

تحلیل استاتیک - خمیری پوسته‌ی مرکب استوانه‌یی - مخروطی بر اثر فشار داخلی

جمال زمانی* (دانشیار)

محمود مبین (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهدی آقایی (کارشناس ارشد)

محمدحسین بنویدی (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۳)
دوری ۲ - ۳۰، شماره ۲/۲، ص. ۴۷-۶۰

در این نوشتار رفتار خمیری پوسته‌ی استوانه‌یی - مخروطی جدار نازک تحت فشار استاتیکی داخلی، مورد تحلیل قرار گرفت. از مدل صلب - خمیری کامل برای رفتار مادی سازه، و از سطح تسلیم مستطیلی معمول - شامل N_p و M_p - برای معیار تسلیم استفاده شده است. سه سازوکار کلی برای فروریزش پوسته شامل فروریزش مخروطی، فروریزش با دو لولای خمیری و فروریزش با سه لولای خمیری در نظر گرفته می‌شود که براساس هندسه‌ی سازه، یکی از این سه حالت در هنگام فروریزش رخ می‌دهد. در نتایج، نمودار تغییرات فشار فروریزش سازه نسبت به تغییرات طول استوانه یا طول مخروط آمده است. سازوکار فروریزش به‌ازای تغییر طول استوانه و یا مخروط تغییر می‌کند به‌گونه‌یی که فشار فروریزش سازه به مقادیر مجانبی خود (فشار فروریزش سازه کاملاً استوانه‌یی یا کاملاً مخروطی) نزدیک می‌شود.

zamani@kntu.ac.ir
mobin.mahmood@gmail.com
aghaei934@yahoo.com
mh_benvidi@yahoo.com

واژگان کلیدی: پوسته‌ی استوانه و مخروط ناقص، حل استاتیک خمیری، فشار فروریزش داخلی.

۱. مقدمه

مخروطی با مودهای کماتش متقارن محوری، یک بار تحت بار فشاری^[۱] و بار دیگر تحت فشار هیدروستاتیکی داخلی^[۲] منجر به روابط بسته‌یی شد که مؤید شرایط حدی - بار محوری برای کماتش استوانه - است. همچنین بررسی تجربی و عددی کماتش خمیری پوسته‌های مخروطی جدار نازک تحت فشار خارجی با استفاده از اجزاء محدود^[۳] و نیز بررسی تحلیلی کماتش کشسان اتصال پوسته‌های استوانه‌یی - مخروطی تحت فشار داخلی^[۴] در هندسه‌های متفاوت منجر به استخراج رابطه‌یی ساده براساس حل‌های متفاوت اجزاء محدود شد. این رابطه با استفاده از نتایج تجربی صحه‌گذاری شد. عامل دیگر واماندگی پوسته‌های مخروطی و اتصال با استوانه را می‌توان ناشی از تشکیل لولاهای حلقوی خمیری دانست؛ در نوشتار حاضر این نوع واماندگی مورد تحلیل واقع شده است.

در پایه‌ریزی مقدمات تحلیل خمیری سازه‌های مهندسی، ابتدا نرخ انرژی مصرفی براساس کار خمیری و برحسب نتیجه‌های تنش محاسبه شد^[۵] و سپس نشان داده شد که این نرخ همواره صفر یا مثبت است.^[۶] بر این اساس برای پوسته‌ها سطوح تسلیم مناسبی در نظر گرفته شد^[۷] که با استفاده از آن سطوح تسلیم و با توجه به فرضیات کاربردی در نتیجه‌های تنش، می‌توان برای شروع خمیری شدن ماده مرزی در نظر گرفت. با استفاده از سطوح تسلیم ساده‌شده به صورت سطوح تسلیم مستطیلی با شش ضلعی با استفاده از دو نتیجه‌ی تنش، دانشمندان بسیاری به مطالعه‌ی فشار

پوسته‌های مخروطی و اتصال آنها از جمله پوسته‌های بسیار مهم در زمینه مهندسی تلقی می‌شوند. این پوسته‌ها در شاخه‌های مختلف مهندسی عمدتاً تحت فشار - مثلاً در مهندسی عمران و در سازه‌هایی نظیر سیلوا، مخازن تحت فشار، تانکرها، برج‌های خنک‌کننده و دودکش‌ها - کاربرد دارند. همچنین در صنعت نفت و در لوله‌های انتقال محصولات نفتی، برای اتصال دو لوله با قطرهای نابرابر و در محل‌هایی که استفاده از اتصال فلنجی مناسب نیست، از کاهنده‌های مخروطی استفاده می‌شود. بدین ترتیب این سازه‌ها را می‌توان به عنوان پوسته‌های مخروطی تحت بارگذاری فشار داخلی مدل کرد. در مهندسی دریایی نیز می‌توان بدنه‌ی زیردریایی‌ها را به صورت پوسته‌های استوانه‌یی با رینگ‌های صلب تقویتی که با یک مخروط ناقص مسدود شده، مدل کرد. در مهندسی هوافضا، کابین فضاپیماها را می‌توان به صورت یک پوسته‌ی مخروطی در نظر گرفت. در دو کاربرد اخیر پوسته‌ی مخروطی مدل شده تحت فشار خارجی قرار دارد.

براساس آزمایشات و نیز پیش‌بینی‌های مهندسی، می‌توان دو نوع واماندگی تحت بار استاتیکی برای پوسته‌های مخروطی و اتصال آنها تشخیص داد. واماندگی نخست آن است که این پوسته‌ها ممکن است دچار کماتش شوند؛ بررسی تحلیلی پوسته‌های

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۹/۸، اصلاحیه ۱۳۹۲/۷/۳۰، پذیرش ۱۳۹۲/۸/۲۷.

مجزا پیش‌بینی شود و سپس با ترکیب معادلات حاکم بر دو پروفیل پوسته رفتار اتصال استوانه‌یی و مخروطی پیش‌بینی شود. برای آشنایی کامل با نحوه‌ی فروریزش پوسته‌ی استوانه‌یی، ابتدا تحلیل خمیری - استاتیک استوانه تحت فشار داخلی مطابق روش‌های جونز^[۱۱] ارائه می‌شود.

۱.۲. محاسبه‌ی فشار فروریزش پوسته‌ی استوانه‌یی

اگر یک المان از پوسته‌ی استوانه‌یی جدارنازک (شکل ۱) را که تحت بار محوری نیست در نظر بگیریم، معادلات تعادل نیرو و ممان به ترتیب عبارت بودند از:

$$R \frac{dQ_x}{dx} + N_\theta - Rp = 0 \quad (۱)$$

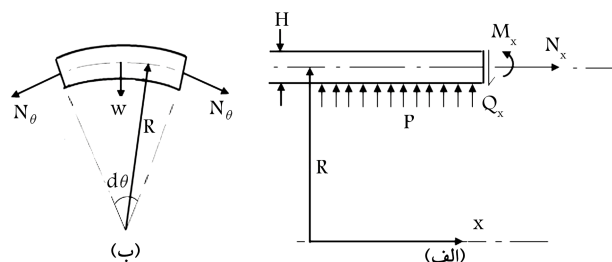
$$\frac{dM_x}{dx} - Q_x = 0 \quad (۲)$$

که در آن p فشار متقارن داخلی است.

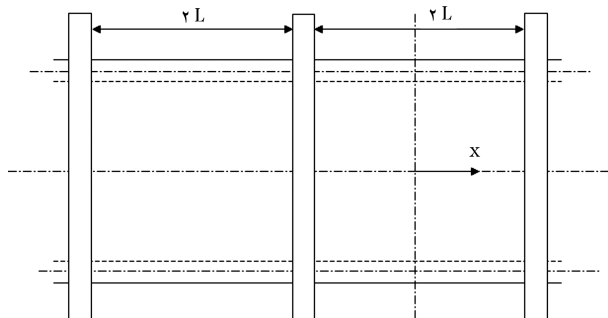
اگر پوسته‌ی استوانه‌یی بلندی را که در فواصل مساوی تقویت شده در نظر بگیریم (شکل ۲)، با این فرض که فاصله‌ی بین دو تکیه‌گاه $2L$ باشد، باید پروفیل تسلیم پوسته از ضلع AB از شکل ۳ تبعیت کند. زیرا در طول استوانه N_θ ثابت است و ممان با فاصله گرفتن از تکیه‌گاه تغییر می‌کند و در نتیجه ضلع AD برای پیش‌بینی رفتار خمیری استوانه تحت بار استاتیکی مناسب نیست.

به علت تقارن موجود در مسئله‌ی استوانه و شرایط کاملاً یکسان دو تکیه‌گاه، و نیز به علت این که برای فروریزش یک سازه دست کم به دو لولای خمیری نیاز داریم که در یکی از آنها باید نیروی برشی هم صفر باشد، نقطه‌ی میانی استوانه به عنوان لولای خمیری در نظر گرفته می‌شود و دو لولای خمیری در تکیه‌گاه‌ها ایجاد خواهند شد.

با این فرضیات پوسته به صورت شعاعی تغییر شکل خواهد داد و در فاصله‌ی $-L \leq x < L$ داریم $N_\theta = N_0$. بنابراین لولاهای خمیری محیطی در نقاط $x = -L$ و $x = L$ در شکل ۲ واقع شده‌اند. همچنین در نقطه‌ی $x = 0$ لولای



شکل ۱. نمایی از المان پوسته‌ی استوانه‌یی تحت فشار داخلی.



شکل ۲. پوسته‌ی استوانه‌یی تقویت شده با رینگ‌های صلب در فواصل مساوی.

فروریزش ورق‌ها و پوسته‌های متفاوت پرداختند. عده‌یی از آنان پوسته‌ی استوانه‌یی تحت بار متقارن محوری را بدون اعمال شرایط مرزی و با استفاده از دو سطح تسلیم شش ضلعی و ترسکای واقعی بررسی کردند.^[۸] سپس محققین دیگری با نتایج تجربی خود نشان دادند که روابط ناشی از بررسی‌های به عمل آمده برای استوانه‌های بلند صادق است^[۹] و حدی از بلندی را متناسب با نتایج تجربی خود تعریف کردند. همچنین پوسته‌های استوانه‌یی را بدون شرط مرزی و تحت بار حلقوی مورد تحلیل قرار دادند.^[۱۰] اما شرط مرزی که در مدل‌سازی انواع سازه‌ها مفید است و عمدتاً توسط محققین مورد استفاده قرار می‌گیرد، شرط مرزی تکیه‌گاه مقید با حلقه‌ی صلب است. محققین استوانه‌ها را با بارگذاری فشار متقارن محوری و استفاده از شرط مرزی حلقه‌ی صلب تقویتی به ترتیب مورد تحلیل استاتیکی^[۱۱] و دینامیکی^[۱۲] قرار داده‌اند. در این راستا مطالعات عمیقی در زمینه‌ی حد خمیری، استاتیکی و دینامیکی انواع ورق‌ها و پوسته‌ها انجام شده است.^[۱۱]

در بررسی پوسته‌های مخروطی و اتصال آنها به پوسته‌های استوانه‌یی^[۱۳] که مدل مناسبی از سازه‌ی سیلو است، مقالات مفصلی در زمینه‌ی دو نوع واماندگی استاتیکی این پوسته‌ها انجام شده و بحث مفصلی که بیشتر در بردارنده‌ی مطالعات تجربی و عددی است مطرح شده است. محققین دیگری نیز پوسته‌ی مخروطی را تحت فشار خارجی و با استفاده از سطوح تسلیم مستطیلی بهینه‌سازی کردند^[۱۴، ۱۵] که این سطوح متشکل از نیروی غشاء‌ها و برآیند ممان‌هاست. آنان از سطوح تسلیم هشت‌وجهی برای بهینه‌سازی پوسته‌های مخروطی خمیری تحت بارگذاری مرکزی صلب استفاده کردند. در مطالعه‌ی حاضر اتصال پوسته‌های مخروطی به پوسته‌ی استوانه‌یی تحت شرایط مقید با استفاده از حلقه‌های صلب مورد تحلیل استاتیک - خمیری قرار گرفته است. سطح تسلیم به کار گرفته شده نیز سطح تسلیم ساده‌شده‌ی مستطیلی برای متجه‌های تنش N_θ و M_φ است.

بدین منظور، ابتدا به حل ارائه شده برای پوسته‌ی مخروطی خواهیم پرداخت و پس از استفاده از معادلات تعادل پوسته‌های دورانی و سطح تسلیم دوبعدی، معادلات لازم برای محاسبه‌ی فشار فروریزش پوسته‌های مخروطی ارائه می‌شود. در ضمن، براساس محل ایجاد لولای خمیری در سازه، مخروط‌های کوتاه و بلند معرفی می‌شوند و روابط بسته‌ی فشار فروریزش برای هر دو نوع مخروط (کوتاه و بلند) استخراج می‌شود. روابط ارائه‌شده به خوبی فشار فروریزش حالات حدی یعنی ورق حلقوی به‌ازای زاویه‌ی رأس 90° درجه، و استوانه‌یی به‌ازای زاویه‌ی رأس صفرشده را پیش‌بینی می‌کنند.

در حل ارائه شده برای اتصال استوانه و مخروط سه حالت کلی برای فروریزش اتصال استوانه و مخروط در نظر گرفته می‌شود: فروریزش مخروطی، فروریزش با دو لولای خمیری، و فروریزش با سه لولای خمیری که با توجه به هندسه‌ی سازه، فروریزش آن با یکی از این سه حالت رخ خواهد داد. در نتایج می‌توان نمودار تغییرات میزان فشار فروریزش سازه را نسبت به تغییرات طول استوانه یا طول مخروط در هندسه‌های خاصی مشاهده کرد. چنان که نتایج نشان می‌دهد، در هندسه‌های خاصی تغییر سازوکار فروریزش به‌ازای تغییر طول استوانه یا مخروط رخ می‌دهد. در ضمن با ارائه‌ی مدل ریاضی مرتبط، مسئله برای هندسه‌های متفاوت قابل حل خواهد بود.

۲. معرفی روش جدید تحلیلی

به منظور پیش‌بینی میزان بار فروریزش خمیری اتصال استوانه‌یی و مخروطی تحت بارگذاری استاتیکی ابتدا باید رفتار استاتیکی - خمیری استوانه و مخروط به صورت

با فرض ثابت بودن $N_\theta = N_0$ نیز خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = p - \frac{N_0}{R} \quad (4)$$

و با انتگرال‌گیری از معادله‌ی ۴ داریم:

$$M_x = \left(p - \frac{N_0}{R}\right) \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (5)$$

در $x = 0$ داریم $M_x = -M_0$ ، و در $x = L$ داریم $M_x = M_0$. همچنین مشتق ممان خمشی که همان نیروی برشی است، در $x = 0$ برابر با صفر است. در نتیجه معادله‌ی ممان در طول استوانه عبارت خواهد بود از:

$$M_x = \left(p - \frac{N_0}{R}\right) \frac{x^2}{2} - M_0 \quad (6)$$

با اعمال کامل شرایط مرزی می‌توان فشار فروریزش استاتیکی را طبق رابطه‌ی ۷ محاسبه کرد:

$$p_c = N_0 \left(1 + \frac{RH}{L^2}\right) / R \quad (7)$$

۲.۲. محاسبه‌ی بار فروریزش پوسته‌ی مخروطی

اگر یک المان از پوسته‌ی دورانی با تمامی نیروهای وارد بر آن را به صورت متقارن (شکل ۵) در نظر بگیریم، آنگاه با استفاده از معادلات تعادل ممان و نیرو می‌توان نوشت:

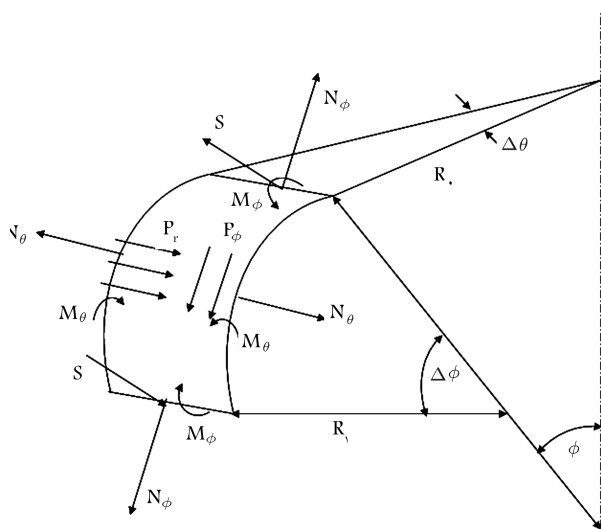
$$(R_0 N_\varphi)' - R_1 N_\theta \cos \varphi - R_0 S + R_0 R_1 P_\varphi = 0 \quad (1.8)$$

$$(R_0 S)' + R_1 N_\theta \sin \varphi + R_0 N_\varphi + R_0 R_1 P_r = 0 \quad (2.8)$$

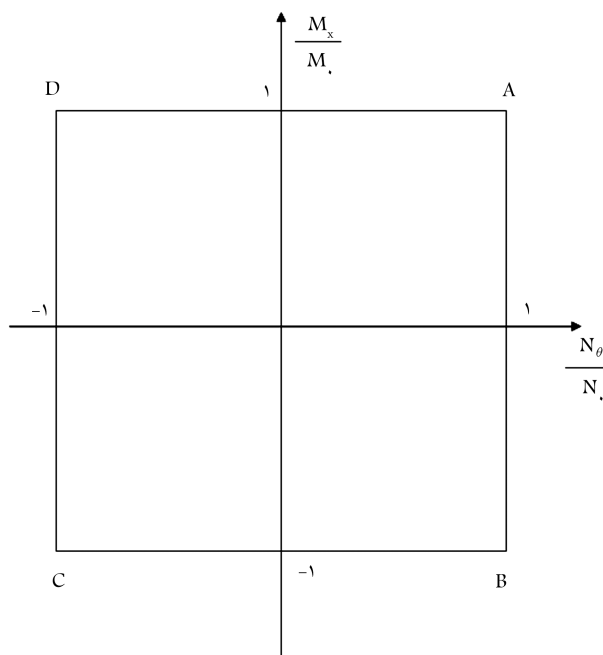
$$(R_0 M_\varphi)' - R_1 M_\theta \cos \varphi - R_0 R_1 S = 0 \quad (3.8)$$

در رابطه‌ی ۸ پریم‌ها اشاره به مشتق نسبت به φ دارند و شعاع‌های R_0 و R_1 مطابق رابطه‌ی ۹ با هم مرتبط‌اند:

$$R_0 = R_1 \sin \varphi \quad (9)$$



شکل ۵. نیروهای وارد بر پوسته‌ی دورانی.



شکل ۳. سطح تسلیم مربعی.

خمیری تشکیل می‌شود که معادل آن در سطح تسلیم نقطه‌ی B خواهد بود. بنابراین شکل فروریزش مانند شکل ۴ خواهد بود. برای ناحیه‌ی $0 \leq x \leq L$ داریم:

$$N_\theta = N_0, \quad -M_0 \leq M_x \leq M_0$$

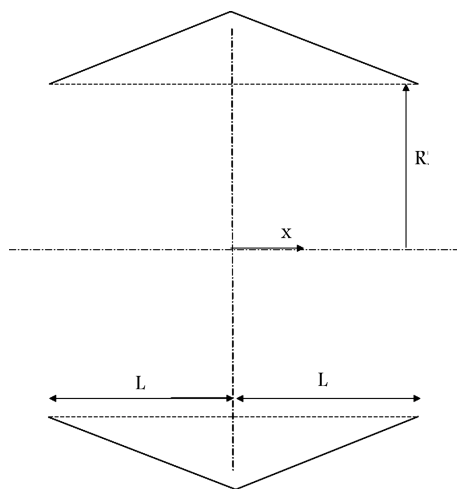
مقادیر M_0 و N_0 با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند که در آن σ_y تنش تسلیم ماده سازنده سازه و h ضخامت آن است:

$$N_0 = \sigma_y h$$

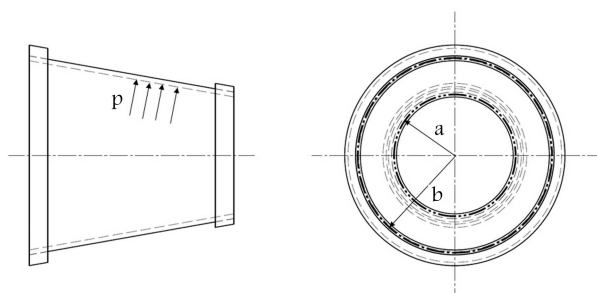
$$M_0 = \frac{\sigma_y h^2}{4}$$

با توجه به مطالب گفته شده نتیجه می‌گیریم توزیع ممان حول صفحه‌ی عمودی $x = 0$ به صورت متقارن خواهد بود. از ترکیب معادلات ۱ و ۲ خواهیم داشت:

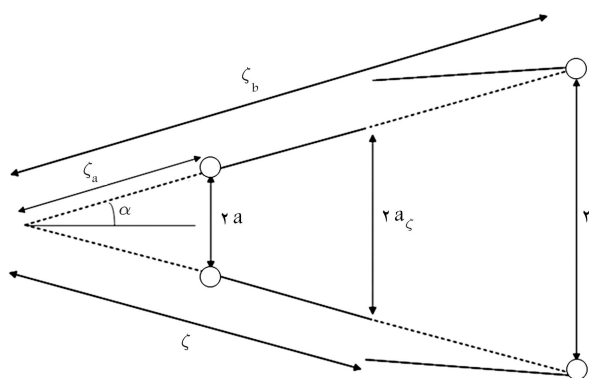
$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{N_\theta}{R} = p \quad (3)$$



شکل ۴. شکل فروریزش پوسته‌ی استوانه‌یی.



شکل ۶. شرایط هندسی و بارگذاری یک پوسته‌ی مخروطی ناقص.



شکل ۷. سازوکار فروریزش پوسته‌ی مخروطی.

یافته و از این طریق به محاسباتی تحلیلی میزان بار فروریزش برداریم. این مسئله با دو فرض متفاوت حل شده که در این بخش به آنها پرداخته شده است. چنان که در بخش قبل نشان داده شد، برای فروریزش یک پوسته‌ی استوانه‌یی تقویت‌شده با رینگ‌هایی با فواصل مساوی، تحت بار استاتیکی به دلیل تقارن موجود در مسئله، تشکیل سه لولای خمیری -- یک لولا در مرکز استوانه با نیروی برشی صفر، و دو لولای دیگر مستقر در محل تکیه‌گاه‌ها -- ضرورت می‌یابد. همین شرایط مرزی بر یک پوسته‌ی مخروطی ناقص نیز قابل اعمال است (شکل ۶). در مورد پوسته‌ی مخروطی می‌توان گفت با تشکیل دو لولای خمیری (شکل ۷) می‌توان به یک سازوکار با یک درجه آزادی رسید. ولی مکان تشکیل این لولاها به علت عدم تقارن پوسته‌ی مخروطی در جهت یال مشخص نیست (برخلاف پوسته‌ی استوانه‌یی که مکان تشکیل لولاهای خمیری در تکیه‌گاه‌ها و در مرکز استوانه است).

از آنجا که در تکیه‌گاهی با شعاع بزرگ مخروطی، سفتی خمشی سازه به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد، یکی از لولاها در محل تکیه‌گاه با شعاع بزرگ مخروطی است (که به آن لولای خمیری تکیه‌گاهی می‌گوییم). بنابراین در معادله‌ی ۱۷ چهار مجهول وجود دارد: مقدار فشار فروریزش استاتیکی (P)، فاصله‌ی مجهول لولای خمیری دوم از رأس مخروط (ξ ، لولای خمیری میانی)، ثوابت مورد نیاز در معادله‌ی ۱۷ (یعنی C_1 و C_2).

برای مخروط کامل در حالت $\alpha < 90^\circ$ باید از بین دو لولای خمیری لولایی انتخاب شود که در آن نیروی برشی صفر است. از آنجا که نتایج مخروط به‌ازای $\alpha = 90^\circ$ باید به نتایج استوانه میل کند، لولای خمیری با برش صفر در محل لولای خمیری میانی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به شکل ۸ که در آن $M_0 = 450 \text{ N}$ ، متوجه می‌شویم مسئله‌ی توزیع ممان در مخروط به مسئله‌ی توزیع ممان در نصف استوانه شباهت بسیار زیادی دارد و تفاوت مخروط در اینجا است که با توجه به

رابطه‌ی ۸ که برای تمامی پوسته‌های دورانی صادق است، برای پوسته‌ی مخروطی بازنویسی می‌شود. به منظور ساده‌سازی روند حل، فرض می‌شود در راستای یال مخروطی آزادی حرکت وجود دارد و در نتیجه تنش در راستای یال برای کلی‌ترین حالت پوسته (که در شکل ۵ با N_φ نمایش داده شده است)، معادل صفر فرض می‌شود. همچنین به دلیل تقارن موجود در مسئله، مقدار ممان واحد طول محیطی (M_θ) نیز برابر صفر خواهد بود. با توجه به هندسه‌ی خاص پوسته‌ی مخروطی، مقدار R_1 نیز بی‌نهایت خواهد بود. با توجه به تعریف مسئله که مخروط تحت فشار داخلی است، مقدار P_φ نیز صفر خواهد بود.

برای بازنویسی رابطه‌ی ۸ باید رفتار ماده‌ی سازنده‌ی سازه مشخص شود. به منظور ساده‌سازی روابط، جنس ماده تماماً صلب خمیری فرض می‌شود. همچنین باید از سطح تسلیم مشخصی استفاده کرد و مسیر مشخصی را برای متصل کردن لولاها در خمیری روی سطح تسلیم تعیین کرد.

برای پوسته‌های مخروطی نیز از سطح تسلیمی همانند شکل ۳ استفاده می‌شود. ضلع AB در شکل ۳ برای پیش‌بینی فشار فروریزش پوسته‌ی مخروطی انتخاب می‌شود که در آن N_θ ثابت و برابر با N_0 و M_φ متغیر است. پس با استفاده از رابطه‌ی ۸ می‌توان به دستگاه معادلات ۱۰ رسید.

$$-R_1 N_0 \cos \varphi - R_0 S = 0 \quad (1.10)$$

$$(R_0 S)' + R_1 N_0 \sin \varphi + R_0 R_1 P_r = 0 \quad (2.10)$$

$$(R_0 M_\varphi)' - R_0 R_1 S = 0 \quad (3.10)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۲.۱۰ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial R_0}{\partial \varphi} S + R_0 \frac{\partial S}{\partial \varphi} + R_1 N_0 \sin \varphi + R_0 R_1 P_r = 0 \quad (11)$$

$$dy = R_1 d\varphi \quad (12)$$

و با توجه به هندسه‌ی مخروط داریم:

$$R_0 = y \sin \alpha \quad (13)$$

با استفاده از روابط ۱۱ تا ۱۳ خواهیم داشت:

$$S \sin \alpha + y \sin \alpha \frac{\partial S}{\partial y} + N_0 \cos \alpha + y \sin \alpha P_r = 0 \quad (14)$$

از طرفی مطابق رابطه‌ی ۳.۱۰ نیز داریم:

$$S = \frac{M_\varphi}{y} + \frac{\partial M_\varphi}{\partial y} \quad (15)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۵ در معادله‌ی ۱۴، معادله‌ی دیفرانسیل نهایی به دست می‌آید.

$$2 \frac{dM_\varphi}{dy} + y \frac{d^2 M_\varphi}{dy^2} + N_0 \cot \alpha - p y = 0 \quad (16)$$

با حل معادله‌ی دیفرانسیل ۱۶ معادله‌ی ممان برحسب y به دست می‌آید:

$$M_\varphi = \frac{P y^3}{6} - \frac{y N_0 \cot \alpha}{2} - \frac{c_1}{y} + c_2 \quad (17)$$

با استفاده از معادله‌ی ۱۷ و اعمال شرایط مرزی مناسب می‌توان میزان فشار فروریزش استاتیکی پوسته‌ی مخروطی شکل جدارنازک را یافت. پس از به دست آوردن معادله‌ی کلی ممان لازم است با اعمال شرایط مرزی مناسب، ثوابت مجهول معادله‌ی ۱۷ را

با حل این ۳ معادله و ۴ مجهول و کمینه‌سازی مقدار بار در مجموعه معادلات، ۱۸ مقدار ξ در مخروط ناقص با استفاده از حل معادله‌ی درجه ۳ زیر (معادله‌ی ۱۹) محاسبه می‌شود:

$$N_0 \cot(\alpha) \xi^2 + (4M_0 - 3N_0 \cot(\alpha) \xi_b) \xi^2 + (2M_0 \xi_b + 3N_0 \cot(\alpha) \xi_b^2) \xi + (M_0 \xi_b^2 - N_0 \cot(\alpha) \xi_b^2) = 0 \quad (19)$$

پس از به دست آوردن مقدار مجهول ξ از معادله‌ی ۱۹ می‌توان مقدار فشار فروریزش استاتیکی مخروط بلند را از رابطه‌ی ۲۰ محاسبه کرد:

$$p = \frac{N_0 \cot(\alpha)}{\xi} - \frac{M_0}{(\xi_b - \xi) \xi} \quad (20)$$

۱.۲.۲. حل پوسته‌ی مخروطی کوتاه

اگر $a \leq \xi$ ، برای کمینه‌شدن مقدار بار فروریزش لازم است لولاهای خمیری در دو تکیه‌گاه تشکیل شوند و در نتیجه معادله‌ی ۱۸ را می‌توان چنین نوشت:

$$M(y = \xi_b) = M_0 \Rightarrow M_0 = \frac{p \xi_b^2}{6} - \frac{N_0 \xi_b \cot(\alpha)}{2} - \frac{c_1}{\xi_b} + c_2 \quad (1.21)$$

$$M(y = \xi_a) = -M_0 \Rightarrow -M_0 = \frac{p \xi_a^2}{6} - \frac{N_0 \xi_a \cot(\alpha)}{2} - \frac{c_1}{\xi_a} + c_2 \quad (2.21)$$

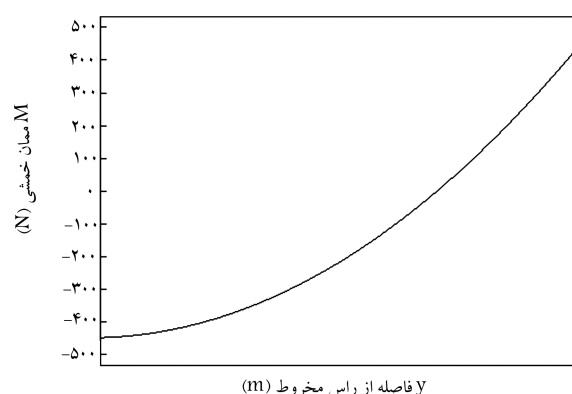
$$S(y = \xi_a) = 0 \Rightarrow \frac{p \xi_a}{2} - N_0 \cot(\alpha) + \frac{c_2}{\xi_a} = 0 \quad (3.21)$$

پس از حل دستگاه معادلات ۲۱، مجهول اصلی -- فشار فروریزش مخروط کوتاه -- مطابق رابطه‌ی ۲۲ محاسبه می‌شود.

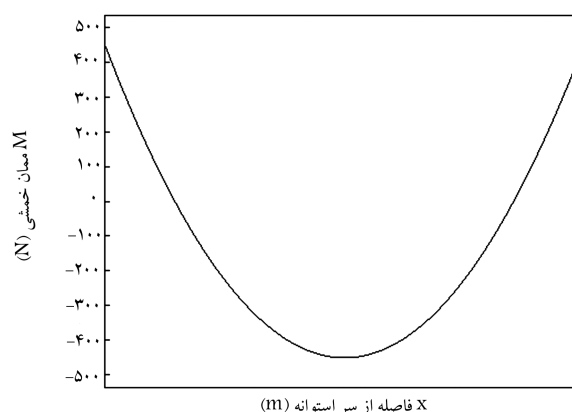
$$p = \frac{6 \left[N_0 \cot(\alpha) \left(\frac{\xi_a}{\xi_b} - \frac{\xi_b}{\xi_a} \right) - M_0 \left(\frac{\xi_a + \xi_b}{\xi_a - \xi_b} \right) \right]}{2 \xi_a^2 - \xi_b^2 - \xi_a \xi_b} \quad (22)$$

۳. محاسبه‌ی فشار فروریزش اتصال پوسته‌ی استوانه‌یی و مخروطی

پس از حل کامل مسئله‌ی استوانه و مخروط تحت فشار داخلی، می‌توان به‌طور جداگانه به حل اتصال استوانه و مخروط پرداخت. چنان‌که از حل خمیری مخروط داریم، برای فروریزش این سازه باید دو لولای خمیری تشکیل شود و در یکی از لولاهای میزبان نیروی برشی صفر باشد. برای فروریزش پوسته‌ی استوانه‌یی نیز نیازمند تشکیل سه لولا هستیم. همچنین ضلع AB در سطح تسلیم مربعی در مسئله‌ی استوانه و مخروط صادق است. بنابراین در مسئله‌ی اتصال هم از این ضلع از سطح تسلیم برای پیش‌بینی فشار فروریزش استفاده شده است. در مسئله‌ی اتصال، فروریزش را می‌توان با دو لولا یا با سه لولای خمیری انجام داد؛ این مسئله را می‌توان به‌صورت سازوکار فروریزش استوانه‌یی یا مخروطی بیان کرد. برای تشخیص این‌که در مسئله‌ی واقعی کدام حالت رخ می‌دهد، باید روند زیر را در نظر گرفت. به‌طور عام، برای فروریزش سازه چهار حالت می‌توان متصور شد:



الف) $\alpha = 20^\circ$



ب) توزیع ممان در طول پوسته استوانه‌یی.

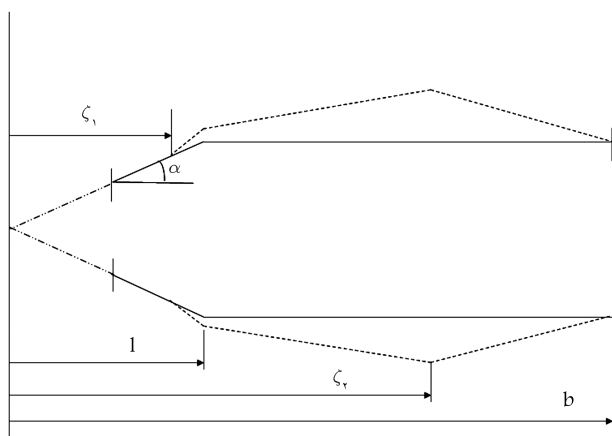
شکل ۸. نمودار توزیع ممان در طول یال مخروط.

معادله‌ی ۱۵ و در نتیجه صفر نبودن مشتق ممان در لولای خمیری میانی، نمی‌توان انتظار تغییر شیب در معادله‌ی ممان مخروط بعد از لولای خمیری میانی را داشت. بنابراین نقاطی که فاصله‌شان از رأس مخروط کم‌تر از لولای خمیری میانی است، وارد ناحیه‌ی خمیری نخواهند شد. البته به‌دلیل سفتی خمشی بالای مخروط در نقاط نزدیک به رأس، این مسئله از قبل حدس زده می‌شد. با توجه به این‌که در حالت $\alpha < 90^\circ$ و مخروط کامل، مکان لولای خمیری میانی در رأس مخروط نخواهد بود و اساساً رأس مخروط وارد ناحیه‌ی خمیری کامل نمی‌شود، نمی‌توان عبارت c_1 در معادله‌ی ۱۷ را برابر با صفر در نظر گرفت؛ در نتیجه مسئله‌ی فروریزش مخروط کامل دقیقاً با مسئله‌ی مخروط ناقص بلند یکسان خواهد بود. برای حل مخروط ناقص می‌توان از معادله‌ی ۱۷ استفاده کرد.

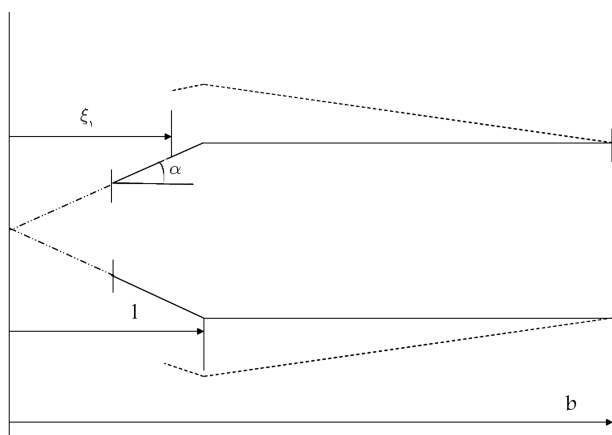
$$M(y = \xi_b) = M_0 \Rightarrow M_0 = \frac{p \xi_b^2}{6} - \frac{N_0 \xi_b \cot(\alpha)}{2} - \frac{c_1}{\xi_b} + c_2 \quad (1.18)$$

$$M(y = \xi) = -M_0 \Rightarrow -M_0 = \frac{p \xi^2}{6} - \frac{N_0 \xi \cot(\alpha)}{2} - \frac{c_1}{\xi} + c_2 \quad (2.18)$$

$$S(y = \xi) = 0 \Rightarrow \frac{p \xi}{2} - N_0 \cot(\alpha) + \frac{c_2}{\xi} = 0 \quad (3.18)$$



شکل ۹. پارامترهای هندسی مؤثر در اتصال استوانه مخروط.



شکل ۱۰. سازوکار فروریزش مخروطی.

۴. در حالتی که زاویه‌ی رأس مخروط از مقدار مشخصی بیشتر باشد حالت فروریزش مخروط رخ خواهد داد (دو لولای خمیری در مخروط) که نحوه‌ی محاسبه‌ی فشار فروریزش مخروط در بخش قبلی ارائه شده است.

از بین سه حالت فروریزش، حالتی به‌عنوان سازوکار فروریزش رخ می‌دهد که کم‌ترین میزان فشار فروریزش را داشته باشد. البته پس از مقایسه‌ی فشار فروریزش در سه حالت و انتخاب کم‌ترین میزان آن، باید به نمودار توزیع ممان خمشی نیز توجه داشت؛ چنانچه ممان خمشی از شرط $-M_0 \leq M_x \leq M_0$ در هر نقطه عدول کند، باید سازوکار فروریزش‌های دیگر را بررسی کرد. به‌عنوان مثال، اگر فشار فروریزش مخروط را p_{cone} و فشار فروریزش با سه لولا را p_{thinge} و فشار فروریزش با دو لولا را p_{thinge} بنامیم، و پس از حل مسئله‌ی خاص داشته باشیم:

$$p_{thinge} < p_{thinge} < p_{cone}$$

قاعداً باید سازوکار فروریزش با دو لولا صادق باشد. حال اگر با بررسی ممان خمشی متوجه شویم که ممان خمشی در بازه $[M_0, -M_0]$ قرار نمی‌گیرد، دو راه حل در پیش خواهیم داشت. نخست آن که با افزایش مقدار ξ_1 در شکل ۱۰ و در نتیجه با کاهش فاصله‌ی دو لولای خمیری، مقدار بیشتری برای فروریزش به دست آورده و بدین‌وسیله، منحنی ممان خمشی در فاصله‌ی بین دو لولای خمیری را اصلاح کرد. البته این اقدام کمکی به حل صحیح مسئله نمی‌کند زیرا

۱. هر سه لولای خمیری در استوانه رخ می‌دهد. این حالت از آنجا که متوجه‌ی محیطی تنش در مخروط زودتر به حد تسلیم می‌رسد رخ نمی‌دهد.

$$(N_\theta)_{cone} = \frac{pr}{\cos \alpha} \geq (N_\theta)_{cylinder} = pr$$

۲. دو لولای خمیری در استوانه و ۱ لولا در مخروط. در این حالت دو مجهول جدید به مجموعه معادلات اضافه خواهد شد. ξ_1 مکان مجهول تشکیل لولای خمیری در مخروط است و ξ_2 مکان مجهول تشکیل لولای خمیری در استوانه است که در آن نیروی برشی نیز صفر است (شکل ۹). با استفاده از معادله‌ی ۵ و اعمال شرایط مرزی داریم:

$$\left(p - \frac{N_0}{R}\right) \frac{b^2}{2} + C_1 b + C_2 = M_0 \quad (1.23)$$

$$\left(p - \frac{N_0}{R}\right) \frac{\xi_2^2}{2} + C_1 \xi_2 + C_2 = -M_0 \quad (2.23)$$

$$\left(p - \frac{N_0}{R}\right) \xi_2 + C_1 = 0 \quad (3.23)$$

همچنین در محل اتصال باید نیروی برشی و ممان خمشی استوانه و مخروط با هم برابر باشند.

$$\frac{pl^2}{6 \cos^2 \alpha} - C_2 - \frac{d_1 \cos \alpha}{l} + d_2 - \frac{N_0 l}{2 \sin \alpha} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{pl}{2 \cos \alpha} - N_0 \cot \alpha + \frac{d_2 \cos \alpha}{l} - C_1 = 0 \quad (5.23)$$

مقدار ممان در لولای خمیری مخروط نیز باید برابر با M_0 باشد.

$$\frac{p \xi_1^2}{6 \cos^2 \alpha} - \frac{N_0 \xi_1}{2 \sin \alpha} - \frac{d_1 \cos \alpha}{\xi_1} + d_2 = M_0 \quad (6.23)$$

با حل دستگاه غیرخطی معادلات ۲۳ و کمیته‌سازی مقدار P ، ۷ مجهول مسئله -- یعنی $P, C_1, C_2, \xi_1, \xi_2, d_1, d_2$ -- به دست می‌آیند.

۳. یک لولای خمیری در استوانه و یک لولا در مخروط. در شکل ۱۰ سازوکار فروریزش با دو لولا نشان داده شده است. در تکیه‌گاه استوانه ممان برابر با M_0 خواهد بود (رابطه ۱.۲۳). در مکان مجهول ξ_1 در مخروط ممان برابر با M_0 خواهد بود.

$$\frac{p \xi_1^2}{6 \cos^2 \alpha} - \frac{N_0 \xi_1}{2 \sin \alpha} - \frac{d_1 \cos \alpha}{\xi_1} + d_2 = -M_0 \quad (1.24)$$

همچنین در مکان مجهول ξ_1 در مخروط نیروی برشی نیز صفر است.

$$\frac{p \xi_1}{2 \cos^2 \alpha} - \frac{N_0}{\sin \alpha} + \frac{d_2}{\xi_1} = 0 \quad (2.24)$$

نیروی برشی و ممان هم باید در محل اتصال در استوانه و مخروط با هم برابر باشند.

$$\frac{pl^2}{6 \cos^2 \alpha} - C_2 - \frac{d_1 \cos \alpha}{l} + d_2 - \frac{N_0 l}{2 \sin \alpha} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{pl}{2 \cos \alpha} - N_0 \cot \alpha + \frac{d_2 \cos \alpha}{l} - C_1 = 0 \quad (4.24)$$

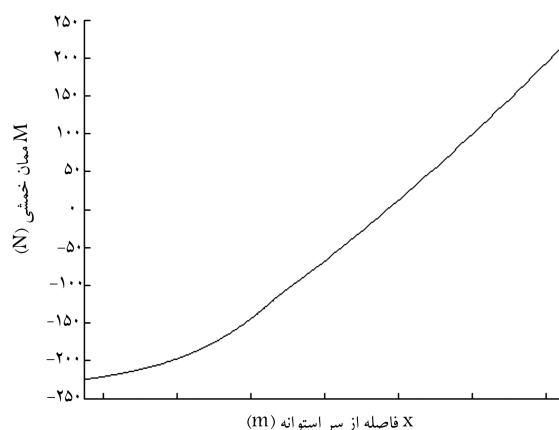
با حل دستگاه غیرخطی معادلات ۲۴ مجهولات مسئله -- یعنی d_1, d_2, C_1, C_2, P و ξ_1 -- با کمیته‌سازی P مشخص خواهد شد.

لولای خمیری در تکیه‌گاه مخروطی تشکیل نمی‌شود) بررسی شده است. در این نمودارها تأثیر تغییر طول استوانه بر میزان فشار فروریزش دیده می‌شود.

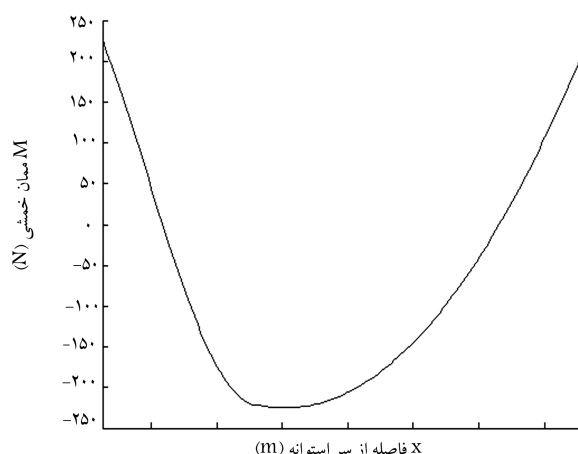
در شکل ۱۲ الف که در آن زاویه‌ی رأس مخروط ۱۰ درجه است، در تمام طول استوانه حالت فروریزش با دو لولا رخ می‌دهد و با افزایش طول استوانه و دور شدن لولاهای خمیری از هم، میزان فشار فروریزش کاهش می‌یابد. در شکل ۱۲ ب و ۱۲ ج که زاویه‌ی رأس مخروط به ترتیب ۲۰ و ۳۰ درجه است، مشخص است که وقتی طول استوانه به مقدار مشخصی می‌رسد، میزان ممان خمشی با فرض دو لولای خمیری در نقاط خاصی از مقدار M_0 فراتر رفته و در نتیجه سازوکار فروریزش با سه لولا صحیح است. پش جزئی در مقدار فشار فروریزش نیز به علت همین تغییر در سازوکار است. در شکل ۱۲ د که مربوط به زاویه‌ی رأس ۴۰ درجه است، مشاهده می‌شود که در طول‌های کم استوانه، سازوکار فروریزش مخروطی حاکم است و چنان‌که در این شکل مشاهده می‌شود، در طول‌های کم استوانه میزان فشار فروریزش با تغییر طول استوانه تغییر نمی‌کند، ولی با افزایش طول استوانه و در نتیجه دور شدن لولاهای خمیری از هم، میزان فشار فروریزش با سه لولا از میزان فشار فروریزش با سازوکار مخروطی کم‌تر می‌شود و این حالت برای طول‌های بیشتر استوانه انتخاب می‌شود. چنان‌که از نمودارهای شکل ۱۲ مشخص است، زوایایی برای رأس مخروط انتخاب شده که در آنها سازوکار فروریزش مخروطی رخ ندهد (جز حالت زاویه‌ی رأس ۴۰ درجه در شکل ۱۲ د). به‌طور کلی می‌توان گفت در حالت‌هایی که طول استوانه زیاد است و سازوکار فروریزش با سه لولا حاکم است، میزان فشار فروریزش همانند فرمول به مقدار N_0/R یعنی فشار فروریزش استوانه به بی‌نهایت میل می‌کند.

در نمودارهای شکل ۱۳ و ۱۴ نسبت a/R بر میزان بار فروریزش در هندسه‌های مشخص بررسی شده است. در نمودارهای شکل ۱۳ طول استوانه ۰/۵ متر (هندسه ۱) و در نمودارهای شکل ۱۴ طول استوانه ۰/۱ متر (هندسه ۲) در نظر گرفته شده است. در شکل ۱۳ الف مشاهده می‌شود که در نسبت‌های کم‌تر از ۰/۹۵ تغییر نسبت a/R تأثیری در میزان فشار فروریزش سازه ندارد. دلیل این مسئله که لولای خمیری تشکیل شده در قسمت مخروطی در نسبت‌های a/R کم‌تر از ۰/۹۵ در تکیه‌گاه تشکیل نشده و مکان آن برای تمام نسبت‌های a/R کم‌تر از ۰/۹۵ ثابت است، و نیز با توجه به این مسئله و این که فشار فروریزش تابعی از هندسه‌ی سازه بین لولاهای خمیری است، می‌توان ثابت ماندن فشار فروریزش را توجیه کرد.

با کاهش طول پال مخروط و افزایش نسبت a/R لولای خمیری در محل تکیه‌گاه مخروط تشکیل شده و در نتیجه با کاهش طول پال مخروط فاصله‌ی بین لولاهای خمیری کم‌تر شده و به تبع آن میزان فشار فروریزش افزایش می‌یابد. در شکل‌های ۱۳ ب و ۱۳ ج هم این مسئله به‌وضوح دیده می‌شود، و مشخص است در زوایای بیشتر رأس مخروط حساسیت به a/R بیشتر دیده می‌شود. در شکل‌های ۱۳ د و ۱۳ هـ که به ترتیب مربوط به زوایای ۴۰ و ۵۰ درجه رأس مخروط هستند، مسئله کمی پیچیده‌تر می‌شود. اگر به شکل ۱۳ د توجه کنیم نمودار فشار فروریزش به‌صورت تابعی از a/R به ۵ ناحیه تقسیم‌بندی شده است: در ناحیه‌ی ۱ مشاهده می‌شود فشار فروریزش تابعی از نسبت a/R نیست دلیل این امر این است که در ناحیه‌ی ۱ سازوکار فروریزش مخروط حاکم است و چنان‌که از معادله مشخص است در مخروط‌های بلند میزان فشار فروریزش تابعی از طول پال مخروط یا همان نسبت a/R نیست. در ناحیه‌ی ۲ وارد منطقه‌ی مخروط کوتاه می‌شویم ولی همچنان سازوکار فروریزش همان سازوکار فروریزش مخروطی است. با افزایش بیشتر نسبت a/R مقدار فشار فروریزش با سه لولا کم‌تر از مقدار فشار فروریزش مخروط کوتاه



الف) فروریزش با دو لولای خمیری؛



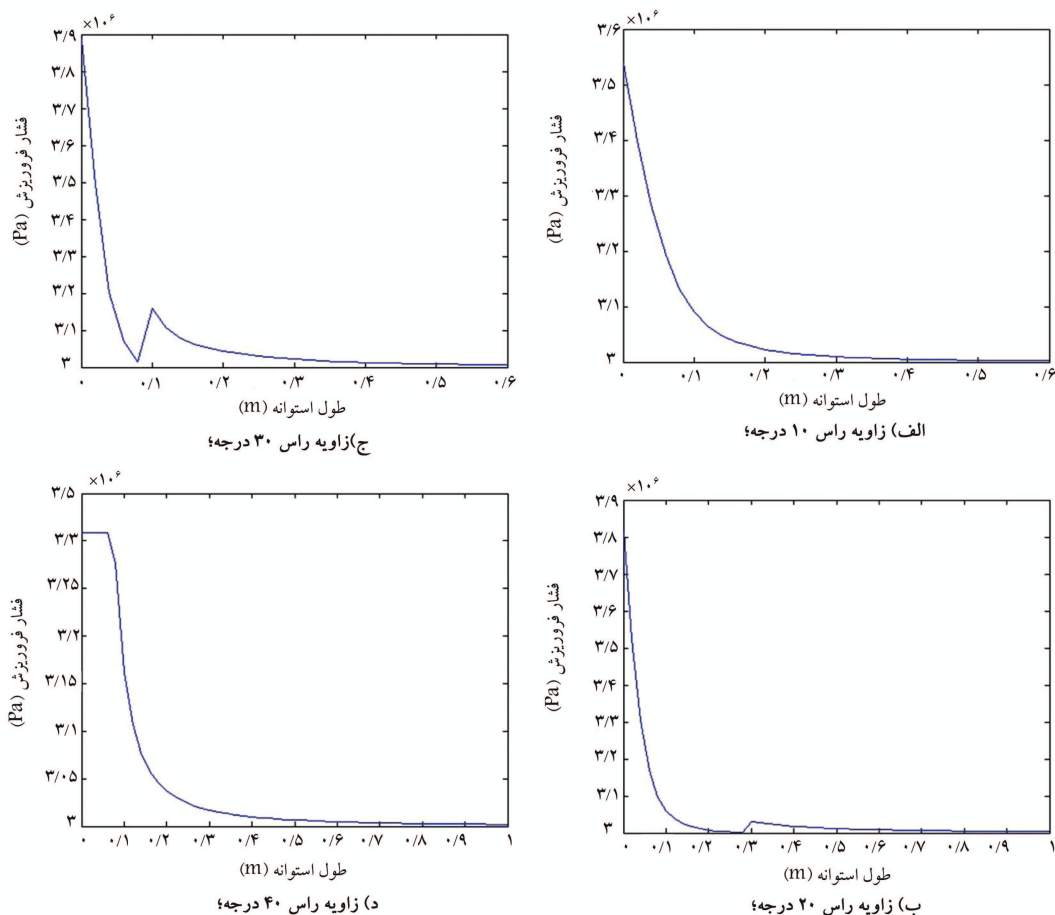
ب) فروریزش با سه لولای خمیری. $M_0 = 225$

شکل ۱۱. نمودار توزیع ممان خمشی.

با افزایش میزان فشار داخلی، نواحی با فاصله‌ی کم‌تر از ξ_1 از رأس مخروط، وارد ناحیه‌ی خمیری شده و باید در منحنی ممان خمشی قرار بگیرند و چون مشتق ممان خمشی در لولای خمیری واقع در مخروط صفر نیست، قاعدتاً ممان از شرط $-M_0 \leq M_x \leq M_0$ عدول خواهد کرد. راه حل دوم استفاده از سازوکارهای فروریزش دیگر است که چون در این مسئله فرض سه لولای خمیری فشار فروریزش کم‌تری را نتیجه داده است، باید سازوکار فروریزش با سه لولا را در نظر بگیریم. نمونه‌ی از منحنی توزیع ممان خمشی در اتصال پوسته‌ی استوانه‌ی مخروطی با دو لولا و سه لولا در شکل ۱۱ نمایش داده شده است.

۴. ارائه‌ی نتایج

در این بخش هندسه‌ی خاص از اتصال استوانه و مخروط را بررسی می‌کنیم. در تمامی نمودارهای بعدی ضخامت سازه ۳mm، شعاع استوانه ۰/۱m و تنش تسلیم ماده ۱۰۰ MPa در نظر گرفته شده‌اند و فقط تغییرات فشار فروریزش برحسب طول استوانه و نسبت a/R (نسبت شعاع کوچک مخروط به شعاع استوانه) در زوایای مختلف رأس مخروط بررسی شده‌اند. در نمودارهای شکل ۱۲ مسئله‌ی اتصال مخروطی بلند (هندسه‌ی ۱) که در آن



شکل ۱۲. فشار فروریزش برحسب تغییرات طول استوانه.

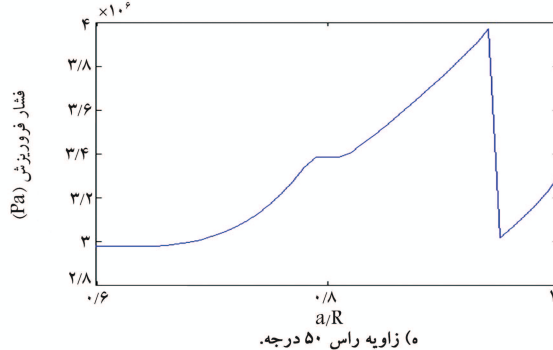
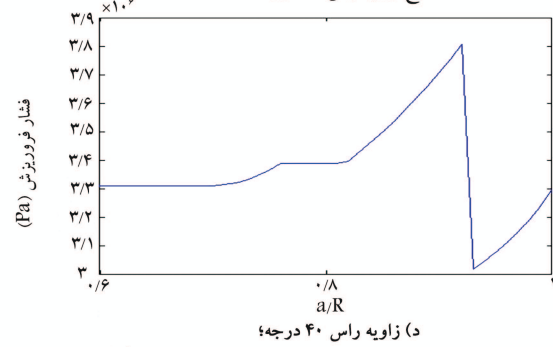
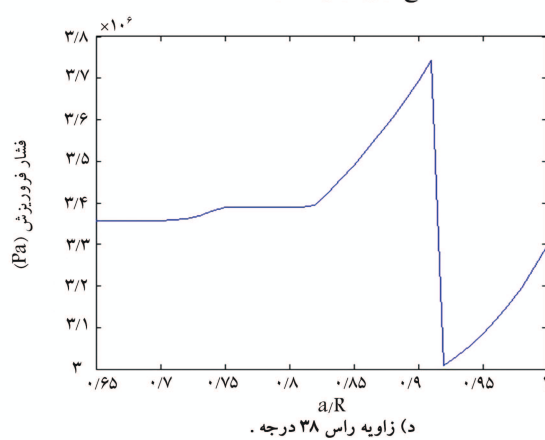
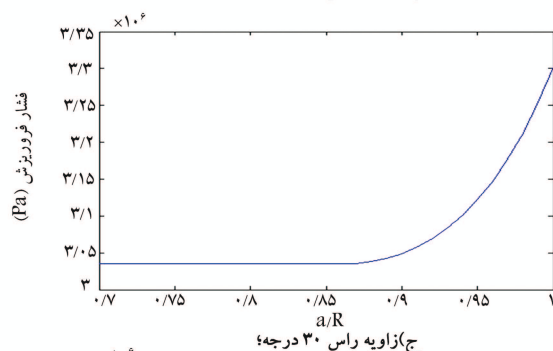
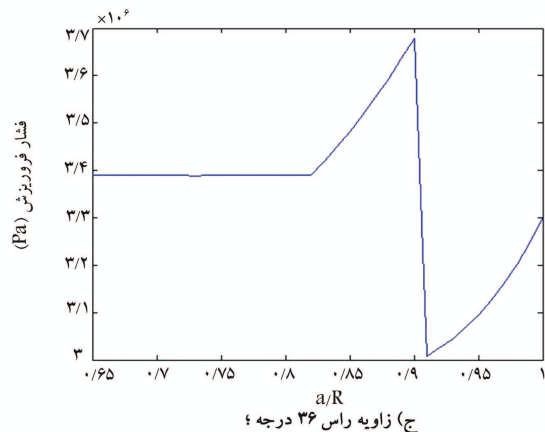
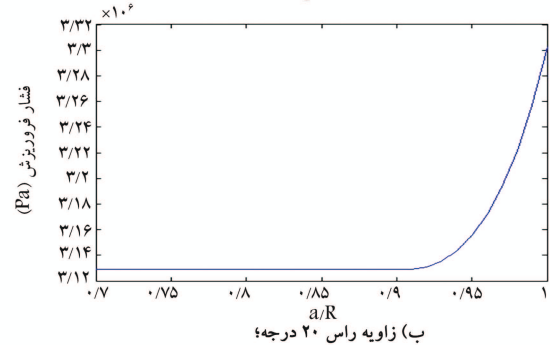
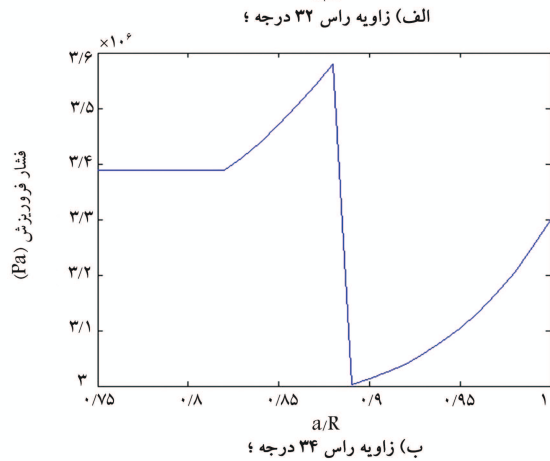
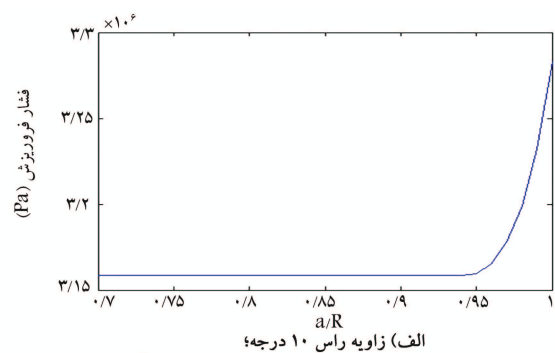
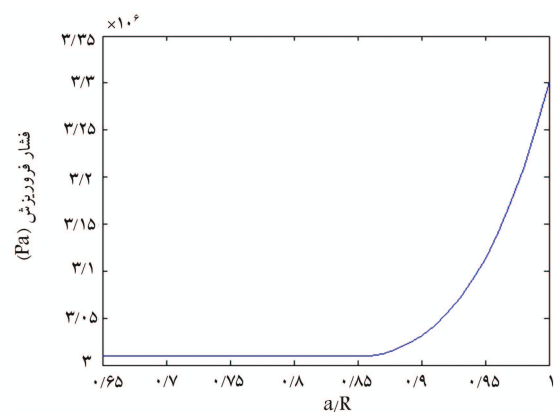
سه لولا در مقایسه با هندسه ۱، فقط ناحیه‌ی فروریزش با سه لولا و فروریزش با دو لولا در منحنی مشخص است. درکل، نمودارهای بسیاری با توجه به این حل قابل ارائه می‌باشند که با توجه به گستردگی بسیار زیاد پارامترهای ورودی از آوردن آنها در این مقاله خودداری می‌شود. البته با توجه به روش ارائه شده، برای هر هندسه‌ی میزان بار فروریزش به سادگی قابل محاسبه است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله رفتار خمیری پوسته‌ی استوانه‌یی - مخروطی جدار نازک تحت فشار استاتیکی داخلی، مورد تحلیل قرار گرفت. از مدل صلب - خمیری کامل برای رفتار مادی سازه، و از سطح تسلیم مستطیلی معمول شامل N_p و M_0 برای معیار تسلیم استفاده شده است. سه سازوکار کلی برای فروریزش پوسته‌ی شامل فروریزش مخروط، فروریزش با دو لولای خمیری و فروریزش با سه لولای خمیری در نظر گرفته می‌شود که براساس هندسه سازه، یکی از این سه حالت در هنگام فروریزش رخ می‌دهد. در نتایج نمودار تغییرات فشار فروریزش سازه، نسبت به تغییرات طول استوانه یا طول مخروط آمده است. سازوکار فروریزش به‌ازای تغییر طول استوانه یا مخروط تغییر می‌کند به‌گونه‌یی که فشار فروریزش سازه به مقادیر مجانبی خود (فشار فروریزش سازه کاملاً استوانه‌یی یا کاملاً مخروطی) نزدیک می‌شود.

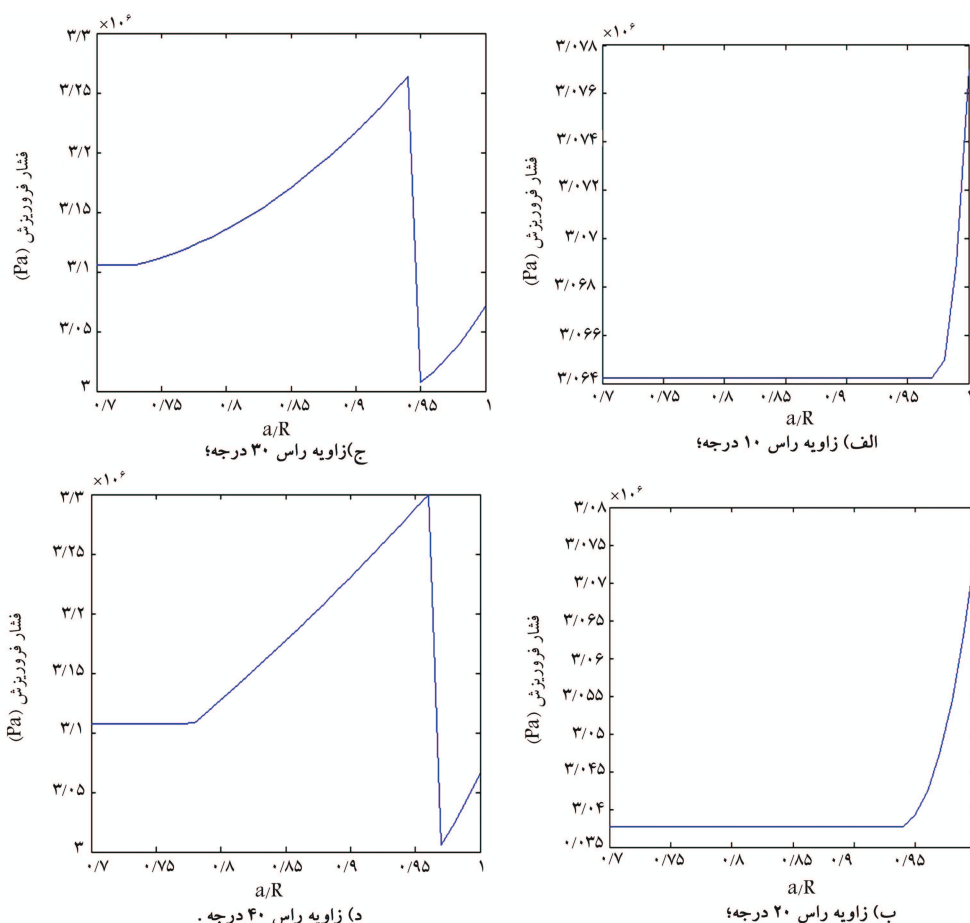
می‌شود که این اتفاق در ناحیه‌ی ۳ مشهود است. در این ناحیه هم به‌علت این که لولای خمیری واقع در مخروط در تکیه‌گاه نیست، میزان فشار فروریزش با تغییر نسبت a/R ثابت می‌ماند. در ناحیه‌ی ۴ باز هم سازوکار فروریزش با سه لولا حاکم است. اما در اینجا مکان لولای خمیری واقع در مخروط در تکیه‌گاه آن است و با تغییر مکان تکیه‌گاه میزان بار فروریزش هم تغییر می‌یابد. با افزایش بیشتر نسبت a/R تا یک حد خاص، مشاهده می‌شود که برای سازوکار فروریزش با دو لولا شرط $-M_0 \leq M_x \leq M_0$ در تمام نقاط ارضا می‌شود و کم‌ترین میزان بار فروریزش، با فرض دو لولای خمیری به دست می‌آید که این روند در ناحیه‌ی ۵ مشاهده می‌شود. پروفیل منحنی شکل ۱۳-ه شباهت بسیار زیادی به شکل ۱۳د دارد، با این تفاوت که در این نمودار زاویه رأس مخروط ۵۰ درجه در نظر گرفته شده و با توجه به این مطلب که در زوایای بالای رأس مخروط مقاومت خمیری این سازه به‌شدت افت می‌کند، بازه بزرگ‌تری از مقادیر a/R تحت سازوکار مخروطی فرو خواهد ریخت. برای بررسی بیشتر نمودارهای ارائه شده و علت تغییر ناگهانی پروفیل شکل ۱۳ج به‌ازای زاویه رأس ۳۰ درجه به شکل ۱۳د به‌ازای زاویه ۴۰ درجه، زوایای رأس مابین ۳۰ و ۴۰ درجه در شکل‌های ۱۴الف تا ۱۴د ارائه شده‌اند تا تغییر تدریجی نمودارها مشخص شود.

نمودارهای شکل ۱۵ هم روندی مشابه با نمودارهای شکل ۱۳ دارند اما مقایسه‌ی اجمالی بین شکل‌های ۱۳د و ۱۵د مشخص می‌کند که در شکل ۱۵د به علت بیشتر بودن طول قسمت استوانه‌یی و در نتیجه کم‌تر شدن میزان بار فروریزش با



شکل ۱۴. فشار فروریزش بر حسب تغییرات a/R با طول استوانه ۵/۵ متر.

شکل ۱۳. فشار فروریزش بر حسب تغییرات a/R با طول استوانه ۵/۵ متر.



شکل ۱۵. فشار فروریزش بر حسب تغییرات a/R با طول استوانه ۸/۰ متر.

منابع (References)

- Seide, P. "Axisymmetrical buckling of circular cones under axial compression", *Trans. ASME J Appl Mech*, PP. 625-8 (1956).
- Tani, J. and Yamaki, N. "Buckling of truncated conical shells under hydrostatic pressure", *The Report of the Institute of High Speed Mechanics, Tohoku University, Sendai, Japan 2*, PP. 235-61 (1969).
- Ross, C.T.F., Sawkins, D., Thomas, J. and Little, A.P.F. "Plastic collapse of circular conical shells under uniform external pressure", *Advances in Engineering Software*, **30**, PP. 631-47 (1999).
- Teng, J.G. "Elastic buckling of cone-cylinder intersection under localized circumferential compression", *Eng. Struct.*, **18**(1), PP. 41-8 (1996).
- Prager, W., *An Introduction to Plasticity*, Addison-Wesley, Boston, Mass (1959).
- Drucker, D.C. "A more fundamental approach to plastic stress-strain relations", *Proceeding First US Congress of Applied Mechanics*, ASME, pp. 478-91 (1951).
- Hodge, P.G., *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J (1963).
- Drucker, D.C. "Limit analysis of cylindrical shells under axial-symmetric loading", *Proceeding First Midwestern Conference on Solid Mechanics*, pp. 158-63 (1953).
- Demir, H. and Drucker, D.C. "An experimental study of cylindrical shells under ring loading", *Proceeding in Applied Mechanics*, Prager Anniversary Volume, Macmillan, New York, pp. 205-20 (1963).
- Eason, G. "The load carrying capacities of cylindrical shells subjected to ring of force", *J. of Mech. And Phys. of Solids*, **4**, pp. 17-27 (1955).
- Jones, N., *Structural Impact*, Second Edition, University of Cambridge, UK (1989).
- Hodge, P.G. "Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells", *J. of Mech. And Phys. of Solids*, **3**, pp. 176-88 (1955).
- Teng, J.G. "Intersections in steel shell structures", *Prog. Struct. Engng. Mater.*, **2**, pp. 459-71 (2000).
- Lellep, J. and Puman, E. "Optimization of plastic conical shells of piece-wise constant thickness", *Struct and Multidisciplinary Optimization*, **18**(1), pp. 74-79 (1999).
- Lellep, J. and Puman, E. "Optimization of plastic conical shells loaded by a rigid central boss", *Int. J. Solids Struct*, **37**, pp. 2695-2708 (2000).