مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۳)
دوره‌ی ۳ - ۳۰، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۱۵-۲۷

Original Article

دینامیک و کنترل مجموعه ربات‌های غیر هولونومیک به‌منظور شرکت در عملیات شکار جمعی در سطوح غیرمستوی

حسن صیادی* (دانشیار)
محمدتقی ثابت (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

هدف این نوشتار کنترل غیرمرکزی تعدادی ربات سه‌چرخ به‌منظور شکار و پوشش حول هدف متحرک است. دینامیک هدف متحرک طوری در نظر گرفته شده که در حال فرار از ربات‌های مهاجم بوده و هیچ‌گونه قید حرکتی ندارد. برای تعیین معادلات حرکت از روش دینامیک کین، و برای تخمین موقعیت نسبی و متغیرهای حالت ربات‌های دیگر و هدف نیز از فیلتر و صافی کالمن استفاده شده است. مأموریت در سه سطح شیب‌دار، کروی و استوانه‌یی انجام شده است. نتایج حاصله شامل نمایش شکار و پوشش هدف توسط چهار ربات مهاجم و نمودارهای فواصل نسبی، سرعت، گشتاورها و همچنین ارائه‌ی متغیرهای تخمین به همراه خطاست. مشاهده می‌شود که با توجه به مقاومت مجموعه‌ی ربات‌ها در مقابل تغییر جهت و سرعت و غیرهولونومیک بودن آنها، کنترل‌کننده و تخمین‌گر پیشنهادی برای انجام مأموریت نتایج قابل قبولی داده است.

واژگان کلیدی: سیستم‌های چندعامله، دینامیک غیرهولونوم، شکار و پوشش، فیلتر کالمن، صافی کالمن، سطوح غیرمستوی.

sayyaadi@sharif.edu
mohammadtaghi.sabet@gmail.com

۱. مقدمه

در محیط‌های انسانی شبکه‌یی از افراد را در نظر بگیرید که به‌منظورهای مختلف با یکدیگر در تعامل هستند. برای ایجاد یک جامعه باید عوامل به وجود آورنده آن جامعه با یکدیگر مرتبط و هماهنگ باشند. این هماهنگی می‌تواند جنبه‌های مختلف همکاری یا رقابتی داشته باشد. این جوامع را سیستم‌های چندعامله[۱] می‌نامند.[۱]

سیستم‌های چندعامله، سیستم‌هایی هستند متشکل از تجمیع عوامل هماهنگ و روابط بین آنها، که در آن هر عامل وظیفه‌ی خود را می‌داند و می‌داند که چه زمانی با دیگری باید ارتباط برقرارکند. در این سیستم‌ها گروهی از عوامل با قابلیت‌های معمولی به جای یک عامل با قابلیت فوق‌العاده مورد استفاده قرار می‌گیرد. بررسی این‌گونه سیستم‌ها به‌دلیل برخورداری از سرعت و قابلیت اطمینان، نگه‌داری، انعطاف‌پذیری، تغییرپذیری، و توسعه در تقسیم کارها بین عوامل از اهمیت زیادی برخوردار است.[۲]

یکی از کاربردهای وسیع سیستم‌های چندعامله، که امروزه بسیار مورد توجه بشر قرارگرفته، افزایش علاقه به سیستم ربات‌های متحرک و شبکه‌ی حس‌گرهاست. در واقع، دیدگاه غالب این است که سیستم‌های رباتیکی چندعاملی، به‌زودی از نظر اقتصادی به صرفه شده و انجام کارهای متنوعی را که نیازمند نوعی درک توزیعی از محیط (مثل جست‌وجو و نجات، مراقبت و نظارت محیط، پوشش و شکار، اکتشافات فضایی، دفع زباله‌های خطرناک و عملیات نظامی) هستند، بر عهده خواهند گرفت. دسته‌یی از عامل‌های متحرک خودگردان به این توانایی نیاز دارند که روی یک ناحیه پخش شوند، به یک شکل از قبل تعیین شده درآیند، در یک نقطه دور هم جمع شوند، یا به طور همزمان و با یکدیگر حرکت کنند.[۳]

در بین ربات‌های مختلف، ربات‌های چرخ‌دار از اهمیت ویژه‌یی برخوردارند و به‌دلیل چرخ‌دار بودن بازه‌ی کاربردی وسیعی خواهند داشت. یکی از ربات‌های چرخ‌دار، ربات سه‌چرخ است که به‌دلیل ساخت آسان، شکل هندسی خاص، تعادل دینامیکی، قابلیت اتصال تجهیزات و حمل بار، پایین بودن هزینه‌ی نگه‌داری، سیستم تعلیق مناسب و انجام مانورهای گروهی پرسرعت از اهمیت ویژه‌یی برخوردار است. اهمیت این موضوع ناشی از کاربرد این نوع ربات‌ها در عملیات شکار و پوشش است که در زمینه‌ی نظامی و حفاظتی و نیز در زمینه‌ی علمی کاربرد دارد. از جمله کارهای انجام‌شده در این مقاله، بررسی حرکت این‌گونه ربات‌ها در سطوح غیر مستوی است که به واقعیت کاربردی بیشتر این سیستم‌ها نزدیک‌تر است.

این ربات‌ها، علاوه بر سینماتیک غیر هولونومیک[۲] و کنترل دشوار، دارای جرم و ممان اینرسی لحاظ شده‌اند و بررسی و طراحی کنترل‌کننده‌ی آنها به‌صورت دینامیکی انجام شده است. ازجمله کارهای انجام شده در مطالعه‌ی حاضر، به دست آوردن معادلات حرکت ربات‌ها با استفاده از روش دینامیک کین[۳] است که دریافتن الگوریتم کنترلی از اهمیت ویژه‌یی برخوردار است. تحلیل دینامیکی ربات‌ها به‌صورت سه‌بعدی

---

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۷/۹، اصلاحیه ۱۳۹۲/۲/۲۹، پذیرش ۱۳۹۲/۳/۶.

انجام شده و دارای چرخ‌هایی با جرم مفروض‌اند؛ گشتاور فرمان و گشتاور چرخ جلو به‌عنوان خروجی‌های کنترلی فرض شده‌اند. اثر اشباع و فیلترینگ عملگرها نیز مد نظر قرارگرفته است. کنترل سیستم چنان بوده است که هر ربات با استفاده از وضعیت نسبی مکانی و سرعتی که با دیگر ربات‌ها و هدف دارد تصمیم به حرکت در جهت صحیح می‌کند؛ کنترل مجموعه غیرمرکزی و همچنین مقیاس‌پذیر است و محدود به تعداد ربات‌ها نیست. نیروی وارد بر هدف به‌گونه‌یی است که هرچه ربات‌ها به آن نزدیک‌تر می‌شوند بیشتر به آن نیرو وارد می‌شود.

فرض بر آن است که هر ربات با استفاده از تخمین‌گر، مکان ربات‌های دیگر و هدف را تخمین می‌زند. هر ربات یک گیرنده‌ی سیگنال دارد و سیگنال‌های ارسالی از دیگر ربات‌ها و هدف و وسایل ارتباطی دیگر را دریافت می‌کند و با استفاده از یک سنسور تشخیص فاصله، فاصله‌ی نسبی با علامت‌گذاری‌های موجود بر روی زمین را، که برای تعیین مکان مطلق ربات‌ها تعبیه شده، اندازه می‌گیرد. همچنین ربات‌ها سنسورهایی دارند که متغیرهای حالت ــ نظیر سرعت چرخ جلو، زاویه‌ی فرمان و زاویه‌ی بدنه ــ را به‌دقت محاسبه می‌کنند. هر ربات با استفاده از خروجی این سنسورها و فیلتر کالمن[۴] متغیرهای لازم را تخمین می‌زند و نیز با استفاده از صافی کالمن[۵] به‌منظور بهبود بخشیدن به تخمین‌ها مأموریت خود را انجام می‌دهد.

برای کنترل ربات‌ها، متناسب با هر مأموریت از روش‌های کنترلی خاصی استفاده می‌شود. کارهایی که تا به حال برای کنترل ربات انجام شده عبارت است از: حرکت ربات به سمت توپ و قرار دادن آن در موقعیت هدف، با استفاده از روش لیاپانوف و یک کنترل‌کننده‌ی رایانه‌یی؛[۴] کنترل ربات به‌منظور تعقیب هدف و چرخش حول آن با کنترل مد لغزشی؛[۵] استفاده از کنترل فازی برای عبور ربات از کنار مانع و تولید مسیر؛[۶] عبور از مانع متحرک و ثابت و گذر از راهروی تنگ که در هر دو تحقیق از کنترل فازی استفاده شده و از لحاظ سینماتیکی ربات‌ها کنترل شده‌اند.[۷و۸]

کارهایی که در راستای عملیات گروهی ربات‌های چرخ‌دار صورت گرفته در ادامه بیان شده است. از مجموعه‌ی ربات‌ها به‌منظور ایجاد پوشش حول هدف متحرک یا ثابت استفاده شده است.[۹] ربات‌ها سه‌چرخه‌اند و برای کنترل‌شان از مدل سینماتیکی استفاده شده است. الگوریتم کنترلی به‌نحوی است که در حضور مانع نیز کارآیی دارد. برای کنترل از روش فیدبک متغیر با زمان استفاده شده است. فرض شده است که تمامی اطلاعات در دسترس است و نیازی به هیچ تخمین‌گری نیست؛ هر ربات با ربات‌های کناری خود در ارتباط بوده و با استفاده از فاصله‌یی که با آن دارد به کنترل مسیر می‌پردازد. برای انجام عملیات ربات‌ها باید در ابتدا آرایشی خاصی داشته باشند.[۹] هدف کنترل و تخمین متغیرهای حالت سه ربات شبه خودرو برای انجام مأموریت گروهی با آرایش خاص است.[۱۰] عملیات گروهی بدون رهبر بوده و از تخمین‌گر کالمن برای تخمین فواصل نسبی با ربات‌های دیگر و موانع استفاده شده است و کنترل سیستم به‌صورت سینماتیکی بررسی شده است. مهم‌ترین کار صورت‌گرفته در راستای کنترل مجموعه ربات‌های غیرهولونومیک در قالب یک رساله‌ی دکتری و با مضمون کنترل تعدادی ربات شبه خودرو بوده است.[۱۱] در آن پژوهش زوایای چرخ‌های جلو موازی فرض شده‌اند (در واقعیت این‌طور نیست) و ربات به‌صورت دوچرخ تحلیل دینامیکی شده است؛ هر ربات یک رهبر دارد و این رهبر زنجیره‌وار تا رهبر اصلی ادامه می‌یابد. ربات پیرو در مسیری بهینه به سمت ربات رهبر حرکت می‌کند. فرض بر آن است که متغیرهای حالت معلوم نبوده و از تخمین‌گر استفاده شده است. از سنسورهای دریافت جهت و توان موج ارسالی از ربات‌های دیگر برای یافتن مکان نسبی ربات‌ها استفاده شده است. برای کنترل سیستم از مدل سینماتیکی سیستم استفاده شده و از جرم و ممان اینرسی و گشتاورهای ورودی به سیستم نیز صرف‌نظر شده است. فرض بر آن بوده که سرعت رهبر اصلی ثابت است و بنابراین از الگوریتم‌های کنترلی سیستم‌های شتاب‌دار که قواعد خاص خود را دارند به دور است. همچنین الگوریتم کنترلی سیستم با استفاده از بهینه‌کردن نرم اقلیدسی سرعت واقعی و مطلوب با یک روش عددی با حجم محاسبات زیاد به دست آمده است.

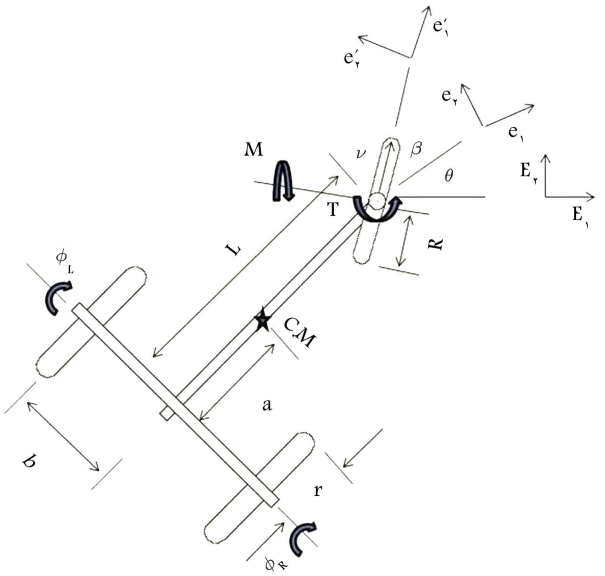
در زمینه‌ی شکار و پوشش هدف مطالعات معدودی صورت گرفته، و انجام این عملیات با استفاده از ربات‌های چرخ‌دار با دینامیک غیرهولونوم خاص این مقاله بوده است. الگوریتم کنترلی که برای کنترل مجموعه‌یی به کار رفته به‌صورت پارامتری بوده و از روش بهینه‌سازی پارامتری تابع هزینه (نرم اقلیدسی اختلاف شتاب مطلوب و واقعی) به دست آمده است.

در کل کنترل سیستم‌ها به دو نوع سینماتیکی و دینامیکی تقسیم شده که در بین این دو، کنترل دینامیکی از اهمیت خاصی برخوردار است و علت آن در نظر گرفتن نیرو یا گشتاور به‌عنوان کنترل‌کننده است؛ در این نوشتار نیز از این روش استفاده شده است. در این مقاله متغیرهای حالت نامشخص فرض شده و از تخمین‌گر استفاده شده است. به‌منظور کنترل گروهی، از یک روش غیرمرکزی و بدون رهبر استفاده شده که باعث افزایش تنوع حرکتی و قابلیت وفق‌پذیری سیستم می‌شود و همچنین الگوریتم به‌گونه‌یی است که می‌توان تعدادی ربات و مانع به آن اضافه کرد و نیز انجام عملیات شکار در سطوح غیرتخت خاص این پژوهش است. الگوریتم کنترلی مورد استفاده ساده است و حجم محاسبات کمی دارد.

زیربخش‌های این مقاله به‌ترتیب عبارت‌اند از: تحلیل دینامیک و سینماتیک ربات در سه سطح شیب‌دار، کروی و استوانه‌یی؛ طراحی کنترل‌کننده‌ی یک ربات؛ تشریح دینامیک هدف؛ طراحی کنترل گروهی برای انجام عملیات؛ طراحی تخمین‌گر حالت برای ربات‌ها و هدف؛ ارائه‌ی نمودارها و نتایج؛ نتیجه‌گیری؛ پیوست.

۲. تحلیل دینامیک و سینماتیک ربات

چنان که در شکل ۱ مشاهده می‌شود ربات به کار گرفته شده یک ربات سه‌چرخ بوده و دارای جرم و ممان اینرسی است. چرخ‌ها نیز دارای جرم و ممان اینرسی‌اند



شکل ۱. نمای ربات سه‌چرخ با مختصه‌های عمومی آن.

اما از جرم چرخ جلو در برابر تعلیق آن صرف‌نظر شده است. گشتاور فرمان و چرخ جلو به‌عنوان کنترل‌کننده در نظر گرفته شده‌اند.

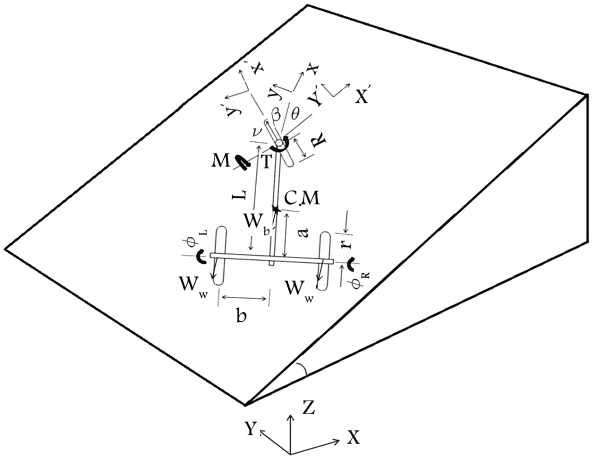
در شکل ۱ مختصه‌هایی عمومی برای ربات تعریف شده که برای هر سه سطح شیب‌دار، کروی و استوانه‌یی به کار گرفته می‌شوند. تنها تفاوتی که در این سه سطح وجود دارد تعریف مختصه‌های عمومی مرکز ربات‌هاست که در هر سطح متفاوت بوده و بسته به نوع سطح‌ها به‌صورت کارتزین، کروی و استوانه‌یی تعریف می‌شود. در این شکل θ زاویه‌ی بدنه‌ی ربات، β زاویه‌ی فرمان، v سرعت چرخ جلو، L فاصله‌ی مرکز چرخ جلو تا مرکز محور عقب، C.M نماد مرکز هندسی بدنه‌ی ربات، a فاصله‌ی مرکز هندسی تا مرکز محور عقب، b فاصله‌ی مرکز محور بدنه تا هر چرخ عقب، ϕ_R و ϕ_L زاویه‌ی دوران چرخ‌های چپ و راست عقب، R شعاع چرخ جلو، r شعاع چرخ‌های عقب و M و T به‌ترتیب گشتاور چرخ جلو و گشتاور فرمان خواهند بود. بدنه‌ی ربات به جرم m_b و دارای ممان اینرسی I_w^{ei} است؛ چرخ‌های عقب نیز به جرم m_w و ممان در راستاهای مختلف I_w^{ei} هستند (نماد ei معرف جهت مختصات است). برای تحلیل دینامیک و سینماتیک حرکت از روش دینامیک کین استفاده شده است.[۱۲و۱۳]

۱.۲. معادله‌ی حرکت در سطح شیب‌دار

سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب α را در نظر گرفته و مختصه‌های عمومی مد نظر برای ربات و همچنین نیروهای خارجی وارد بر آن را مطابق شکل ۲ فرض می‌کنیم. ابتدا تبدیل دستگاه‌های مختصات مورد استفاده در روابط ۱ و ۲ بیان می‌شود که تبدیلات مهمی در محاسبه‌ی معادلات حرکت‌اند. در این روابط e نماد بردار یکه‌ی هریک از دستگاه‌های مختصات است که به‌صورت اندیس آن نوشته شده است. همچنین در این مقاله به جای Sin و Cos به‌اختصار از S و C استفاده می‌شود.

$$\begin{bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \\ e_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\beta & S\beta & 0 \\ -S\beta & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} e_{X'} \\ e_{Y'} \\ e_{Z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (2)$$



شکل ۲. مختصه‌های دینامیکی ربات در سطح شیب‌دار.

چون از روش دینامیک کین برای محاسبه‌ی دینامیک سیستم استفاده می‌شود، ابتدا باید شبه سرعت‌هایی[۶] برای حل انتخاب شود. در انتخاب این شبه سرعت‌ها باید دقت شود تا هم در محاسبه‌ی دینامیک سیستم مورد استفاده قرار گیرد و هم در کنترل سیستم، چون این شبه سرعت‌ها در معادلات نهایی و فضای حالت سیستم آمده و باید کنترل شوند. بنابراین سرعت چرخ جلو و نیز سرعت زاویه‌ی فرمان به‌عنوان شبه سرعت‌ها انتخاب می‌شوند. در بخش کنترل ربات‌ها اهمیت این انتخاب دیده خواهد شد. بنابراین $u_1 = v$ و $u_1 = \dot{B}$ به‌عنوان دو شبه سرعت در هر سه سطح انتخاب می‌شوند. معادلات قیدی با توجه به شرط عدم لغزش چرخ‌ها در راستای سرعت و عمود بر آن خواهد بود. باید توجه داشت که چون از روش دینامیک کین استفاده می‌شود محاسبه‌ی معادلات قیدی برحسب شبه سرعت‌ها ضرورت می‌یابد. برای این کار لازم است سرعت مرکز جرم هریک از اجزاء ربات برحسب سرعت چرخ جلو باشد. در ادامه چگونگی به دست آمدن معادلات قیدی بیان می‌شود.

$$v_A = u_1\, e_{x'} \quad (3)$$

$$v_R = v_A - L\dot{\theta}e_y + b\dot{\theta}e_x = r\dot{\phi}_R e_x \quad (4)$$

$$v_L = v_A - L\dot{\theta}e_y - b\dot{\theta}e_x = r\dot{\phi}_L e_x \quad (5)$$

$$v_b = v_A - (L-a)\dot{\theta}e_y = \dot{X}'e_{X'} + \dot{Y}'e_{Y'} \quad (6)$$

در این روابط U_R سرعت چرخ جلو، v_R و v_L سرعت چرخ‌های عقب (به‌ترتیب چرخ سمت راست و چپ)، و v_b سرعت مرکز بدنه‌ی ربات است. با مشتق‌گیری از سرعت می‌توان شتاب هرکدام از اجزاء را یافت. حال معادلات قیدی به دست آمده (معادلات ۸ تا ۱۲) نشان می‌دهند که این قیود غیرهولونومیک بوده و انتگرال‌پذیر نخواهند بود. قیود دارای شکل کلی $a_i^T(q)\dot{q} = 0$ (q مختصه‌ی عمومی است) را فافین[۷] می‌نامند. در رابطه‌ی ۷ متغیرهایی بیان شده است.

$$\begin{aligned} a_1 &= C\beta C\theta - \frac{a}{L}S\beta S\theta, \\ a_2 &= C\beta S\theta + \frac{a}{L}S\beta C\theta, \\ a_3 &= \frac{S\beta}{L}, \\ a_4 &= \frac{C\beta}{r} + \frac{b}{rL}S\beta, \\ a_5 &= \frac{C\beta}{r} - \frac{b}{rL}S\beta \end{aligned} \quad (7)$$

معادلات قیدی:

$$\dot{X}' = a_1 u_1 \quad (8)$$

$$\dot{Y}' = a_2 u_1 \quad (9)$$

$$\dot{\theta} = a_3 u_1 \quad (10)$$

$$\dot{\phi}_R = a_4 u_1 \quad (11)$$

$$\dot{\phi}_L = a_5 u_1 \quad (12)$$

برای حل به روش دینامیک کین به سرعت زاویه‌یی، اندازه حرکت زاویه‌یی و مشتق آن نیاز داریم. سرعت زاویه‌یی در روابط ۱۳ تا ۱۵ بیان شده و اندازه حرکت با استفاده از ضرب سرعت زاویه‌یی هریک از اجزاء در ممان اینرسی آن به دست

می‌آید. $(H = I\omega)$

$$\omega_R = \dot{\phi}_R e_y + \dot{\theta} e_z \quad (۱۳)$$

$$\omega_L = \dot{\phi}_L e_y + \dot{\theta} e_z \quad (۱۴)$$

$$\omega_b = \dot{\theta} e_z \quad (۱۵)$$

حال با استفاده از معادله‌ی دینامیک کین (رابطه‌ی ۱۶)، معادله‌ی حرکت ربات بیان می‌شود. در این رابطه V_{Gi}^k بردار سرعت مربوط به هرکدام از شبه سرعت‌ها در هر جزء سیستم است. a_{Gi} شتاب مرکز جرم هریک از اجزاء، ω_{Gi}^k بردار سرعت زاویه‌یی هریک از اجزاء، F_G و M_G نیرو و گشتاور وارده به مرکز جرم هریک از اجزاء و F_B نیروی وارده به هر جزء در خارج از مرکز جرم است.

$$\sum_{i=1}^{N} V_{G_i}^k . m a_{G_i} + \omega_{G_i}^k . \dot{H}_G = \sum_{i=1}^{N} V_{G_i}^k . F_{G_i} + \omega_{G_i}^k . M_G + V_{B_i}^k . F_B \quad (۱۶)$$

معادلات حرکت دینامیکی با استفاده از معادله‌ی دینامیک کین و به‌صورت معادله‌ی ۱۷ به دست می‌آید. ضرایب متغیر a_iها در این معادله پارامترهایی از زاویه‌ی فرمان و بدنه‌ی ربات‌اند که در پیوست الف بیان شده‌است.

$$\dot{u}_1 = \frac{M}{Ra_9} + \frac{a_{12}}{a_9} - \frac{a_{10}}{a_9} u_1 u_2 - \frac{a_{11}}{a_9} u_1^2 \quad (۱۷)$$

$$u_2 = \frac{T}{C_b} \quad (۱۸)$$

برای یافتن $\ddot{X}'$ و $\ddot{Y}'$ چون روابط ۸ و ۹ همواره برقرار است می‌توان از آنها مشتق گرفت که به‌صورت روابط ۱۹ و ۲۰ به دست می‌آیند. در این رابطه‌ها متغیرهای a_i وجود دارد که در پیوست الف آمده‌اند.

$$\ddot{X}' = \dot{u}_1 a_1 + u_1 a_{13} \quad (۱۹)$$

$$\ddot{Y}' = \dot{u}_1 a_2 + u_1 a_{14} \quad (۲۰)$$

با انتخاب متغیرهای حالت به‌صورت رابطه‌ی ۲۱ می‌توان معادلات حاکم را به فرم فضای حالت (معادله‌ی ۲۲) نوشت:

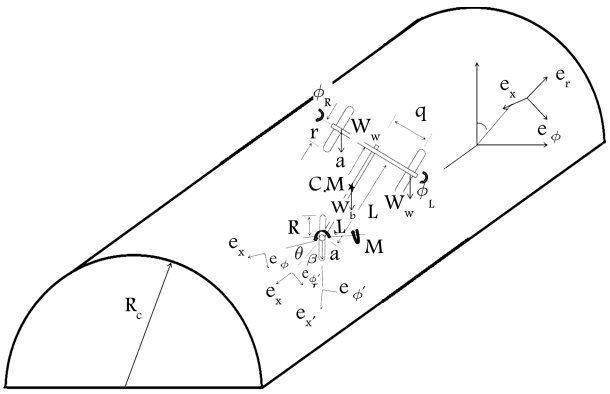
$$x_1 = u_1, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = X', \quad x_5 = Y' \quad (۲۱)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{11}}{a_9} x_1^2 + \frac{a_{12}}{a_9} \\ 0 \\ a_3 x_1 \\ a_1 x_1 \\ a_2 x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Ra_9} & -\frac{a_{10}}{a_9 C_b} x_1 \\ 0 & 1/C_b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} \quad (۲۲)$$

و به طور خلاصه:

$$\dot{X} = f(X, \tau)$$

$$X = [x_1 \cdots x_5]^T, \quad \tau = \begin{bmatrix} M & T \end{bmatrix}^T \quad (۲۳)$$



شکل ۳. مختصه‌های عمومی ربات در سطح استوانه‌یی.

۲.۲. معادلات حرکت در سطح استوانه‌یی

در سطح استوانه نیز برای یافتن معادلات حرکت همانند سطح شیب‌دار عمل خواهد شد و تنها تفاوت در این سطح کاربرد مختصات استوانه‌یی به‌جای کارتزین برای حل است. مختصه‌های عمومی ربات در این سطح در شکل ۳ نشان داده شده است. باید توجه داشت که در یافتن معادلات حرکت، شعاع سطح چنان بزرگ فرض شده که در یک نقطه از سطح، تمامی اجزای ربات در یک ارتفاع قرار دارند.

ماتریس‌های تغییر مختصات به‌صورت روابط زیر در مختصات استوانه‌یی تعریف می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} e_\varphi \\ e_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\varphi \\ e_X \end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

$$\begin{bmatrix} e_{\varphi'} \\ e_{x'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\beta & -S\beta \\ S\beta & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_\varphi \\ e_x \end{bmatrix} \quad (۲۵)$$

$$\begin{bmatrix} e_X \\ e_Y \\ e_Z \end{bmatrix} = [R_{\phi,e_X}]\,[R_{-\theta,e_r}] \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

$$[R_{\phi,e_X}]\,[R_{-\theta,e_r}] = \begin{bmatrix} C\theta & S\theta & 0 \\ -S\theta C\phi & C\phi C\theta & -S\phi \\ -S\phi S\theta & S\phi C\theta & C\phi \end{bmatrix} \quad (۲۷)$$

همانند سطح شیب‌دار، با شرط عدم لغزش می‌توان قیود سینماتیکی را یافت. سرعت هریک از اجزاء در پیوست ب آمده است. قیود حرکتی عبارت‌اند از:

$$\dot{X} = a_1 u_1 \quad (۲۸)$$

$$\dot{\phi} = \frac{a_2 u_1}{R_c + r} \quad (۲۹)$$

سه قید حرکتی دیگر همان معادلات ۱۰ تا ۱۲ است.

حال برای یافتن معادلات حرکت به روش دینامیک کین، چنان که در معادلات سطح شیب‌دار نیز بیان شد، دست‌یابی به سرعت زاویه‌یی (پیوست ب) ضروری است تا با استفاده از آن اندازه حرکت زاویه‌یی و نیز مشتق آن معلوم شود. با استفاده از معادله‌ی دینامیک کین (رابطه‌ی ۱۶)، معادلات حرکت به‌صورت روابط ۳۰ و ۳۱

به دست می‌آید. متغیرهای a_i در این روابط در پیوست الف آمده است.

$$\dot{u}_1 = \frac{M}{Ra_{17}} + \frac{a_{20}}{a_{17}} - \frac{a_{18}}{a_{17}}u_1u_2 - \frac{a_{19}}{a_{17}}u_1^2 \quad (30)$$

$$u_2 = \frac{T}{C_b} \quad (31)$$

از آنجا که روابط ۲۸ و ۲۹ همواره برقرارند با مشتق‌گیری از این دو رابطه، $\ddot{\phi}$ و $\ddot{X}$ به دست می‌آید.

$$\ddot{X} = \dot{u}_1a_1 + u_1a_{13} \quad (32)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\dot{u}_1a_2}{R_C + r} + \frac{u_1a_{14}}{R_C + r} \quad (33)$$

حال معادله‌ی حرکت را می‌توان به فرم فضای حالت نوشت. متغیرهای حالت به‌صورت رابطه‌ی ۳۴ تعریف می‌شود.

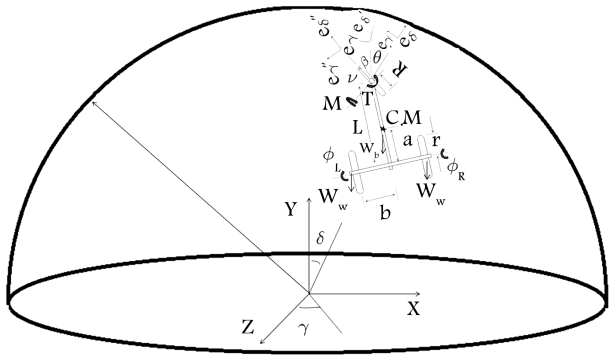
$$x_1 = u_1, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = X, \quad x_5 = \phi \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{19}}{a_{17}}x_1^2 + \frac{a_{20}}{a_{17}} \\ 0 \\ a_3x_1 \\ a_1x_1 \\ \frac{a_2x_1}{R_C+r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Ra_{17}} & -\frac{a_{18}}{a_{17}C_b}x_1 \\ 0 & 1/C_b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} \quad (35)$$

این معادله‌ی فضای حالت را می‌توان در فرم کلی رابطه‌ی ۲۳ بیان کرد.

۳.۲. معادلات حرکت در سطح کروی

برای محاسبه‌ی معادلات حرکت از دستگاه مختصات کروی استفاده می‌شود. در یافتن معادلات حرکت شعاع سطح چنان بزرگ فرض شده که در یک نقطه از سطح، تمامی اجزای ربات در یک ارتفاع قرار دارند. در شکل ۴ مختصه‌های عمومی ربات نشان داده شده است. ماتریس‌های تغییر مختصات در مختصات کروی چنین



شکل ۴. مختصه‌های عمومی ربات در سطح کروی.

تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} e_\delta \\ e_\gamma \\ e_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\delta'} \\ e_{\gamma'} \\ e_{r'} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} e_{\delta''} \\ e_{\gamma''} \\ e_{r''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\beta & S\beta & 0 \\ -S\beta & C\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\delta'} \\ e_{\gamma'} \\ e_{r'} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} e_X \\ e_Y \\ e_Z \end{bmatrix} = [R_{-\gamma,Y}]\,[R_{-\delta,X}]\,[R_{-\theta,Y}] \begin{bmatrix} e_{\gamma'} \\ e_{r'} \\ e_{\delta'} \end{bmatrix}$$

$$[R_{-\gamma,Y}]\,[R_{-\delta,X}]\,[R_{-\theta,Y}] = \begin{bmatrix} C\gamma C\theta - S\theta C\delta S\gamma & -S\gamma S\delta & C\gamma S\theta + C\theta C\delta S\gamma \\ -S\theta S\delta & C\delta & S\delta C\theta \\ -S\gamma C\theta - S\theta C\delta C\gamma & -S\delta C\gamma & -S\gamma S\theta + C\theta C\delta C\gamma \end{bmatrix} \quad (38)$$

با استفاده از شرط عدم لغزش، معادلات قیدی به‌صورت روابط زیر به دست می‌آیند. سرعت هر یک از اجزاء در پیوست ب آمده است.

$$\dot{\delta} = -\frac{a_1u_1}{R_s + r} \quad (39)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{a_2u_1}{(R_S + r)S\delta} \quad (40)$$

$$\dot{\theta} = (a_3 - \frac{a_2C\delta}{(R_S + r)S\delta})u_1 \quad (41)$$

دو معادله‌ی قیدی دیگر همان روابط ۱۱ و ۱۲ خواهد بود. سرعت زاویه‌یی هریک از اجزاء در پیوست ب آمده است که با استفاده از آن اندازه حرکت زاویه‌یی به دست می‌آید. با استفاده از معادله‌ی دینامیک کین که در رابطه‌ی ۱۶ آمده معادلات حرکت به‌صورت روابط ۴۲ و ۴۳ به دست می‌آید. متغیرهای a_i در این روابط در پیوست الف شرح داده شده است.

$$\dot{u}_1 = \frac{M}{Ra_{21}} + \frac{a_{24}}{a_{21}} - \frac{a_{22}}{a_{21}}u_1u_2 - \frac{a_{23}}{a_{21}}u_1^2 \quad (42)$$

$$u_2 = \frac{T}{C_b} \quad (43)$$

$\ddot{\delta}$ و $\ddot{\gamma}$ چون روابط ۳۹ و ۴۰ همواره برقرارند با مشتق‌گیری از این دو رابطه به دست می‌آیند.

$$\ddot{\delta} = (\dot{u}_1a_1 + u_1a_{13})\frac{-1}{(R_s + r)} \quad (44)$$

$$\ddot{\gamma} = \frac{1}{R_s + r}\frac{(\dot{u}_1a_2 + u_1a_{14})S\delta + \frac{a_2C\delta a_1u_1^2}{R_s+r}}{S\delta^2} \quad (45)$$

حال معادله‌ی حرکت را می‌توان به فرم فضای حالت ۴۶ نوشت. متغیرهای حالت به‌صورت رابطه‌ی ۴۷ تعریف می‌شوند.

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \delta, \quad x_5 = \gamma \tag{۴۶}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{23}}{a_{21}}x_1^2 + \frac{a_{24}}{a_{21}} \\ 0 \\ (a_3 - \frac{a_2 C\delta}{(R_S+r)S\delta})x_1 \\ -\frac{a_1 x_1}{(R_S+r)} \\ \frac{a_2 x_1}{(R_S+r)S\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Ra_{21}} & -\frac{a_{22}}{a_{21}C_b}x_1 \\ 0 & 1/C_b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ T \end{bmatrix} \tag{۴۷}$$

که این معادله‌ی فضای حالت را می‌توان با فرم کلی رابطه‌ی ۲۳ بیان کرد.

با اندکی تأمل درمی‌یابیم که فرم کلی معادلات حرکت دینامیکی که توسط دینامیک کین به دست آمده در هر سه سطح شبیه هم بوده و تنها تفاوت آنها در متغیرهای a_i است که برای هرکدام از سطوح به‌طور مجزا در پیوست الف آمده است.

۳. الگوریتم کنترلی ربات

از آنجا که هدف این مقاله کنترل ربات‌ها به سمت هدف متحرک و حلقه‌زنی حول آن است، کنترل مختصات مرکز بدنه‌ی ربات‌ها که در هر سطح با توجه به نوع دستگاه مختصات متفاوت است برای کنترل ربات کافی است. در اینجا مختصات مرکز در تمامی دستگاه‌ها به‌اختصار به‌صورت رابطه‌ی ۴۸ تعریف خواهد شد که در آن q_1 و q_2 در هر دستگاه مختصات متفاوت است و در پیوست پ برای هر سطح بیان شده است.

$$q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \tag{۴۸}$$

در کنترل زاویه‌ی بدنه و با توجه به قیدهای حرکتی، حرکت ربات در جهت مطلوب سبب می‌شود زاویه‌ی بدنه نیز در جهت مطلوب قرار گیرد. زاویه‌ی فرمان نیز با توجه به قید حرکتی موجود کنترل می‌شود که در بخش کنترل زاویه‌ی بدنه بیشتر توضیح داده خواهد شد. همانجا، کنترل سیستم‌های غیرهولونومیک به‌طور مفصل بیان شده[۱۳،۱۴و۱۵] و سیستم‌ها از نظر کنترل‌پذیر بودن و دسترس‌پذیر بودن به‌دقت دسته‌بندی شده‌اند. در سیستم ربات چرخ‌دار مورد بحث، ربات‌ها به‌دلیل چرخ‌دار بودن دارای قیود غیرهولونومیکی هستند که نمی‌توانند به‌راحتی در هر جهتی به سمت هدف مورد نظر میل کنند. درنتیجه این‌گونه سیستم‌ها کنترل‌پذیر نخواهند بود، اما چون قیدها هندسی نیستند ربات‌ها به هر نقطه‌یی از فضا می‌توانند انتقال یابند و از این رو این سیستم‌ها دسترس‌پذیرند و محدودیت مکانی برای آنها وجود نخواهد داشت. درمورد ربات غیرهولونومیک مورد نظر، نه می‌توان سرعت ربات را طوری تعیین کرد که $\dot{q} = \dot{q}_d$ شود و نه می‌توان گشتاورکنترلی را به دست آورد که $\ddot{q} = \ddot{q}_d$ شود. بنابراین چون سیستم مورد نظر کنترل‌ناپذیر است نمی‌توان خطی‌سازی فیدبک را انجام داد. در این نوشتار با بهینه‌سازی یک تابع هدف، شتاب واقعی ربات را به شتاب مطلوب میل داده و با استفاده از یک کنترل‌کننده‌ی مشتقی- تناسبی (رابطه‌ی ۴۹) شتاب مطلوب طوری طراحی می‌شود که سرعت و مکان ربات به سرعت و مکان هدف میل کند. اندیس d به‌معنای مطلوب[۸]، و اندیس t به‌معنای مختصه‌های هدف است. در نهایت سیگنال کنترلی به‌صورت تابعی از q، $\dot{q}$ و $\ddot{q}$ به دست می‌آید.

$$\ddot{q}_d = -K_d(\dot{q} - \dot{q}_t) - K_p(q - q_t) + \ddot{q}_t \tag{۴۹}$$

در مطالعات محققین، نرم اقلیدسی اختلاف سرعت واقعی و مطلوب با استفاده از سیگنال کنترلی خاصی بهینه شده است.[۱۱] دیدگاه دیگری نیز وجود دارد که در آن نرم اقلیدسی اختلاف مکان واقعی و مطلوب را بهینه می‌کند؛ کنترل مبتنی بر روش پیش‌بینی مدل (MPC) به‌شکل خطی بوده و فرم غیرخطی آن (NMPC) است.

اجرای این الگوریتم مستلزم پیش‌بینی آینده، بهینه‌سازی عددی و انجام محاسبات زیاد است. در این نوشتار با استفاده از بهینه‌سازی پارامتری، نرم اختلاف شتاب واقعی و مطلوب سیستم کنترل خواهد شد. از آنجا که گشتاور هر لحظه شتاب آن لحظه را تعیین می‌کند فقط با بهینه‌سازی این اختلاف کنترل‌کننده‌ی مناسبی برای سیستم طراحی می‌شود. با بهینه‌سازی پارامتری حجم محاسبات کم و الگوریتم کنترلی ساده خواهد شد. این روش برای همه‌ی سیستم‌های کنترل‌ناپذیر مناسب نیست ولی مناسب‌بودن آن برای این سیستم در ادامه نشان داده می‌شود.

در رابطه‌ی ۵۰ تابع هدفی که باید بهینه شود معرفی شده است، که همان نرم اقلیدسی اختلاف شتاب واقعی و مطلوب است.

$$J = \|\ddot{q} - \ddot{q}_d\| \tag{۵۰}$$

اگر زاویه‌ی فرمان در جهت مطلوبی قرارگیرد و گشتاور وارده به چرخ جلو (گشتاور محرک) ــ که میزان آن در هر لحظه تعیین‌کننده‌ی شتاب ربات است ــ نیز دارای مقدار مطلوبی باشد، شتاب واقعی ربات به شتاب مطلوب میل کرده و نرم اقلیدسی یا همان تابع هدف به صفر میل می‌کند؛ این نکته از دیدگاه فیزیکی و شهودی نیز قابل لمس است. بنابراین با بهینه‌سازی این تابع هدف و میل دادن آن به سمت صفر می‌توان گشتاورهای کنترلی چرخ جلو و زاویه‌ی مناسب فرمان را، که طبق معادلات دینامیکی رابطه‌ی مستقیمی با گشتاور فرمان دارد، به دست آورد. براین اساس، طبق یک الگوریتم ساده‌ی کنترلی می‌توان گشتاورهای کنترلی مناسب به دست آورد.

بنا بر توضیحات داده شده در بالا و تابع هدف موجود، رابطه‌ی ۵۱ که مجذوری از تابع هدف است تعریف خواهد شد. با توجه به این‌که $\ddot{q}_1$ و $\ddot{q}_2$ در تمامی مختصات‌ها به‌طور مجزا در پیوست پ تعریف شده‌اند هرکدام تابعی از u_1، u_1 و u_2 هستند.

$$J^2 = (\ddot{q}_1 - \ddot{q}_{d1})^2 + (\ddot{q}_2 - \ddot{q}_{d2})^2 \tag{۵۱}$$

با بهینه‌سازی رابطه‌ی ۵۱ نسبت به شتاب چرخ جلو و سرعت زاویه‌ی فرمان می‌توان گشتاورهای کنترلی را به دست آورد. به این صورت ابتدا $\dot{u}_1$ مطلوب از رابطه‌ی ۵۲ به دست آمده و سپس با استفاده از رابطه‌ی معادله‌ی حرکت دینامیکی که با روش دینامیک کین به دست آمده، و قرار دادن $\dot{u}_1$ مطلوب در معادله‌ی حرکت می‌توان گشتاور کنترلی M را تعیین کرد. ولی $\dot{u}_1$ مطلوب تابعی از گشتاور کنترلی فرمان است پس ابتدا باید T را بیابیم که روش یافتن آن در ادامه توضیح داده شده است.

$$\frac{\partial J^2}{\partial \dot{u}_1} = 0 \tag{۵۲}$$

گشتاورکنترلی فرمان را نیز می‌توان با بهینه‌سازی تابع هدف نسبت به سرعت زاویه‌یی فرمان و مطابق رابطه‌ی ۵۳ به دست آورد و با قرار دادن آن در معادله‌ی دینامیکی گشتاور کنترلی T را به دست می‌آید.

$$\frac{\partial J^2}{\partial u_2} = 0 \tag{۵۳}$$

اگر گشتاورکنترلی فرمان به این روش به دست آید، هیچ کنترلی بر قید زاویه‌ی فرمان نخواهد بود. منظور از کنترل زاویه‌ی فرمان این است که این زاویه نباید از یک حد خاصی بیشتر یا کم‌تر شود زیرا در این صورت قید زاویه‌ی فرمان نقض خواهد شد. بنابراین مقدار گشتاورکنترلی را باید از روش دیگری یافت چون فرض بر این است که زاویه‌ی فرمان بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ متغیر است. الگوریتم کنترلی زاویه‌ی فرمان در ادامه توضیح داده شده است.

۳.۱. کنترل زاویه‌ی فرمان

رابطه‌ی ۵۴ دینامیک مطلوب زاویه‌ی فرمان را نشان می‌دهد که برای یافتن آن باید β_d و $\dot{\beta}_d$ را یافت؛ در این رابطه k_β ثابت کنترل مناسبی است که باید تنظیم شود. در ادامه روش یافتن دو پارامتر β_d و $\dot{\beta}_d$ بیان خواهد شد.

$$\dot{\beta} = -K_\beta\left(\beta - \beta_d\right) + \dot{\beta}_d \tag{۵۴}$$

با توجه به شکل ۱ که مختصه‌های ربات در آن نشان داده شده، روابط ۵۵ تا ۵۸ بیان‌گر روابط قیدی در دستگاه عمومی‌اند که عیناً قابل رؤیت است یا از معادلات قیدیِ بیان شده قابل محاسبه است. اندیس d به‌معنای مطلوب، و اندیس E_1 و E_2 معرف راستای سرعت مرکز بدنه است.

$$v_d^b = \sqrt{{v_{d_{E_1}}^b}^2 + {v_{d_{E_2}}^b}^2} \tag{۵۵}$$

$$v_{d_{E_1}}^b = C\theta_d v_d^b \tag{۵۶}$$

$$v_{d_{E_2}}^b = S\theta_d v_d^b \tag{۵۷}$$

$$\dot{\theta}_d = \frac{v_d^b \tan\left(\beta_d\right)}{L} \tag{۵۸}$$

با توجه به رابطه‌ی ۵۹ دیده می‌شود که با حرکت ربات به سمت هدف زاویه‌ی بدنه‌ی ربات نیز خود به خود به سمت مقدار مطلوب خود میل می‌کند. البته باید گفت که در این روابط با توجه به نوع مأموریت، $\dot{v}_{d_{E_1}}^b$ و $\dot{v}_{d_{E_2}}^b$ شتاب‌های مطلوب مرکز بدنه‌ی ربات و با مقداری معلوم فرض می‌شوند. طریقه‌ی محاسبه‌ی آن در بخش کنترل مجموعه‌ی ربات بیان خواهد شد و نیز $v_{d_{E_1}}^b$، $v_{d_{E_2}}^b$ و $\ddot{v}_{d_{E_1}}^b$، $\ddot{v}_{d_{E_2}}^b$ که به ترتیب سرعت‌های مطلوب و مشتق شتاب مطلوب مرکز بدنه‌اند با استفاده از انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری شتاب مطلوب معلوم خواهند شد.

$$\theta_d = a\tan 2\left(\frac{v_{d_{E_2}}^b}{v_d^b}, \frac{v_{d_{E_1}}^b}{v_d^b}\right) \tag{۵۹}$$

حال چون رابطه‌ی ۵۹ همواره برقرار است می‌توان با مشتق‌گیری از آن رابطه‌ی ۶۰ را یافت.

$$\dot{\theta}_d = \frac{\dot{v}_{d_{E_2}}^b v_{d_{E_1}}^b - \dot{v}_{d_{E_1}}^b v_{d_{E_2}}^b}{\left(v_d^b\right)^2} \tag{۶۰}$$

با استفاده از این روابط می‌توان β_d را یافت. چنان که در رابطه‌ی ۶۱ مشاهده می‌شود به‌دلیل استفاده از $\tan^{-1}$ زاویه مورد نظر بین $\frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2}$ قرار دارد، بنابراین قید فرمان را ارضا می‌کند. زاویه‌ی فرمان باید به‌درستی زاویه‌ی مطلوب را دنبال کند؛ وجود $\dot{\beta}_d$ در دینامیک زاویه‌ی فرمان نیز به‌همین دلیل است.

$$\beta_d = \tan^{-1}\left(\frac{L\left(\dot{v}_{d_{E_2}}^b v_{d_{E_1}}^b - \dot{v}_{d_{E_1}}^b v_{d_{E_2}}^b\right)}{\left(v_d^b\right)^3}\right) \tag{۶۱}$$

حال چون رابطه‌ی ۶۱ همواره برقرار است می‌توان با مشتق‌گیری از آن $\dot{\beta}_d$ را به‌صورت رابطه‌ی ۶۲ به دست آورد.

$$\dot{\beta}_d = Lv_d^b\Big(\frac{\left(\ddot{v}_{d_{E_2}}^b v_{d_{E_1}}^b - \ddot{v}_{d_{E_1}}^b v_{d_{E_2}}^b\right)\left(v_d^b\right)^2}{\left(v_d^b\right)^6 + L^2\left(\dot{v}_{d_{E_2}}^b v_{d_{E_1}}^b - \dot{v}_{d_{E_1}}^b v_{d_{E_2}}^b\right)} - \frac{3\left(\dot{v}_{d_{E_2}}^b v_{d_{E_1}}^b - \dot{v}_{d_{E_1}}^b v_{d_{E_2}}^b\right)\left(\dot{v}_{d_{E_1}}^b v_{d_{E_1}}^b - \dot{v}_{d_{E_2}}^b v_{d_{E_2}}^b\right)}{\left(v_d^b\right)^6 + L^2\left(\dot{v}_{d_{E_2}}^b v_{d_{E_1}}^b - \dot{v}_{d_{E_1}}^b v_{d_{E_2}}^b\right)}\Big) \tag{۶۲}$$

طبق رابطه‌ی ۶۳ گشتاور کنترلی فرمان معلوم می‌شود.

$$T = C_b\dot{\beta} = C_b\left(-K_\beta\left(\beta - \beta_d\right) + \dot{\beta}_d\right) \tag{۶۳}$$

رابطه‌ی ۶۴ دینامیک خطای حلقه‌بسته‌ی زاویه‌ی فرمان را نشان می‌دهد که در آن با انتخاب K_β مثبت خطا به سمت صفر میل می‌کند.

$$\dot{e} + K_\beta e = 0 \rightarrow e = \beta - \beta_d \tag{۶۴}$$

چون معادله‌ی دینامیکی خطا درجه یک است خطا فراجهش نداشته، β دنبال‌کننده‌ی β_d به‌صورت میراست و قید زاویه‌ی فرمان را نقض نمی‌کند. گاهی امکان دارد β_d به‌دلیل وجود $\tan^{-1}$ در محاسبه‌ی آن به‌طور ناپیوسته از $\pm\frac{\pi}{2}$ به $\mp\frac{\pi}{2}$ جهش کند که به‌دلیل وجود فیلتر ۶۳، زاویه‌ی β به‌آرامی به زاویه‌ی β_d میل می‌کند. با جهش β_d تغییری در $\dot{\beta}_d$ ایجاد نمی‌شود؛ $\dot{\beta}_d$ همچنان ورودی مناسبی برای رابطه‌ی ۵۴ است.

گاهی اتفاق می‌افتد که گشتاور کنترلی خواسته شده بیش از حد بزرگ باشد که از توان عملگر خارج باشد؛ در این حالت عملگر تنها می‌تواند بیشینه گشتاور خروجی خود را ارائه کند یا گاهی سیگنال‌های فرمان به‌گونه‌یی هستند که نوسانات زیادی دارند و عملگر فقط می‌تواند به معدودی از آنها پاسخ دهد. بنابراین باید اثر اشباع و فیلترینگ عملگرها را در نظرگرفت که این کار توسط دو تابع ۶۵ و ۶۶ ارائه شده است:

$$\tau = \left\{\begin{array}{cc} u & |u| < \tau_{\max} \\ \tau_{\max} sign\left(u\right) & |u| > \tau_{\max} \end{array}\right\} \tag{۶۵}$$

$$\tau\left(s\right) = \frac{u\left(s\right)}{\rho s + 1} \tag{۶۶}$$

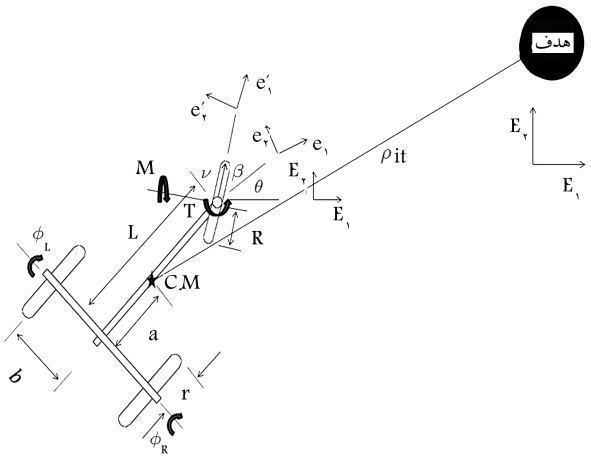
در این روابط u سیگنال گشتاور ایده‌ال است و τ خروجی غیر ایده‌آل عملگر و ρ عکس قطب فیلتر است که با افزایش آن توانایی عملگر برای دنبال کردن ورودی پله کاهش می‌یابد.

۴. دینامیک هدف متحرک

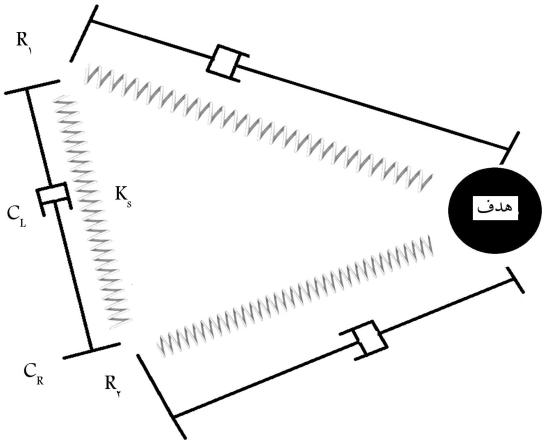
هدف متحرک به‌صورت ذره‌یی جرم‌دار فرض شده که دارای دینامیک هولونومیک است. بنابراین در یک نقطه می‌تواند بدون هیچ قید هندسی به هر جهتی حرکت کند (شکل ۵).

دینامیک هدف طوری فرض می‌شود که با نزدیک شدن ربات‌ها به هدف، هدف می‌گریزد تا به این ترتیب حالتی واقعی از تعقیب و گریز نمایان شود. رابطه‌ی ۶۷ بیان‌گر معادله‌ی حرکت هدف متحرک است و در آن m_t جرم هدف، و K_t ضریب نیروی گریز از هدف، و C_t ضریب استهلاک است. اندیس t بیان‌گر مشخصه‌ی هدف است.

$$m_t\begin{bmatrix}\ddot{q}_{E_1}^t \\ \ddot{q}_{E_2}^t\end{bmatrix} = K_t F_t - C_t\begin{bmatrix}\dot{q}_{E_1}^t \\ \dot{q}_{E_2}^t\end{bmatrix} \tag{۶۷}$$



شکل ۵. نمایش وضعیت هدف نسبت به ربات تعقیب‌کننده.



شکل ۶. نمایش تحلیل فنر و دمپر در یک توده‌ی جرم‌دار.

در این رابطه F_t نیروی گریز هدف است و چنان که در رابطه‌ی ۶۸ مشهود است طوری تعریف می‌شود که با نزدیک شدن ربات به هدف نیروی گریز بیشتر می‌شود. نیروی استهلاک هدف عاملی است که از افزایش بیش از حد سرعت هدف جلوگیری می‌کند.

$$F_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{e_{it}}}{\|\overrightarrow{\rho_{it}}\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overrightarrow{\rho_{it}}}{\|\overrightarrow{\rho_{it}}\|^2}$$
$$\|\overrightarrow{\rho_{it}}\| = R_{it} \qquad (68)$$

در رابطه‌ی ۶۸، $\overrightarrow{\rho_{it}}$ بردار موقعیت نسبی بین ربات‌ها و هدف است که بسته به نوع سطح و دستگاه مختصات متفاوت است. مختصه‌های عمومی برای ربات‌ها در هر سطح در پیوست پ آمده است که این مختصه‌ها برای هدف نیز به‌همین صورت است.

۵. طراحی کنترل‌کننده برای مجموعه ربات‌ها

هدف این بخش به دست آوردن شتاب‌های مطلوب $(\ddot{q}_{1d}, \ddot{q}_{2d})$ است. هدف این نوشتار کنترل مجموعه‌یی از ربات‌های چرخ‌دار دارای جرم است که به‌منظور حلقه‌زدن حول یک هدف متحرک به کار می‌روند. در این عملیات ممکن است ربات‌ها دور تا دور هدف حلقه زده و آن را شکار کنند یا با ایجاد پوششی در عقب آن باعث ایجاد عملیات محافظتی از هدف شوند. بنابراین مقصود، دنبال کردن هدف و قرارگیری در یک فاصله‌ی تعادلی از آن است، به‌طوری که هر ربات در فاصله‌ی مشخصی از ربات‌های دیگر قرار گیرد. با تحلیل اینرسیال که هر ربات باید در شرایط مکانی مشخصی نسبت به هدف و ربات‌های دیگر قرار داشته باشد، می‌توان شتاب مطلوب ربات‌ها را به دست آورد. باید توجه داشت که قوانین گروهی برای توده‌ی اینرسیال با سیستم‌های بدون جرم متفاوت است و نمی‌توان از قوانین کنترلی به کار گرفته در توده‌ی بدون جرم برای یک سیستم دارای جرم استفاده کرد؛ این قوانین باید با الگوریتم‌های دیگری ترکیب شود تا برای آنها قابل استفاده شوند. محققین در انجام عملیات گروهی از تحلیل زیر استفاده کرده‌اند[۱۶] و با تغییرات اعمالی روی این الگوریتم عملیات گروهی این تحقیق به انجام خواهد رسید.

با توجه به شکل ۶ دیده می‌شود که در نوشتار حاضر فرض شده که فنر و دمپرهایی در بین ربات‌ها، و نیز بین ربات‌ها با هدف وجود دارد. در واقع این فنرها بیان‌گر کنترل تناسبی و دمپرها بیان‌گر کنترل مشتقی‌اند. چنان که مشاهده می‌شود K_S بیان‌گر ضریب فنریت و همان کنترل‌کننده‌ی تناسبی است؛ C_L و C_R نیز ضریب استهلاک و همان کنترل‌کننده‌ی مشتقی‌اند. این مجموعه دارای دو ربات و یک هدف است و همه دارای جرم‌اند. با توجه به جرم‌دار بودن، اجرای الگوریتم گروهی مناسب بسیار با اهمیت است زیرا چنانچه کنترل مجموعه به‌درستی صورت نگیرد مجموعه ناپایدار وآشوب‌ناک خواهد شد. حال باید برای سیستم نشان داده شده در شکل ۶ شتاب‌های مطلوب طراحی شود تا با استفاده از آن و الگوریتم کنترلی بیان شده گشتاورهای کنترلی مناسبی طراحی شوند. با توجه به توضیحات فوق و شکل ۶ دیدگاه عینی‌تری کسب خواهد شد که در کنترل گروهی و نیز تنظیم ضرایب کمک می‌کند.

شتاب مطلوب هر ربات با استفاده از شتاب‌ها و موقعیت قرارگیری نسبت به دیگر ربات‌ها و هدف طراحی می‌شود، به‌گونه‌یی که هیچ‌یک از ربات‌ها و هدف با هم برخوردی نداشته باشند و فاصله‌ی تعادلی آنها حفظ شود. فاصله تعادلی ربات‌ها با استفاده از ابعاد آنها مشخص می‌شود. منظور از این که شتاب مطلوب با توجه به شتاب دیگر ربات‌ها طراحی می‌شود این نیست که شتاب ربات‌های دیگر در رابطه‌ی شتاب مطلوب خواهد آمد. در واقع آوردن چند شتاب در رابطه‌ی شتاب مطلوب بی‌معنا خواهد بود ولی شتاب هدف را در رابطه‌ی شتاب مطلوب خواهیم آورد، زیرا مقصود از کنترل در واقع دنبال کردن هدف است و با این کار شتاب ربات شتاب هدف را دنبال کرده و در طی آن عملیات محقق خواهد شد. در روابط ۶۹ و ۷۰ شتاب هدف و شتاب مطلوب ربات i بیان شده است. در این روابط q مختصه‌ی عمومی در تمامی سطوح است که در پیوست پ تعریف شده است.

$$a_t = \begin{bmatrix} \ddot{q}^t_{E1} & \ddot{q}^t_{E2} \end{bmatrix}^T \qquad (69)$$

$$\ddot{q}_{di} = \begin{bmatrix} \ddot{q}^{di}_{E1} & \ddot{q}^{di}_{E2} \end{bmatrix}^T \qquad (70)$$

در رابطه‌ی ۷۱ فاصله‌ی نسبی و اندازه‌ی آن بین دو ربات و بین ربات و هدف بیان شده است.

$$\rho_{ij} = \begin{bmatrix} q^j_{E1} - q^i_{E1} & q^j_{E2} - q^i_{E2} \end{bmatrix}^T, \quad R_{ij} = \|\rho_{ij}\|$$
$$\rho_{it} = \begin{bmatrix} q^t_{E1} - q^i_{E1} & q^t_{E2} - q^i_{E2} \end{bmatrix}^T, \quad R_{it} = \|\rho_{it}\| \qquad (71)$$

در نهایت در رابطه‌ی ۷۲ شتاب مطلوب ربات i تعریف می‌شود در این رابطه R_{ij} فاصله‌ی بین دو ربات، R_{it} فاصله‌ی بین ربات و هدف، و R_R فاصله‌ی تعادلی بین ربات‌هاست که با توجه به ابعاد ربات‌ها تعیین می‌شود. R_t فاصله‌ی تعادلی بین

ربات‌ها و هدف است که با استفاده از نوع مانور تعیین می‌شود. K_d و K_p به‌ترتیب ضرایب کنترل مشتقی و تناسبی برای کاهش سرعت بین ربات‌ها و نیز تنظیم فاصله بین آنها هستند. K_d^t و K_p^t نیز ضرایب کنترل مشتقی و تناسبی بین ربات و هدف است.

$$\ddot{q}_{di}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(K_p\left(R_{ij}-R_R\right)\frac{\rho_{ij}}{R_{ij}}+K_d\dot{\rho}_{ij}\right)+K_p^t\left(R_{it}-R_t\right)\frac{\rho_{it}}{R_{it}}+K_d^t\dot{\rho}_{it}+a_t \qquad (72)$$

فاصله‌ی تعادلی با توجه به نوع مانور و حاشیه‌ی اطمینان بین ربات‌ها برای عدم برخورد تعیین می‌شود. مثلاً برای حلقه‌زدن کامل ربات‌ها دور هدف فاصله‌ی تعادلی باید طوری باشد که هدف در مرکز هندسی گروه ربات‌ها قرار گیرد.

با توجه به هدف این تحقیق، فاصله‌ی تعادلی بین ربات با هدف مهم است و درنتیجه ضریب کنترل‌کننده‌ی تناسبی باید به قدر کافی بزرگ باشد؛ از سوی دیگر بزرگ بودن این بهره‌ی کنترلی باعث می‌شود که در فواصل زیاد بین ربات با هدف شتاب زیادی به ربات داده و باعث ناپایداری و آشفتگی عملیات گروهی شود. بنابراین ضریب کنترلی ثابت برای این عملیات مناسب نیست و باید از ضرایب متغیر استفاده شود. در فواصل زیاد بین ربات و هدف بهره‌ی کنترل تناسبی کوچک، و بهره‌ی کنترل مشتقی بزرگ است و در فاصله‌ی کم عکس این موضوع برقرار است. عملیات تغییر بهره با یک تابع ریاضی به طور خودکار صورت می‌گیرد.

$$\mu=R_{it}-\left(R_t+\kappa\right) \qquad (73)$$

$$\chi=\frac{1+\tanh\left(\mu\times\varepsilon^{2}\right)}{2} \qquad (74)$$

$$\begin{bmatrix} K_p^t & K_d^t \end{bmatrix}^T=\chi\begin{bmatrix} K_{p1}^t & K_{d1}^t \end{bmatrix}^T+(1-\chi)\begin{bmatrix} K_{p2}^t & K_{d2}^t \end{bmatrix}^T \qquad (75)$$

در رابطه‌ی ۷۳، κ بیان می‌کند که در چه فاصله‌یی از فاصله‌ی تعادلی ضرایب تغییر می‌کنند. همچنین در رابطه‌ی ۷۴، χ ضریبی بین صفر و ۱ است: اگر فاصله‌ی ربات از هدف بیشتر از فاصله‌ی تعادلی باشد این ضریب ۱ است و اگر کم‌تر از فاصله‌ی تعادلی باشد این ضریب صفر است. در این رابطه ε برای افزایش نرخ تغییرات χ است. باید توجه داشت در حین عملیات کنترل مشتقی بین ربات‌ها باید همواره برقرار باشد تا سرعت بین آنها را کنترل کند ولی نیازی نیست کنترل تناسبی بین آنها همواره برقرار باشد. زمانی که فاصله‌ی نسبی آنها کم‌تر از فاصله‌ی تعادلی شد کنترل تناسبی وارد عمل شده و از برخورد بین آنها جلوگیری می‌کند؛ اگر ربات‌ها به فاصله‌ی تعادلی برسند عملیات تکمیل خواهد شد.

۶. طراحی تخمین‌گر

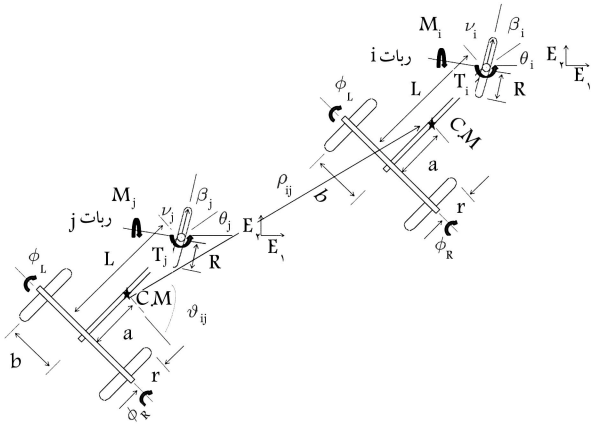
برای طراحی تخمین‌گر ابتدا فرضیات مربوط به اندازه‌گیرها بیان می‌شود. در این نوشتار فرض بر آن است که هدف متحرک از مکان هریک از ربات‌ها دقیقاً اطلاع دارد و با توجه به آن نیروی گریز از ربات‌ها را به‌طور دقیق محاسبه می‌کند. درمورد ربات‌ها فرض بر آن است که تمامی ربات‌ها سنسورهای دقیقی دارند که زاویه‌ی بدنه و زاویه‌ی فرمان و سرعت چرخ جلو خود را محاسبه می‌کنند؛ همچنین ربات‌ها دارای آنتن‌های بی‌سیم دریافت سیگنال‌اند. علامت‌گذاری‌هایی[9] روی زمین موجود است که مکان دقیق آنها نسبت به مرجع ثابت مشخص است و ربات‌ها با استفاده از آنها از مکان خود مطلع می‌شوند؛ این عمل را مکان‌یابی محلی[10] می‌نامند. با توجه به الگوریتم کنترلی، گشتاورهای کنترلی در دسترس‌اند اما مقداری نویز ایجاد می‌کنند که به‌عنوان نویز موجود در مدل در نظر گرفته می‌شوند. چنان که در ادامه خواهد آمد با فرض این نویز به‌صورت نویز گوسی نتایج مناسبی به دست می‌آید. ربات‌ها اطلاعات خود ــ نظیر زاویه‌ی فرمان سرعت چرخ جلو و زاویه‌ی بدنه ــ را به ربات‌های دیگر ارسال می‌کنند. چون هدف انجام یک مأموریت گروهی است، ربات‌ها باید از موقعیت نسبی و سرعت نسبی ربات‌های دیگر و هدف اطلاع داشته باشند. اگر ربات‌ها بتوانند از GPS استفاده کنند با استفاده از تفاضل سرعت و موقعیت مطلق می‌توانند سرعت و موقعیت نسبی را بیابند. اما در این مقاله فرض بر این است که نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

درمورد تعیین موقعیت و سرعت نسبی فرض دیگری نیز می‌توان داشت به این صورت که ربات‌ها از سنسور پردازش تصویر استفاده کنند. ولی این روش نیز به‌دلیل تداخل در دید که ممکن است بر اثر قرارگیری یک ربات بین ربات تخمین‌گر و ربات یا هدف ایجاد شود، یا به دلیل این که در این تحقیق ربات‌ها در سطوح غیرتخت بررسی می‌شوند، ممکن است به‌دلیل غیرتخت بودن سطوح، ربات‌ها و هدف از زاویه‌ی دید ربات تخمین‌گر خارج شوند. بنابراین در این مقاله درمورد اندازه‌گیر موقعیت نسبی فرض بر آن است که یک وسیله‌ی پرنده با استفاده از پردازش تصویر موقعیت نسبی ربات‌ها و هدف را همراه با نویز به ربات تخمین‌گر ارسال می‌کند.

چنان که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، متغیرهای حالت ربات i توسط ربات تخمین‌گر j تخمین زده می‌شود. ربات j با توجه به اطلاعات اندازه‌گیری شده توسط وسیله‌ی پرنده و اطلاعات فرستاده شده از ربات i که توسط آنتن و ارتباط بی‌سیم دریافت می‌کند به تخمین فاصله‌ی نسبی و متغیرهای حالت ربات i می‌پردازد. در این مقاله برای تخمین از فیلتر بهینه‌ی کالمن و سپس از صافی بهینه‌ی کالمن استفاده شده است.

در شکل ۷، ρ_{ij} فاصله‌ی نسبی بین دو ربات و ϑ_{ij} زاویه‌ی نسبی بین دو ربات است که توسط وسیله‌ی پرنده اندازه گرفته شده و به ربات تخمین‌گر ارسال می‌شود؛ ربات i نیز اطلاعات خود را ــ نظیر زاویه‌ی فرمان، سرعت چرخ جلو و گشتاورها و نیز زاویه‌ی بدنه همراه با نویز ــ برای ربات تخمین‌گر می‌فرستد و ربات تخمین‌گر با استفاده از این اطلاعات و تخمین‌گرهای کالمن به تخمین متغیرهای حالت ربات i می‌پردازد.

در روابط ۷۶ تا ۸۲ معادلات حرکت نسبی بین ربات‌های j و i بیان می‌شود و از قیدهای حرکتی و نیز معادلات دینامیکی هر ربات و تفاضل آنها معادله‌ی حرکت



شکل ۷. نمایش ربات تخمین‌گر j برای تخمین متغیر حالت ربات i.

نسبی به دست می‌آید. در این روابط q_1 و q_2 مختصه‌های عمومی ربات در دستگاه مطلق‌اند که در هر کدام از سطوح تعریف خاص خود را دارند (پیوست پ). توجه شود که بعضی از متغیرهای حالت ربات j مشخص نیستند که در بخش بعدی چگونگی تخمین آنها بیان شده است.

$$q_1^{ij} = q_1^i - q_1^j \tag{۷۶}$$

$$q_2^{ij} = q_2^i - q_2^j \tag{۷۷}$$

$$\vartheta_{ij} = \frac{\pi}{2} + a\tan 2\left(q_2^{ij}, q_1^{ij}\right) - \theta_j \tag{۷۸}$$

$$\alpha_{ij} = \vartheta_{ij} + \theta_j - \theta_i \tag{۷۹}$$

$$\rho_{ij} = \sqrt{\left(q_2^{ij}\right)^2 + \left(q_1^{ij}\right)^2} \tag{۸۰}$$

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{\dot{q}_1^{ij} q_1^{ij} - \dot{q}_2^{ij} q_2^{ij}}{\rho_{ij}} = v_i S\alpha_{ij} - v_j S\vartheta_{ij} \tag{۸۱}$$

$$\dot{\vartheta}_{ij} = \frac{\dot{q}_2^{ij} q_1^{ij} - \dot{q}_1^{ij} q_2^{ij}}{\rho_{ij}^2} - \dot{\theta}_j = \frac{v_i C\alpha_{ij} - v_j C\vartheta_{ij}}{\rho_{ij}} - \dot{\theta}_j \tag{۸۲}$$

با استفاده از روابط ۸۱ و ۸۲ و نیز معادلات حرکت هر ربات که در بخش‌های قبلی برای هر سطوح به‌صورت مجزا به دست آمده، معادله‌ی حرکت نسبی بین دو ربات j و i به دست خواهد آمد. در پیوست ت معادله‌ی حرکت نسبی مربوط به هر سطوح به‌طور مجزا به دست می‌آید. در حالت کلی معادله‌ی حرکت نسبی به‌صورت رابطه‌ی ۸۳ است.

$$\dot{X}_{ij} = f\left(X_{ij}, \tau\right) + w \tag{۸۳}$$

که در آن متغیرهای حالت عبارت‌اند از:

$$x_1 = u_1^i, \quad x_2 = \beta_i, \quad x_3 = \theta_i, \quad x_4 = \rho_{ij}, \quad x_5 = \vartheta_{ij} \tag{۸۴}$$

در رابطه‌ی ۸۳، τ همان گشتاورهای کنترلی دو ربات j و i است و w نیز نویز وارد بر مدل است. ربات j چنان که گفته شد، با توجه به سنسورهایی که دارد گشتاور کنترلی خود را به‌دقت محاسبه می‌کند ولی چون مکان و سرعت نسبی ربات i را دقیقاً نمی‌داند و با تخمین و خطا محاسبه می‌کند. گشتاورهای کنترلی ربات i را نیز با خطا و نویز محاسبه می‌کند در نتیجه $\overline{T}_i$ با T_i و $\overline{M}_i$ با M_i متفاوت است و مطابق رابطه‌ی ۸۵ با هم در ارتباط‌اند.

$$\begin{bmatrix} \overline{T_i} & \overline{M_i} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} T_i & M_i \end{bmatrix}^T + \tau_{error}^i \tag{۸۵}$$

چنان که مشاهده می‌شود $\overline{\tau}_i$ به‌اندازه‌ی τ_{error} با τ_i اختلاف دارد. توزیع گشتاوری τ_{error}^i کاملاً نامعین بوده و هیچ مدلی نمی‌توان به آن اختصاص داد. لذا این خطا به‌عنوان نویزی در مدل ظاهر می‌شود که به‌صورت نویز گوسی با میانگین صفر تخمین زده می‌شود و اثر آن بر متغیرهای حالت مشابه τ_{error}^i باشد. نویز وارد بر مدل به‌صورت رابطه‌ی ۸۶ محاسبه می‌شود. در این رابطه Q_C^i توان نویز است.

$$\tau_{error}^i = N\left(0, Q_C^i\right) \rightarrow Q_C^i = \begin{bmatrix} \left(\sigma_M^i\right) & 0 \\ 0 & \left(\sigma_T^i\right) \end{bmatrix} \tag{۸۶}$$

ماتریس کوواریانس نویز عبارت است از:

$$Q^i\left(K\right) = B^i Q_C^i \left(Q_C^i\right)^T \left(B^i\right)^T dt \tag{۸۷}$$

که در آن a_k و a_n بسته به نوع سطوح متفاوت‌اند. در سطح شیب‌دار به‌ترتیب a_9 و a_{10} و در سطح استوانه‌یی a_{17} و a_{18} و در سطح کروی a_{21} و a_{22} هستند. باید توجه داشت که رابطه‌ی ۸۳ یک رابطه‌ی پیوسته با زمان[11] است که برای استفاده در فیلتر کالمن باید آن را به سیستم گسسته با زمان[12] تبدیل کرد.

برای گسسته‌سازی از چند روش می‌توان استفاده کرد. روش مستطیلی (اویلری)، روش ذوزنقه‌یی و روش رانگ ـ کوتا[13] از جمله روش‌های موجودند که به‌ترتیب دقت‌شان بیشتر می‌شود، ولی چون از این گسسته‌سازی به‌منظور تخمین استفاده خواهد شد و فقط در فیلتر و صافی کالمن کاربرد دارد، استفاده از روش اویلر نیز جوابگوست و در تخمین‌گر این خطا به‌طور مداوم تصحیح می‌شود. در ادامه فرم گسسته‌ی معادله‌ی ۸۳ به‌روش مستطیلی (اویلری) بیان شده است. از رابطه‌ی ۸۸ فقط برای تخمین استفاده شده ولی خود مدل از روش دقیق‌تری به دست می‌آید.[۱۷]

$$X_{ij}\left(K\right) = \left(f\left(X_{ij}\left(K-1\right)\right), \tau\left(K-1\right)\right) dt + X_{ij}\left(K-1\right) + w(K-1) \tag{۸۸}$$

در ادامه خروجی اندازه‌گیرها بیان خواهد شد. چنان که بیان شد اندازه‌گیر اول وسیله‌ی پرنده‌یی است که فاصله و زاویه‌ی نسبی ربات تخمین‌گر را با رباتی که متغیرهای حالتش باید تخمین زده شود گزارش می‌دهد. این ارسال اطلاعات همراه با نویز بوده و چنان که دیده می‌شود چون مدلی برای این نویز نمی‌توان یافت آن را به‌صورت نویز سفید گوسی در نظر گرفته‌ایم. این نویز به‌عنوان نویز موجود در سنسور یا اندازه‌گیر مطرح خواهد شد:

$$Z_1^{ij} = \begin{bmatrix} \rho_{ij} + v_\rho^{ij} \\ \vartheta_{ij} + v_\vartheta^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{ij} \\ \vartheta_{ij} \end{bmatrix} + v_1^{ij} \tag{۸۹}$$

که در آن v_ρ^{ij} و v_ϑ^{ij} به‌عنوان نویزهای موجود در سنسور مطرح شده و به‌صورت رابطه‌ی ۹۰ بیان می‌شود. در این رابطه $R_1^{ij}(K)$ ماتریس توان نویز است.

$$v_1^{ij} = N\left(0, R_1^{ij}\left(K\right)\right)$$
$$R_1^{ij}\left(K\right) = \begin{bmatrix} \left(\sigma_\rho^{ij}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\sigma_\vartheta^{ij}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{۹۰}$$

برای این اندازه‌گیر ماتریس خروجی با استفاده از تقریب تیلور از رابطه‌ی ۹۱ به دست خواهد آمد. ماتریس خروجی براساس رابطه‌ی ۹۲ به دست می‌آید.

$$\left[H_x\left(m_k\right)\right]_{j,j'} = \frac{\partial h_j\left(x_k\right)}{\partial x_{j'}}_{x=m} \tag{۹۱}$$

$$H_1^{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۹۲}$$

چنان که بیان شد اندازه‌گیر دومی نیز وجود دارد که سرعت چرخ جلو، زاویه‌ی فرمان و زاویه‌ی بدنه‌ی ربات را اندازه می‌گیرد و برای ربات تخمین‌گر این اطلاعات را می‌فرستد که براساس رابطه‌ی ۹۳ خروجی دوم را بیان خواهد کرد.

$$Z_2^{ij} = \begin{bmatrix} u_1^i + v_{u_1}^i \\ \beta_i + v_\beta^i \\ \theta_i + v_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^i \\ \beta_i \\ \theta_i \end{bmatrix} + v_2^{ij} \tag{۹۳}$$

v_2^{ij} نویز اندازه‌گیری است و همانند نویز سنسور اول به‌عنوان نویزگوسی در نظرگرفته می‌شود.

$$v_2^{ij} = N\left(0, R_2^{ij}(K)\right) \tag{۹۴}$$

$$R_2^{ij}(K) = \begin{bmatrix} \left(\sigma_{u_1}^{ij}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sigma_{\beta}^{ij}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sigma_{\theta}^{ij}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{۹۵}$$

ماتریس خروجی براساس رابطه‌ی ۹۶ به دست می‌آید.

$$H_2^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{۹۶}$$

ماتریس خروجی کلی و نیز ماتریس کوواریانس نویزکلی به‌صورت روابط زیر ارائه می‌شوند.

$$R^{ij} = \begin{bmatrix} R_1^{ij}(K) & 0_{2\times 3} \\ 0_{3\times 2} & R_2^{ij}(K) \end{bmatrix} \tag{۹۷}$$

$$H^{ij} = \begin{bmatrix} H_1^{ij} \\ H_2^{ij} \end{bmatrix} \tag{۹۸}$$

$$Z^{ij} = \begin{bmatrix} Z_1^{ij} \\ Z_2^{ij} \end{bmatrix} \tag{۹۹}$$

برای اجرای الگوریتم فیلترکالمن توسعه‌یافته تخمین خروجی ضرورت می‌یابد که با متغیرهای حالت تخمین زده به دست می‌آید:

$$\overline{Z}^{ij} = \begin{bmatrix} H_1^{ij} \\ H_2^{ij} \end{bmatrix} \overline{X}^{ij} \tag{۱۰۰}$$

ماتریس گذر حالت با استفاده از تقریب تیلور از رابطه‌ی ۱۰۱ به دست خواهد آمد:

$$\left[F^{ij}\right]_{k,k'} = \frac{\partial f_k}{\partial x_{k'}} dt + I_{5\times 5} \tag{۱۰۱}$$

با توجه به محاسبه‌ی قبلی پارامترهای مورد نیاز در فیلترکالمن توسعه‌یافته، حال با استفاده از الگوریتم کالمن توسعه‌یافته می‌توان به تخمین متغیرهای حالت معادله‌ی حرکت نسبی دست یافت. الگوریتم فیلترکالمن توسعه‌یافته در رابطه‌ی ۱۰۲ در دو مرحله‌ی زمانی بیان شده است. با تخمین متغیرهای حالت با فیلترکالمن می‌توان برای ارائه‌ی تخمین بهتر، متغیرهای تخمین زده شده را یک‌بار دیگر در الگوریتم صافی کالمن توسعه‌یافته (رابطه‌ی ۱۰۳) قرار داد. تفاوت این دو تخمین‌گر در بخش نتایج خواهد آمد.[۱۷]

پیش‌بینی:

$$\begin{aligned} m_k^- &= f\left(m_{k-1}, u_{k-1}\right) \\ P_k^- &= F_x\left(m_{k-1}, u_{k-1}\right) P_{k-1} F_x^T\left(m_{k-1}, u_{k-1}\right) + Q_{k-1} \end{aligned} \tag{۱۰۲}$$

به‌روزرسانی:

$$\begin{aligned} V_k &= y_k - h\left(m_k^-\right) \\ S_k &= H_x\left(m_k^-\right) P_k^- H_x^T\left(m_k^-\right) + R_k \\ K_k &= P_k^- H_x^T\left(m_k^-\right) S_k^{-1} \\ m_k &= m_k^- + K_k V_k \\ P_k &= P_k^- - K_k S_k K_k^T \end{aligned}$$

در این رابطه $m_{\bar{k}}$ و $P_{\bar{k}}$ پیش‌بینی میانگین و کوواریانس متغیرهای حالت در زمان k قبل از دیدن اندازه‌گیری است. P_k و m_k تخمین میانگین و کوواریانس متغیرهای حالت در زمان k بعد از دیدن اندازه‌گیری است. S_k پیش‌بینی کوواریانس اندازه‌گیری در زمان k، K_k بهره‌ی فیلتر است که چگونگی اصلاح پیش‌بینی را در زمان k بیان می‌کند.[۱۸-۲۰]

$$\begin{aligned} m_{k+1}^- &= f\left(m_k, u_k\right) \\ P_{k+1}^- &= F_x\left(m_k, u_k\right) P_k F_x^T\left(m_k, u_k\right) + Q_k \\ C_k &= P_k F_x^T\left(m_k, u_k\right)\left[P_{k+1}^-\right]^{-1} \\ m_k^s &= m_k + C_k\left[m_{k+1}^s - m_{k+1}^-\right] \\ P_k^s &= P_k + C_k\left[P_{k+1}^s - P_{k+1}^-\right] C_k^T \end{aligned} \tag{۱۰۳}$$

m_k^s و P_k^s تخمین میانگین و کوواریانس حالت در مرحله‌ی زمانی k توسط صافی است. C_k بهره‌ی صافی است که بیان‌گر چگونگی اصلاح صافی تخمین است.

۱.۶. تخمین بعضی از متغیرهای حالت ربات

برای تخمین متغیرهای حالت ربات، فرض بر آن است که با توجه به سنسورهای موجود روی ربات زاویه‌ی بدنه‌ی ربات، زاویه‌ی فرمان و سرعت چرخ جلو دقیقاً مشخص است. متغیرهایی که باید تخمین زده شوند مکان مرکز ربات در هرکدام از سطوح است. چنان‌که بیان شد در هر سطح تعدادی علامت‌گذاری بر روی زمین وجود دارد که مکان دقیق آنها مشخص است. ربات با استفاده از اندازه‌گیرهایی که روی آن قرار دارد مکان نسبی خود را نسبت به آنها یافته و به این طریق از مکان خود اطلاع می‌یابد.

معادله‌ی حرکت ربات در هرکدام از سطوح در بخش‌های قبلی بیان شده است. ماتریس گذر حالت از رابطه‌ی ۱۰۴ به دست می‌آید.

$$\left[F^{iP}\right]_{k,k'} = \frac{\partial f_k}{\partial x_{k'}} dt + I_{5\times 5} \tag{۱۰۴}$$

مکان علامت‌گذاری‌های به‌صورت $P_i = (P_{q1}, P_{q2})$ است که کاملاً مشخص است. خروجی اندازه‌گیر مطابق رابطه‌ی ۱۰۷ است.

در روابط ۱۰۵ تا ۱۰۷، $\rho_i^{P_k}$ فاصله‌ی ربات i با علامت P_k است و $\vartheta_i^{P_k}$ نیز زاویه‌ی دید علامت P_k توسط ربات i است.

$$\rho_i^{P_k} = \sqrt{\left(P_{q2} - q_2^i\right)^2 + \left(P_{q1} - q_1^i\right)^2} \tag{۱۰۵}$$

$$\vartheta_i^{P_k} = a\tan 2\left(P_{q2} - q_2^i, P_{q1} - q_1^i\right) - \theta_i \tag{۱۰۶}$$

$$Z_i^{P_k} = \begin{bmatrix} \rho_i^{P_k} + v_{\rho_i}^{P_k} \\ \vartheta_i^{P_k} + v_{\vartheta_i}^{P_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_i^{P_k} \\ \vartheta_i^{P_k} \end{bmatrix} + v_i^{P_k} \tag{۱۰۷}$$

در این رابطه‌ها $v_{\rho_i}^{P_k}$ و $v_{\vartheta_i}^{P_k}$ به‌عنوان نویزهای موجود در اندازه‌گیر مطرح شده و مطابق رابطه‌ی ۱۰۸ محاسبه می‌شوند. در این رابطه $R_i^{P_k}(K)$ ماتریس مشخصه‌ی نویز است.

$$v_i^{P_k} = N\left(0, R_i^{P_k}(K)\right)$$
$$R_i^{P_k}(K) = \begin{bmatrix} \left(\sigma_{\rho_i}^{P_k}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\sigma_{\vartheta_i}^{P_k}\right)^2 \end{bmatrix} \tag{۱۰۸}$$

ماتریس خروجی براساس رابطه‌ی ۱۰۹ به دست می‌آید.

$$H_i^{P_k} = \frac{1}{(r_P)^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \left(\overline{q}_1^i - P_{q_1}\right) r_P & \left(\overline{q}_2^i - P_{q_2}\right) r_P \\ 0 & 0 & -(r_P)^2 & \left(\overline{q}_1^i - P_{q_1}\right) & \left(\overline{q}_2^i - P_{q_2}\right) \end{bmatrix} \tag{۱۰۹}$$

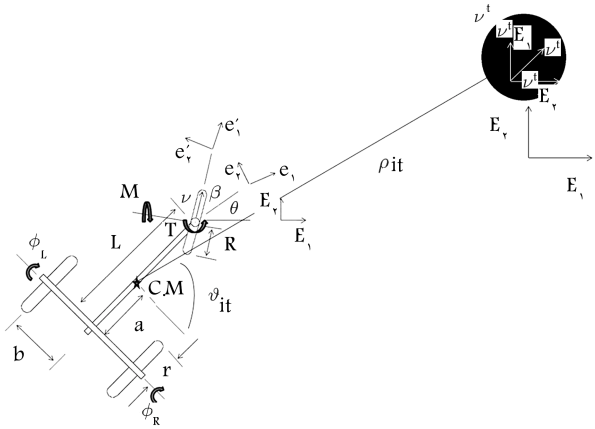
r_P فاصله‌ی ربات i تا علامت P_k روی زمین است. با استفاده از فیلتر کالمن توسعه‌یافته می‌توان مکان ربات را تخمین زد.

۲.۶. تخمین متغیرهای حالت نسبی ربات و هدف

در این بخش توسط ربات تخمین‌گر متغیرهای حالت هدف تخمین زده می‌شود. چنان‌که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، متغیرهای حالت هدف توسط ربات تخمین‌گر i تخمین زده می‌شود. ربات i با توجه به اطلاعات اندازه‌گیری شده توسط وسیله‌ی پرنده و اطلاعات فرستاده شده از هدف که توسط آنتن و ارتباط بی‌سیم دریافت می‌کند به تخمین فاصله‌ی نسبی و متغیرهای حالت هدف می‌پردازد. در این مقاله از فیلتر بهینه‌ی کالمن و سپس از صافی بهینه‌ی کالمن برای تخمین استفاده شده است.

در شکل ۸، ρ_{it} فاصله‌ی نسبی بین ربات و هدف، و ϑ_{it} زاویه‌ی نسبی بین آن دو است که توسط وسیله‌ی پرنده اندازه‌گیری شده و به ربات تخمین‌گر ارسال می‌شود. هدف نیز اطلاعات خود را ــ نظیر سرعت در هر کدام از راستاها همراه با نویز ــ به ربات تخمین‌گر می‌فرستد. ربات تخمین‌گر با استفاده از این اطلاعات و با استفاده از تخمین‌گرهای کالمن به تخمین متغیرهای حالت هدف می‌پردازد.

در روابط ۱۱۰ تا ۱۱۸ معادلات حرکت نسبی بین ربات i و هدف بیان شده و از قیدهای حرکتی و معادلات دینامیکی ربات و هدف و تفاضل آنها معادله‌ی



شکل ۸. نمایش ربات تخمین‌گر i برای تخمین متغیر حالت هدف.

حرکت نسبی به دست می‌آید.

$$q_1^{ti} = q_1^t - q_1^i \tag{۱۱۰}$$
$$q_2^{ti} = q_2^t - q_2^i \tag{۱۱۱}$$
$$\vartheta_t = a\tan 2\left(\dot{q}_2^t, \dot{q}_1^t\right) \tag{۱۱۲}$$
$$v_t = \sqrt{\left(\dot{q}_2^t\right)^2 + \left(\dot{q}_1^t\right)^2} \tag{۱۱۳}$$
$$\vartheta_{ti} = \frac{\pi}{2} + a\tan 2\left(q_2^{ti}, q_1^{ti}\right) - \theta_i \tag{۱۱۴}$$
$$\alpha_{ti} = \vartheta_{ti} + \theta_i - \theta_t \tag{۱۱۵}$$
$$\rho_{ti} = \sqrt{\left(q_2^{ti}\right)^2 + \left(q_1^{ti}\right)^2} \tag{۱۱۶}$$
$$\dot{\rho}_{ti} = \frac{\dot{q}_1^{ti} q_1^{ti} - \dot{q}_2^{ti} q_2^{ti}}{\rho_{ti}} = v_t S\alpha_{ti} - v_i S\vartheta_{ti} \tag{۱۱۷}$$
$$\dot{\vartheta}_{ti} = \frac{\dot{q}_2^{ti} q_1^{ti} - \dot{q}_1^{ti} q_2^{ti}}{\rho_{ti}^2} - \dot{\theta}_i = \frac{v_t C\alpha_{ti} - v_i C\vartheta_{ti}}{\rho_{ti}} - \dot{\theta}_i \tag{۱۱۸}$$

با استفاده از روابط ۱۱۷ و ۱۱۸ و نیز معادله‌ی حرکت هدف که در بخش‌های قبلی برای هر سطوح به‌صورت مجزا به دست آمد، معادله‌ی حرکت نسبی بین ربات i و هدف به دست خواهد آمد. در پیوست ث معادله‌ی حرکت نسبی مربوط به هر سطوح به طور مجزا بیان شده است. در حالت کلی معادله‌ی حرکت نسبی مطابق رابطه‌ی ۱۱۹ بیان می‌شود:

$$\dot{X}_{ti} = f\left(X_{ti}, \tau\right) + w \tag{۱۱۹}$$

که در آن F نیروی گریز هدف و w نویز وارد بر مدل است. ربات i چنان‌که گفته شد با توجه به سنسورهایی که دارد گشتاور کنترلی خود را به‌طور دقیق محاسبه می‌کند ولی چون مکان نسبی هدف را دقیقاً نمی‌داند و با تخمین و خطا محاسبه می‌کند، نیروی گریز هدف را نیز با خطا و نویز محاسبه می‌کند. درنتیجه $\overline{F}_t$ با F_t متفاوت است و مطابق رابطه‌ی ۱۲۰ با هم در ارتباط‌اند.

$$F_t = \overline{F}_t + F_{error}^t \tag{۱۲۰}$$

چنان‌که در رابطه‌ی ۱۲۰ نشان داده شده $\overline{F}_t$ به اندازه‌ی F_{error} با F_t اختلاف دارد. توزیع نیروی F_{error}^t کاملاً نامعین بوده و هیچ مدلی نمی‌توان به آن اختصاص داد. لذا این خطا به‌عنوان نویزی در مدل ظاهر می‌شود که آن را به‌صورت نویز گوسی با میانگین صفر تخمین خواهیم زد. اثر این خطا روی متغیرهای حالت اثری مشابه F_{error}^t است. نویز وارد بر مدل براساس رابطه‌ی ۱۲۱ محاسبه می‌شود. در این رابطه Q_C^t توان نویز است.

$$F_{error}^t = N\left(0, Q_C^t\right) \rightarrow Q_C^t = \begin{bmatrix} \left(\sigma_{F_{E1}}^t\right) & 0 \\ 0 & \left(\sigma_{F_{E2}}^t\right) \end{bmatrix} \tag{۱۲۱}$$

کوواریانس نویز مدل مطابق رابطه‌ی ۱۲۲ تعریف می‌شود. در این رابطه ماتریس B^t در هر سطح متفاوت است (پیوست ث).

$$Q^i(K) = B^t Q_C^t \left(Q_C^t\right)^T \left(B^t\right)^T dt \tag{۱۲۲}$$

باید توجه داشت که رابطه‌ی ۱۱۹ یک رابطه‌ی پیوسته با زمان است که برای استفاده در فیلتر کالمن باید آن را به سیستم گسسته با زمان تبدیل کنیم. فرم گسسته‌ی معادله‌ی

۱۱۹ در زیر به روش مستطیلی بیان شده است. از رابطه‌ی ۱۲۳ تنها برای تخمین استفاده خواهد شد.

$$X_{ti}(K) = (f(X_{ti}(K-1)), \tau(K-1))\, dt + X_{ti}(K-1) + w(K-1) \quad (۱۲۳)$$

در ادامه خروجی اندازه‌گیرها بیان خواهد شد. چنان که بیان شد اندازه‌گیر اول وسیله‌ی پرنده‌یی است که فاصله و زاویه‌ی نسبی ربات تخمین‌گر را با هدفی که متغیرهای حالتش باید تخمین زده شود را گزارش می‌دهد. ارسال اطلاعات همراه با نویز است و چون مدلی برای این نویز نمی‌توان یافت آن را به‌صورت نویز سفید گوسی در نظر می‌گیریم؛ این نویز به‌عنوان نویز موجود در سنسور یا اندازه‌گیر مطرح خواهد شد.

$$Z_1^{ti} = \begin{bmatrix} \rho_{ti} + v_\rho^{ti} \\ \vartheta_{ti} + v_\vartheta^{ti} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{ti} \\ \vartheta_{ti} \end{bmatrix} + v_1^{ti} \quad (۱۲۴)$$

در این رابطه v_ρ^{ti} و v_ϑ^{ti} به‌عنوان نویزهای موجود در اندازه‌گیر مطرح شده و به‌صورت رابطه ۱۲۵ مطرح می‌شود. در این رابطه $R_1^{ti}(K)$ ماتریس توان نویز است.

$$v_1^{ti} = N\left(0, R_1^{ti}(K)\right)$$
$$R_1^{ti}(K) = \begin{bmatrix} \left(\sigma_\rho^{ti}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\sigma_\vartheta^{ti}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (۱۲۵)$$

ماتریس خروجی براساس رابطه‌ی ۱۲۶ به دست می‌آید.

$$H_1^{ti} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۱۲۶)$$

چنان که بیان شد اندازه‌گیر دومی نیز وجود دارد که سرعت هدف در هر راستا را اندازه می‌گیرد و این اطلاعات را برای ربات تخمین‌گر می‌فرستد که خروجی دوم مطابق رابطه‌ی ۱۲۷ بیان خواهد شد.

$$Z_2^{ti} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2^t + v_{q_2}^t \\ \dot{q}_1^t + v_{q_1}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_2^t \\ \dot{q}_1^t \end{bmatrix} + v_2^{ti} \quad (۱۲۷)$$

v_2^{ti} نویز اندازه‌گیری است و همانند نویز سنسور اول به‌عنوان نویز گوسی در نظر گرفته می‌شود:

$$v_2^{ti} = N\left(0, R_2^{ti}(K)\right)$$
$$R_2^{ti}(K) = \begin{bmatrix} \left(\sigma_{\dot{q}_2}^{ti}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\sigma_{\dot{q}_1}^{ti}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (۱۲۸)$$

ماتریس خروجی به‌صورت رابطه‌ی ۱۲۹ به دست می‌آید.

$$H_2^{ti} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۲۹)$$

ماتریس خروجی کلی و نیز ماتریس کوواریانس نویز کلی براساس روابط ۱۳۰ تا ۱۳۲ ارائه می‌شوند.

$$R^{ti} = \begin{bmatrix} R_1^{ti}(K) & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & R_2^{ti}(K) \end{bmatrix} \quad (۱۳۰)$$

$$H^{ti} = \begin{bmatrix} H_1^{ti} \\ H_2^{ti} \end{bmatrix} \quad (۱۳۱)$$

$$Z^{ti} = \begin{bmatrix} Z_1^{ti} \\ Z_2^{ti} \end{bmatrix} \quad (۱۳۲)$$

برای اجرای الگوریتم فیلترکالمن توسعه‌یافته، تخمین خروجی ضرورت می‌یابد که با متغیرهای حالت تخمین زده می‌شود:

$$\overline{Z}^{ti} = \begin{bmatrix} H_1^{ti} \\ H_2^{ti} \end{bmatrix} \overline{X}^{ti} \quad (۱۳۳)$$

ماتریس گذر حالت نیز از رابطه‌ی ۱۳۴ به دست می‌آید.

$$\left[F^{ti}\right]_{k,k'} = \frac{\partial f_k}{\partial x_{k'}} dt + I_{5\times 5} \quad (۱۳۴)$$

پارامترهای مورد نیاز در فیلترکالمن توسعه‌یافته در این بخش محاسبه شد. اینک با استفاده از الگوریتم کالمن توسعه‌یافته می‌توان به تخمین متغیرهای حالت معادله‌ی حرکت نسبی دست یافت. با تخمین متغیرهای حالت با فیلترکالمن می‌توان متغیرهای تخمین زده شده را یک بار دیگر برای ارائه‌ی تخمین بهتر در الگوریتم صافی کالمن توسعه‌یافته قرار داد.

۷. نتایج شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از الگوریتم‌های کنترلی بیان‌شده، چهار ربات طوری کنترل می‌شوند که هدف مورد نظر را شکار، یا پوششی در اطراف آن ایجاد کنند. الگوریتم‌های مورد نظر برای سه سطح شیب‌دار، استوانه‌یی و کروی مورد استفاده قرار گرفته و نمودارهای مربوط به فواصل نسبی و سرعت، و نیز گشتاورهای کنترلی و زوایای فرمان و بدنه در تمامی سطوح ارائه خواهد شد. در ادامه، چنان که فرضیاتی راجع به اندازه‌گیرها بیان شد، فواصل نسبی و سرعت تخمینی ربات‌ها و هدف تبیین، و خطای تخمین نیز در آنها ارائه خواهد شد. همچنین تخمین ناشی از فیلتر و صافی بیان شده و مقایسه‌یی بین آنها ارائه می‌شود. پارامترهای استفاده شده در این بخش در جدول ۱ ارائه شده است.

۱.۷. عملیات شکار هدف در هر سه سطح

در این عملیات از چهار ربات استفاده شده که دارای قیدهای غیرهولونومیک بوده و محدودیت حرکتی دارند. هدف مورد نظر یک نقطه‌ی جرم‌دار فرض شده و هولونومیک است. هدف در حال گریز از مجموعه بوده و با نزدیک شدن مجموعه به آن نیروی گریز بیشتری به آن وارد می‌شود. مأموریت ربات‌ها نیز به این نحو است که به دور هدف حلقه زده و آن را شکار کنند و سرعت هدف را به صفر برسانند. در حین شکار، گاهی اتفاق می‌افتد که هدف می‌گریزد و نوعی عدم توازن در آرایش هندسی حین شکار ایجاد می‌کند ولی ربات‌ها با تغییر جهت و گاهی با تغییر مکان دوباره سرعت هدف را به صفر می‌رسانند. انجام عملیات وابسته به آرایش اولیه‌ی

جدول ۱. پارامترهای فیزیکی و کنترلی مورد استفاده در شبیه‌سازی حرکت ربات‌ها.

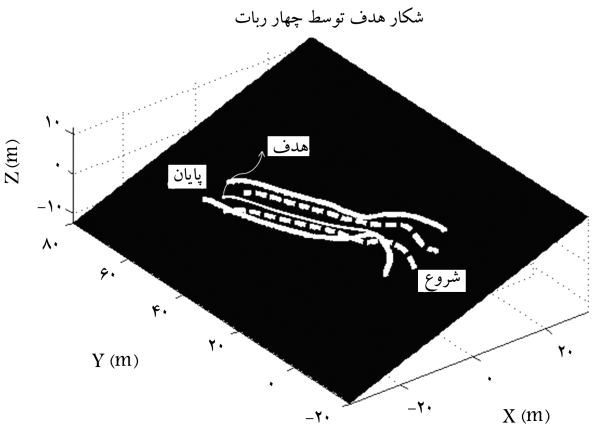
مرحله‌ی زمانی	$dt = ۰/۰۵$ s
جرم بدنه و چرخ‌ها و ابعاد ربات	$m_b = ۵$ (Kg), $m_w = ۰/۴$ (Kg), $L = ۲(m)$, $a = ۰$, $b = ۰/۷۵$ (m), $R = ۰/۶$ (m), $r = ۰/۱$ (m),
مشخصات عملگرها	$\rho = ۰/۳$, $M_{\max} = ۱۵$ (N.m), $T_{\max} = ۱/۵$ (N.m)
ضرایب فنریت و استهلاک بین ربات‌ها	$K_d = ۱$, $K_p = ۵$
ضرایب فنریت بین ربات‌ها و هدف در فواصل زیاد	$K_d^t = ۴$, $K_p^t = ۰/۵$
ضرایب فنریت بین ربات‌ها و هدف در فواصل کم	$K_d^t = ۳$, $K_p^t = ۳$
پارامترهای تغییر ضرایب کنترلی	$\kappa = ۲$, $\varepsilon = ۲$
ضریب کنترل تناسبی فرمان و استهلاک فرمان	$K_\beta = ۱$, $C_b = ۱$
پارامترهای دینامیک هدف	$m_t = ۱$, $K_t = ۱$, $C_t = ۱$
فاصله‌ی تعادلی بین ربات‌ها و هدف	$R_t = ۵$ (m)
فاصله‌ی تعادلی بین ربات‌ها در حال شکار	$R_R = ۵\sqrt{۲}$ (m)
فاصله‌ی تعادلی بین ربات‌ها در حال پوشش	$R_R = ۰/۷ \times ۵\sqrt{۲}$ (m)
توان نویز وارد بر دینامیک مدل نسبی بین ربات‌ها	$\sigma_M^i = ۰/۰۵$, $\sigma_T^i = ۰/۰۵$
نویز دریافت اطلاعات از ربات	$\sigma_{u_۱}^{ij} = \sigma_\theta^{ij} = \sigma_\beta^{ij} = ۰/۰۱$
نویز دریافت اطلاعات از رادار پرنده	$\sigma_\rho^{ij} = \sigma_\rho^{it} = ۰/۲$, $\sigma_\vartheta^{ij} = \sigma_\vartheta^{it} = ۰/۰۵$
نویز اندازه‌گیر فاصله از علامت‌گذاری‌های روی زمین تا ربات	$\sigma_{\rho_i}^{P_k} = ۰/۱$, $\sigma_{\vartheta_i}^{P_k} = ۰/۰۳$
نویز وارد بر مدل نسبی هدف و ربات	$\sigma_F^t = ۰/۰۵$
نویز وارد بر اطلاعات اندازه‌گیری شده از هدف	$\sigma_q^{ti} = ۰/۰۱$

ربات‌ها نبوده و چنان که در سه سطح مشاهده می‌شود ربات‌ها با آرایش متفاوت درکنار هم قرار می‌گیرند (شکل ۹، ۱۰و۱۱).

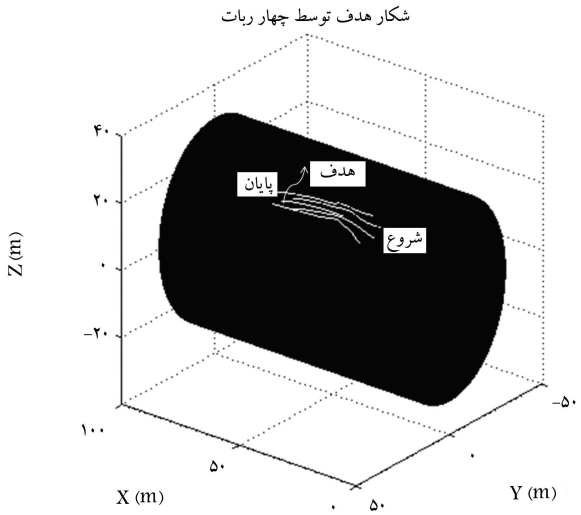
فاصله‌ی تعادلی ربات‌ها و هدف (R_t) معادل ۵ متر در نظرگرفته شده است. در عملیات شکار هدف با توجه به شرایط هندسی فاصله‌ی ربات‌ها از هم (R_R) معادل $R_R = ۵\sqrt{۲}$(m) به دست می‌آید. برای عملیات پوشش فاصله کم‌تر شده و $R_R = ۰/۷ \times ۵\sqrt{۲}$(m) به دست می‌آید.

در شکل ۱۲ فاصله‌ی بین ربات‌ها و هدف به فاصله‌ی تعادلی $R_t = ۵$(m) همگرا شده است. فاصله‌ی بین ربات‌ها به‌گونه‌یی است که عدم برخورد بین آنها کاملاً مشهود است. فاصله‌ی نسبی مربوط به دو سطح دیگر در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ آمده است.

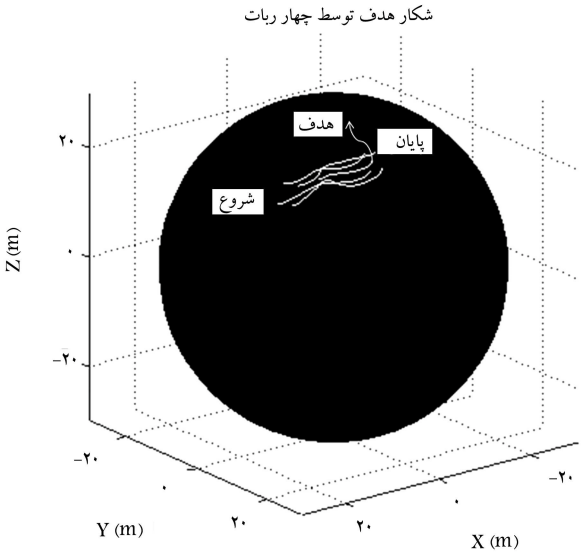
کاهش سرعت ربات‌ها و هدف به‌معنای شکار تدریجی هدف است. چنان که در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود سرعت هدف به‌دلیل نزدیک شدن ربات‌ها به آن زیاد شده ولی به‌تدریج با حلقه زدن دور آن و شکار آن سرعتش به صفر کاهش می‌یابد.



شکل ۹. شکار هدف توسط چهار ربات در سطح شیب‌دار.



شکل ۱۰. شکار هدف توسط چهار ربات در سطح استوانه‌یی.



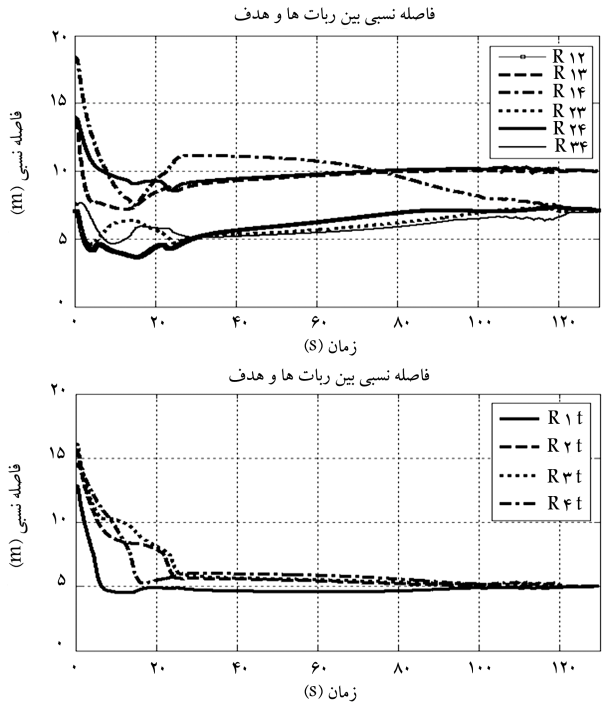
شکل ۱۱. شکار هدف توسط چهار ربات در سطح کروی.

سرعت ربات‌ها و هدف مربوط به دو سطوح دیگر در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ آمده است.

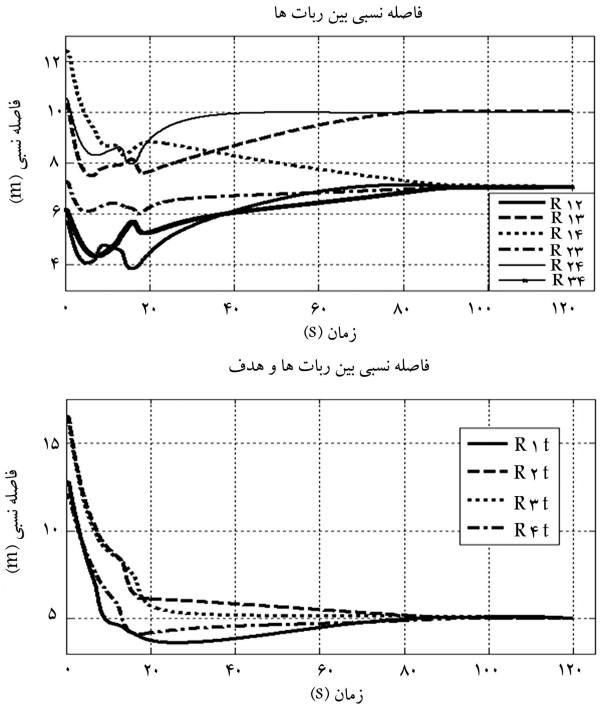
در شکل ۱۸ گشتاورهای کنترلی وارده به فرمان و چرخ جلو ربات در سطح شیب‌دار با در نظرگرفتن اثر فیلترینگ و اشباع عملگرها بیان شده است. چنان که مشاهده می‌شود گشتاور وارده به چرخ جلو در نهایت اندکی با صفر تفاوت دارد و آن نیز به‌دلیل استقرار ربات در سطح شیب‌دار است؛ برای ثابت ماندن روی سطح شیب‌دار باید با اعمال اندکی گشتاور به چرخ جلو اثر نیروی وزن را از بین برد. نمودار گشتاوری از دید مکانیکی بیان‌گر نتایج معقول و منطقی است. گشتاور ربات مربوط به دو سطوح دیگر در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ آمده است.

۲.۷. نمایش متغیرهای تخمین و خطای تخمین

در این بخش متغیرهای تخمین‌زده شده نشان داده خواهد شد و خطای تخمین نیز ارائه خواهد شد. متغیرهای حالت با استفاده از فیلتر و صافی کالمن توسعه یافته تخمین زده می‌شوند.



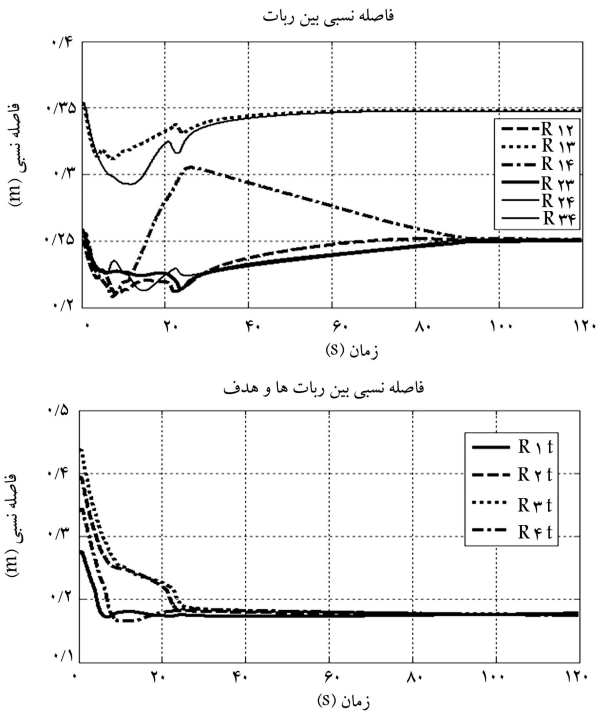
شکل ۱۲. فاصله نسبی ربات‌ها (شکل بالا) فاصله از هدف (شکل پایین) در سطح شیب‌دار.



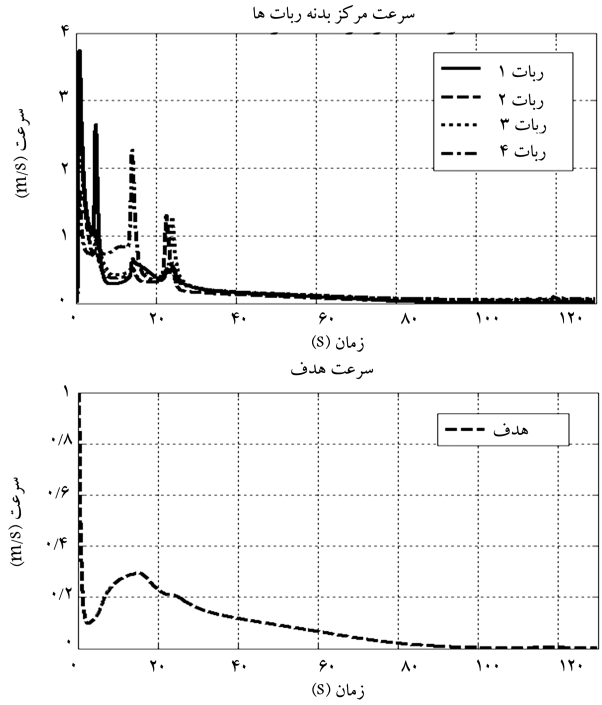
شکل ۱۳. فاصله نسبی در سطح استوانه‌یی.

چنان‌که در شکل ۲۱ مشاهده می‌شود فاصله‌ی نسبی با استفاده از فیلترکالمن توسعه‌یافته به‌خوبی تخمین زده شده است و نیز خطای تخمین نیزکم بوده و قابل قبول است.

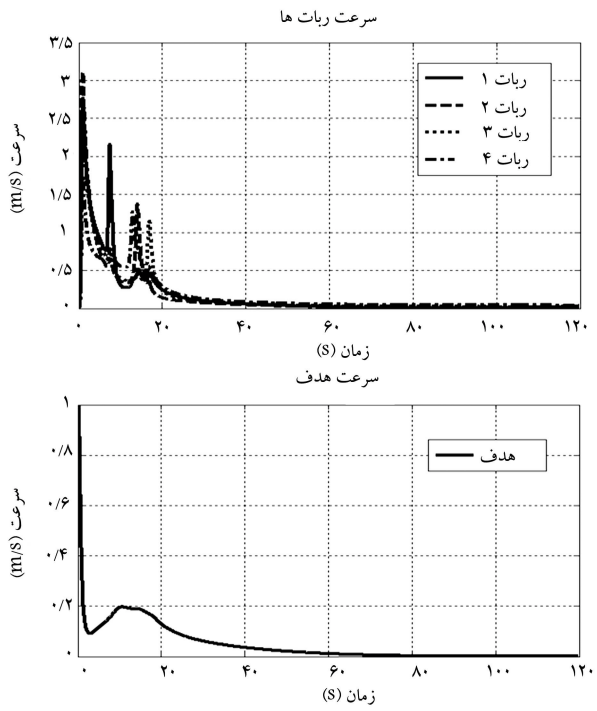
شکل ۲۲ بیان‌گر تخمین فاصله‌ی نسبی و خطای تخمین با استفاده از روش صافی کالمن توسعه‌یافته است. با مقایسه‌ی نمودارهای اشکال ۲۱ و ۲۲ مشاهده



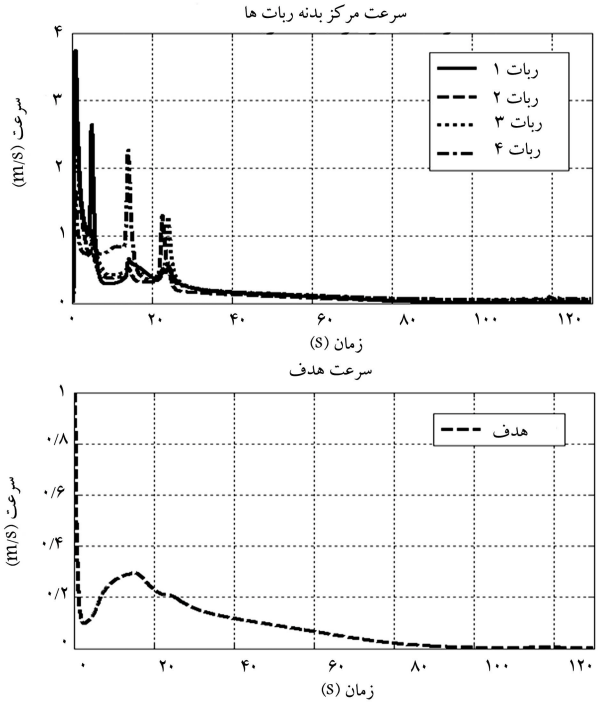
شکل ۱۴. فاصله نسبی در سطح کروی.



شکل ۱۵. سرعت مرکز ربات‌ها (شکل بالا) و سرعت هدف (شکل پایین) سطح شیب‌دار.



شکل ۱۶. سرعت ربات‌ها و هدف در سطح استوانه‌یی.

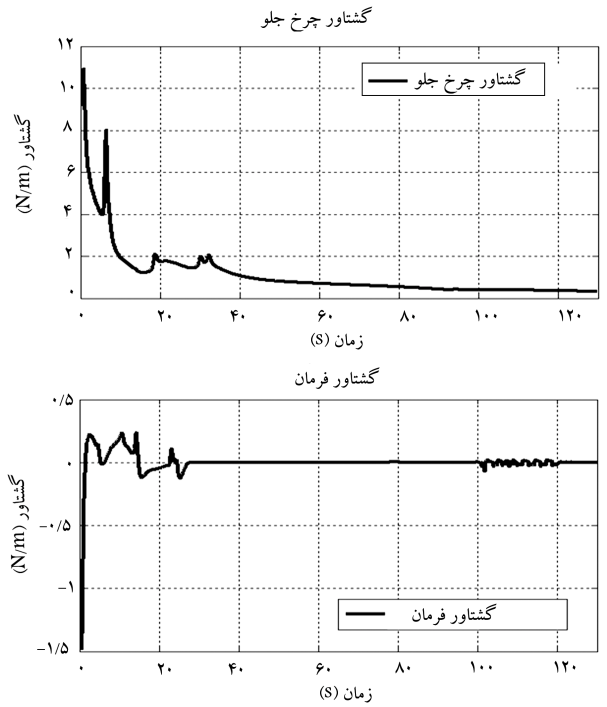


شکل ۱۷. سرعت ربات‌ها و هدف در سطح کروی.

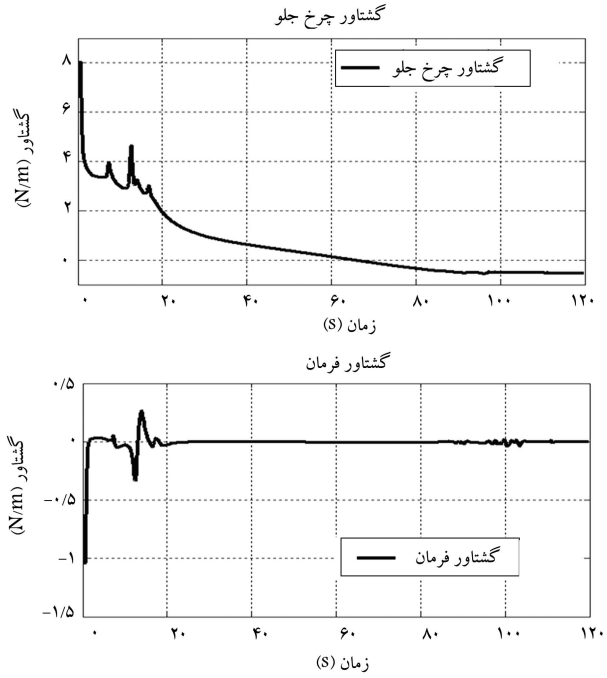
می‌شود که صافی کالمن توسعه یافته تخمینی بهتر نسبت به فیلتر ارائه کرده و اغتشاش و آشفتگی تخمین در آن کم‌تر است. باید توجه داشت که هر دو تخمین‌گر در زمان آخر جوابی برابر ارائه خواهند داد که در هر دو شکل با علامت دایره مشخص شده است.

۳.۷. نمایش تخمین فاصله‌ی نسبی بین ربات و هدف

همانند تخمین فاصله‌ی نسبی بین دو ربات فاصله‌ی نسبی بین ربات و هدف نیز با خطای کمی تخمین زده شده و نیز با استفاده از صافی تخمین زده شده بهبود می‌یابد (شکل‌های ۲۳ و ۲۴).



شکل ۱۸. گشتاور فرمان (بالا) و گشتاور چرخ جلو (پایین) سطح شیب‌دار.



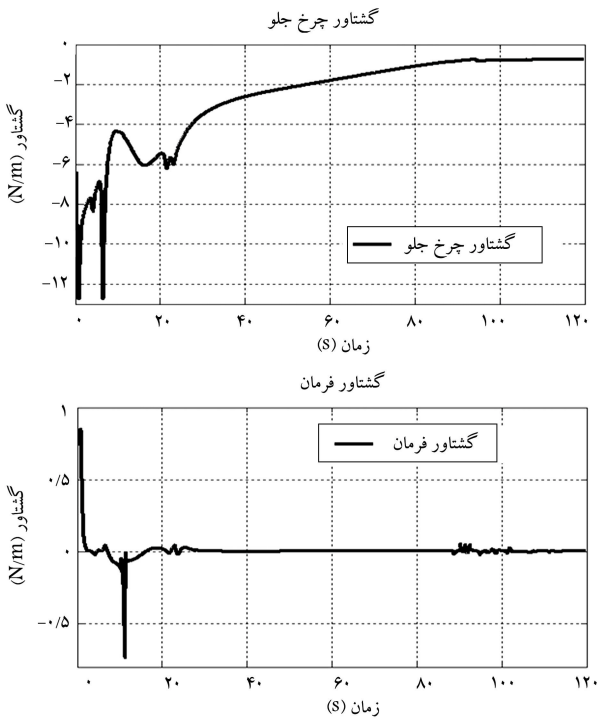
شکل ۱۹. گشتاور کنترلی در سطح استوانه‌یی.

۴.۷. نمایش تخمین سرعت چرخ جلو و نرم سرعت هدف

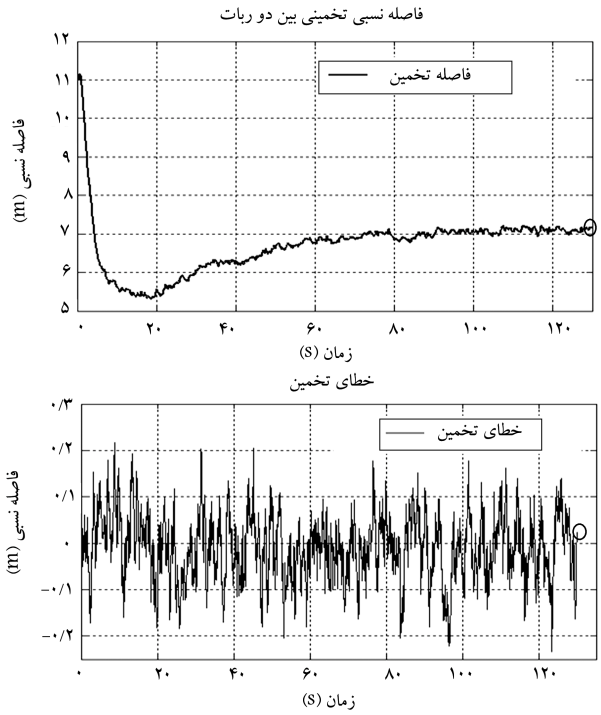
شکل ۲۵ و شکل ۲۶ ملاحظه شوند.

۵.۷. عملیات پوشش حول هدف

چنان‌که بیان شد با توجه به نوع عملیات فاصله‌ی نسبی بین ربات‌ها تنظیم می‌شود.

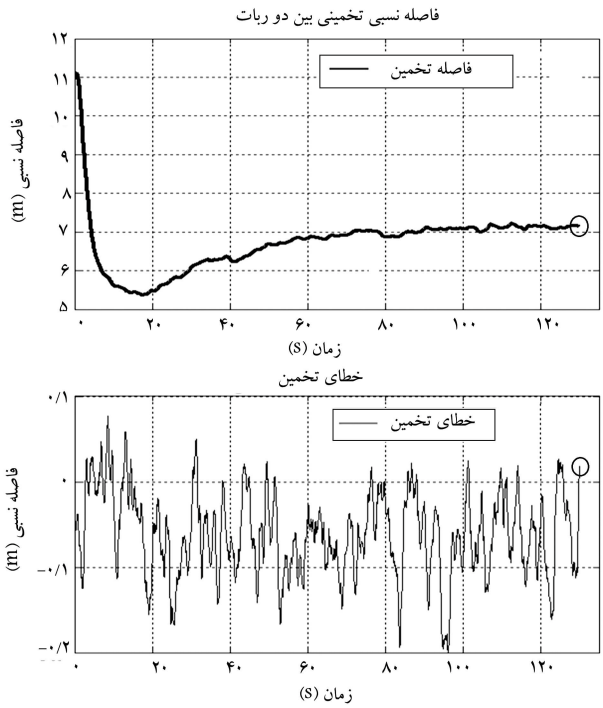


شکل ۲۰. گشتاور کنترلی سطح کروی.

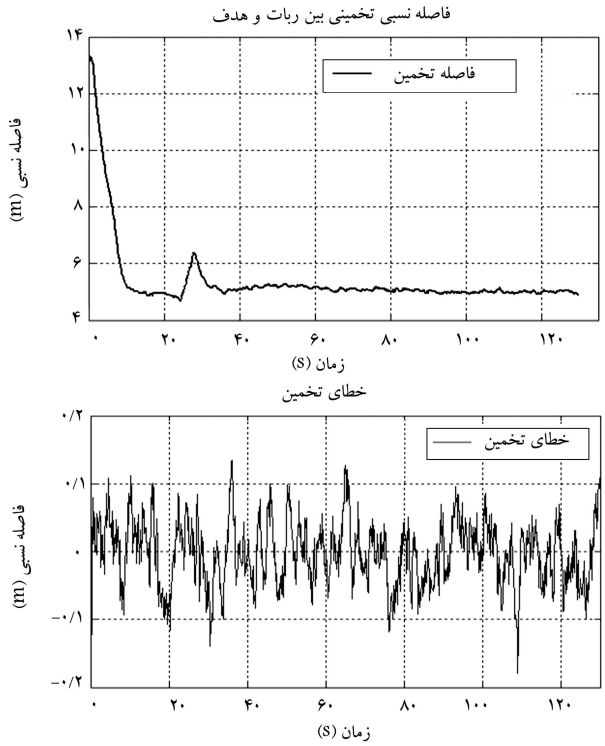


شکل ۲۱. فاصله‌ی نسبی و خطای تخمین بین دو ربات با روش فیلتر کالمن.

برای عملیات شکار فاصله‌ی نسبی بین ربات‌ها با توجه به این که فاصله تا هدف ۵ متر انتخاب شده و نیز با توجه به وضعیت هندسی چهار ربات در هنگام شکار فاصله بین ربات‌ها $R_R = ۵\sqrt{۲}(\mathrm{m})$ به دست می‌آید و برای عملیات پوشش فاصله‌ی بین ربات‌ها کم‌تر می‌شود $R_R = ۰/۷ \times ۵\sqrt{۲}(\mathrm{m})$. با توجه به این توضیحات عملیات پوشش در شکل ۲۷ نشان داده شده است. مکان ابتدا و انتهای



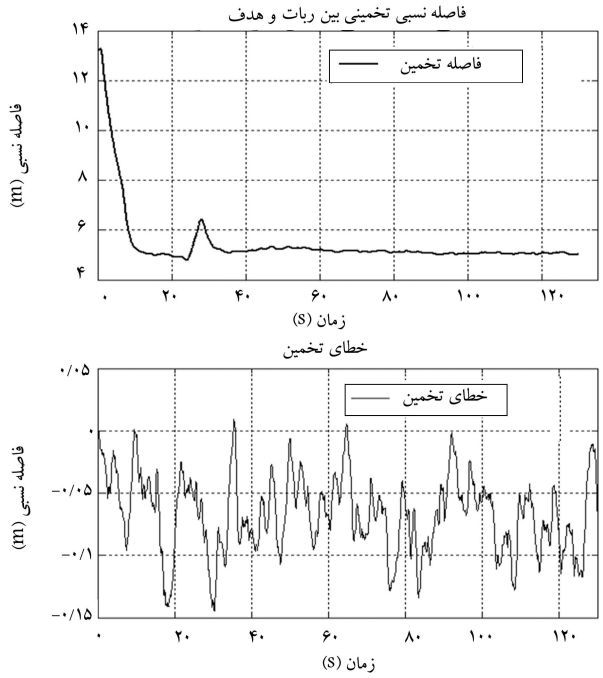
شکل ۲۲. فاصله‌ی نسبی و خطای تخمین بین دو ربات با روش صافی کالمن.



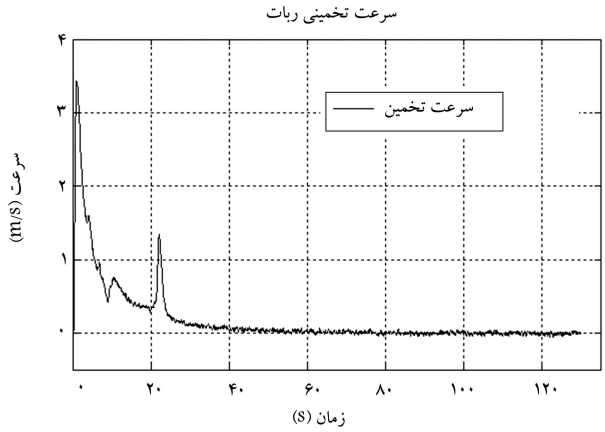
شکل ۲۳. فاصله‌ی نسبی و خطای تخمین بین ربات و هدف با فیلتر کالمن.

هدف با علامت مربع نشان داده شده است.

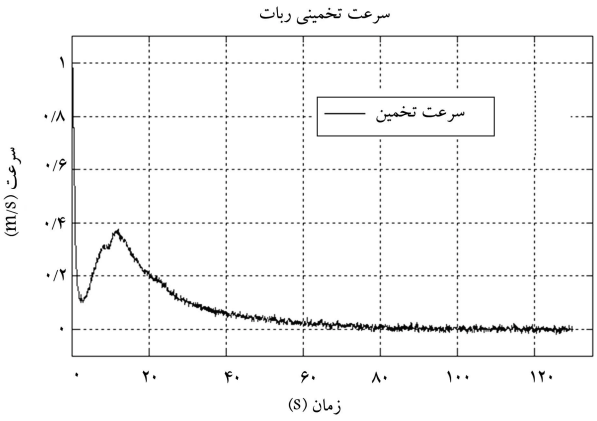
در شکل ۲۸ زاویه‌ی بدنه و زاویه‌ی فرمان ربات شماره ۱ نشان داده شده است. چنان که مشهود است زاویه‌ی بدنه‌ی ربات به سمت زاویه‌ی شتاب مطلوب (جهت حرکت مجموعه) میل کرده و از جلو به سمت هدف حرکت می‌کند.



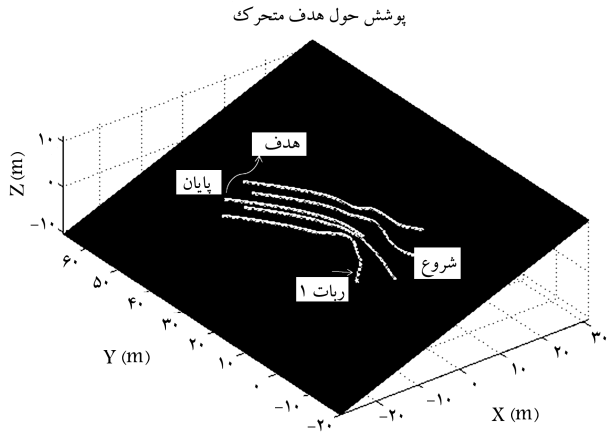
شکل ۲۴. نمایش فاصله‌ی نسبی تخمین بین ربات و هدف و خطای تخمین آن با روش صافی کالمن توسعه یافته.



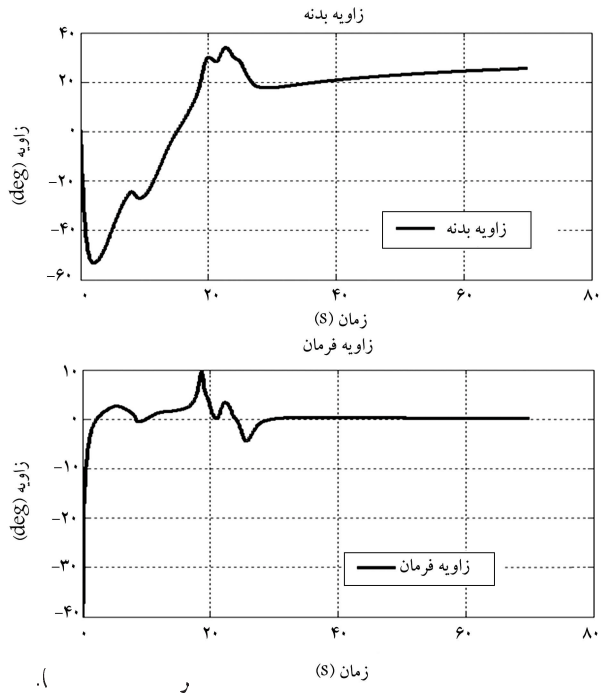
شکل ۲۵. تخمین سرعت چرخ جلو ربات با روش فیلتر کالمن.



شکل ۲۶. تخمین نرم سرعت هدف با روش فیلتر کالمن.



شکل ۲۷. عملیات پوشش حول هدف توسط چهار ربات.



شکل ۲۸. زاویه‌ی بدنه‌ی ربات (بالا)؛ زاویه‌ی فرمان ربات (پایین).

۸. نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله‌ی شکار و تعقیب هدف، با قید هولونومیک توسط ربات‌های چرخ‌دار، با قید غیرهولونومیک روی سطوح غیرمستوی بررسی شده است. فرض بر این بوده که اندازه‌گیری‌های انجام شده توسط ربات‌های تعقیب کننده کامل نبوده و همراه با نویز است؛ در واقع متغیرهای حالت مشخص نبوده و از تخمین‌گر استفاده شده است. دینامیک هدف متحرک طوری در نظرگرفته شده که همواره در حال فرار از ربات‌هاست. با توجه به نتایج شبیه‌سازی مشاهده می‌شود که الگوریتم کنترلی به کار رفته در انجام عملیات مناسب بوده و برای انجام عملیات نیاز نیست از الگوریتم‌های پیچیده استفاده شود.

از دلایل اجرای صحیح عملیات می‌توان به تحلیل درست توده اینرسیال و استفاده از ضرایب کنترلی متغیر اشاره کرد. همچنین با توجه به نتایج می‌توان مشاهده کرد که عملیات با بررسی اثر فیلترینگ و اشباع عملگرها نیز به‌درستی انجام شده است. تلفیق عملیات گروهی با الگوریتم‌های تخمین موفقیت‌آمیز بوده و چنان که مشاهده شده خطای تخمین کم و قابل قبول است. خروجی کنترل‌کننده‌ها گشتاور بوده که می‌توان ممکن یا غیرممکن بودن مانور را با آن تحلیل کرد.

الگوریتم گروهی به‌نحوی بوده که همواره ربات‌ها در جهت مطلوب به سمت هدف حرکت می‌کنند و چنان که دیدیم حرکت به سمت هدف همواره رو به جلو است. انجام عملیات چنان بوده که با تغییر بهره‌های کنترلی هر دو عملیات شکار و پوشش به‌درستی انجام خواهد شد؛ انجام این عملیات در هر سه سطح نتایج قابل قبولی داده است. با توجه به نتایج مربوط به عملیات پوشش می‌توان از این عملیات به‌منظور ایجاد یک حصار امنیتی حول یک رهبر استفاده کرد. از آنجا که عملیات روی سطوح غیرتخت بررسی شده و نیز الگوریتم کنترلی به کار گرفته شده به‌نحوی بوده که با کمی تغییر می‌توان از آن به‌منظور عملیات دیگری بهره گرفت انجام این کار می‌تواند قدمی رو به جلو برای انجام عملیات گروهی واقعی باشد.

کارهای آینده به بررسی اغتشاش محیطی مؤثر و استفاده از آن در کنترل، کنترل ربات‌های چرخ‌دار مجهز به تجهیزات خاص، بررسی عملیات گروهی در حضور موانع محیطی متحرک یا ثابت، انجام عملیاتی که نیاز به تغییر آرایش گروهی دارند و در نهایت انجام عملیات‌های کاربردی و ساخت این‌گونه از ربات‌ها اختصاص دارد.

علائم اختصاری

a: فاصله مرکز هندسی تا مرکز محور عقب؛

a_A, a_b: شتاب بدنه و چرخ جلو؛

a_R, a_L: شتاب چرخ عقب سمت راست و چپ؛

B^i: ماتریس ورودی ربات

b: فاصله مرکز محور بدنه تا هر چرخ عقب؛

C_k: بهره صافی؛

C_b: ضریب استهلاک فرمان؛

C_t: ضریب استهلاک هدف؛

C.M: نماد مرکز هندسی بدنه ربات؛

EKF: فیلتر کالمن توسعه یافته؛

ERTS: صافی کالمن بهینه؛

F_t: نیروی گریز هدف؛

$[F^{ij}]_{k,k'}$: ماتریس گذر حالت بین دو ربات؛

$[F^{iP}]$: ماتریس گذر حالت ربات و علامت زمین؛

$[F^{ti}]_{k,k'}$: ماتریس گذر حالت؛

H: اندازه حرکت زاویه‌یی؛

H^{ij}: ماتریس خروجی اندازه‌گیر؛

$H_i^{P_k}$: ماتریس خروجی ربات i شامل اطلاعات علامت‌گذاری‌های روی زمین؛

H^{ti}: ماتریس خروجی اندازه‌گیر هدف؛

$I_b^{e_i}, m_b$: جرم و ممان اینرسی بدنه ربات در راستای e_i؛

$I_w^{e_i}, m_w$: جرم و ممان اینرسی چرخ عقب در راستای e_i؛

J: تابع هدف؛

K_k: بهره فیلتر؛

K_P, K_d: بهره کنترل مشتقی و تناسبی بین ربات‌ها؛

K_P^t, K_d^t: بهره کنترل مشتقی و تناسبی بین ربات‌ها و هدف؛
K_β: بهره کنترل تناسبی زاویه فرمان؛
K_t: ضریب نیروی گریز هدف؛
L: فاصله مرکز چرخ جلو تا مرکز محور عقب؛
m_k^-: پیش‌بینی میانگین متغیر حالت در زمان k قبل از دیدن اندازه‌گیری؛
m_k: تخمین میانگین متغیر حالت در زمان k بعد ازدیدن اندازه‌گیری؛
m_k^s: تخمین میانگین متغیر حالت در زمان k توسط صافی؛
m_t: جرم هدف متحرک؛
P_k: تخمین کواریانس متغیر حالت در زمان k بعد ازدیدن اندازه‌گیر؛
P_k^s: تخمین کواریانس متغیر حالت در زمان k توسط صافی؛
P_k^-: پیش‌بینی کواریانس متغیر حالت در زمان k قبل از دیدن اندازه‌گیری؛
$P_i = (P_{q_1}, P_{q_2})$: مکان علامت‌گذاری زمین؛
Q_{k-1}: توان نویز مدل؛
$Q^i(K)$: ماتریس کواریانس نویز مدل نسبی ربات‌ها؛
q'_n: شبه مختصه‌ها؛
q_{k-1}: نویز وارد بر مدل؛
$q = [q_1 \quad q_2]$: مختصه عمومی مرکز ربات در دستگاه‌های مختلف؛
$\dot{q}_d, \ddot{q}_d$: سرعت و شتاب مطلوب؛
$\dot{q}_t, \ddot{q}_t$: سرعت و شتاب هدف؛
q: مختصه‌های عمومی؛
R_k: توان نویز سنسور؛
R: شعاع چرخ جلو؛
R_{it}: فاصله نسبی بین ربات و هدف؛
R_{ij}: فاصله نسبی بین دو ربات؛
R_R: فاصله تعادلی بین ربات‌ها؛
R_t: فاصله تعادلی بین ربات و هدف؛
R^{ij}: ماتریس کواریانس نویز؛
R^{ti}: ماتریس کواریانس نویز اندازه‌گیر موقعیت هدف؛
r: شعاع چرخ‌های عقب؛
r_k: نویز وارد بر سنسور؛
r_{it}: بردار مکان نسبی بین ربات و هدف؛
r_{ij}: بردار مکان نسبی بین دو ربات؛
T, M: گشتاور چرخ جلو و گشتاور فرمان؛
t: نماد هدف اندیس؛
u_n: شبه سرعت‌ها؛
V_i^k: بردار سرعت متناسب با هر شبه سرعت؛
v_d^b: سرعت مطلوب مرکز بدنه ربات؛
$v_\rho^{ij}, \sigma_\rho^{ij}$: نویز و توان نویز اندازه‌گیری فاصله نسبی بین دو ربات؛
$v_\vartheta^{ij}, \sigma_\vartheta^{ij}$: نویز و توان نویز اندازه‌گیری زاویه نسبی بین دو ربات؛
$v_{u_1}^{ij}, \sigma_{u_1}^{ij}$: نویز و توان نویز اندازه‌گیری سرعت چرخ جلو؛
$v_\beta^{ij}, \sigma_\beta^{ij}$: نویز و توان نویز اندازه‌گیری زاویه فرمان؛
$v_\theta^{ij}, \sigma_\theta^{ij}$: نویز و توان نویز اندازه‌گیری زاویه بدنه؛
$v_{\rho_i}^{P_k}, \sigma_{\rho_i}^{P_k}$: نویز و توان نویز اندازه‌گیری فاصله نسبی بین ربات و علامت‌های روی زمین؛
$v_{\vartheta_i}^{P_k}, \sigma_{\vartheta_i}^{P_k}$: نویز و توان نویز اندازه‌گیری زاویه نسبی بین ربات و علامت‌های روی زمین؛
v_t: سرعت هدف؛
v: سرعت چرخ جلو؛
X', Y': مختصه مرکز ربات در سطح شیب‌دار؛
X, ϕ: مختصه مرکز ربات در سطح استوانه‌یی؛
Z^{ij}: خروجی اندازه‌گیر ربات j شامل اطلاعات ربات i؛
Z^{ti}: خروجی اندازه‌گیر وضعیت هدف

علائم یونانی

α: زاویه سطح شیب دار؛
β: زاویه‌ی فرمان؛
β_d: زاویه‌ی فرمان مطلوب؛
γ, δ: مختصه مرکز ربات در سطح کروی؛
ε: افزایش نرخ تغییرات بهره کنترلی؛
θ: زاویه‌ی بدنه‌ی ربات؛
θ_d: زاویه‌ی بدنه‌ی مطلوب؛
μ: فاصله تعادلی که تغییر بهره کنترلی؛
ρ: عکس قطب فیلتر؛
ρ_{ij}: فاصله نسبی بین دو ربات؛
$\rho_i^{P_k}$: فاصله نسبی بین ربات و علامت‌گذاری‌ها؛
ρ_{ti}: فاصله نسبی بین ربات و هدف؛
σ_M^i, σ_T^i: توان نویز گشتاورهای کنترلی؛
σ_F^t: توان نویز وارد بر مدل نسبی بین ربات وهدف؛
$\tau_{\max}$: ماکزیمم گشتاور اعمالی عملگر؛
ϕ_R, ϕ_L: زاویه ی دوران چرخ‌های چپ و راست عقب؛
$\omega_R, \omega_L, \omega_b$: سرعت زاویه‌یی چرخ‌های عقب و بدنه؛
ϑ_{ij}: زاویه‌ی نسبی بین دو ربات؛
$\vartheta_i^{P_k}$: زاویه‌ی نسبی بین ربات و علامت‌گذاری‌ها؛
ϑ_{ti}: زاویه‌ی نسبی بین ربات و هدف.

پانوشت‌ها

1. multi agent system
2. non-holonomics
3. Kane
4. Kalman filter
5. Kalman smoother
6. quasi velocity
7. Pfaffian
8. desired
9. land marks
10. localization
11. continuous time
12. discrete time
13. Runge Kutta

منابع (References)

1. http://weblog.radmanitd.com/
2. Ota, J. "Multi-agent robotic systems as distributed autonomous systems", *Advanced Engineering Informatics*, **20**(1), pp. 59-70 (2006).
3. Moarref, M and sayyaadi, H. "Facility location optimization via multi-agent robotic systems", *IEEE International Conference,* Sanya China (6-8 April 2008).
4. Wang, Y.T., Chen, Y.C. and Lin, M.C. "Dynamic object tracking control for a non-holonomic wheeled autonomous robot", *Tamkang Journal of Science and Engineering*, **12**(3), pp. 339-350 (2009).
5. Matveev, S. and Teimoori, H. "The problem of target following based on rang-only measurment for car-like robot", *IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai China (15-18 Dec 2009).
6. Tamba, T.A., Hong, B. and Hong, K.S. "A path following control of an unmanned autonomous forklift", *International Journal of Control Automation and Systems*, **7**(1), pp. 113-122 (2009).
7. Bemporad, A. and Deluce, A. "Local incremental planning for a car-like robot navigating among obstacle", *Robotics and Automation, IEEE International Conference,* Minneapolis, state of Minnesota, USA (22-28 Apr 1996).
8. Almendia, J. and lobo, F. "A hybrid system approach to feedback control of a nonholonomic car-like vehcle", *IEEE Trans. Automatic control*, **20**(2), pp. 243-355 (Apr 2004).
9. Yamaguchi, H. "A distributed motion coordination strategy for multiple nonholonomic mobile robots in coopraitive hunting operations", *Journal, Robotics and Autonomous Systems*, **43**, pp. 257-282 (2003).
10. Moshtagh, N., Michael, N.D., Jadbabaie, A. and Daniilidis, K. "Vision-based, distributed control laws for motion coordination of nonholonomic robots", *IEEE Transactions on Robotics,* **25**(4), pp. 851-860 (Aug 2009).
11. Pinto, G. "Towards a control architecture for cooperative nonholonomic mobile robots", Doctoral thesis (26 November 2007). Available at: http://tel.archivesouvertes.fr/docs/00/19/38/35/PDF/thesis.pdf.
12. Baruh, H., *Analitycal Dynamics*, 1'nd Ed, McGraw-Hill, USA (23 Oct 1998).
13. Greenwood, D.T., *Advansed Dynamics*, 3'nd Ed, Cambridge University Press , United Kingdom (2003).
14. Bowska, E.J., *Stabilizability and Motion Tracking Conditions for Mechanical Nonholonomic Control Systems*, Mathematical Problems in Engineering, doi:10.1155/2007/31267. Hindawi Publishing Corporation, New York, USA, Article ID31267, 20 pages (April 2007).
15. Luca, A., Oriolo, G. and Samson, C. "Feedback control of a non-holonomic car-Like robot", *Robot Motion Planning and Control, Speringer-Verlag*, London, **229**, pp. 171-253 (1998).
16. Urcola, P., Riazuelo, L., L'azaro, M.T. and Montano, L. "Cooperative navigation using environment compliant robot formations", *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems Acropolis Convention Center Nice*, France, pp 2789–2794 (22-26 September 2008).
17. Simon, D., *Optimal State Estimation Kalman, H_infinity and Nonlinear Approaches*, 1'nd Ed, Cleveland State University, Published by John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA (2006).
18. Murphy, K., *Kalman Filter and Smoother Toolbox*, at http://www.ai.mit.edu/∼murphyk/Software/ (7 June 2004).
19. Särkkä, S., *Bayesian Estimation of Time-Varying Systems: Discrete-Time Systems*, version 1.2,Aalto University, Finland (22 January 2011)
20. Hartikainen, J., Solin, A. and Särkkä, A., *Optimal Filtering with Kalman Filters and Smoothers*, Version 1.3, Department of Biomedical Engineering and Computational Science, Aalto University, Finland (16 August 2011).

پیوست

الف) ضرایب متغیر

$$a_{۶} = \frac{-S\beta}{r} + \frac{b}{rL}C\beta,$$

$$a_{۷} = \frac{-S\beta}{r} - \frac{b}{rL}C\beta,$$

$$a_{۸} = \frac{-C\beta}{L},$$

$$a_{۹} = m_b + ۲m_w L^{۲} a_{۳}^{۲} - m_b L\left(L-a\right) a_{۳}^{۲} + ۲m_w b^{۲} a_{۳}^{۲} + \left(I_{bz} + ۲I_{wz}\right) a_{۳}^{۲} + I_{wy}\left(a_{۱}^{۲} + a_{۲}^{۲}\right),$$

$$a_{۱۰} = m_b a_{۳} a_{۸} L\left(L-a\right) - ۲m_w\left(L^{۲} - b^{۲}\right) a_{۳} a_{۸} - I_{bz} a_{۳} a_{۸} - ۲I_{wz} a_{۳} a_{۸} + I_{wy}\left(a_{۱} a_{۶} + a_{۲} a_{۷}\right),$$

$$a_{۱۱} = -m_b a_{۳}^{۲} a_{۸} L\left(L-a\right) - \left(۲m_w + m_b\right) L^{۲}\left(a_{۸} a_{۳}^{۲} + a_{۳} a_{۸}^{۲}\right),$$

$$a_{۱۲} = -۲m_w g S\alpha C\theta C\beta - m_b g S\alpha C\left(\theta+\beta\right),$$

$$a_{۱۳} = S\beta C\theta\left(-\frac{a}{L} a_{۳} u_{۱} - u_{۲}\right) + C\beta S\theta\left(-\frac{a}{L} u_{۲} - a_{۳} u_{۱}\right),$$

$$a_{۱۴} = S\beta S\theta\left(-\frac{a}{L} a_{۳} u_{۱} - u_{۲}\right) + C\beta C\theta\left(\frac{a}{L} u_{۲} + a_{۳} u_{۱}\right),$$

$$a_{۱۵} = \frac{۱}{R_C + r}\left(S\beta S\theta - \frac{a}{L} C\beta C\theta\right),$$

$$a_{۱۶} = \left(S\beta C\theta + \frac{a}{L} C\beta S\theta\right),$$

$$
\begin{aligned}
a_{17} =& m_b\left((La_8)^2+(aa_3)^2\right)+m_w r^2\left(a_4^2+a_5^2\right)\\
&+\left(\frac{a_2}{R_C+r}\right)^2(C\theta)^2 I_{bx}+\left(\frac{a_2}{R_C+r}\right)^2(S\theta)^2 I_{b\phi}+a_3^2 I_{br}\\
&+2\left(\frac{a_2}{R_C+r}\right)^2(C\theta)^2 I_{wx}+2\left(\frac{a_2}{R_C+r}\right)^2(S\theta)^2 I_{w\phi}\\
&+2I_{w\phi}\frac{a_2a_4}{R_C+r}S\theta+2I_{w\phi}\frac{a_2a_5}{R_C+r}S\theta+\left(a_4^2+a_5^2\right)I_{w\phi}\\
&+2a_3^2 I_{wr},\\
a_{18} =& -m_b a_8 a_3\left(L^2-a^2\right)+m_w r^2\left(a_4a_6+a_5a_7\right)+I_{w\phi}a_5a_7\\
&-\frac{a_2}{R_C+r}a_{15}(C\theta)^2 I_{bx}-\frac{a_2}{R_C+r}a_{15}(S\theta)^2 I_{b\phi}-I_{w\phi}a_5a_{15}S\theta\\
&-2\frac{a_2}{R_C+r}a_{15}(C\theta)^2 I_{wx}-2\frac{a_2}{R_C+r}a_{15}(S\theta)^2 I_{w\phi}\\
&+I_{w\phi}\frac{a_2a_7}{R_C+r}S\theta+I_{w\phi}\frac{a_2a_6}{R_C+r}S\theta-I_{w\phi}a_4a_{15}S\theta\\
&+I_{w\phi}a_4a_6+2I_{wr}a_3a_8,\\
a_{19} =& \frac{a_1a_2a_3}{R_C+r}\left((C\theta)^2 I_{bx}+(S\theta)^2 I_{b\phi}\right)\\
&+\left(\frac{a_2}{R_C+r}\right)^2 a_3C\theta S\theta\left(I_{b\phi}-I_{bx}\right)+2I_{wx}\frac{a_1a_2a_3}{R_C+r}C\theta\\
&+I_{w\phi}\frac{a_1a_2a_3}{R_C+r}C\theta+2\left(\frac{a_2}{R_C+r}\right)^2 a_3S\theta C\theta\left(I_{w\phi}+I_{wx}\right)\\
&+2I_{w\phi}\frac{a_1a_2a_3}{R_C+r}(S\theta)^2+I_{w\phi}a_1a_4a_3S\theta\\
&+\frac{a_4a_2a_3}{R_C+r}C\theta\left(I_{wr}-I_{wx}\right)+I_{w\phi}\frac{a_5a_2a_3}{R_C+r}C\theta\\
&+I_{w\phi}a_5a_1a_4S\theta+\frac{a_5a_2a_3}{R_C+r}C\theta\left(I_{wr}-I_{wx}\right),\\
a_{20} =& m_b gS\phi S\theta\left(aa_3C\theta-La_8S\theta\right)-m_w grS\phi S\theta\left(a_4+a_5\right),\\
a_{21} =& \left(m_b a^2+2m_w b^2+\frac{a^2 I_{b\gamma'}}{(R_s+r)^2}+\frac{2a^2 I_{w\gamma'}}{(R_s+r)^2}+2I_{wr}-\frac{2b^2 I_{w\delta'}}{r^2}\right)a_3^2\\
&+\left(m_b+\frac{I_{b\delta'}}{(R_s+r)^2}-\frac{2\left(R_s+2r\right)I_{w\delta'}}{(R_s+r)\,r}\right)L^2a_8^2\\
&+\left(-2m_w+\frac{2\left(R_s+2r\right)I_{wr}}{(R_s+r)\,L}\right)L^2a_8a_3,\\
a_{22} =& -2m_wL^2a_3^2-\frac{2L\left(R_s+2r\right)I_{wr}}{(R_s+r)}a_8^2+(m_b\left(L^2-a^2\right)\\
&-2m_wb^2-\frac{a^2I_{b\gamma'}}{(R_s+r)^2}-I_{br}-\frac{2a^2I_{w\gamma'}}{(R_s+r)^2}\\
&-2I_{wr}-\frac{2b^2I_{w\delta'}}{r^2}-\frac{2L^2\left(R_s+2r\right)I_{w\delta'}}{(R_s+r)\,r})a_3a_8,\\
a_{23} =& \left(-\frac{aLI_{br}}{(R_s+r)^2}+\frac{2aLI_{wr}}{(R_s+r)^2}-\frac{2L^2I_{wr}}{r(R_s+r)}-\frac{2L^2I_{wr}}{(R_s+r)^2}-\frac{L^2I_{br}}{(R_s+r)^2}\right)a_3^2a_8\\
&-\frac{2L^2\left(R_s+2r\right)aI_{w\delta'}}{(R_s+r)^3})a_3a_8^2,\\
a_{24} =& -2m_wgS\beta C\delta S\theta-m_bgS\delta a_1
\end{aligned}
$$

ب) سرعت و سرعت زاویه‌یی

سطح استوانه‌یی:

$$
\begin{aligned}
v_A &= u_1e_{x'},\\
v_L &= v_A-b\dot\theta e_x-L\dot\theta e_\phi=\dot\phi_L re_x,\\
v_R &= v_A+b\dot\theta e_x-L\dot\theta e_\phi=\dot\phi_R re_x,\\
v_b &= v_A-(L-a)\,\dot\theta e_\phi=(R_c+r)\,\dot\phi e_\phi+\dot X e_x,\\
\omega_b &= -\dot\phi e_X+\dot\theta e_r,\\
\omega_R &= \omega_b+\dot\phi_R e_\varphi,\\
\omega_L &= \omega_b+\dot\phi_L e_\varphi
\end{aligned}
$$

سطح کروی:

$$
\begin{aligned}
v_A &= u_1e_{\gamma''},\\
v_L &= v_A-b\left(\dot\gamma C\delta+\dot\theta\right)e_{\gamma'}+L\left(\dot\gamma C\delta+\dot\theta\right)e_{\delta'}=\dot\phi_L re_{\gamma'},\\
v_R &= v_A+b\left(\dot\gamma C\delta+\dot\theta\right)e_{\gamma'}+L\left(\dot\gamma C\delta+\dot\theta\right)e_{\delta'}=\dot\phi_R re_{\gamma'},\\
v_b &= v_A+(L-a)(\dot\gamma C\delta+\dot\theta)e_{\delta'}=(R_s+r)\dot\delta e_\delta+(R_s+r)\dot\gamma S\delta e_\gamma,\\
\omega_b &= \dot\delta C\gamma e_X+\dot\gamma e_Y-\dot\delta S\gamma e_Z+\dot\theta e_r,\\
\omega_R &= \omega_b-\dot\phi_R e_{\delta'},\ \omega_L=\omega_b-\dot\phi_L e_{\delta'}
\end{aligned}
$$

پ) مختصه‌های عمومی در هر یک از سطوح

سطح شیب‌دار:

$$
\begin{bmatrix}\ddot q_{E1}\\ \ddot q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot X'\\ \ddot Y'\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\dot q_{E1}\\ \dot q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot X'\\ \dot Y'\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix}q_{E1}\\ q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X'\\ Y'\end{bmatrix}
$$

سطح استوانه‌یی:

$$
\begin{bmatrix}\ddot q_{E1}\\ \ddot q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot X\\ (R_c+r)\,\ddot\phi\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\dot q_{E1}\\ \dot q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot X\\ (R_c+r)\,\dot\phi\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix}q_{E1}\\ q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\ (R_c+r)\,\phi\end{bmatrix}
$$

سطح کروی:

$$
\begin{bmatrix}\ddot q_{E1}\\ \ddot q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(R_s+r)\,\ddot\delta\\ (R_s+r)\,S\delta\ddot\gamma\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix}\dot q_{E1}\\ \dot q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(R_s+r)\,\dot\delta\\ (R_s+r)\,S\delta\dot\gamma\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix}q_{E1}\\ q_{E2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(R_s+r)\,\delta\\ (R_s+r)\,S\delta\gamma\end{bmatrix}
$$

ت) معادله حرکت نسبی بین دو ربات

سطح شیب‌دار:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1^i \\ \dot{u}_2^i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\rho}_{ij} \\ \dot{\vartheta}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_i}{Ra_6^i} - \frac{a_{11}^i}{a_6^i}\left(u_1^i\right)^2 - \frac{a_{10}^i}{a_6^i}u_1^i u_2^i + \frac{a_{12}^i}{a_6^i} \\ \frac{T_i}{C_b} \\ a_3^i u_1^i \\ u_1^i S\alpha_{ij} - u_1^j S\vartheta_{ij} \\ \frac{u_1^i C\alpha_{ij} - u_1^j C\vartheta_{ij}}{\rho_{ti}} - \dot{\theta}_i \end{bmatrix}$$

سطح استوانه‌یی:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1^i \\ \dot{u}_2^i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\rho}_{ij} \\ \dot{\vartheta}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_i}{Ra_{17}^i} - \frac{a_{19}^i}{a_{17}^i}\left(u_1^i\right)^2 - \frac{a_{18}^i}{a_{17}^i}u_1^i u_2^i + \frac{a_{20}^i}{a_{17}^i} \\ \frac{T_i}{C_b} \\ a_3^i u_1^i \\ u_1^i S\alpha_{ij} - u_1^j S\vartheta_{ij} \\ \frac{u_1^i C\alpha_{ij} - u_1^j C\vartheta_{ij}}{\rho_{ti}} - \dot{\theta}_i \end{bmatrix}$$

سطح کروی:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1^i \\ \dot{u}_2^i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\rho}_{ij} \\ \dot{\vartheta}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{M_i}{Ra_{21}^i} - \frac{a_{23}^i}{a_{21}^i}\left(u_1^i\right)^2 - \frac{a_{22}^i}{a_{21}^i}u_1^i u_2^i + \frac{a_{24}^i}{a_{21}^i} \\ \frac{T_i}{C_b} \\ a_3^i u_1^i \\ u_1^i S\alpha_{ij} - u_1^j S\vartheta_{ij} \\ \frac{u_1^i C\alpha_{ij} - u_1^j C\vartheta_{ij}}{\rho_{ti}} - \dot{\theta}_i \end{bmatrix}$$

ث) معادله حرکت نسبی بین ربات و هدف

سطح شیب‌دار:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_t' \\ \ddot{Y}_t' \\ \dot{\rho}_{ti} \\ \dot{\vartheta}_{ti} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_t}{m_t}F_{X'}^t - \frac{C_t}{m_t}\dot{X}_t' \\ \frac{K_t}{m_t}F_{Y'}^t - \frac{C_t}{m_t}\dot{Y}_t' \\ v_t S\alpha_{ti} - v_i S\vartheta_{ti} \\ \frac{v_t C\alpha_{ti} - v_i C\vartheta_{ti}}{\rho_{ti}} - \dot{\theta}_i \end{bmatrix},$$

$$B^t = \begin{bmatrix} \frac{K_t}{m_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_t}{m_t} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

سطح استوانه‌یی:

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_t \\ \ddot{\phi}_t \\ \dot{\rho}_{ti} \\ \dot{\vartheta}_{ti} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_t}{m_t}F_X^t - \frac{C_t}{m_t}\dot{X}_t \\ \frac{K_t}{m_t(R_c+r)}F_\phi^t - \frac{C_t}{m_t}\dot{\phi}_t \\ v_t S\alpha_{ti} - v_i S\vartheta_{ti} \\ \frac{v_t C\alpha_{ti} - v_i C\vartheta_{ti}}{\rho_{ti}} - \dot{\theta}_i \end{bmatrix},$$

$$B^t = \begin{bmatrix} \frac{K_t}{m_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_t}{m_t(R_c+r)} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

سطح کروی:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_t \\ \ddot{\gamma}_t \\ \dot{\rho}_{ti} \\ \dot{\vartheta}_{ti} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_t}{m_{t(R_s+r)}}F_\delta^t - \frac{C_t}{m_t}\dot{\delta}_t \\ \frac{K_t}{m_t(R_s+r)S\delta_t}F_\gamma^t - \frac{C_t}{m_t}\dot{\gamma}_t \\ v_t S\alpha_{ti} - v_i S\vartheta_{ti} \\ \frac{v_t C\alpha_{ti} - v_i C\vartheta_{ti}}{\rho_{ti}} - \dot{\theta}_i \end{bmatrix},$$

$$B^t = \begin{bmatrix} \frac{K_t}{m_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_t}{m_t(R_s+r)S\delta_t} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$