نوع بارگذاری شعاعی به صورت متمرکز است که می‌توان

$$\mathbf{m} = \circ :$$

$$\rho_{in} \omega^{\tau} \left(a_n V_{1n}^{[1]} + b_n V_{1n}^{[r]} + c_n V_{rn}^{[1]} + d_n V_{rn}^{[r]} \right) \Big|_{r=a} \\ - g_n \frac{\partial j_n(k_{in} r)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \circ, \\ a_n S_{1n}^{[1]}(a, \omega) + b_n S_{1n}^{[r]}(a, \omega) + e_n S_{rn}^{[1]}(a, \omega) \\ + f_n S_{rn}^{[r]}(a, \omega) + F_{r, n^{\circ}}^{in} + g_n j_n(k_{in} a) = \circ, \\ a_n S_{1n}^{[1]}(a, \omega) + b_n S_{1n}^{[r]}(a, \omega) + e_n S_{rn}^{[1]}(a, \omega) \\ + f_n S_{rn}^{[r]}(a, \omega) + F_{\theta, n^{\circ}}^{in} = \circ, \\ c_n S_{\delta n}^{[1]}(a, \omega) + d_n S_{\delta n}^{[r]}(a, \omega) + F_{\phi, n^{\circ}}^{in} = \circ, \quad (10)$$

که در آن $n = \circ, 1, 2, \dots$ و

$$\mathbf{m} \neq \circ :$$

$$\rho_{in} \omega^{\tau} \left(a_{nm} V_{1n}^{[1]} + b_{nm} V_{1n}^{[r]} + c_{nm} V_{rn}^{[1]} + d_{nm} V_{rn}^{[r]} \right) \Big|_{r=a} \\ - g_{nm} \frac{\partial j_n(k_{in} r)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \circ, \\ a_{nm} S_{1n}^{[1]}(a, \omega) + b_{nm} S_{1n}^{[r]}(a, \omega) + e_{nm} S_{rn}^{[1]}(a, \omega) \\ + f_{nm} S_{rn}^{[r]}(a, \omega) + F_{r, nm}^{in} + g_{nm} j_n(k_{in} a) = \circ, \\ i m \Lambda_1(a, n, m, \omega) + \Lambda_r(a, n+1, m, \omega) \kappa(n+1, m) \\ + \Lambda_r(a, n-1, m, \omega) \gamma(n-1, m) \\ + F_{\theta, nm}^{in} = \circ, \\ i m \Lambda_r(a, n, m, \omega) - \Lambda_1(a, n+1, m, \omega) \kappa(n+1, m) \\ - \Lambda_1(a, n-1, m, \omega) \gamma(n-1, m) \\ + F_{\phi, nm}^{in} = \circ, \quad (11)$$

در این روابط $(F_{r, nm}^{in}, F_{\theta, nm}^{in}, F_{\phi, nm}^{in})$ و $(F_{r, nm}^{ex}, F_{\theta, nm}^{ex}, F_{\phi, nm}^{ex})$ مؤلفه‌های مودال نیروهای اعمالی روی سطوح داخلی و خارجی پوسته‌اند که بعداً تعریف خواهند شد. حال با حل هم‌زمان سیستم‌های با مرتبه‌ی بی‌نهایت برای $m = \circ$ و $m \neq \circ$ حل دینامیکی مسئله کامل خواهد شد. به همین منظور با در نظر گرفتن $n = \circ, 1, 2, \dots, N$ سیستم خطی معادلات برای $m = \circ$ به معادلات کوتاه‌شده ۱۲ خواهیم رسید.

$$\mathbf{A}_{\circ} \mathbf{x}_{\circ} = \mathbf{b}_{\circ}, \quad (12)$$

که در آن \mathbf{A}_{\circ} یک ماتریس مربعی $(\Lambda N + 4) \times (\Lambda N + 4)$ خواهد بود، که شامل پارامترهای پیچیده‌ی تابع فرکانس است.

$$\mathbf{x}_{\circ} = [a_{\dots}, a_{1^{\circ}}, \dots, a_{N^{\circ}}; b_{\dots}, b_{1^{\circ}}, \dots, b_{N^{\circ}}; \\ c_{1^{\circ}}, c_{2^{\circ}}, \dots, c_{N^{\circ}}; d_{1^{\circ}}, d_{2^{\circ}}, \dots, d_{N^{\circ}};$$

آن را روی نقطه‌ی دلخواه در سطح داخلی یا خارجی کره اعمال کرد:

$$F_r^j(\theta, \phi, \omega) = \frac{f_c^j(\omega)}{2\pi b^2 \sin\theta} \delta(\phi - \phi_c^j) \delta(\theta - \theta_c^j), \quad (16)$$

که در آن $\phi = \phi_c^{\text{in,ex}}, \theta = \theta_c^{\text{in,ex}}, r = a$ است و نیز $f_c^j(\omega)$ دامنه‌ی نیرو و $\delta(\omega)$ تابع دلتای دیراک است. نوع دوم بارگذاری به صورت بارگسترده خواهد بود که روی قطعه‌ی زاویه‌ی و در سطح داخلی یا خارج اعمال می‌شود (α_j زاویه‌ی رأس بارگذاری است):

$$F_r^j(\theta, \phi, \omega) = f_d^j(\omega) [H(\theta) - H(\theta - \alpha_j)], \quad (17)$$

که در آن $f_d^j(\omega)$ دامنه‌ی نیرو و $H(\omega)$ تابع پله‌ی است. لازم به ذکر است که هر دو نوع بار در نظر گرفته شده به صورت شعاعی و با ماهیت فشاری است که می‌توان گفت بارگذاری متمرکز حالت حدی از بارگذاری گسترده است؛ اما با توجه به رابطه‌ی ریاضی مطرح شده برای هر کدام، اندازه بارگسترده در حالت حدی لزوماً برابر با اندازه بار متمرکز نخواهد بود. حال با جایگذاری مستقیم معادلات ۲۲ و ۲۳ در معادله‌ی ۲۱ رابطه‌ی نهایی برای مؤلفه‌های مودال بارگذاری شعاعی به دست می‌آید. بارگذاری متمرکز:

$$F_{r,nm}^j(\omega) = \frac{(2n+1)}{4\pi b^2 (-1)^m} f_c^j(\omega) \sin\theta_c^j P_n^{-m}(\cos\theta_c^j) \exp(-im\phi_c^j),$$

بارگذاری گسترده:

$$F_{r,nm}^j(\omega) = \frac{1}{4} f_d^j(\omega) [P_{n-1}(\cos\alpha_j) - P_{n+1}(\cos\alpha_j)]$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا و با فرض $F_{\theta,nm}^{\text{in,ex}} = F_{\phi,nm}^{\text{in,ex}} = 0$ در سیستم معادلات ۱۲ و ۱۳، می‌توان بردارهای مجهول \mathbf{x}_m را به دست آورد. همچنین می‌توان قدرت صوتی تابش‌یافته را با انتگرال‌گیری از شدت آکوستیکی روی یک سطح کره‌ی مجازی با شعاع R ، که کره کشسان را احاطه کرده، به دست آورد: [۱۷]

$$\Pi(\omega) = \frac{1}{4} \int_S \text{Re} [p^{\text{ex}}(r, \theta, \phi, \omega) V_r^{\text{ex}}(r, \theta, \phi, \omega)^*] dS = \frac{R^2}{4\rho_{\text{ex}} c_{\text{ex}}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |p^{\text{ex}}(R, \theta, \phi, \omega)|^2 \sin\theta d\phi d\theta \quad (18)$$

که در آن Re سرعت شعاعی ذرات سیال در محیط خارجی است، و "Re" قسمت حقیقی یک تابع مختلط بوده و علامت ستاره (*) نشان‌دهنده‌ی مختلط مزدوج است.

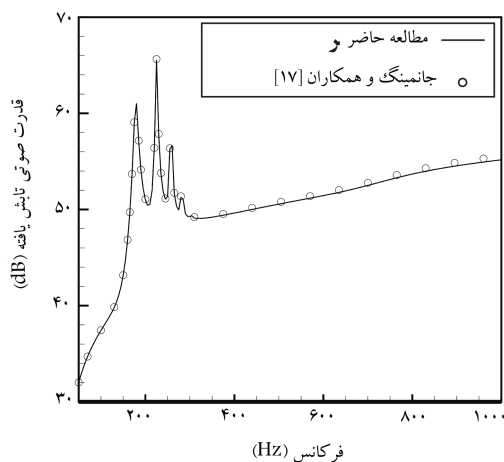
۵. نتایج عددی

در این قسمت، چند مثال عددی برای تابش صوتی هارمونیک از پوسته‌ی همگن کره‌ی ضخیم ($a = 0.25\text{m}, b/a = 2$) ساخته شده از فولاد ($\lambda = 121.15\text{GPa}, \mu = 80.76\text{GPa}, \rho = 7750\text{kg/m}^3$) که پر شده از هوا ($c_{\text{in}} = 343\text{m/s}, \rho_{\text{in}} = 1.21\text{kg/m}^3$) و مستغرق در آب ($c_{\text{ex}} = 1500\text{m/s}, \rho_{\text{ex}} = 1000\text{kg/m}^3$) است مورد بررسی قرار گرفته است. چنان که در قسمت قبل نیز توضیح داده شد پوسته‌ی کره‌ی می‌تواند توسط بارهای داخلی یا خارجی متمرکز و گسترده تحریک شود که برای معادلات ۱۶

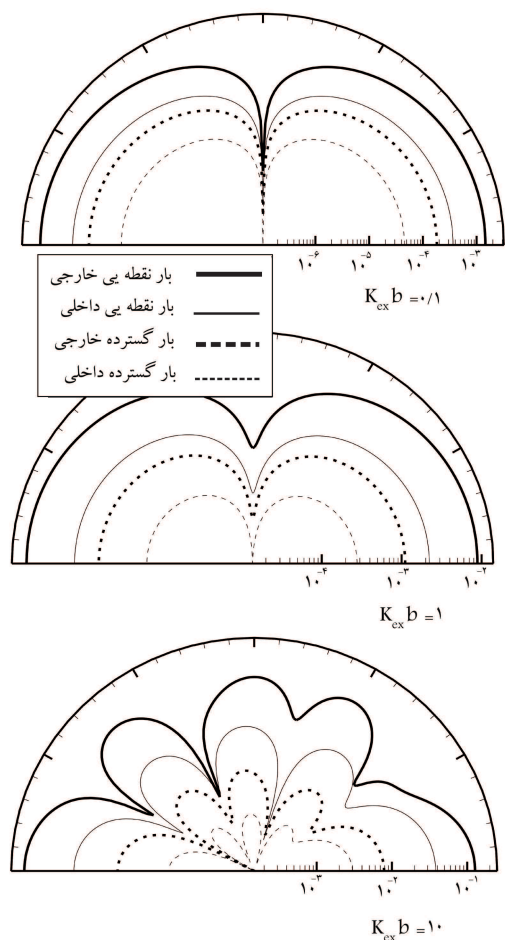
و ۱۷ ورودی‌های ($\phi_c^{\text{in,ex}} = \theta_c^{\text{in,ex}} = 0; \alpha_{\text{in,ex}} = \pi/6$) در نظر گرفته شده است. به منظور حل سیستم معادلات خطی ۱۲ و ۱۳ از یک کد کلی نوشته شده در نرم‌افزار mathematica بهره جستیم و برای محدوده‌ی گسترده‌ی از فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده ($k_{\text{ex}} b$) نیز نتایج بررسی شده است. برای رسیدن به نتایج مطلوب با کم‌ترین خطای عددی، بعد از انجام یک فرایند همگرایی در نتایج عددی، به منظور کوتاه‌کردن جمع‌زنی از $N_{\text{max}} = 40$ استفاده شده است. قبل از بیان نتایج عددی اصلی و به منظور صحت‌یابی نتایج به دست آمده برای قدرت صوتی تابش‌یافته $\Pi(\omega)$ ، از مقایسه‌ی نتایج برای یک پوسته‌ی کره‌ی نازک $1/5\%$ -- یعنی $(b-a)/b = 1/5\%$ -- پر شده از هوا و مستغرق در آب، تحت اثر نیروی هارمونیک متمرکز روی سطح داخلی آن استفاده شده است. چنان که در شکل ۲ نمایش داده شده است، نتیجه‌ی حاصله با اطلاعات موجود [۱۷] به خوبی مطابقت دارد.

شکل ۳ الف نشان‌گر اندازه‌ی فشار روی سطح در رأس کره $|p^{\text{ex}}(r=b=0.5\text{m}, \theta=\phi=0, \omega)/f_c|$ برحسب فرکانس بی‌بعد شده‌ی $k_{\text{ex}} b$ است، که در آن $f_c = f_c^j/2\pi b^2$ برای نیروی متمرکز ($\alpha_{\text{in,ex}} = 0$) و $f_c = f_d^j$ برای نیروی گسترده ($\alpha_{\text{in,ex}} = \pi/6$) است. شکل ۳ ب نیز نشان‌دهنده‌ی اسپکتروم توان صوتی کلی تابش یافته $L_\Pi(\omega) = [10 \log \Pi + 120] \text{ (dB)}$ برای بارگذاری‌های مختلف است. در اینجا باید به این نکته اشاره شود که چون وضعیت بارگذاری‌های در نظر گرفته شده عموماً به صورت تقارن محوری است، فقط مود تقارن محوری $m=0$ در ارتعاشات کره و تابش صوتی مؤثر است. بنابراین حل عددی سیستم خطی معادله‌ی ۱۳ در این وضعیت مورد نیاز نیست.

مطابق انتظار، اسپکتروم تابش صوتی نشان‌دهنده‌ی یک سازه با پیک چندگانه است، که تعداد و موقعیت آنها قبل از هر چیز تابع طبیعت و موقعیت بارگذاری خواهد بود. همچنین مشخص است که پیک‌های دیده شده در واقع ناشی از امواج کشسان ایجاد شده در پوسته‌اند که در محیط آکوستیک منتشر شده‌اند. به طور خاص می‌توان گفت که تابعیت فرکانس برای پاسخ تابش صوتی، تحت تأثیر تشدید (رزونانس) موج‌های محیطی در حال گردش حول پوسته‌ی کره در محیط آکوستیک به صورت قله یا دره دیده می‌شوند. از طرف دیگر امواج ایجاد شده بعد از انتشار حول پوسته‌ی کره بارها دچار تفرق و انکسار گشته و همین موضوع سبب برانگیختن بی‌وقفه‌ی موج‌های دیگر و نتیجتاً نوسانات سریع (رزونانس) در طیف می‌شود. این



شکل ۲. صحت‌یابی نتایج

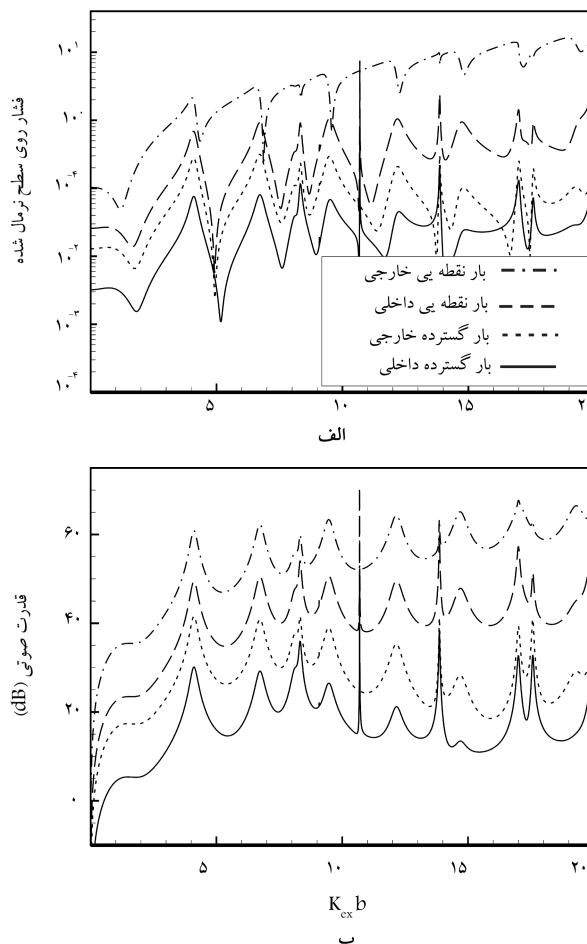


شکل ۴. الگوی فشار دوردست برای فرکانس‌های انتخابی بی بعد شده.

در مورد مهم‌ترین مشاهدات متمایز بحث شده است. در فرکانس‌های پایین و متوسط (1, 0.1) $(k_{ex} b = 0.1)$ ، الگوی فشار دوردست صرف‌نظر از نوع و نحوه‌ی تحریک، در طول محور z یک الگوی دوقطبی از خود به نمایش گذاشته است. به طور خاص در چنین فرکانس‌های تحریک پایینی واضح است که مود جسم صلب سازه ($n = 1$) به طور کاملاً مؤثری با دوردست مزدوج شده است. همچنین دیده می‌شود که صرف‌نظر از فرکانس تحریک، بارگذاری خارجی از نوع متمرکز (داخلی از نوع گسترده) منجر به ایجاد میدان فشار بیشینه (حداقل) در دوردست می‌شود. هنگامی که فرکانس تحریک افزایش می‌یابد $k_{ex} b = 10$ تعداد بیشتری از مودهای محیطی درگیر شده و متعاقباً الگوی فشار دوقطبی به طور جدی دچار واپیچش می‌شود و بیش از این معتبر نیست.

۶. نتیجه‌گیری

یک مدل وایبروآکوستیک بر پایه‌ی نظریه‌ی کشسانی سه‌بعدی برای تابش صوتی نامتقارن از یک پوسته‌ی کروی ضخم که درون آن پر شده از یک سیال ایده‌آل و در احاطه‌ی سیال ایده‌آل دیگر و تحت اثر تحریک هارمونیک است، بررسی شده است. حل این مسئله با استفاده از بسط سری مودهای نرمال کلاسیک و روش استاندارد جداسازی متغیرها به دست آمده است. به نوع بارگذاری و فرکانس تحریک و تأثیر



شکل ۳. فشار روی سطح بی بعد شده و قدرت صوتی تابش یافته.

موج‌ها همچنین حامل اطلاعاتی درخصوص ویژگی‌های سازه‌ی/هندسی خواهند بود. علاوه بر این، مطابق انتظار، اندازه‌ی فشار روی سطح (قدرت صوتی) مرتبط با بارگذاری روی سطح خارجی پوسته به طور قابل توجهی بیشتر از بارگذاری در سطح داخلی پوسته است. از سوی دیگر مشاهده می‌شود که اندازه‌ی فشار/قدرت صوتی ناشی از بارگذاری متمرکز بسیار بیشتر از مقدار اندازه‌گیری شده برای بارگذاری گسترده است (بیشترین مقادیر به دست آمده مربوط است به بارگذاری متمرکز روی سطح خارجی پوسته). این موضوع را می‌توان حاصل تحریک مؤثرتر و در محدوده‌ی وسیع‌تر مودهای مختلف سازه توسط نیروی متمرکز دانست. نتیجه‌ی ذکر شده پیش‌تر توسط کسی که تابش صوتی از یک پوسته‌ی بی‌نهایت تحریک شده توسط نیروی متمرکز و گسترده را بررسی کرد^[۳۶] نیز بیان شده است. بعدها نیز نتیجه‌ی مشابه با آنچه گفته شد برای تابش آکوستیکی از یک پوسته‌ی محدود/نامحدود با تحریک باند محدود عنوان شد.^[۱۴]

شکل ۴ بیان‌گر الگوی فشار دوردست نرمال شده $(r = 10b = 10)$ $|p^{ex}|$ $(\alpha_{in,ex} = 0)$ و f_d^j برای نیروی گسترده $(\alpha_{in,ex} = \pi/6)$ ، و همچنین برای فرکانس‌های بی‌بعد انتخابی $(k_{ex} b = 0.1, 1, 10)$ و وضعیت بارگذاری است. این قبیل شکل‌ها نه تنها برای شناسایی توزیع انرژی صوتی به صورت مکانی مفیدند، بلکه اطلاعات مناسبی نیز درخصوص طبیعت منبع صوتی ارائه می‌دهند. نظرات مشابه با آنچه که برای شکل ۳ گفته شد در اینجا نیز صادق است. در ادامه

آمده برای بارگذاری (صرف‌نظر از نوع آن) روی سطح خارجی نسبت به سطح داخلی بالاتر است.

- در فرکانس‌های کوچک و میانی دیده شد که الگوی فشار دوردست به صورت دوقطبی است. اما با افزایش فرکانس تحریک این الگو صادق نیست بلکه تحریک و ترکیب مودهای مختلف، الگوی فشار پیچیده‌تری را رقم می‌زند.

تقدیر و تشکر

تحقیق فوق برگرفته از طرح پژوهشی حل دقیق میدان صوتی نامتقارن تابش یافته از کره الاستیک ضخیم می‌باشد که با حمایت مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد اسلامشهر به اجرا درآمده است، بدینوسیله از آن واحد دانشگاهی، تقدیر و تشکر به عمل می‌آید.

منابع (References)

1. Hasheminejad, S.M. and Mousavi-akbarzadeh, H. "Three dimensional non-axisymmetric transient acoustic radiation from an eccentric hollow cylinder", *Wave Motion*, **50**, pp. 723-738 (2013).
2. Hasheminejad, S.M., Bahari, A. and Abbasion, S. "Modelling and simulation of acoustic pulse interaction with a fluid-filled hollow elastic sphere through numerical Laplace inversion", *App. Math. Model.*, **21**, pp. 22-49 (2011).
3. Iakovlev, S., Santos, H.A.F.A., Williston, K., Murray, R. and Mitchell, M. "Non-stationary radiation by a cylindrical shell: Numerical modeling using the Reissner-Mindlin theory", *J. Fluids. Struct.*, **36**, pp. 50-69 (2013).
4. Hu, J., Qiu, Z. and Su, T.C. "Axisymmetric vibrations of a viscous-fluid-filled piezoelectric spherical shell and the associated radiation of sound", *J. Sound. Vib.*, **330**, pp. 5982-6005 (2011).
5. Cao, X., Hua, H. and Ma, C. "Acoustic radiation from shear deformable stiffened laminated cylindrical shells", *J. Sound. Vib.*, **331**(9), pp. 561-670 (2012).
6. Hasheminejad, S.M., Abbasion, S. and Bahari, A. "Time domain computation and visualization of shock induced sound fields for a doubly fluid-loaded hollow cylinder", *Comput. Strut.*, **88**, pp. 1077-1091 (2010).
7. Leblond, C., Sigrist, J.F., Auvity, B. and Peerhossaini, H. "A semi-analytical approach to the study of an elastic circular cylinder confined in a cylindrical fluid domain subjected to small-amplitude transient motions", *J. Fluids. Struct.*, **25**, pp. 134-154 (2009).
8. Junger, M.C. "Vibration of elastic shells in a fluid medium and the associated radiation of sound", *J. Appl. Mech.*, **21**, pp. 167-177 (1954).
9. Hayek, S. "Vibration of a spherical shell in an acoustic medium", *J. Acoust. Soc. Am.*, **40**(2), pp. 342-348 (1966).

آنها بر خصوصیات تابش صوتی آکوستیکی از سازه‌ی مستغرق توجه ویژه‌ی شده است. مهم‌ترین مشاهدات عبارت‌اند از:

- تشدیدهای اولیه‌ی مهمی در طیف تابش صوتی محاسبه شده که ناشی از توزیع و گسترش انواع موج‌های کشسان منتشره پیرامون پوسته‌ی کروی و انکسارات پی در پی آنهاست. این موج‌ها حاوی اطلاعات ارزشمندی درباره‌ی خواص سازه‌ی/هندسی پوسته‌ی مستغرق‌اند.
- تراز صوتی تابش یافته برای بارگذاری از نوع متمرکز به مراتب بالاتر است از آنچه که برای بارگذاری از نوع گسترده محاسبه شده است. این موضوع مبین تحریک مناسب‌تر مودهای مختلف پوسته با محدوده‌ی فرکانسی وسیع‌تر، توسط بارهای متمرکز نسبت به بارهای گسترده است. همچنین دیده شد که تراز صوتی به دست

10. Chi, K.N. and Lou, Y.K. "Dynamic analysis of shells of revolution submerged in an acoustic medium by the finite element method", Texas A & M University, Department of Civil Engineering, Report (215) (1982).
11. Huang, H. and Wang, Y.F. "Asymptotic fluid-structure interaction theories for acoustic radiation prediction", *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**(4), pp. 1389-1394 (1985).
12. Seybert, A.F. and Soenarko, B. "Radiation and scattering of acoustic waves from bodies of arbitrary shape in a three dimensional half space", *J. vib. acoust. stress reliab. des.*, **110**(1), pp. 112-117 (1988).
13. El-Raheb, M. and Wagner, P., *Wave Analysis of Plates and Shells After Impact*, Am. Soc. Mech. Eng., Press. Vessels and Piping Division 159, pp. 99-104 (1989).
14. Peng, H. and Banks-Lee, P. "Source correlation effects on the sound power radiation from spherical shells", *J. Acoust. Soc. Am.*, **86**(4), pp. 1586-1594 (1989).
15. Zhang, J.D. and He, Z. "Finite element/boundary element. Modified modal decomposition method for vibration and sound radiation from submerged shell of revolution", *Chinese J. Acoust.*, **8**, pp. 315-324 (1989).
16. Zhang, J. and Zhang, G. "Analysis of acoustic radiation and scattering from a submerged spherical shell by energy streamlines", *J. Acoust. Soc. Am.*, **88**(4), pp. 1981-1985 (1990).
17. Stepanishen, P.R. and Chen, H.W. "Acoustic harmonic radiation and scattering from shells of revolution using finite element and internal source density methods", *J. Acoust. Soc. Am.*, **92**(6), pp. 3343-3357 (1992).
18. Schmidt, H. "Numerically stable global matrix approach to radiation and scattering from spherically stratified shells", *J. Acoust. Soc. Am.*, **94**(4), pp. 2420-2430 (1993).
19. Pathak, A.G. and Stepanishen, P.R. "Acoustic harmonic radiation from fluid-loaded spherical shells using elasticity theory", *J. Acoust. Soc. Am.*, **96**(4), pp. 2564-2575 (1994).

20. Chen, P.T. and Ginsberg, J.H. "Complex power, reciprocity, and radiation modes for submerged bodies", *J. Acoust. Soc. Am.*, **98**(6), pp. 3343-335 (1995).
21. Wu, K. and Ginsberg, J.H. "Mid-frequency range acoustic radiation from slender elastic bodies using the surface variational principle", *J. Vib. Acoust., Transactions of the ASME*, **120**(2), pp. 392-400 (1998).
22. Tang, W.L. and Fan, J. "Resonance radiation theory of a submerged elastic spherical shell", *Acta Acustica*, **25**, pp. 308-312 (2000).
23. Chen, J.M. and Huang, Y.Y. "Vibration and acoustic radiation from submerged stiffened spherical shell with deck-type internal plate", *Acta. Mech. Solida. Sin.*, **16**(3), pp. 210-219 (2003).
24. Chen, J.M., Huang, Y.Y. and Chen, Y.B. "Vibration and acoustic radiation from submerged spherical double-shell", *China Ocean Engineering*, **17**(3), (2003).
25. Junming, C. and Yuying, H. "Vibration and acoustic radiation from submerged stiffened spherical shell with deck-type internal plate", *Acta. Mech. Solida. Sin.*, **16**(3), pp. 210-219 (2003).
26. Chappell, D.J., Harris, P.J., Henwood, D. and Chakrabarti, R. "A stable boundary element method for modeling transient acoustic radiation", *J. Acoust. Soc. Am.*, **120**, pp. 74-80 (2006).
27. Chappell, D.J., Harris, P.J., Henwood, D. and Chakrabarti, R. "Modelling the transient interaction of a thin elastic shell with an exterior acoustic field", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **75** pp. 275-290 (2008).
28. Hamilton, J.A. and Astley, R.J. "Exact solutions for transient spherical radiation", *J. Acoust. Soc. Am.*, **109**, pp. 1848-1858 (2001).
29. Geers, T.L. and Sprague, M.A. "A residual-potential boundary for time-dependent, infinite domain problems in computational acoustics", *J. Acoust. Soc. Am.*, **127** pp. 675-682 (2010).
30. Leblond, C. and Sigrist, J.F. "A versatile approach to the study of the transient response of a submerged thin shell", *J. Sound Vib.*, **329**, pp. 56-71 (2010).
31. Hasheminejad, S.M. and Ahamdi-Savadkoobi, A. "Vibro-acoustic behavior of a hollow FGM cylinder excited by on-Surface mechanical drives", *J. Compos. Struct.*, **92**, pp. 86-96 (2010).
32. Hasheminejad, S.M., Malakooti, S. and Mousavi-Akbarzadeh, H. "Acoustic radiation from a submerged hollow FGM sphere", *Arch. Appl. Mech.*, **81**, pp. 1889-1902 (2011).
33. Pierce, A.D., *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*, 2nd edition, New York (1989).
34. Pao, Y.H. and Mow, C.C., *Diffraction of Elastic Waves and Dynamics Stress Concentration*, Crane Russak, New York (1971).
35. Williams, E.G., *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*, Academic Press, Cambridge (1999).
36. Junger, M.C. "Pressure radiated by an infinite plate driven by distributed loads", *J. Acoust. Soc. Am.*, **74**(2), pp. 649-653 (1983).

$$\mathbf{N}_{mn}^{[j]}(r, \theta, \phi, \omega) = \left[\frac{n(n+1)}{r} \ell_n^{[j]}(\beta r) P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \ell_n^{[j]}(\beta r) \right] + \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{im}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \ell_n^{[j]}(\beta r) \right] P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_\phi \right] e^{im\phi}$$

که در آن $k = 1, 2$ و

$$\ell_n^{[k]} = \begin{cases} j_n & (k = 1) \\ y_n & (k = 2) \end{cases}$$

j_n و y_n توابع بسل کروی نوع اول و دوم هستند.

پیوست

$$\mathbf{L}_{mn}^{[k]}(r, \theta, \phi, \omega) = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\ell_n^{[j]}(\alpha r) \right] P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \ell_n^{[j]}(\alpha r) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{im}{\sin \theta} \ell_n^{[j]}(\alpha r) P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_\phi \right] e^{im\phi}$$

$$\mathbf{M}_{mn}^{[j]}(r, \theta, \phi, \omega) = \left[\frac{im}{\sin \theta} \ell_n^{[j]}(\beta r) P_n^m(\cos \theta) \mathbf{e}_\theta - \ell_n^{[j]}(\beta r) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi \right] e^{im\phi}$$