

ارائه‌ی یک حل دقیق تحلیلی برای ارتعاشات صفحات مستطیلی نانو براساس نظریه‌ی مرتبه‌ی اول برشی ورق‌ها در فضای غیرمحلّی کشسان

مجتبی زارع (دانشجوی کارشناسی ارشد)

شاهرخ حسینی‌هاشمی (استاد)

رضا ناظم‌نژاد* (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۳۹۳ (۱۳-۳-۲۰۰۳، شماره ۱، ص. ۱۰۷-۱۱۳)

در این نوشتار، ارتعاشات آزاد صفحات مستطیلی نانو براساس نظریه‌ی مرتبه‌ی اول برشی ورق‌ها (میندلین) در فضای نظریه‌ی کشسانی غیرمحلّی با استفاده از یک حل دقیق تحلیلی بررسی شده است. به منظور حل دقیق معادلات حرکت، ابتدا معادلات بی‌بعد شده و با استفاده از یک تابع کمکی از یکدیگر دی‌کوپله شده‌اند. نهایتاً، معادلات جدیدی برحسب یک سری توابع پتانسیل به دست می‌آید که به صورت دقیق و تحلیلی قابل حل‌اند و به این ترتیب پاسخ ارتعاشات آزاد و فرکانس‌های طبیعی برای مسئله به دست می‌آید. در حل معادلات فوق، از شرایط مرزی لوی استفاده شده است. به منظور تأیید صحت روش حل حاضر، نتایج به دست آمده با دیگر روش‌های عددی و تقریبی مقایسه شده است. به منظور ارائه‌ی نتایج بیشتر، اثرات مودهای مختلف فرکانسی و پارامترهای مختلف نانو ورق — شامل نسبت طول به عرض و نسبت ضخامت به طول — بر فرکانس طبیعی نانورق بررسی شده است.

واژگان کلیدی: حل دقیق و تحلیلی، ارتعاشات آزاد، نظریه‌ی کشسانی غیرمحلّی، نانورق میندلین.

۱. مقدمه

با ترکیبی است. یکی از این زمینه‌ها استفاده از نانورق‌هاست که با گسترش روزافزون علم، نیاز به استفاده از آنها بیشتر می‌شود. صفحه‌های گرافینی و گرافیتی^۱ از متداول‌ترین گونه‌ی ورق‌های نانو هستند که به دلیل رسانایی بالا در خازن‌ها و برخورداری از سوییج‌های قطع و وصل جریان کاربرد دارند. همچنین به دلیل تحرک در مودهای بالای فرکانسی، از آنها در ابرتشدیدکننده‌ها^۲ و ابرفشارسنج‌ها^۳ استفاده می‌شود. بنابراین با کاربرد نانورق‌ها در این وسیله‌ها و وسایلی نظیر سیستم‌های الکترومکانیکی میکرو و نانو (MEMS/NEMS) و تعدادی از اجزای مکانیکی — مانند ساختارهای نانوشکل معلق^۱، تشدیدکننده‌های راکتی^۲، تشدیدکننده‌های ورقه‌بی‌نانو^۳ و عناصر غشاء نازک^۴ — مدل‌سازی چنین سیستم‌هایی باید با ساختارهای صفحه‌مانند دوبعدی مدل‌سازی شوند. بنابراین نیازمند مطالعه‌ی رفتار ارتعاشاتی نانورق‌ها هستیم که برخلاف ورق‌های معمولی، نگاه دقیق‌تر به زیرساختارهای ماده را می‌طلبد. نظریه‌های ارائه‌شده‌ی ورق تاکنون بدون در نظر گرفتن ساختار ورق در ابعاد میکروسکوپی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین برای استفاده از این نظریه‌ها در ابعاد مولکولی باید آنها را اصلاح کرد. گیبسون^۴ با مروری کوتاه بر اهمیت مدل‌سازی رفتار ارتعاشاتی ساختارهای مختلف نانو، پیشنهاد داد که با بهره‌گیری از نظریه‌ی غیر محلّی کشسانی در مدل‌های محیط پیوسته، پیش‌بینی

از میان سازه‌های پرکاربرد مورد استفاده در صنعت می‌توان به ورق‌ها، که کاربرد گسترده‌ی در شاخه‌های مختلف مهندسی از جمله مکانیک، نظامی، هوانوردی و دریانوردی دارند، اشاره کرد. مطالعه‌ی رفتار دینامیکی و ارتعاشات سازه‌های ساخته شده از ورق، به منظور کاربرد آنها در این صنایع و قطعات مربوطه یکی از مهم‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی در مکانیک کاربردی است.

قرن بیست و یکم، قرن فتّوری نانو، مهم‌ترین دوران صنعت به‌شمار می‌رود. از اهداف مهم فتّوری نانو — و شاید مهم‌ترین آنها — ایجاد ساختارهایی از مواد است که در آنها آرایش مولکول‌ها از پیش طراحی شده باشد. نانوتکنولوژی انجام مهندسی مواد در ابعاد اتمی-مولکولی و ساخت مواد با خواص کاملاً متفاوت در ابعاد نانو است که با آرایش و دست‌کاری اتم‌ها می‌توان به این مهم دست یافت.

در نانومواد، سطح واحد جرم مواد گسترش قابل توجهی می‌یابد که این ویژگی به بهبود استحکام، خواص الکتریکی و افزایش انعطاف‌پذیری مواد منجر می‌شود. بنابراین وجود چنین خصوصیات زمینیه‌ساز استفاده از این مواد به صورت مجزا

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۶/۴/۱۳۹۲، اصلاحیه ۲۳/۶/۱۳۹۲، پذیرش ۲۴/۶/۱۳۹۲.

mzare@mecheng.iust.ac.ir
shh@iust.ac.ir
rnazemnezhad@iust.ac.ir

رفتار ارتعاشاتی دقیق تر خواهد بود.^[5] این نظریه مربوط به فیزیک جسم مادی است و نشان می‌دهد که رفتار یک نقطه‌ی مادی متأثر از حالت تمام نقاط آن جسم است. در واقع براساس این نظریه، رابطه‌ی تنش در هر نقطه از سازه تابعی از کرنش در کل سازه است.

اما تمامی تحقیقاتی که در زمینه‌ی ارتعاشات و کماتش نانوورق یا صفحات گرافینی با استفاده از نظریه‌ی غیر محلی انجام شده مبتنی است بر حل‌های تقریبی،^[۶-۹] حل‌های عددی چون روش مربعات دفرانسیلی (DQM)^[۵]،^[۱۰] حل اجزاء محدود صفحات گرافین چندلایه^[۱۱] و حل تفاضل محدود تیر نانو روی بستر کشسان.^[۱۲] بنابراین لازم است نخست روشی برای حل دقیق معادلات حرکت نانوورق یافته، و سپس دقت روش‌های عددی و تقریبی دیگر را در این زمینه بررسی کنیم. از این رو روش حلی دقیقی را که قبلاً ابداع شده^[۱۳-۱۵] برای حل این مسئله‌ی نوین انتخاب می‌کنیم. اما باید تأکید کرد که تاکنون از این روش فقط برای مسائل حوزه‌ی کشسانی کلاسیک استفاده شده و به دلیل استفاده از نظریه‌ی غیرمحلی و ورود به حوزه‌ی نانو، مرتبه‌ی دفرانسیلی معادلات حرکت افزایش می‌یابد و در نتیجه روند حل پیچیده‌تر می‌شود. در این روش معادلات حرکت بدون هیچ‌گونه تقریبی و براساس روش‌های کاملاً ریاضی و دقیق به شکل قابل حل تبدیل می‌شوند. به علاوه روش حل در نظر گرفته شده در این تحقیق، نسبت به بسیاری از روش‌های حل موجود، کلیت و جامعیت بیشتری دارد و شرایط مرزی بیشتری را شامل می‌شود.

۲. مروری بر نظریه‌ی کشسانی غیرمحلی

چنان که پیش‌تر اشاره شد نظریه‌ی غیرمحلی ارینگن، تنش در یک نقطه از سازه را تابعی از کرنش تمام نقاط کل سازه در نظر می‌گیرد. براساس این نظریه، تنش غیرمحلی با استفاده از رابطه‌ی انتگرالی ۱ به صورت تابعی از تنش محلی (کلاسیک) بیان می‌شود:

$$t_{ij} = \int_V \alpha (|x' - x|) \sigma_{ij}(x') dV' \quad (1)$$

این انتگرال روی کل حجم سازه (V) محاسبه می‌شود و در آن x نقطه‌ی است که تنش در آن با توجه به تنش در تمامی نقاط x' در سازه محاسبه می‌شود. که تنش در آن $i, j = r, \theta, r\theta$ مؤلفه‌های مختصات قطبی‌اند؛ $\alpha (|x' - x|)$ تابع کرنل غیرمحلی است که به اندازه‌های درونی ساختار بستگی دارد؛ تنش محلی و t_{ij} تنش غیرمحلی است. از آنجا که حل معادله‌ی دفرانسیلی ساده‌تر از معادله‌ی انتگرالی است، ارینگن تابع کرنل غیرمحلی را به صورت تابع گرینی^۶ از عملگر دفرانسیلی \mathcal{L} فرض کرد که:^[5]

$$\mathcal{L}\alpha (|x' - x|) = \delta (|x' - x|) \quad (2)$$

که با جایگذاری رابطه‌ی ۲ در رابطه‌ی ۱ داریم:

$$\mathcal{L}t_{ij} = \sigma_{ij} \quad (3)$$

در نهایت برای نمونه‌ی دوبعدی داریم:

$$\mathcal{L} = 1 - (e.l)^2 \nabla^2 = 1 - \mu \nabla^2 \quad (4)$$

که در آن l اندازه‌های درونی و مقیاس کوچک، e ثابت مواد که با استفاده از آزمایش‌های تجربی به دست می‌آید و $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ عملگر لاپلاسی در

مختصات قطبی است. مقدار پارامتر غیرمحلی μ به شرایط تکیه‌گاهی، عدد مد، تعداد دیواره‌ها و لایه‌ها، و نیز به ماهیت حرکت بستگی دارد. تاکنون در منابع محدودی مقدار دقیق این پارامتر برای سازه‌های مختلف تعیین شده است.^[۱۳-۱۹] منابع موجود در این زمینه، برای به دست آوردن این پارامتر پیشنهاد می‌کنند منحنی‌های انتشار^۷ مکانیک محیط پیوسته‌ی غیرمحلی و دینامیک شبکه^۸ برای ساختارهای کریستالی نانومواد با یکدیگر مقایسه شوند.^[۲۰، ۲۱] در این تحقیق، مقدار این پارامتر در بازه‌ی $0 - 4 \text{ nm}^2$ در نظر گرفته شده است.^[۱۹]

۳. معادلات ارتعاشاتی ورق میندلین در فضای غیرمحلی کشسانی

معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد نانوورق ایزوتروپیک میندلین با استفاده از نظریه‌ی غیرمحلی کشسانی عبارت است از:^[۲۲]

$$\frac{\epsilon k^t D}{h^2} (1 - \nu) (\varphi_{x,x} + w_{,xx} + \varphi_{y,y} + w_{,yy}) = [1 - \epsilon^t \nabla^2] I_z \ddot{w} \quad (5)$$

$$D (\varphi_{x,xx} + \nu \varphi_{y,xy}) + \frac{D}{\nu} (1 - \nu) (\varphi_{x,yy} + \varphi_{y,xy}) - \frac{\epsilon k^t D}{h^2} (1 - \nu) (\varphi_x + w_{,x}) = [1 - \epsilon^t \nabla^2] I_2 \ddot{\varphi}_x \quad (6)$$

$$D (\varphi_{y,yy} + \nu \varphi_{x,xy}) + \frac{D}{\nu} (1 - \nu) (\varphi_{x,xy} + \varphi_{y,xx}) - \frac{\epsilon k^t D}{h^2} (1 - \nu) (\varphi_y + w_{,y}) = [1 - \epsilon^t \nabla^2] I_2 \ddot{\varphi}_y \quad (7)$$

در این رابطه‌ها، φ_x و φ_y چرخش خمشی نرمال‌های عرضی حول محور x و y هستند و w جابه‌جایی عرضی ورق در راستای z و k^t ضریب تصحیح برشی است که مقدار آن برابر $5/6$ در نظر گرفته شده است. همچنین $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ سختی خمشی نانوورق، E مدول کشسانی، ν ضریب پواسون، h ضخامت نانوورق و $I = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho z^k dz$ ($z = 0, 2$) ممان اینرسی است.

۴. حل دقیق معادلات حرکت

برای عمومیت بخشیدن به حل مسئله، ابتدا معادلات بی‌بعد می‌شوند. متغیرهای بی‌بعد چنین تعریف می‌شوند:

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad \delta = \frac{h}{a}, \quad \eta = \frac{b}{a}, \quad \tilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha, \quad \tilde{w} = \frac{w}{a}, \quad \zeta = \frac{\epsilon}{a}, \quad \tilde{\nabla}^2 = a^t \nabla^2, \quad \beta = \omega a^t \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (8)$$

که در آن $\alpha = x, y$ است و a و b و h به ترتیب طول، عرض و ضخامت ورق هستند. منظور از عملگر بی‌بعد لاپلاسی، عملگر تعریف شده براساس مختصات بی‌بعد است؛ یعنی: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$. همچنین ζ پارامتر بی‌بعد غیر محلی و β پارامتر بی‌بعد فرکانسی است. فرض می‌شود متغیرهای جابه‌جایی به صورت هارمونیک با زمان تغییر می‌کنند:

$$\tilde{\varphi}_\alpha(x, y, t) = \tilde{\varphi}_\alpha(x, y) e^{i\omega t}, \quad \tilde{w}(x, y, t) = \tilde{w}(x, y) e^{i\omega t} \quad (9)$$

برحسب این توابع پتانسیل به دست می‌آید و از این طریق حل دقیق معادلات حرکت ممکن می‌شود. با استفاده از روابط ۱۷، ۱۸ و ۱۹، عبارت خواهد بود از:

$$f = b_1 W_1 + b_2 W_2 \quad (19)$$

که در آن:

$$b_i = \frac{[6k^t(1-\nu) - nl^t] \alpha_i^t - \beta^t \delta^t}{6k^t(1-\nu)}, \quad i = 1, 2$$

حال با جایگذاری روابط ۱۷، ۱۸ و ۱۹ در معادله‌ی ۱۱ و ۱۲ و حل معادلات به دست آمده، با استفاده از معادله‌ی ۱۰ و پس از مرتب کردن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_x &= C_1 W_{1,X} + C_2 W_{2,X} + W_{r,X} \\ \tilde{\varphi}_y &= C_1 W_{1,Y} + C_2 W_{2,Y} - W_{r,X} \end{aligned} \quad (20)$$

که:

$$C_i = \frac{d_i}{\alpha_i^t \left[\frac{nl^t}{12} - \frac{(1-\nu)}{2} \right] + \frac{\beta^t \delta^t}{12} - \frac{6k^t(1-\nu)}{\delta^t}}, \quad i = 1, 2$$

$$d_i = \frac{6k^t(1-\nu)}{\delta^t} - \frac{1+\nu}{2} b_i, \quad i = 1, 2$$

$W_{r(X, Y)}$ تابع پتانسیل دیگری است که از حل جواب عمومی معادلات دیفرانسیل حاکم بر چرخش‌های $\tilde{\varphi}_x$ و $\tilde{\varphi}_y$ به دست آمده و در رابطه‌ی ۲۱ صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^t W_r + \alpha_r^t W_r &= 0 \\ \alpha_r^t &= \left[\frac{\beta^t \delta^t}{12} - \frac{6k^t(1-\nu)}{\delta^t} \right] / \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \right) - \frac{nl^t}{12} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

برای حل معادلات ۱۸ و ۲۱ از روش جداسازی استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن $W_i(X, Y) = f_i(X)g_i(Y)$ و پس از جداسازی خواهیم داشت: $f_i'' \pm \lambda_i^t f_i = 0$ و $g_i'' \pm \lambda_i^t g_i = 0$. یک آزمایش ساده در شرایط مرزی (انواع شرایط مرزی در ادامه بیان می‌شوند)، وقتی که دو لبه‌ی تکیه‌گاه در $X = 0$ و $X = 1$ ساده باشند نشان می‌دهد که فقط جواب $f_i'' = -\gamma_i^t f_i$ برای این شرایط مناسب خواهد بود. بنابراین شکل جواب این توابع به صورت $f_i(X) = A_i \sin(\gamma_i X) + B_i \cos(\gamma_i X)$ است و نهایتاً پس از اعمال این شرط مرزی در لبه‌های $X = 0$ و $X = 1$ ، این توابع به $f_i(X) = A_i \sin(\gamma_i X)$ ، $i = 1, 2$ و $f_r(X) = A_r \sin(\gamma_r X)$ تبدیل می‌شوند؛ ثابت اختیاری A_i برای شرط مرزی ساده $\gamma_i = m\pi$ ، $m = 1, 2, 3, \dots$ است. باید توجه داشت که تابع $f_r(X)$ مربوط به تابع پتانسیل W_r است. شکل جواب برای $g_i(Y)$ عبارت است از:

$$\begin{cases} g_i(Y) = A_i^* \sin(\lambda_i Y) + B_i^* \cos(\lambda_i Y), & \alpha_i^t = \gamma_i^t + \lambda_i^t \\ g_i(Y) = \bar{A}_i \sinh(\lambda_i Y) + \bar{B}_i \cosh(\lambda_i Y), & \alpha_i^t = \gamma_i^t - \lambda_i^t \end{cases} \quad (22)$$

که در این رابطه \bar{A}_i ، B_i^* ، A_i^* و \bar{B}_i ثابت اختیاری‌اند. این که از کدام شکل تابع $g_i(Y)$ استفاده شود (مثلثاتی یا هایپربولیکی) بستگی به شرط آن دارد. ثابت α_i^t به پارامتر بی‌بعد فرکانسی β وابسته است و در ارضای شرط مورد نظر نقشی تعیین‌کننده دارد. پس از حل معادلات باید شرایط مرزی اعمال شود تا

با جایگذاری متغیرهای بی‌بعد ۸ در روابط ۵ تا ۷ و با استفاده از رابطه‌ی ۹ -- پس از انجام ساده‌سازی -- معادلات حرکت نانورق بی‌بعد می‌شوند:

$$\begin{aligned} [6k^t(1-\nu) - nl^t] \tilde{\nabla}^t \tilde{w} + \beta^t \delta^t \tilde{w} + \\ 6k^t(1-\nu)(\tilde{\varphi}_{x,X} + \tilde{\varphi}_{y,Y}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \right) - \frac{nl^t}{12} \right] \tilde{\nabla}^t \tilde{\varphi}_x + \left[\frac{\beta^t \delta^t}{12} - \frac{6k^t(1-\nu)}{\delta^t} \right] \tilde{\varphi}_x \\ + \frac{1+\nu}{2} (\tilde{\varphi}_{x,X} + \tilde{\varphi}_{y,Y})_{,X} - \frac{6k^t(1-\nu)}{\delta^t} \tilde{w}_{,X} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \right) - \frac{nl^t}{12} \right] \tilde{\nabla}^t \tilde{\varphi}_y + \left[\frac{\beta^t \delta^t}{12} - \frac{6k^t(1-\nu)}{\delta^t} \right] \tilde{\varphi}_y \\ + \frac{1+\nu}{2} (\tilde{\varphi}_{x,X} + \tilde{\varphi}_{y,Y})_{,Y} - \frac{6k^t(1-\nu)}{\delta^t} \tilde{w}_{,Y} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$nl^t = \zeta^t \beta^t \delta^t$ نشان‌دهنده‌ی عبارت غیر محلی است. به منظور جداسازی این معادلات، از تابع کمکی $f = \tilde{\varphi}_{x,X} + \tilde{\varphi}_{y,Y}$ استفاده می‌شود. سپس از معادله‌ی ۱۱ نسبت به X و از معادله‌ی ۱۲ نسبت به Y مشتق‌گیری می‌شود. از مجموع معادلات به دست آمده معادله‌ی جدیدی برحسب تابع کمکی به دست می‌آید. با جایگذاری تابع کمکی به دست آمده در رابطه‌ی ۱۰، معادله‌ی ۱۳ به دست می‌آید که فقط برحسب متغیر جابه‌جایی \tilde{w} است:

$$a_1 \tilde{\nabla}^t \tilde{w} + a_2 \tilde{\nabla}^t \tilde{w} + a_r \tilde{w} = 0 \quad (13)$$

ثابت‌های a_i عبارت‌اند از:

$$a_1 = - \left(1 - \frac{nl^t}{12} \right) + \frac{\left(1 - \frac{nl^t}{12} \right) nl^t}{6k^t(1-\nu)} \quad (14)$$

$$a_2 = - \frac{(-6 + nl^t) \beta^t \delta^t + 3k^t(12nl^t + \beta^t \delta^t)(-1 + \nu)}{36k^t \delta^t (-1 + \nu)} \quad (15)$$

$$a_r = \frac{\beta^t \delta^t \left(\frac{\beta^t \delta^t}{12} - \frac{6k^t(1-\nu)}{\delta^t} \right)}{6k^t(-1 + \nu)} \quad (16)$$

جواب معادله‌ی ۱۳ را می‌توان چنین در نظر گرفت:

$$\tilde{w} = W_1 + W_2 \quad (17)$$

دو تابع $W_1(X, Y)$ و $W_2(X, Y)$ را اصطلاحاً توابع پتانسیل می‌نامند زیرا شکل جواب آن‌ها مشخص است و در رابطه‌ی ۱۸ صدق می‌کند:

$$\tilde{\nabla}^t W_1 + \alpha_1^t W_1 = 0, \quad \tilde{\nabla}^t W_2 + \alpha_2^t W_2 = 0 \quad (18)$$

که در آن:

$$\alpha_1^t = \frac{a_2 - \sqrt{(a_1^t)^2 - 4a_1 a_2}}{2a_1}, \quad \alpha_2^t = \frac{a_2 + \sqrt{(a_1^t)^2 - 4a_1 a_2}}{2a_1}$$

تا اینجا، متغیر \tilde{w} برحسب یک سری توابع پتانسیلی تعریف شده که شکل جواب‌شان مشخص و قابل دست‌یابی است. در گام بعدی محاسبه‌ی تابع کمکی f برحسب توابع پتانسیل W_1 و W_2 ضرورت می‌یابد زیرا بدین ترتیب، متغیرهای $\tilde{\varphi}_x$ و $\tilde{\varphi}_y$ نیز

باسخ فرکانسی به دست آید. شرایط مرزی طبیعی و هندسی برای تکیه‌گاه ساده، گیردار و آزاد در نظریه‌ی میندلین در لبه‌های $Y = \eta$ و $Y = 0$ چنین بیان می‌شود:

• تکیه‌گاه ساده: $\tilde{M}_{yy}^L = \tilde{\varphi}_x = \tilde{w} = 0$

• تکیه‌گاه گیردار: $\tilde{w} = \tilde{\varphi}_x = \tilde{\varphi}_y = 0$

• تکیه‌گاه آزاد: $\tilde{M}_{yy}^L = \tilde{M}_{xy}^L = \tilde{N}_{xz} = 0$

برای شرایط مرزی روی لبه‌های $X = 1$ و $X = 0$ کافی است اندیس‌های x را به y ، و y را به x تغییر دهیم. در این روابط \tilde{M}_{yy}^L و \tilde{M}_{xy}^L ، \tilde{N}_{xz} ، \tilde{M}_{yy}^L ممان‌ها و نیروی برآیند بی‌بعدی هستند که توسط متغیرهای جابه‌جایی بی‌بعد تعریف می‌شوند:

$$\tilde{M}_{yy}^L = \tilde{\varphi}_{y,y} + \nu \tilde{\varphi}_{x,x}$$

$$\tilde{N}_{xz} = \tilde{\varphi}_x + \tilde{w}_{,x}$$

$$\tilde{M}_{xy}^L = \tilde{\varphi}_{x,y} + \nu \tilde{\varphi}_{y,x} \tag{23}$$

با اعمال این شرایط مرزی، برای هر شرط مرزی ۶ معادله به دست می‌آید که اگر به شکل ماتریسی بیان شوند به صورت معادله‌ی ۲۴ درمی‌آیند:

$$[coefficients] \{A_1 \ B_1 \ A_2 \ B_2 \ A_r \ B_r\}^T = [0] \tag{24}$$

ماتریس ضرایب یک ماتریس مربعی 6×6 و تابعی از پارامترهای مختلف ورق، پارامتر غیر محلی، فرکانس طبیعی و نیم طول موج (m) است. شرط وجود جواب غیربدهی رابطه‌ی ۲۴ این است که درمیان ماتریس ضرایب صفر باشد. این درمیان در واقع معادله‌ی مشخصه‌ی هر شرط مرزی را تعیین می‌کند. برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی ارتعاشات آزاد یا حل معادله‌ی مشخصه به‌ازای هر m، تعداد n فرکانس طبیعی مسئله حاصل می‌شود.

۵. نتایج و تفسیر آنها

به‌منظور تأیید روش حل حاضر، ابتدا نتایج کنونی و نتایج موجود در مقالات معتبر مقایسه می‌شوند. پس از تأیید صحت روش، نتایج کامل‌تری در این زمینه به‌صورت جدول و نمودار منتشر می‌شود. در حل مسائل ارتعاشاتی نانورق بیشترین نتیجه‌ی مد نظر، مقایسه‌ی فرکانس طبیعی در حالت محلی و غیر محلی است. زیرا می‌خواهیم به این مسئله پی ببریم که رفتار ورق در مقیاس بسیار کوچک (نانو)، تا چه حد از کاربرد نظریه‌ی صحیح در این زمینه تأثیر می‌پذیرد. بنابراین نسبتی به‌نام نسبت فرکانسی تعریف می‌شود که این قیاس را انجام می‌دهد و منظور از آن، نسبت میان فرکانس طبیعی اندازه‌گیری شده توسط نظریه‌ی غیر محلی به فرکانس طبیعی اندازه‌گیری شده در نظریه‌ی محلی (کشسانی کلاسیک) است؛ یعنی: $FR = \beta^{NL} / \beta^L$. در تمامی نتایج، ضریب پواسون $\nu = 0.3$ در نظر گرفته شده، و (n,m) نشان‌دهنده‌ی مود فرکانسی است. یادآور می‌شود شرط مرزی در راستای $X = 1$ و $X = 0$ ساده (S)، و در راستای $Y = \eta$ و $Y = 0$ ترکیبی از شرایط مرزی ساده، گیردار (C) و آزاد (F) در نظر گرفته شده است. بنابراین شرط مرزی که با عنوان SCFSF نشان داده می‌شود بدان معناست که تکیه‌گاه در راستای $X = 1$ و $X = 0$ ساده، در راستای $Y = 0$ گیردار و در راستای $Y = \eta$ آزاد است. این ترتیب برای تمامی شش شرط مرزی همین‌گونه بیان می‌شود.

جدول ۱. مقایسه‌ی نسبت فرکانسی برای نانورق با شرایط تکیه‌گاهی ساده.

ζ	مرجع	a/b= ۱		
		۰٫۶	۰٫۴	۰٫۲
(۱و۱)	[۶]	۰٫۳۵۱۲	۰٫۴۹۰۴	۰٫۷۴۷۷
	[۷]	۰٫۳۵۱۲	۰٫۴۹۰۴	۰٫۷۴۷۵
	نتایج جدید	۰٫۳۵۱۲	۰٫۴۹۰۴	۰٫۷۴۷۵
(۱و۲)	[۶]	۰٫۲۳۰۹	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۸۰۱
	[۷]	۰٫۲۳۰۸	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۷۹۹
	نتایج جدید	۰٫۲۳۰۸	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۷۹۹
(۲و۱)	[۶]	۰٫۲۳۰۹	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۸۰۱
	[۷]	۰٫۲۳۰۸	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۷۹۹
	نتایج جدید	۰٫۲۳۰۸	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۷۹۹
(۲و۲)	[۶]	۰٫۱۸۴۴	۰٫۲۷۰۸	۰٫۴۹۰۶
	[۷]	۰٫۱۸۴۴	۰٫۲۷۰۸	۰٫۴۹۰۴
	نتایج جدید	۰٫۱۸۴۳	۰٫۲۷۰۸	۰٫۴۹۰۴
(۳و۲)	[۶]	۰٫۱۴۵۶	۰٫۲۱۵۵	۰٫۴۰۴۰
	[۷]	۰٫۱۴۵۶	۰٫۲۱۵۵	۰٫۴۰۳۸
	نتایج جدید	۰٫۱۴۵۶	۰٫۲۱۵۵	۰٫۴۰۳۸
(۳و۳)	[۶]	۰٫۱۲۴۱	۰٫۱۸۴۴	۰٫۳۵۱۴
	[۷]	۰٫۱۲۴۱	۰٫۱۸۴۴	۰٫۳۵۱۲
	نتایج جدید	۰٫۱۲۴۱	۰٫۱۸۴۴	۰٫۳۵۱۲
a/b= ۰٫۵				
(۱و۱)	[۶]	۰٫۴۲۸۷	۰٫۵۷۹۹	۰٫۸۱۸۳
	نتایج جدید	۰٫۴۲۸۷	۰٫۵۷۹۸	۰٫۸۱۸۳
	[۶]	۰٫۳۵۱۲	۰٫۴۹۰۴	۰٫۷۴۷۵
(۱و۲)	[۶]	۰٫۳۵۱۲	۰٫۴۹۰۴	۰٫۷۴۷۵
	نتایج جدید	۰٫۳۵۱۲	۰٫۴۹۰۴	۰٫۷۴۷۵
	[۶]	۰٫۲۴۹۲	۰٫۳۶۰۱	۰٫۶۱۱۱
(۲و۱)	[۶]	۰٫۲۴۹۲	۰٫۳۶۰۱	۰٫۶۱۱۱
	نتایج جدید	۰٫۲۴۹۲	۰٫۳۶۰۱	۰٫۶۱۱۱
	[۶]	۰٫۲۳۰۹	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۷۹۹
(۲و۲)	[۶]	۰٫۲۳۰۹	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۷۹۹
	نتایج جدید	۰٫۲۳۰۹	۰٫۳۳۵۳	۰٫۵۷۹۹
	[۶]	۰٫۱۶۵۵	۰٫۲۴۴۰	۰٫۴۴۹۶
(۳و۲)	[۶]	۰٫۱۶۵۵	۰٫۲۴۴۰	۰٫۴۴۹۶
	نتایج جدید	۰٫۱۶۵۵	۰٫۲۴۴۰	۰٫۴۴۹۶
	[۶]	۰٫۱۵۶۲	۰٫۲۳۰۹	۰٫۴۲۸۷
(۳و۳)	[۶]	۰٫۱۵۶۲	۰٫۲۳۰۹	۰٫۴۲۸۷
	نتایج جدید	۰٫۱۵۶۲	۰٫۲۳۰۹	۰٫۴۲۸۷

۱.۵. مقایسه نتایج

در جدول ۱ اولین نتایج مقایسه‌ی ارائه شده است. در این جدول نسبت فرکانسی نانورق با شرایط مرزی چهار لبه‌ی ساده با دو مطالعه‌ی منتشر شده مقایسه شده است. در مطالعه‌ی اول [۶] ارتعاشات نانورق براساس نظریه‌ی مرتبه‌ی سوم ردی در فضای غیر محلی بررسی شده است در حالی که در مطالعه‌ی دوم، [۷] این مسئله براساس دو نظریه‌ی میندلین و کلاسیک با استفاده از روش ناور مورد

بررسی قرار گرفته است. این نتایج برای نسبت ابعادی $(a/b = 1\eta)$ ، پارامتر غیر محلی (ζ) و مودهای مختلف فرکانسی گزارش شده است. چنان که مشاهده می‌شود نتایج حاضر همخوانی قابل قبولی به‌ویژه با نظریه‌ی مرتبه بالای برشی ردی دارد.

در دومین مقایسه‌ی نسبت فرکانسی با مقاله‌ی منتشر شده،^[۸] ارتعاشات و کماتش نانورق در فضای غیرمحلی کشسانی و براساس نظریه‌ی کلاسیک ورق‌ها مد نظر قرار گرفته است. در این نوشتار برای شرط مرزی ساده در تمام لبه‌ها (SSSS) روش حل ناویر، و برای شرط مرزی SCSC روش حل لوی اتخاذ شده است. در شکل ۱، این مقایسه‌ها با نظریه‌ی میندلین در نظر گرفته شده در تحقیق حاضر نشان داده شده است. در شکل ۱ الف تغییرات نسبت فرکانسی برای شرط مرزی SSSS و در شکل ۱ ب این تغییرات برای شرط مرزی SCSC برحسب طول جانبی ورق در راستای X رسم شده است. چنان که مشاهده می‌شود نتایج تحقیق کنونی همخوانی بسیار خوبی با این مرجع دارد.

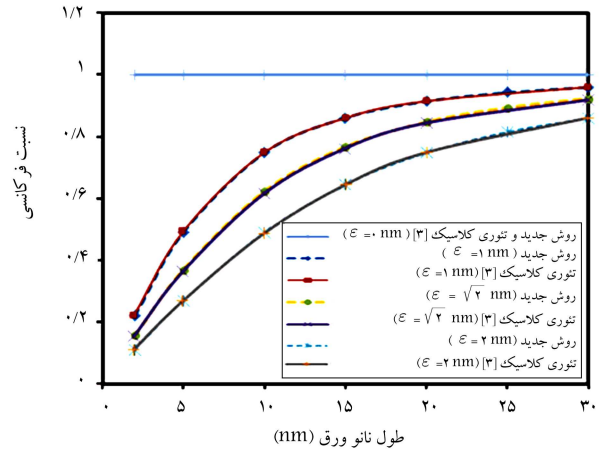
۲.۵. نتایج تکمیلی

نتایجی که در این بخش ارائه می‌شود به‌منظور پوشش خلاءهای موجود در شکل ۲ نتایج پیشین و گزارش نتایج جدید است. در نتایج تغییرات نسبت فرکانسی برحسب تغییرات نسبت ضخامت به طول (δ) به‌ازای چند پارامتر بی‌بعد غیر محلی و برای سه شرط مرزی مختلف که به‌دلخواه انتخاب شده‌اند، نشان داده شده است. نتیجه‌ی جالب توجهی که در این شکل مشاهده می‌شود این است که نسبت فرکانسی با تغییرات ضخامت تغییری نمی‌کند. از آنجا که شرایط مرزی، نسبت ابعادی و مود فرکانسی به‌دلخواه انتخاب شده است می‌توان نتیجه گرفت که این موضوع برای تمام شرایط مرزی، نسبت‌های ابعادی و مودهای مختلف فرکانسی و به‌ازای هر مقدار ضریب غیر محلی صحت دارد.

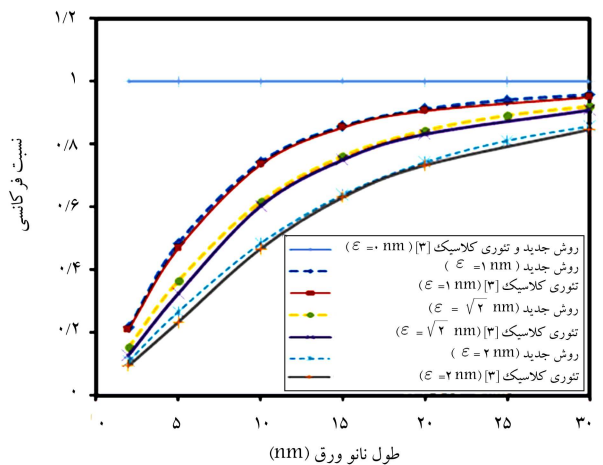
در جدول ۲ نتایج تغییرات نسبت فرکانسی برحسب نسبت ابعادی و پارامتر غیر محلی مختلف و شش شرط ممکن لوی ارائه شده است. اولین نکته‌ی بارز در این جدول کاهش شدید نسبت فرکانسی بر اثر افزایش ضریب غیرمحلی است؛ میزان این کاهش در مواردی که نسبت ابعادی کم‌تر است، بیشتر می‌شود. نکته‌ی دیگری که ممکن است با آن مواجه شویم این است که با اعمال شرط مرزی آزاد در یکی از لبه‌های نانورق، اثر ضریب محلی نسبت به عدم وجود شرط مرزی آزاد کم‌تر شده و فرکانس غیر محلی به‌نسبت کم‌تر از اثر مقیاس کوچک متأثر می‌شود.

۶. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر با استفاده از یک حل دقیق تحلیلی، ارتعاشات آزاد نانورق مستطیلی میندلین در فضای کشسانی غیرمحلی بررسی شده است. سه معادله‌ی حرکت مزدوج، توسط تعریف توابع پتانسیل جدید و با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل شده‌اند. مقایسه‌ی نتایج به دست آمده براساس روش جدید با آنچه که در مراجع دیگر گزارش شده نشان‌دهنده‌ی دقت بالای روش مورد استفاده است. علاوه بر این، نشان داده شده که نسبت فرکانس طبیعی مستقل از نسبت ضخامت به طول نانورق است، و با افزایش شماره مود و مقدار پارامتر غیرمحلی به‌ازای تمامی شرایط مرزی کاهش می‌یابد. همچنین، نتایج حاصله حاکی از آن است که نظریه‌ی کشسانی غیرمحلی، بر نانورق با شرایط مرزی آزاد کم‌ترین تأثیر، و بر نانورق با شرایط مرزی گیردار بیشترین تأثیر را دارد.

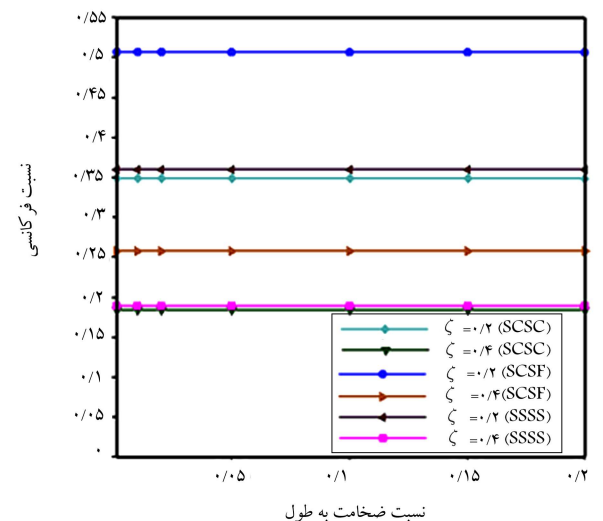


(a)



(b)

شکل ۱. مقایسه‌ی تغییرات نسبت فرکانسی با طول جانبی نانورق به‌ازای مقادیر مختلف ضریب غیر محلی.



شکل ۲. تغییرات نسبت فرکانسی با نسبت ضخامت به طول $(n, m = (1, 2))$ و $(\eta = 0.5)$.

جدول ۲. تغییرات فرکانس بی بعد و نسبت فرکانسی با پارامتر بی بعد غیرمجملی برای نانورق با شرایط مرزی و نسبت ابعادی مختلف $(m,n)=(1,1)$ و $(\delta = 0,1)$.

ζ	β^{NL}	نسبت فرکانسی	نسبت فرکانسی	نسبت فرکانسی	نسبت فرکانسی	نسبت فرکانسی
$\eta = 0,6$						
SCSF	۱۷,۵۱۹۶	۱,۰۰۰۰	۰,۸۷۷۹	۰,۶۸۲۰	۰,۵۳۵۱	۰,۴۳۵۴
SFSF	۹,۳۵۶۱	۱,۰۰۰۰	۰,۸۷۵۹	۰,۶۷۱۲	۰,۵۱۶۶	۰,۴۲۲۱
SFSS	۱۳,۹۳۳۰	۱,۰۰۰۰	۰,۸۵۴۷	۰,۶۳۲۸	۰,۴۷۶۹	۰,۳۷۶۲
SSSS	۳۵,۰۶۴۳	۱,۰۰۰۰	۰,۶۳۳۵	۰,۳۷۸۹	۰,۲۶۳۳	۰,۲۰۰۵
SCSS	۴۵,۰۹۲۳	۱,۰۰۰۰	۰,۶۱۵۹	۰,۳۶۳۱	۰,۲۵۱۳	۰,۱۹۱۰
SCSC	۵۶,۸۹۶۷	۱,۰۰۰۰	۰,۶۰۸۰	۰,۳۵۶۰	۰,۲۴۵۸	۰,۱۸۶۷
$\eta = 0,8$						
SCSF	۱۳,۸۹۹۶	۱,۰۰۰۰	۰,۸۶۶۷	۰,۶۵۵۹	۰,۵۰۱۴	۰,۳۹۸۸
SFSF	۹,۴۰۴۷	۱,۰۰۰۰	۰,۸۷۱۸	۰,۶۶۳۵	۰,۵۰۸۵	۰,۴۰۴۸
SFSS	۱۲,۲۵۴۹	۱,۰۰۰۰	۰,۸۵۴۸	۰,۶۳۳۰	۰,۴۷۷۱	۰,۳۷۴۶
SSSS	۲۴,۲۳۳۰	۱,۰۰۰۰	۰,۷۰۵۰	۰,۴۴۵۱	۰,۳۱۴۶	۰,۲۴۱۲
SCSS	۲۹,۸۰۸۶	۱,۰۰۰۰	۰,۶۹۱۴	۰,۴۳۰۸	۰,۳۰۳۰	۰,۲۳۱۹
SCSC	۳۶,۷۵۹۲	۱,۰۰۰۰	۰,۶۸۴۶	۰,۴۲۳۷	۰,۲۹۷۳	۰,۲۲۷۳
$\eta = 1,0$						
SCSF	۱۲,۲۶۰۶	۱,۰۰۰۰	۰,۸۶۱۶	۰,۶۴۵۸	۰,۴۹۰۴	۰,۳۸۸۶
SFSF	۹,۴۴۵۸	۱,۰۰۰۰	۰,۸۶۸۳	۰,۶۵۷۸	۰,۵۰۱۹	۰,۳۹۸۸
SFSS	۱۱,۳۸۱۰	۱,۰۰۰۰	۰,۸۵۴۸	۰,۶۳۳۱	۰,۴۷۷۲	۰,۳۷۶۵
SSSS	۱۹,۰۸۴۰	۱,۰۰۰۰	۰,۷۴۷۵	۰,۴۹۰۴	۰,۳۵۱۲	۰,۲۷۰۸
SCSS	۲۲,۴۲۶۰	۱,۰۰۰۰	۰,۷۳۷۴	۰,۴۷۸۵	۰,۳۴۱۲	۰,۲۶۲۶
SCSC	۲۶,۷۳۶۹	۱,۰۰۰۰	۰,۷۳۱۹	۰,۴۷۲۱	۰,۳۳۵۹	۰,۲۵۸۳

پانوشتها

1. Graphene and Graphite sheets
2. super resonators
3. super manometers
4. Gibson
5. Differential Quadrature Method
6. Green function
7. dispersion curves
8. lattice dynamics

منابع (References)

1. Tighe, T., Worlock, J. and Roukes, M. "Direct thermal conductance measurements on suspended monocrystalline nanostructures", *Applied physics letters*, **70**, pp. 2687-2689 (1997).
2. Evoy, S., Carr, D., Sekaric, L., Olkhovets, A., Parpia, J. and Craighead, H. "Nanofabrication and electrostatic operation of single-crystal silicon paddle oscillators", *Journal of Applied physics*, **86**, pp. 6072-6077 (1999).
3. Bunch, J.S., Van der Zande, A.M., Verbridge, S.S., Frank, I.W., Tanenbaum, D.M., Parpia, J.M., Craighead, H.G. and McEuen, P.L. "Electromechanical resonators from graphene sheets", *Science*, **315**, pp. 490-493 (2007).
4. Freund, L.B. and Suresh, S., *Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution*, Cambridge University Press (2004).
5. Eringen, A.C. *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer Verlag (2002).
6. Aghababaei, R. and Reddy, J. "Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates", *Journal of Sound and Vibration*, **326**, pp. 277-289 (2009).
7. Lu, P., Zhang, P., Lee, H., Wang, C. and Reddy, J. "Nonlocal elastic plate theories", *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, **463** pp. 3225-3240 (2007).
8. Aksencer, T. and Aydogdu, M. "Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory", *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, **43** pp. 954-959 (2011).
9. Ansari, R., Sahmani, S. and Rouhi, H. "Rayleigh-ritz axial buckling analysis of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions", *Physics Letters A*, **375** pp. 1255-1263 (2011).
10. Pradhan, S. and Kumar, A. "Vibration analysis of orthotropic graphene sheets using nonlocal elasticity theory and differential quadrature method", *Composite Structures*, **93**, pp. 774-779 (2011).
11. Ansari, R., Rajabiehfard, R. and Arash, B. "Nonlocal finite element model for vibrations of embedded multi-

- layered graphene sheets”, *Computational Materials Science*, **49** pp. 831-838 (2010).
12. Ansari, R., Gholami, R., Hosseini, K. and Sahmani, S. “A sixth-order compact finite difference method for vibrational analysis of nanobeams embedded in an elastic medium based on nonlocal beam theory”, *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, pp. 2577-2586 (2011).
 13. Hosseini-Hashemi, S., Bedroud, M. and Nazemnezhad, R. “An exact analytical solution for free vibration of functionally graded circular/annular Mindlin nanoplates via nonlocal elasticity”, *Composite Structures* (2013).
 14. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Atashipour, S. “A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin functionally graded rectangular plates”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **53**, pp. 11-22 (2011).
 15. Hosseini-Hashemi, S., Fadaee, M. and Rokni Damavandi Taher, H. “Exact solutions for free flexural vibration of L/evy-type rectangular thick plates via third-order shear deformation plate theory”, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, pp. 708-727 (2011).
 16. Ansari, R., Rouhi, H. and Sahmani, S. “Calibration of the analytical nonlocal shell model for vibrations of double-walled carbon nanotubes with arbitrary boundary conditions using molecular dynamics”, *International Journal of Mechanical Sciences*, **53** pp. 786-792 (2011).
 17. Ansari, R. and Sahmani, S. “Small scale effect on vibrational response of single-walled carbon nanotubes with different boundary conditions based on nonlocal beam models”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, pp. 1965-1979 (2012).
 18. Ansari, R., Sahmani, S. and Arash, B. “Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets”, *Physics Letters A*, **375**, pp. 53-62 (2010).
 19. Duan, W., Wang, C. and Zhang, Y. “Calibration of nonlocal scaling effect parameter for free vibration of carbon nanotubes by molecular dynamics”, *Journal of Applied physics*, **101**, pp. 024305-024307 (2007).
 20. Eringen, A.C. “Nonlocal polar elastic continua”, *International Journal of Engineering Science*, **10** pp. 1-16 (1972).
 21. Eringen, A.C. “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”, *Journal of Applied physics*, **54** pp. 4703-4710 (1983).
 22. Jomehzadeh, E. and Saidi, A. “A levy type solution for free vibration analysis of a nano-plate considering the small scale effect”, *Recent Advances in Vibration Analysis*, DOI: 10.5772/24828.

