

# تأثیر راستای کشش بر الگوی چین خوردگی غشاء ارتوتروپ

آرمین دانشور (کارشناس ارشد)

حمید اختراعی عوسی\* (دانشیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۳)  
دوری ۳ - ۳، شماره ۱/۲، ص. ۱۲۷-۱۳۲، (پادداشت نشی)

بسیاری از اشیاء مادی، مانند پارچه و کاغذ، به صورت ورقه‌های نازکی به نام «غشاء» تولید می‌شوند. از آنجا که این مواد در مقابل خمش و فشار مقاومتی نشان نمی‌دهند در معرض چین خوردگی قرار دارند. اغلب این غشاها دارای خواص ارتوتروپ هستند؛ یعنی در جهات متفاوت خواص آنها تفاوت دارد. در این تحقیق به دنبال بررسی تأثیر خواص ارتوتروپیک ورق بر چین خوردگی آن هستیم. بدین منظور ضمن معرفی شیوه‌های مختلف تحلیل نظری و شبیه‌سازی رایانه‌ای با انتخاب یک مسئله‌ی عمومی در مورد بارگذاری غشاء ارتوتروپ، تأثیر عوامل مختلف بر چین خوردگی غشاء مطالعه می‌شود. روش تحلیلی مورد استناد در رویکرد نظری، مبتنی بر تحلیلی غشایی رادمن است. در این تحقیق اثر میزان انحراف راستای بار از امتداد محورهای مادی غشاء، میزان کشیدگی و نسبت خواص ارتجاعی راستاهای اصلی غشاء بر دامنه‌ی چین، تعداد، عمق و راستای آن‌ها بررسی و نهایتاً، نتایج در قالب تعدادی نمودار ارائه شده است.

armin.daneshvar@gmail.com  
ekhteraee@um.ac.ir

واژگان کلیدی: غشاء، ارتوتروپ، چین خوردگی، الگوی چین، روش رادمن، آباکوس.

## ۱. مقدمه

غشاءها اجزای انعطاف‌پذیری هستند که فقط قابلیت تحمل بارهای کششی را دارند. این المان‌های مکانیکی به علت چگالی کم و مقاومت در برابر بارهای گرمایی و ارتعاشات کاربردهای فراوانی در تجهیزات نوین مهندسی، پزشکی، هوا و فضاوردی یافته‌اند. از این رو، در سال‌های اخیر مطالعه‌ی ویژگی‌های مختلف این ساختارهای مکانیکی در کانون توجه محققین قرار گرفته است. یکی از مشکلات اقسام مختلف غشاءها، ناپایداری در برابر بارهای فشاری است. این گونه ناپایداری -- که موضوع این مقاله نیز هست -- به نام «پدیده‌ی چین خوردگی» شناخته می‌شود. به‌طور کلی با توجه به وضعیت تنش‌های اصلی، در هر نقطه از غشاء و در دو راستای متعامد یکی از حالات زیر برقرار است:

(الف) تنش‌های اصلی فشاری‌اند؛ در این وضعیت غشاء فاقد کشیدگی، و به عبارتی سست است.

(ب) یک مؤلفه‌ی تنش اصلی کششی و دیگری فشاری است. در چنین نقطه‌ی غشاء چین خورده است.

(ج) هر دو مؤلفه‌ی تنش‌های اصلی کششی است، و به پیروی از آن غشاء در وضعیت کشیده قرار دارد.

طی سده‌ی گذشته مطالعات گسترده‌ی در زمینه‌ی چین خوردگی غشاءها انجام

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۷/۹، اصلاحیه ۱۳۹۱/۱۲/۲۶، پذیرش ۱۳۹۲/۲/۳.

شده است؛ از آن جمله می‌توان به نظریه‌ی میدان کششی، که برای بار اول توسط واگنر معرفی شد، اشاره کرد.<sup>[۱]</sup> در سال ۱۹۳۸ نظریه‌ی کشش غشاءها با فرض چین خوردگی موازی، که به صورت هندسی ساده‌سازی شده بود، توسط رابرتز ارائه شد.<sup>[۲]</sup> در سال ۱۹۶۸ نیز محققین براساس بیشینه انرژی کرنشی، نظریه‌ی تحلیل غشایی خود را بیان کردند؛ آنان با استفاده از حل بسته‌ی حاصل از مدل نظری، رفتار غشاءهایی با اشکال مختلف را مورد بررسی قرار دادند.<sup>[۳]</sup> همچنین در سال ۱۹۶۸ روابط انرژی رهاشده در غشاءهای همسانگرد معرفی شد؛ در نظریه‌ی ارائه شده، در روابط غشاء کشسان خطی شکل ویژه‌ی از چگالی انرژی کرنشی تحت عنوان «انرژی کرنشی رهاشده» به کار گرفته شده است.<sup>[۴]</sup> در سال ۱۹۸۷ رادمن ضمن معرفی پارامتر چین خوردگی، تانسور تنش و کرنش را مورد بازنگری قرار داد.<sup>[۵]</sup> پس از آن، در سال ۲۰۰۳، محققین با استفاده از روابط ارائه شده توسط رادمن حل بسته‌ی برای به دست آوردن راستای چین خوردگی و پارامتر چین خوردگی ارائه کردند.<sup>[۶]</sup> در سال ۲۰۰۶ نیز غشاء مستطیلی تحت بار برشی مورد بررسی قرار گرفت.<sup>[۷]</sup> با استفاده از نرم‌افزار آباکوس<sup>۱</sup>، رفتار غشاء دی‌الکتریک الاستومر بررسی شد.<sup>[۸]</sup> نهایتاً در سال ۲۰۱۰، الگوی تنش و چین خوردگی ناشی از کشش در صفحات نازک کشسان مورد مطالعه قرار گرفت.<sup>[۹]</sup>

بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که در دو دهه‌ی اخیر تحلیل مکانیک چین خوردگی در غشاءهایی با رفتارهای متفاوت مکانیکی مورد توجه بوده است. با این همه تاکنون تحلیل غشاءهای ناهمسانگرد کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است. هدف این

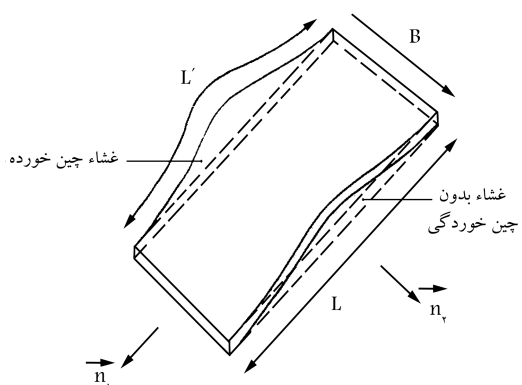
با استفاده از تانسور تنش اصلاح شده و جایگذاری این تانسور در شرط ۶ خواهیم داشت:<sup>[۶]</sup>

$$\mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{D} + \beta \mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} = 0 \quad (7)$$

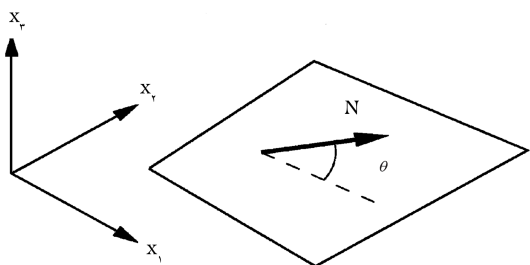
با نامگذاری  $\mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}$  و  $\mathbf{N} \cdot \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{D}$  به ترتیب با  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$ ، با توجه به تعریف پارامتر  $\beta$  به عنوان کمیتی مثبت، بردار  $\mathbf{a}$  قرینه‌ی بردار  $\mathbf{b}$  است؛ در نتیجه می‌توان حاصل ضرب خارجی دو بردار  $\mathbf{a}$  و  $\mathbf{b}$  را صفر در نظر گرفت. بدین ترتیب با بسط عبارت  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  خواهیم داشت:<sup>[۶]</sup>

$$(N_{\theta} S_{\theta 1}) (N_{\beta} \hat{C}_{\beta 1 \gamma \delta} N_{\gamma} N_{\delta}) - (N_{\theta} S_{\theta 2}) (N_{\beta} \hat{C}_{\beta 1 \gamma \delta} N_{\gamma} N_{\delta}) = 0 \quad (8)$$

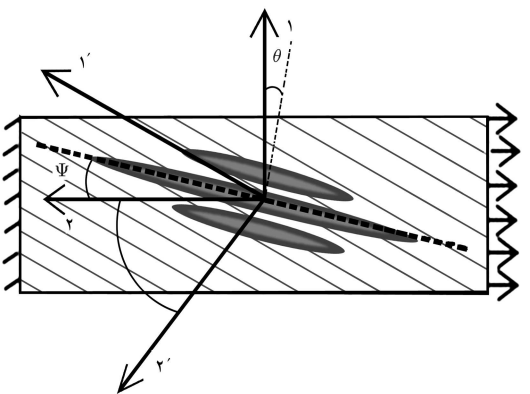
با بسط معادله‌ی ۸، جایگزینی مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{N}$  برحسب توابع مثلثاتی زاویه‌ی  $\theta$ ، و حل معادله‌ی غیرخطی ۹، مقدار زاویه‌ی انحراف  $\theta$  به دست می‌آید (شکل ۳):<sup>[۶]</sup>



شکل ۱. طول میانگین ( $L$ ) و واقعی ( $L'$ ) غشاء چین خورده.<sup>[۵]</sup>



شکل ۲. بردار واحد در صفحه‌ی مرجع.<sup>[۶]</sup>



شکل ۳. تعیین مختصات و زاویه دوران و چین خوردگی.

نوشتار، مطالعه‌ی پدیده‌ی چین خوردگی روی غشاء ناهمسانگرد و همچنین تأثیر دوران محور ناهمسانگردی بر راستای چین خوردگی مورد مطالعه است. بسیاری از اقسام غشاءهایی که در مصارف صنعتی و عمومی کاربرد دارند دارای ویژگی ارتوتروپی یا راست‌گردی هستند. این بدان معناست که خواص ارتجاعی غشاء در دو راستای عمود بر هم تفاوت می‌کند. اختلاف کشسانی موجود در راستاهای مختلف منسوجات نمونه‌ی بارز این ناهمسانگردی است. از این رو، ضمن بررسی اقسام رویکردهای تحلیلی و شبیه‌سازی مرسوم در تحلیل‌های غشائی، یک هندسه‌ی عمومی از غشای ارتوتروپ معرفی می‌شود. غشاء مورد نظر با شیوه‌های مختلف مدل‌سازی، شبیه‌سازی و تحلیل می‌شود. ضمن اعتبارسنجی نتایج حل با نتایج حاصل از کاربرد نرم‌افزار آباکوس، تأثیر میزان کشش محوری بر دامنه و طول موج غشاء ناهمسانگرد بررسی می‌شود.

## ۲. مبانی رویکرد تحلیلی

در ابتدای این بحث معرفی نظریه‌ی رادمن ضروری است. در ارتباط با این نظریه، پارامتر معرف میزان برجستگی ایجاد شده توسط چین‌ها به صورت رابطه‌ی ۱ تعریف شده است (شکل ۱):

$$\beta = \frac{L' - L}{L} \quad (1)$$

که در آن،  $L$  طول ظاهری و  $L'$  طول واقعی، با احتساب برجستگی ناشی از چین خوردگی است. پارامتر چین خوردگی ( $\beta$ ) پارامتری مثبت است.<sup>[۵]</sup> از بازنگری تانسور کرنش گرین در وضعیت چین خوردگی غشاء -- با استفاده از تعریف پارامتر چین خوردگی ( $\beta$ ) -- ماتریس جدیدی با عنوان «تانسور اصلاح شده گرین» به دست می‌آید. در ادامه، برای تحلیل چین خوردگی غشایی به کمک خصوصیات ماتریس‌های اصلاح شده، تعدادی از تعاریف پایه معرفی می‌شود.  $\mathbf{N}(\theta)$  بردار یکه در صفحه‌ی مرجع و در راستای چین خوردگی است (شکل ۲) و مقدار آن از رابطه‌ی ۲ به دست می‌آید.  $\mathbf{N}_{\perp}$  راستای چین‌هاست که عمود بر راستای چین خوردگی یا بردار  $\mathbf{N}$  است.<sup>[۶]</sup>

$$\mathbf{N}(\theta) = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \quad (2)$$

با توجه به تعریف  $\beta$  می‌توان نوشت:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \beta \mathbf{N}(\theta) \otimes \mathbf{N}(\theta) \quad (3)$$

با استفاده از تانسور کرنش اصلاح شده‌ی گرین و ماتریس سفتی ماده می‌توان تانسور اصلاح شده‌ی تنش را به دست آورد. با توجه به تعریف منطقه‌ی چین خوردگی در غشاء می‌توان شرایط مرزی تنش در دو راستای چین و چین خوردگی را توسط معادلات ۴ و ۵ ارائه کرد.

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{N}_{\perp} = 0 \quad (5)$$

شکل ساده شده‌ی این شرط به صورت معادله‌ی ۶ قابل ارائه است:<sup>[۶]</sup>

$$\mathbf{N}(\theta) \cdot \mathbf{S}' [\mathbf{D}'(\theta, \beta)] = 0 \quad (6)$$

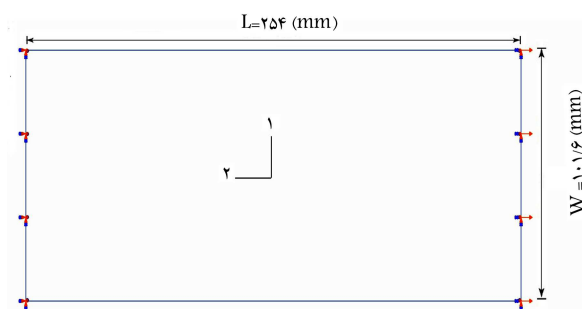
تغییر طول به طول اولیه محاسبه می‌شود، ولی چنان که گفته شد برای به دست آوردن تانسور کرنش گرین باید ابتدا تابع تغییر مکان معرفی شود و با استفاده از آن کرنش لاگرانژی در تغییر شکل محاسبه شود. برای این منظور میدان جابه‌جایی هر نقطه از صفحه چنین معرفی می‌شود:<sup>[۱۰]</sup>

$$x_i = \lambda_i X_i \quad (16)$$

با جای‌گذاری این رابطه در معادله‌ی ۱۵، و سپس محاسبه‌ی کرنش گرین با در نظر گرفتن تمام عبارتهای معادله‌ی ۱۴ کرنش تغییر شکل بزرگ به دست می‌آید.

### ۳. مبانی شبیه‌سازی رایانه‌یی

در این قسمت چگونگی روند شبیه‌سازی پدیده‌ی چین‌خوردگی در نرم‌افزار بررسی می‌شود. مراحل تحلیل شامل سه گام اصلی است: الف) معرفی ابعاد و شرایط مرزی یک غشاء مستطیلی (شکل ۴)، جنس و دیگر مشخصات مکانیکی آن مطابق جدول ۱. غشاء مورد نظر تحت کشیدگی اولیه به میزان  $1 \text{ mm} \times 0.7^\circ$  قرار داده می‌شود. این میزان کشش در نتایج نهایی تأثیرگذار نیست و اعمال آن فقط به منظور ضمانت همگرایی شرایط حل صورت می‌گیرد. ب) با استفاده از گزینه‌ی کماتش<sup>۲</sup>، مودهای چین‌خوردگی شناسایی می‌شود. ج) با استفاده از اعمال عیب هندسی ایجاد شده در غشاء توسط گزینه‌ی عیب<sup>۳</sup> و کشش نهایی، الگوی چین‌خوردگی ایجاد می‌شود. اندازه ضریب عیب  $1 \times 0.7^\circ$  در نظر گرفته شده است. با افزایش ضریب عیب هندسی، دامنه‌ی چین‌خوردگی تا جایی افزایش می‌یابد که این تغییر، همگرایی پاسخ را ناممکن سازد. به‌هنگام تحلیل در گام سوم، به‌علت ظرفیت موجود برای ناپایداری حل از ضریب پایداری استفاده می‌شود. این ضریب در نرم‌افزار به‌صورت پیش‌فرض معادل  $10^4 \times 2$  لحاظ می‌شود. برای در نظر گرفتن تأثیر دوران محور ناهمسانگردی بر نتایج حاصل، محور مختصات محلی روی غشاء تعریف می‌شود. با دوران ماتریس سفتی نتایج به دست آمده مشابه نتایج حاصل از دوران محور ناهمسانگردی در غشاء است. المان در نظر گرفته شده در این تحلیل S4R5 است. علت انتخاب این المان اعمال شرایط تغییر شکل بزرگ در المان در زمان چین‌خوردگی است.



شکل ۴. هندسه و شرایط مرزی در ناحیه‌ی حل.

جدول ۱. مشخصات مکانیکی غشاء راست‌گرد.

$G_{12}$	$\nu_{12}$	$E_{22}$	$E_{11}$
$0.3 \times 10^5 \text{ Pa}$	$0.3$	$2 \times 10^6 \text{ Pa}$	$10^6 \text{ Pa}$

$$\begin{aligned}
 & N_1^T (S_{11} \hat{C}_{1111} - S_{12} \hat{C}_{1111}) + N_1^T N_2^T [S_{11} (2 \hat{C}_{1112} + \hat{C}_{2111}) \\
 & + S_{12} (\hat{C}_{1211} - 2 \hat{C}_{1112} - \hat{C}_{2111}) - S_{22} \hat{C}_{1111}] \\
 & + N_1^T N_2^T [S_{11} (\hat{C}_{1122} + 2 \hat{C}_{2112}) - S_{22} (2 \hat{C}_{1112} + \hat{C}_{2111}) \\
 & + S_{12} (2 \hat{C}_{1112} + \hat{C}_{2111} - \hat{C}_{1122} - 2 \hat{C}_{2112})] \\
 & + N_1 N_2^T [S_{11} \hat{C}_{2222} + S_{12} (\hat{C}_{1222} + 2 \hat{C}_{2122} - \hat{C}_{2222}) \\
 & - S_{22} (\hat{C}_{1122} + 2 \hat{C}_{2112})] + N_2^T (S_{12} \hat{C}_{2222} - S_{22} \hat{C}_{1122}) = 0
 \end{aligned} \quad (9)$$

در رابطه‌ی ۹ مؤلفه‌های  $\tilde{\mathbf{C}}$  اجزاء ماتریس سفتی هستند و  $\mathbf{S}$  عنصر تانسور تنش است. برای مشاهده‌ی چگونگی تأثیر انحراف محور ناهمسانگرد بر راستای چین‌خوردگی، به‌کمک رابطه‌ی ۱۰ ماتریس سفتی ماده را به‌میزان دلخواه زاویه‌ی  $\phi$  تحت دوران قرار می‌دهیم:

$$\tilde{\mathbf{C}}' = \mathbf{B} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}^T \quad (10)$$

که در آن  $\tilde{\mathbf{C}}$  ماتریس سفتی ماده و  $\mathbf{B}$  ماتریس دوران است:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & -2 \sin \phi \cos \phi \\ \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & 2 \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi & -\sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi - \sin^2 \phi \end{bmatrix} \quad (11)$$

برای محاسبه‌ی تانسور کرنش و استفاده از این تانسور در به دست آوردن تنش و راستای چین‌خوردگی، اگر از عبارتهای غیرخطی در رابطه‌ی میان کرنش و تغییر شکل صرف‌نظر کنیم، اصطلاحاً آن را «نظریه‌ی تغییر شکل کوچک» می‌نامند، ولی اگر از عبارتهای غیرخطی صرف‌نظر نشود این روابط «نظریه‌ی تغییر شکل بزرگ» نامیده می‌شود.

لازم به توضیح است که برای به دست آوردن کرنش  $\mathbf{D}$  در رابطه‌ی ۳ براساس نظریه‌ی تغییر شکل بزرگ به‌گرایان تغییر شکل نیاز داریم که براساس رابطه‌ی ۱۲ به دست می‌آید:<sup>[۱۰]</sup>

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (12)$$

که در آن،  $x_i$  موقعیت جاری و  $X_j$  موقعیت نخست یک ذره در میدان تغییر شکل است. بنا به تعریف، تانسور کرنش گرین از رابطه‌ی ۱۳ محاسبه می‌شود:<sup>[۱۰]</sup>

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (13)$$

با توجه به معادله‌ی ۱۳، مؤلفه‌های کرنش گرین عبارت‌است از:<sup>[۱۰]</sup>

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right\} \quad (14)$$

که در آن،  $\mathbf{U}$  بردار تغییر مکان جسم است و در قالب رابطه‌ی ۱۵ به موقعیت‌های جاری و اولیه مربوط است:<sup>[۱۰]</sup>

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (15)$$

در این نوشتار، دو روش تغییر شکل کوچک و بزرگ در کشش غشاء مستطیلی در صفحه تحلیل و مقایسه می‌شود. در روش تغییر شکل کوچک، کرنش از تقسیم مقدار

#### ۴. نتایج

در تحلیل پدیده‌های چین خوردگی غشایی از دو رویکرد متفاوت مبتنی بر مدل‌سازی نظری و شبیه‌سازی آباکوس بهره‌برداری شده است. هنگامی که یک غشاء تحت کشیدگی قرار می‌گیرد یکی از اولین نکات مورد توجه تحلیل‌گر بررسی وضعیت چین خوردگی هاست. در غشاء ارتوتروپ، امتداد چین خوردگی‌ها به وضعیت استقرار محورهای خواص مادی بستگی دارد. به منظور استخراج رابطه‌ی میان امتداد ارتوتروپی و امتداد چین خوردگی، به کمک تحلیل‌های مبتنی بر نظریه‌ی رادمن که در بخش قبل تشریح شد، ضمن تدوین یک کد رایانه‌ی به زبان متلب<sup>۴</sup> از قابلیت‌های نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. در نمودار شکل ۵ ضمن ارائه‌ی منحنی تغییرات زاویه‌ی انحراف چین خوردگی برحسب انحراف زاویه‌ی ارتوتروپی، نتیجه‌ی حاصل از دو روش مقایسه شده است. در این مثال ورق تحت کشیدگی به میزان ۵٪ طول اولیه خود قرار دارد.

با توجه به قابلیت‌های متفاوت تحلیل نظری و شبیه‌سازی رایانه‌ی در مرحله‌ی بعد، دو گروه مطالعه انجام شده است. از یک سو با استفاده از تحلیل نظری تأثیر عوامل مختلف (شامل میزان کشیدگی، تأثیر فرض تغییر شکل کوچک یا بزرگ و تأثیر نسبت ضرایب ارتجاعی) بر نمودار شکل ۵ بررسی می‌شود. از سوی دیگر با توجه به محدودیت این رویکرد نظری در معرفی جزئیات الگوی چین خوردگی، از شبیه‌سازی‌های رایانه‌ی استفاده شده است. در این قسمت نیز تأثیر زوایای ارتوتروپی، نسبت کشیدگی، و نسبت ضرایب ارتجاعی بر الگوی چین خوردگی معرفی می‌شود.

#### ۱.۴. تأثیر زاویه‌ی دوران محور ناهمسانگردی بر الگوی چین خوردگی

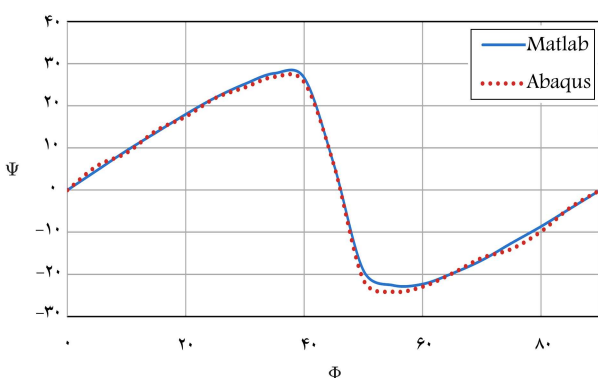
غشاء را تحت کشیدگی به میزان ۵ تا ۱۵ درصد طول اولیه‌اش قرار می‌دهیم. نمودار زاویه‌ی چین خوردگی در مقابل زاویه‌ی ارتوتروپی بر مبنای دو نظریه‌ی تغییر شکل کوچک و تغییر شکل بزرگ مطابق اشکال ۶ و ۷ به دست می‌آید. چنان که در شکل ۶ مشاهده می‌شود با در نظر گرفتن نظریه‌ی تغییر شکل کوچک، میزان کشیدگی در هیچ زاویه‌ی انحراف محور ناهمسانگردی بر زاویه‌ی چین خوردگی تأثیر ندارد، ولی اگر برای محاسبه‌ی راستای چین خوردگی مطابق شکل ۷ از نظریه‌ی تغییر شکل بزرگ استفاده شود، مشاهده می‌شود که در زوایای کم‌تر از ۳۰ درجه میزان کشش در راستای چین خوردگی تأثیرگذار نیست اما در زوایای نزدیک به ۴۵ درجه با افزایش میزان کشش راستای چین خوردگی افزایش می‌یابد.

#### ۲.۴. تأثیر ضرایب ارتجاعی بر راستای چین خوردگی

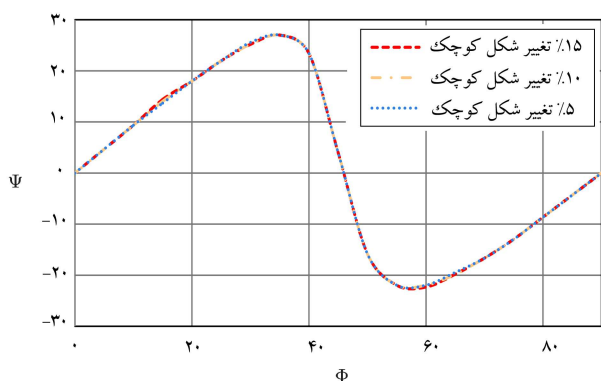
برای مطالعه‌ی تأثیر ضرایب ارتجاعی، سه نسبت مختلف مدول کشسان به ترتیب شامل ۲، ۴، ۱۰ در نظر گرفته می‌شود. نتایج حاصل نشان‌دهنده‌ی افزایش انحراف راستای چین خوردگی بر اثر افزایش نسبت تغییرات مدول کشسان است (شکل ۸).

#### ۳.۴. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در نرم‌افزار آباکوس

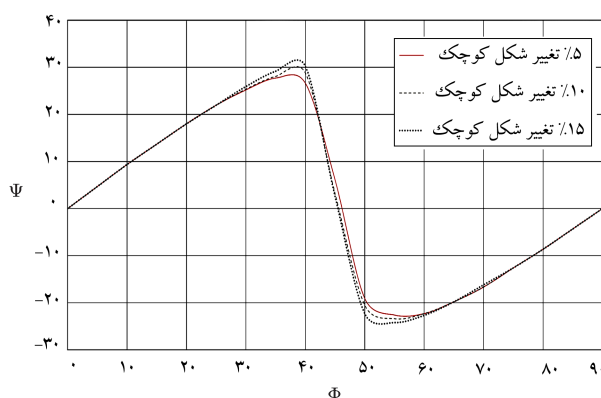
در این قسمت تأثیر دوران محور ناهمسانگردی بر چگونگی تغییر الگو و دامنه‌ی چین خوردگی در خط میانی غشاء مورد بررسی قرار می‌گیرد. این مطالعه براساس نمودارهای الگوی چین خوردگی حاصل از تحلیل اجزاء محدود در محیط نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. نمونه‌ی از نمودارهای الگوی چین خوردگی برای غشاء مستطیلی که در این شبیه‌سازی بدست آمده در شکل ۹ ملاحظه می‌شود.



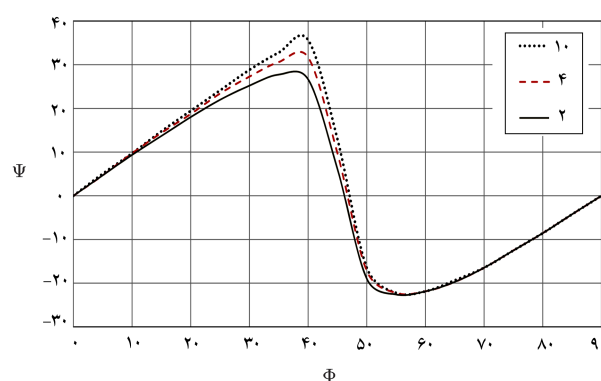
شکل ۵. مقایسه‌ی زاویه‌ی دوران محور ناهمسانگردی با زاویه‌ی چین خوردگی.



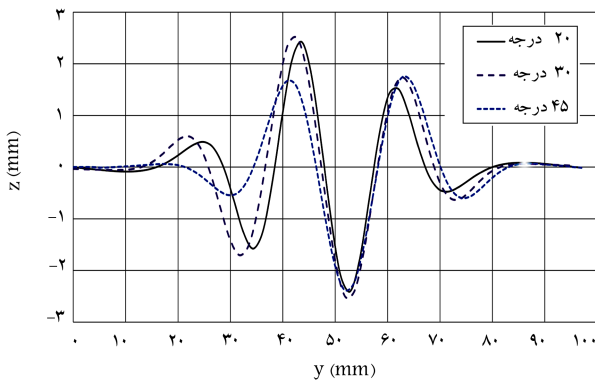
شکل ۶. تأثیر کشش بر زاویه‌ی چین خوردگی در تغییر شکل کوچک.



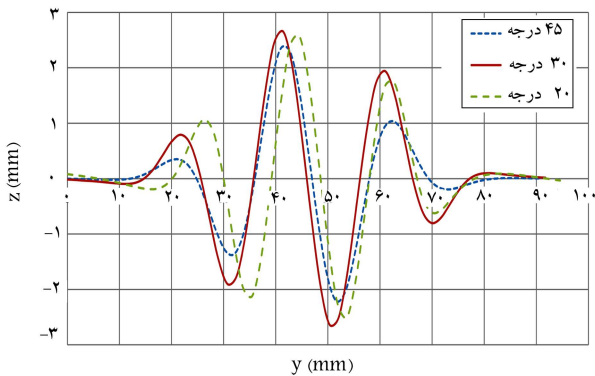
شکل ۷. تأثیر کشش بر زاویه‌ی چین خوردگی در تغییر شکل بزرگ.



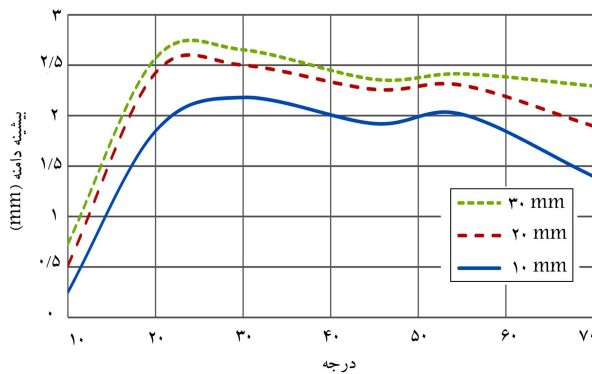
شکل ۸. تأثیر نسبت ضرایب ارتجاعی بر راستای چین خوردگی.



شکل ۱۲. تأثیر امتداد راست‌گردی بر نمودار جابه‌جایی در مقطع عمودی میانه‌ی غشاء به‌ازاء کشیدگی ۲۰mm غشاء و زوایای مختلف راست‌گردی.



شکل ۱۳. تأثیر امتداد راست‌گردی بر نمودار جابه‌جایی در مقطع عمودی میانه‌ی غشاء به‌ازاء کشیدگی ۳۰mm غشاء و زوایای مختلف راست‌گردی.

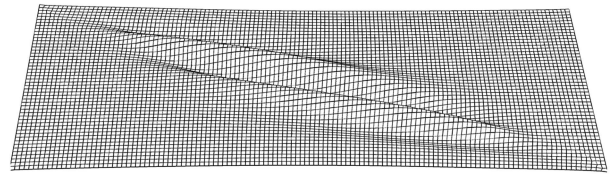


شکل ۱۴. تأثیر امتداد ناهمسانگردی بر بیشینه دامنه‌ی چین‌خوردگی به‌ازاء مقادیر متفاوت کشیدگی.

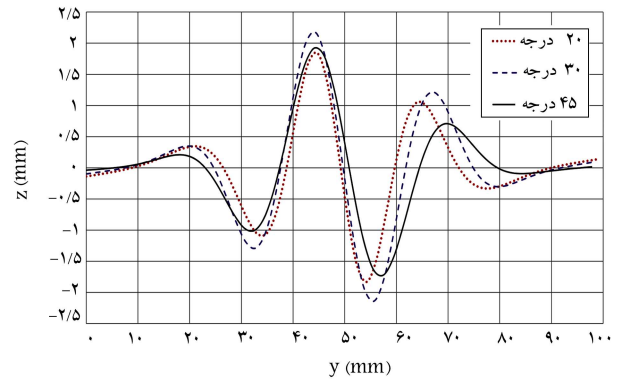
میزان تغییرات بیشینه دامنه‌ی غشاء تحت کشش و تغییر زوایای مختلف محور ناهمسانگردی غشاء مطابق شکل ۱۴ است.

#### ۴.۴. تأثیر نسبت ضرایب ارتجاعی بر الگوی چین‌خوردگی

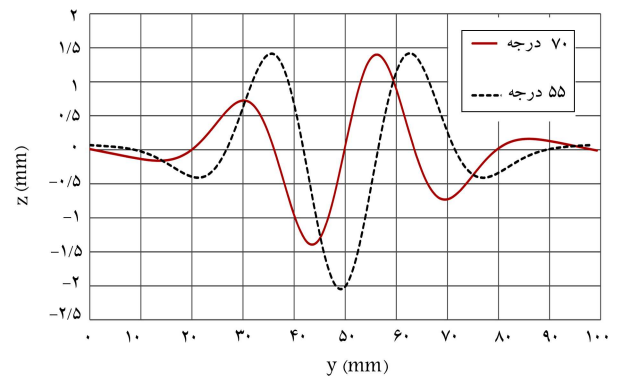
برای نشان‌دادن تأثیر نسبت ضرایب ارتجاعی بر الگوی چین‌خوردگی، چهار غشاء با نسبت ضرایب کشسان  $\frac{E_{22}}{E_{11}} = 1, 2, 4, 10$  را در نظر می‌گیریم. برای به دست آوردن تأثیر نسبت ضرایب ارتجاعی بر الگوی چین‌خوردگی، غشاء را تحت کشیدگی



شکل ۹. نمونه‌یی از خروجی‌های نرم‌افزار آباکوس برای تحلیل چین‌خوردگی غشاء مستطیلی.



شکل ۱۰. تأثیر امتداد راست‌گردی بر جابه‌جایی در مقطع عمودی میانه‌ی غشاء با زوایای راست‌گردی ۲۰، ۳۰ و ۴۵ درجه.



شکل ۱۱. تأثیر امتداد راست‌گردی بر جابه‌جایی در مقطع عمودی میانه‌ی غشاء با زوایای راست‌گردی ۵۵ و ۷۰ درجه.

در ادامه، تأثیر نسبت ضرایب ارتجاعی و نسبت ابعاد غشاء بر الگو و دامنه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای این منظور ابتدا غشاء را تحت کشیدگی به میزان ۱۰mm قرار می‌دهیم. نتایج حاصل از شبیه‌سازی در محیط نرم‌افزار اجراء محدود آباکوس الگوی چین‌خوردگی را مطابق اشکال ۱۰ و ۱۱ نشان می‌دهد.

نتایج حاصل از این بررسی نشان می‌دهد که با افزایش زاویه‌ی دوران محور ناهمسانگردی تا میزان ۴۵ درجه بیشینه دامنه افزایش می‌یابد؛ افزایش انحراف محور مادی موجب کاهش دامنه‌ی چین‌خوردگی خواهد شد. چنان‌که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود، علی‌رغم تغییر راستای ارتوتروپی، الگوی چین‌خوردگی حاصل با الگوی چین‌خوردگی قبل از زاویه ۴۵ درجه متقارن است. در نتیجه، تغییرات بیشینه دامنه روندی صعودی دارد. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ الگوی چین‌خوردگی غشاء ناهمسانگرد تحت کشش ۲۰mm و ۳۰mm نشان داده شده است. این نتایج روند تغییرات را همانند کشیدگی ۱۰mm نشان می‌دهد.

۵ درصد قرار می‌دهیم. الگوی چین‌خوردگی در خط میانی مطابق شکل ۱۵ است. بیشینه دامنه‌ی تحت کشش ثابت، با نسبت ضرایب ارتجاعی مختلف مطابق شکل ۱۶ است. این نمودار نشان می‌دهد افزایش ضرایب ارتجاعی باعث افزایش دامنه و کاهش طول موج می‌شود.

## ۵. نتیجه‌گیری

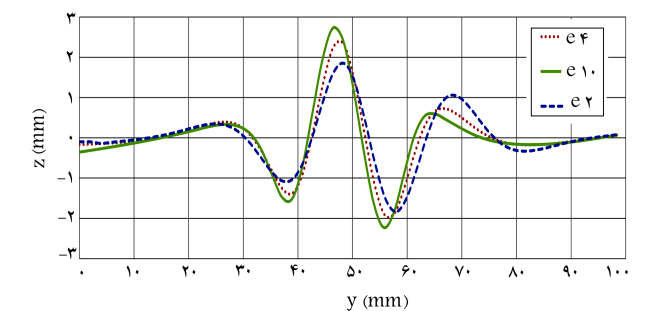
غشاءها که در ظاهر مادی به شکل ورقه‌های نازک فلزی، کاغذی، پارچه‌یی یا پلاستیکی هستند، در تعریف مکانیکی عناصری هستند که قابلیت تحمل گشتاور خمشی و نیروی فشاری را ندارند. یکی از خصوصیات این نوع اشکال مادی قابلیت چین خوردن آنهاست. مطالعه‌ی این پدیده اعم از آن که مطلوب یا نامطلوب باشد، دارای ارزش کاربردی است. بسیار از غشاءها دارای رفتار ناهمسانگرد هستند یعنی خاصیت ارتجاعی آنها در جهات مختلف فرق می‌کند. مثلاً اغلب منسوجات به دلیل نوع بافت در جهت تار و پود، خواص ارتجاعی متفاوت دارند. در این نوشتار ضمن بررسی رفتار این قبیل غشاءها، نشان داده شد که انحراف راستای بار از محورهای راست‌گردی موجب افزایش دامنه‌ی چین‌خوردگی و در نتیجه افزایش عمق چین‌ها می‌شود. این در حالی است که افزایش مقدار نیروی کشیدگی به تناوب موجب کم یا زیاد شدن دامنه‌ی چین‌خوردگی‌ها می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که افزایش نسبت ضریب ارتجاعی دو محور مادی  $\frac{E_{22}}{E_{11}}$  موجب افزایش دامنه‌ی چین‌خوردگی خواهد شد.

## پانوشته‌ها

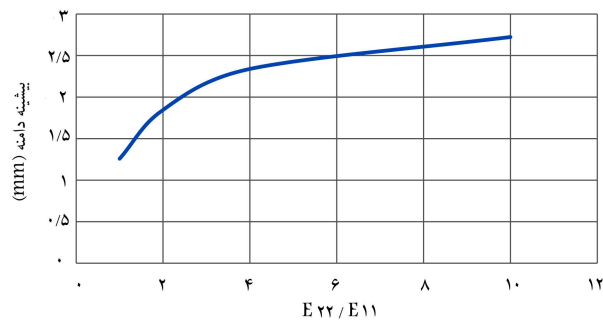
1. Abaqus
2. buckling
3. imperfection
4. Matlab

## منابع (References)

1. Wagner, H. "Flat sheet metal girder with very thin metal web", *Zeitschrift für Flugtechnik Motorluftschiffahrt*, pp. 200-207 (1929).
2. Reissner, E. "On tension field theory", *Applied Mechanics, Proc 5th Int. Congress*, pp. 88-92 (1938).
3. Mansfield, E.H. "Tension field theory a new approach which shows its duality with in-extensional theory", *Journal of Applied Mechanics*, **45**, pp. 305-320 (1968).
4. Pipkin, A.C. "The relaxed energy density for isotropic elastic membranes", *Journal of Applied Mathematics*, **36**, pp. 85-99 (1986).



شکل ۱۵. تأثیر نسبت ضرایب ارتجاعی بر نمودار جابه‌جایی در مقطع عمودی میانه‌ی غشاء به‌ازاء زاویه‌ی انحراف راست‌گردی  $20^\circ$  درجه.



شکل ۱۶. بیشینه دامنه‌ی غشاء در مقابل نسبت‌های مختلف ضرایب ارتجاعی زاویه‌ی انحراف راست‌گردی  $20^\circ$  درجه و میزان کشیدگی  $10\%$ .

5. Roddeman, D.G., Druker, J., Oomens, C.W.J. and Janssen, J.D. "The wrinkling of thin membranes: Part I—Theory", *Journal of Applied Mechanics*, **54**, pp. 884-887 (1987).
6. Hornig, J. and Schoop, H. "Closed form analysis of wrinkled membranes with linear stress-strain relation", *Journal of Computational Mechanics*, **30**, pp. 259-264 (2003).
7. Wong, Y.W. and Pellegrino, S. "Wrinkled membrane III: Numerical simulations", *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, **1**, pp. 63-95 (2006).
8. Zheng, L. "Wrinkling of dielectric elastomer membrane", Ph.D Dissertation, University of California Institute of Technology (2009).
9. Nayyar, V. "Stretch-induced compressive stress and wrinkling in elastic thin sheets", Ms.C Dissertation, Texas Austin (2010).
10. Mase, G.T. and Mase, G.E. *Continuum Mechanics for Engineers*, CRC Press, USA (1999).