

بررسی سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، با در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم

مهدی سلهانی‌تهرانی* (استادیار)

محمدرضا همتی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده‌ی هندی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۳)
دوره‌ی ۲ - ۳، شماره‌ی ۲/۳، ص. ۶۵-۵۷

در این مطالعه سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، بر پایه‌ی نظریه‌ی تغییر شکل‌های کوچک در حالت کرنش - صفحه‌ی بررسی شده است. مدول کشسانی، چگالی و تنش تسلیم به صورت تابع توانی از مختصه‌ی شعاعی فرض شده‌اند. سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز استوانه، سرعت متناظر با لحظه‌ی شروع تسلیم براساس معیار تسلیم ترسکا معرفی شده است. برای حالت خاصی که پارامترهای توان یکسان باشند، تنش‌های بی‌بعد شده رسم، و نشان داده شده است که همواره تنش محیطی بزرگ‌ترین و تنش شعاعی کوچک‌ترین مؤلفه‌ی تنش است. آنگاه اثر پارامترهای توان، به‌ویژه اثر تغییر چگالی و تنش تسلیم، بر سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم در راستای شعاع اثر قابل توجهی بر چگونگی شروع تسلیم و در نتیجه بر سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز دارد. در نظر گرفتن اثر تغییر چگالی بر رفتار استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، تاژگی دارد و در پژوهش‌های پیشین بررسی نشده است.

واژگان کلیدی: مواد مدرج تابعی، استوانه‌ی توخالی دوار، معیار تسلیم ترسکا، سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز.

tehrani@cc.iut.ac.ir
m.hemati@me.iut.ac.ir

۱. مقدمه

با توجه به کاربردهای متنوع استوانه‌ی دوار در صنایع مختلف، تحلیل رفتار مکانیکی این سازه همواره از مسائل مهم و کلاسیک مکانیک جامدات بوده است. از جمله کاربردهای این استوانه می‌توان به سانتریفوژهای مختلف با سرعت دورانی بالا،

موتورهای الکتریکی با پوسته‌ی مغناطیسی پیوسته، موتور هیدرولیکی با پوسته‌ی ضد سایش و مقاوم در برابر مواد شیمیایی،... اشاره کرد. در خصوص تحلیل رفتار کشسانی و کشسانی - خمیری استوانه و دیسک دوار همگن پژوهش‌های زیادی انجام شده است.^[۱-۳]

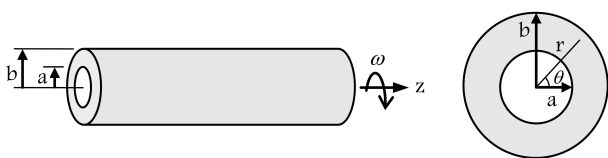
ریزساختار ناهمگن مواد مدرج تابعی و تغییرات تدریجی و پیوسته‌ی خواص این مواد از یک سطح به سطح دیگر، طراحی و کاربرد موادی با ساختار و اهداف مورد نظر را ممکن ساخته است. خواص مکانیکی در FGM با توجه به نوع ترکیب، تغییرات پیوسته‌ی در جهت ضخامت دارد که با توجه به پیوستگی ترکیب اجزای تشکیل‌دهنده‌شان، خواص مؤثرتری نسبت به مواد مرکب متداول دارند. نسبت ترکیب مواد در راستای ضخامت جسم متغیر است و چگالی ذرات از یک سطح به سطح دیگر توسط یک تابع معین خطی یا غیرخطی کاهش یا افزایش می‌یابد. از این رو با توجه به کاربرد رو به گسترش مواد مدرج تابعی -- در مقایسه با مواد همگن

در بررسی رفتار کشسانی القایی^۱ نیز مخزن استوانه‌ی و کروی مدرج تابعی که هم‌زمان تحت فشار داخلی و تحت اثر میدان مغناطیسی قرار گرفته مورد مطالعه قرار گرفت.^[۴] در پژوهش یادشده مدول کشسانی و ضریب نفوذپذیری مغناطیس^۲ لایه‌ی میانی مدرج تابعی و لایه‌های داخلی و خارجی همگن؛^۲ مخزن کاملاً مدرج تابعی. در انتها نیز معادلات تحلیلی تنش و کرنش در حالت کشسان به دست آمده است.

پژوهش‌هایی نیز در زمینه‌ی تحلیل رفتار کشسانی - خمیری مخازن استوانه‌ی و کروی مدرج تابعی منتشر شده است.^[۵] به عنوان مثال، رفتار کشسانی - خمیری استوانه‌ی مدرج تابعی، تحت فشار داخلی تحلیل شده است و طی آن، مدول کشسانی

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۷/۱۰/۱۳۹۱، اصلاحیه ۳۱/۳/۱۳۹۲، پذیرش ۴/۸/۱۳۹۲.



شکل ۱. نمایش طرح‌واره‌ی هندسه‌ی مسئله و پارامترهای اصلی آن.

رفتار کشسان و کشسانی - خمیری استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، تاکنون تغییرات چگالی مورد بررسی قرار نگرفته است. از این رو هدف اصلی این مقاله، تحلیل رفتار کشسان استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، با متغیر در نظر گرفتن پارامترهای مؤثر در ماده شامل مدول کشسانی، تنش تسلیم و چگالی است و به‌ویژه، اثر هریک از پارامترهای یادشده بر چگونگی آغاز تسلیم و نیز بیشترین سرعت زاویه‌ی که به‌ازای آن تسلیم آغاز می‌شود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۱، هندسه‌ی مسئله‌ی مورد بررسی و پارامترهای اصلی هندسی و بارگذاری به‌صورت طرح‌واره نشان داده شده است.

۲. معادلات حاکم

۲.۱. استخراج روابط بی‌بعدشده‌ی مؤلفه‌های تنش

چنان‌که اشاره شد، در این نوشتار پارامترهای مادی مدول کشسانی، چگالی و تنش تسلیم، برحسب مختصه‌ی شعاعی متغیر فرض می‌شوند. تغییر این پارامترها به‌صورت تابع توانی ۱ در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{n_E} \\ \rho(r) &= \rho_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{n_\rho} \\ \sigma_Y(r) &= \sigma_0 \left(\frac{r}{b}\right)^{n_\sigma} \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن E_0 ، ρ_0 و σ_0 به‌ترتیب مقادیر مدول کشسانی، چگالی و تنش تسلیم در شعاع خارجی است و $r = b$ (شکل ۱). در این نوشتار از تغییرات ضریب بواسون، چشم‌پوشی شده است. معادله‌ی حرکت استوانه‌ی دوار چنین بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dr} (r \sigma_r) - \sigma_\theta = -\rho r^2 \omega^2 \quad (2)$$

معادله‌ی ۲ که اصطلاحاً «معادله‌ی تعادل» نیز نامیده می‌شود، کلی و مستقل از همگن بودن و نیز کشسان یا کشسانی - خمیری بودن رفتار ماده است. با توجه به تقارن محوری مسئله، رابطه‌ی بین مؤلفه‌های شعاعی و محیطی کرنش برحسب جابه‌جایی شعاعی، در محدوده‌ی تغییر شکل‌های بسیار کوچک، مطابق رابطه‌ی ۳ بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du(r)}{dr} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u(r)}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن ε_r مؤلفه‌ی شعاعی کرنش و ε_θ مؤلفه‌ی محیطی کرنش است. با فرض این‌که استوانه، شرایط کرنش - صفحه‌ی بی‌بعدشده‌ی مورد بررسی حاکم است و در نتیجه کرنش محوری، ε_z برابر صفر خواهد بود.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (4)$$

و تنش تسلیم به‌صورت تابع توانی از مختصه‌ی شعاعی فرض شده است. آنگاه معادله‌ی تعادل برحسب جابه‌جایی به‌صورت تحلیلی حل شده و با استفاده از آن معادلات تنش و کرنش را به دست آورده‌اند. سپس با رسم نمودارهای توزیع تنش در حالت کشسانی و کشسانی - خمیری، نتایج با حالت ماده‌ی همگن مقایسه شده و نشان داده شد که بین رفتار ماده‌ی همگن و ماده‌ی مدرج تابعی، از نظر تنش‌های ایجاد شده و تسلیم ماده، تفاوت قابل توجهی وجود دارد.

در پژوهشی دیگر نیز، ضمن بررسی کره‌ی مدرج تابعی تحت فشار داخلی، مدول کشسانی و تنش تسلیم به‌عنوان پارامترهای متغیر مسئله به‌صورت تابع توانی در نظر گرفته شد^[۷] و براساس آن رفتار کشسانی - خمیری مخزن کروی مورد تحلیل قرار گرفت. در پژوهش یادشده تمرکز اصلی بر تحلیل و بررسی تغییر شکل‌های کشسانی - خمیری بوده و با در نظر گرفتن معیار تسلیم ترسکا، تنش‌های ایجاد شده در حالت کشسانی - خمیری و حد نهایی تسلیم ماده بررسی شده و نشان داده شده است که در حالت کشسانی - خمیری ممکن است حالت‌های مختلفی برای ترتیب مؤلفه‌های تنش به وجود آید.

مسئله‌ی استوانه و دیسک مدرج تابعی دوار، در دو حالت کرنش صفحه‌ی و تنش صفحه‌ی تحلیل شد^[۸] و طی آن مدول کشسانی یک‌بار به‌صورت تابع توانی و بار دیگر به‌صورت تابع نمایی در نظر گرفته شد. آنگاه با حل معادله‌ی تعادل برحسب جابه‌جایی، توزیع تنش در هر دو حالت محاسبه، و در نهایت نتایج دو حالت با هم مقایسه شد.

محققین دیگری نیز دیسک مدرج تابعی دایره‌ی را تحت بارگذاری به‌صورت متقارن و فرض رفتار خمیری بررسی کردند.^[۹] تحلیل آن‌ها با استفاده از روش تحلیل حدی انجام شد و هدف اصلی تحلیل یادشده، محاسبه و تعیین بیشینه بارگذاری برای صفحه بوده است.

در ادامه معادلات در سایر پژوهش‌ها معادلات به‌صورت تحلیلی، و با در نظر گرفتن دیسک مدرج تابعی دوار که در معرض بارگذاری گرمایی قرار گرفته و با فرض مدول کشسانی، ضریب انبساط حرارتی و چگالی به‌صورت تابع‌های توانی از مختصه‌ی شعاعی حل شده^[۱۰] و نمودارهای توزیع تنش برای برخی حالت‌های خاص ترسیم شد.

محققین برای تحلیل کشسانی - خمیری استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، رفتار ماده را به‌صورت کشسانی - خمیری کامل در نظر گرفتند.^[۱۱] آن‌ها تنها متغیر ماده‌ی مورد نظر را مدول کشسانی و به‌صورت یک تابع توانی از مختصه‌ی شعاعی فرض کرده‌اند. سپس معادله‌ی تعادل را برحسب جابه‌جایی استخراج و به حل تحلیلی آن پرداختند. برای تحلیل رفتار کشسانی - خمیری، آنان از معیار تسلیم ترسکا و قانون جریان وابسته به آن استفاده کرده و معادلات مربوط به توزیع تنش در ناحیه‌ی خمیری را به دست آوردند و نشان دادند که تسلیم لزوماً از شعاع داخلی شروع نمی‌شود، بلکه بسته به پارامتر توان تعریف شده برای مدول کشسانی، می‌تواند از موقعیت‌های مختلف در راستای شعاع تسلیم شروع شود.

محققین در مطالعه‌ی دیگر^[۱۲] دیسک توخالی مدرج تابعی دوار را به‌صورت ارتوتروپیک^۲ در نظر گرفتند، به‌گونه‌ی که مدول کشسانی در جهت‌های شعاعی و محیطی، تابع توانی اما متفاوت فرض شده است. هدف از این کار، سبک‌تر شدن و تحمل بار بیشتر ماده اعلام شده است. آن‌ها پس از استخراج معادله‌ی تعادل، برای حل آن روشی براساس معادله‌ی انتگرالی فردهولم^۴ ارائه کرده‌اند. سپس مؤلفه‌های محیطی و شعاعی تنش و نیز مؤلفه‌های کرنش متناظر در حالت کشسان را استخراج و نمودار آن‌ها را رسم و بررسی کرده‌اند.

براساس جست‌وجوی نگارندگان، در میان پژوهش‌های منتشره در زمینه‌ی تحلیل

با استفاده از قانون هوک و در نظر گرفتن شرایط کرنش صفحه‌ای و اعمال روابط کرنش جابه‌جایی شعاعی، روابط تنش برحسب جابه‌جایی شعاعی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{du(r)}{dr} + \nu \frac{u(r)}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left((1-\nu) \frac{u(r)}{r} + \nu \frac{du(r)}{dr} \right) \\ \sigma_z &= \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن σ_r ، σ_θ و σ_z به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی، محیطی و محوری تنش هستند. با قراردادن مؤلفه‌های تنش برحسب جابه‌جایی شعاعی در معادله‌ی تعادل، معادله‌ی تعادل برحسب جابه‌جایی شعاعی به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2}{dr^2} u(r) + (1+n_E) r \left(\frac{d}{dr} u(r) \right) - \frac{1-\nu(1+n_E)}{1-\nu} u(r) \\ = - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\rho_s \omega^2}{E_s} b^{(n_E-n_\rho)} r^{(2+n_\rho-n_E)} \end{aligned} \quad (6)$$

از حل تحلیلی معادله‌ی دیفرانسیل بالا، معادله‌ی بی‌بعد شده‌ی ۷ به دست می‌آید:

$$\bar{u}(\bar{r}) = C_1 \bar{r}^{\left(\frac{-n_E-k}{2}\right)} + C_2 \bar{r}^{\left(\frac{-n_E+k}{2}\right)} - A_1 \bar{\omega}^2 \bar{r}^{(n_\rho-n_E+2)} \quad (7)$$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌های بی‌بعد انتگرال‌گیری هستند. همچنین تعریف پارامترهای بی‌بعد \bar{r} ، $\bar{\omega}^2$ و ثابت‌های بی‌بعد k و A_1 در رابطه‌ی ۷ عبارت است از:

$$\bar{r} = \frac{r}{b} \quad (8)$$

$$\bar{u} = \frac{u}{b} \quad (9)$$

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho_s \omega^2 b^2}{E_s} \quad (10)$$

$$k = \frac{\sqrt{n_E^2 - 2n_E^2\nu + \nu^2 n_E^2 + 4 - 4\nu + 4\nu^2 - 4\nu n_E + 4\nu^2 n_E}}{1-\nu} \quad (11)$$

$$A_1 = \frac{2\nu^2 + \nu - 1}{(4+n_\rho)(n_\rho - n_E + 2)\nu - n_\rho^2 + (n_E - 6)n_\rho - 4 + 3n_E} \quad (12)$$

ثابت‌های انتگرال‌گیری C_1 و C_2 ، با استفاده از شرایط مرزی بدون تنش روی سطوح داخلی و خارجی استوانه محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\bar{r}} \left(\bar{r} = \frac{a}{b} \right) &= 0 \\ \bar{\sigma}_{\bar{r}} (\bar{r} = 1) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن $\bar{\sigma}_r$ مؤلفه‌ی بی‌بعد شده‌ی تنش شعاعی است. مؤلفه‌های بی‌بعد شده‌ی تنش براساس رابطه‌ی ۱۴ تعریف می‌شود:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{E_s} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= -2 \times A_1 \times A_2 \times \bar{\omega}^2 \\ &\times \frac{1}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2}\right)} \times \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-n_\rho-2} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} \right] \\ C_2 &= -2 \times A_1 \times A_2 \times \bar{\omega}^2 \\ &\times \frac{1}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2}\right)} \times \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-n_\rho-2} - \left(\frac{b}{a}\right)^{m_2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

ثابت‌های A_1 ، A_2 ، m_1 و m_2 به وسیله‌ی روابط ۱۶ تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3 - \nu n_\rho + \nu n_E - 2\nu + n_\rho - n_E}{-n_E - k + \nu n_E + \nu k + 2\nu} \\ A_2 &= \frac{3 - \nu n_\rho + \nu n_E - 2\nu + n_\rho - n_E}{-2\nu - \nu n_E - k + n_E + \nu k} \\ m_1 &= \frac{-n_E - k - 2}{2} \\ m_2 &= \frac{-n_E + k - 2}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

پس از جایگذاری ثابت‌های C_1 و C_2 و نیز رابطه‌ی جابه‌جایی بی‌بعد شعاعی ۷ در روابط تنش ۵، و با استفاده از تعریف پارامترهای بی‌بعد بالا، مؤلفه‌های بی‌بعد شده‌ی تنش به دست خواهد آمد.

۲.۲. بررسی شروع تسلیم و تعیین بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز

برای به دست آوردن بیشترین سرعت زاویه‌ی مجاز استوانه و بررسی شرایط تسلیم، از معیار تسلیم ترسکا استفاده شده است. چنان که در منابع موجود نیز دیده می‌شود، بررسی شرایط تسلیم به انتخاب مقدار عددی پارامترهای توان n_ρ ، n_E و وابسته است. در این نوشتار، نتایج عددی برای حالتی که پارامترهای توان n_ρ ، n_E و یکسان و مساوی باشند، ارائه و بررسی می‌شود. از آنجا که انتظار می‌رود برای یک ماده‌ی مدرج تابعی خاص، تغییر خصوصیات مختلف آن مانند مدول کشسانی، چگالی و تنش تسلیم مشابه باشند، این فرض منطقی به نظر می‌رسد.

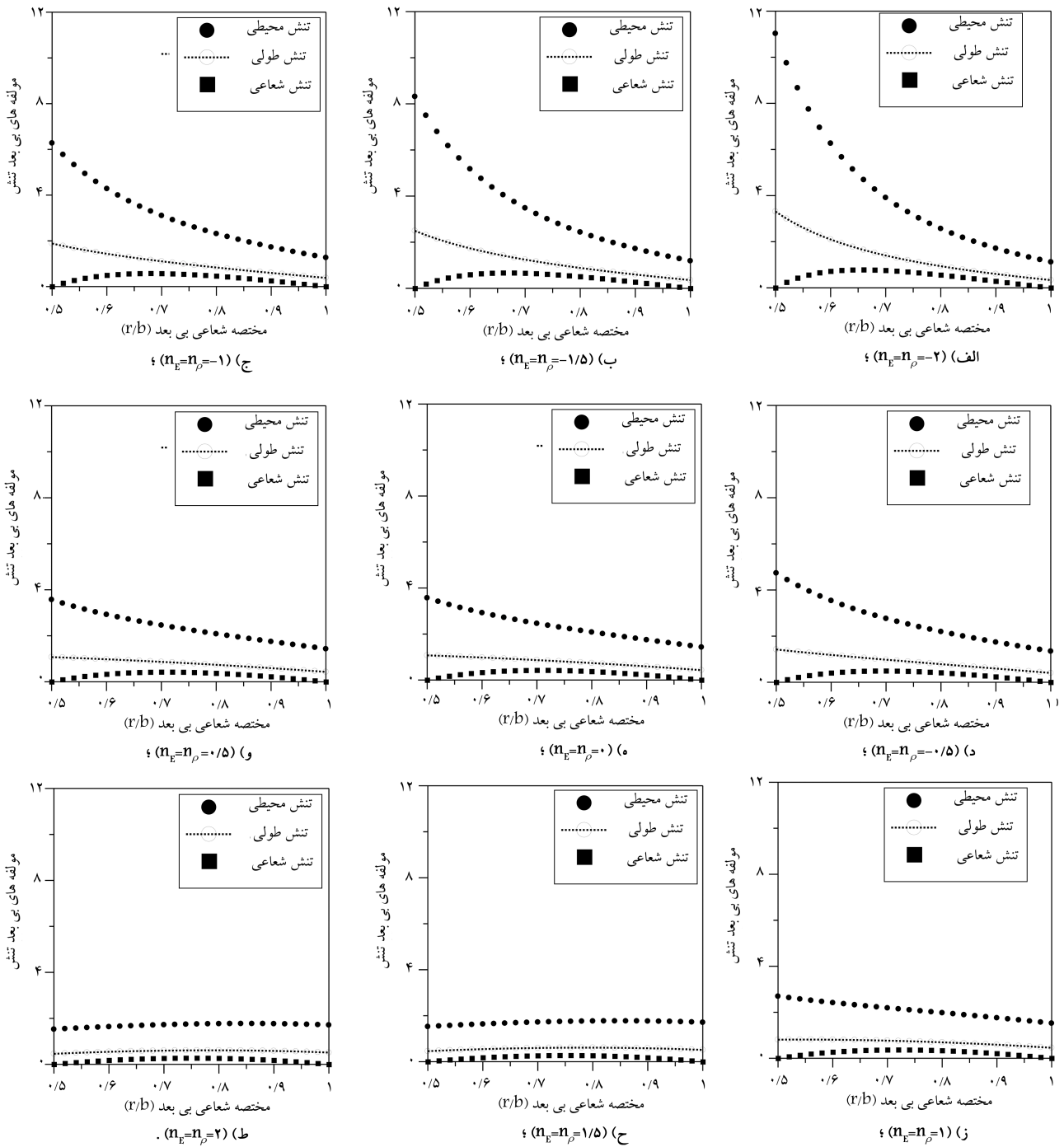
براساس نتایج نمودارهای شکل ۲، مشاهده می‌شود که به‌ازای مقادیر مختلف و مساوی پارامترهای توان n_ρ ، n_E و m_σ ، ترتیب مؤلفه‌های تنش همواره به صورت $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ است. بنابراین معیار تسلیم ترسکا پس از بی‌بعدسازی تبدیل می‌شود به:

$$\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_{\bar{r}} = \frac{\sigma_s}{E_s} \bar{r}^{n_\sigma} = \bar{\sigma}_s \bar{r}^{n_\sigma} \quad (17)$$

برای سادگی نام‌گذاری و به‌کارگیری در معادله‌ها و ترسیم نمودارها، تنش بی‌بعد ترسکا ($\bar{\sigma}_{Tresca}$) چنین معرفی می‌شود:

$$\bar{\sigma}_{Tresca} = \frac{(\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_{\bar{r}})}{\bar{\sigma}_s} = \bar{r}^{n_\sigma} \quad (18)$$

با جایگذاری تنش‌های بی‌بعد در رابطه‌ی ۱۸، صورت بسط یافته‌ی تنش بی‌بعد ترسکا ($\bar{\sigma}_{Tresca}$) استخراج می‌شود. پس از جایگذاری عبارت‌ها و ساده‌سازی آن‌ها،



شکل ۲. مقایسه‌ی توزیع مؤلفه‌های شعاعی، محیطی و محوری تنش، به‌ازای مقادیر مختلف پارامترهای توان در محدوده $2 \leq (n_E = n_\rho) \leq -2$ (در این نمودارها $(b/a) = 2$ و $\nu = 0.3$ فرض شده‌اند).

که در آن کسر $(\bar{\omega}/\sqrt{\bar{\sigma}_0})$ معرف پارامتر بی‌بعدی است که اندازه‌ی بارگذاری را نشان می‌دهد، به‌گونه‌ی که هرچه سرعت زاویه‌ی افزایش یابد، مقدار این پارامتر بی‌بعد نیز بزرگ‌تر خواهد شد. با توجه به نقش این پارامتر در بررسی و تحلیل نتایج پارامتر بی‌بعد بارگذاری^۵ براساس معادله‌ی ۲۰ تعریف می‌شود:

$$DLP = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\bar{\sigma}_0}} \quad (20)$$

با توجه به معرفی این پارامتر، در ادامه برای تعیین بیشترین سرعت زاویه‌ی مجاز

نتیجه به‌صورت رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$\bar{\sigma}_{Tresca} = \left(\frac{1}{1 + \nu} \right) \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\sigma}_0} \times A_1 \times \bar{r}^{n_E} \times \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{b}{a} \right)^{m_1} - \left(\frac{b}{a} \right)^{m_2} \times \left[m_1 \times A_r \times \left(\frac{b}{a} \right)^{-n_\rho} - \left(\frac{b}{a} \right)^{m_1} \right] \\ & \times \bar{r}^{m_1} + m_2 \times A_r \times \left(\frac{b}{a} \right)^{-n_\rho} - \left(\frac{b}{a} \right)^{m_2} \times \bar{r}^{m_2} \\ & + (2 - n_E + n_\rho) \times \bar{r}^{-(n_E + n_\rho)} \end{aligned} \right\} - \bar{r}^{n_\rho} \quad (19)$$

چنان که نمودارهای شکل ۲ نشان می‌دهند، ترتیب مؤلفه‌های تنش همواره به صورت $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ است. با توجه به این نتیجه، $\bar{\sigma}_{Tresca}$ مطابق معادله‌ی ۱۸ خواهد بود.

۳.۳. بررسی اثر تغییر چگالی بر بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز

در این بخش، اثر در نظر گرفتن تغییر چگالی بر سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز، بررسی می‌شود. به این منظور، بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز یک‌بار با فرض $n_\rho = 0$ و به‌ازای مقدارهای مختلف پارامترهای توان در محدوده‌ی $-2 \leq (n_E = n_\sigma) \leq 2$ و بار دیگر با فرض $n_\rho \neq 0$ و به‌ازای مقدارهای مختلف پارامترهای توان در محدوده‌ی $-2 \leq (n_E = n_\rho = n_\sigma) \leq 2$ محاسبه و تعیین می‌شود. آنگاه با مقایسه‌ی نتایج این دو حالت، تأثیر لحاظ کردن تغییر چگالی بر محاسبه و تعیین بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز بررسی خواهد شد.

با توجه به نتایج به دست آمده در بخش پیشین، در تعیین ترتیب مؤلفه‌های تنش، ساختار تابع $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ مشخص شد. اگرچه نمودارهای شکل ۲ برای حالت چگالی متغیر ($n_\rho \neq 0$) به دست آمده، بررسی نگارندگان نشان می‌دهد که برای حالت چگالی ثابت ($n_\rho = 0$) نیز ترتیب مؤلفه‌های تنش به صورت $\sigma_\theta > \sigma_z > \sigma_r$ خواهد بود.

اکنون براساس داده‌های ارائه شده در بخش ۲.۲، به‌ازای هر حالت و مقدار مشخص از پارامترهای توان با افزایش تدریجی پارامتر بی‌بعد بارگذاری (DLP)، نمودار تابع $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ رسم می‌شود تا موقعیت شعاعی شروع تسلیم (\bar{r}_{Max}) و نیز پارامتر بی‌بعد بیشینه بارگذاری مجاز $(DLP)_{Max}$ ، به دست آید.

برای بررسی اثر در نظر گرفتن تغییرات چگالی، نمودار تابع $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ برای دو حالت $n_\rho = 0$ و $n_\rho \neq 0$ به صورت جداگانه رسم شده است. در شکل ۳ نمودارهای تابع $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ برای حالت $n_\rho = 0$ و به‌ازای سه مقدار مختلف $-2 \leq n_E = n_\sigma \leq 2$ ، $n_E = n_\sigma = 0$ و $n_E = n_\sigma = 2$ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، در حالت $n_\rho = 0$ تسلیم از شعاع داخلی شروع می‌شود. به‌علاوه با افزایش مقدار پارامترهای توان $n_E = n_\sigma$ مقدار پارامتر بی‌بعد بیشینه بارگذاری مجاز $(DLP)_{Max}$ ، در نتیجه بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز، کاهش می‌یابد.

نمودارهای شکل ۴، ترمیمی تابع $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ را برای حالت $n_\rho \neq 0$ و به‌ازای سه مقدار مختلف از پارامترهای توان $-2 \leq n_E = n_\rho = n_\sigma \leq 2$ نشان می‌دهد. این نمودارها نشان می‌دهند که در حالت $n_\rho \neq 0$ نیز تسلیم از شعاع داخلی شروع می‌شود. به‌علاوه با افزایش مقدار پارامترهای توان $n_E = n_\rho = n_\sigma$ مقدار پارامتر بی‌بعد بیشینه بارگذاری مجاز $(DLP)_{Max}$ ، در نتیجه بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز کاهش می‌یابد. اما آهنگ کاهش بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز با افزایش مقدار پارامتر توان در حالت $n_\rho = 0$ به مراتب کندتر از حالت $n_\rho \neq 0$ است.

برای مقایسه‌ی اثر در نظر گرفتن تغییرات چگالی بر بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز، نمودار پارامتر بی‌بعد بیشینه‌ی مجاز $(DLP)_{Max}$ ، برحسب مقادیر پارامترهای توان در محدوده‌ی -2 تا 2 ، برای دو حالت $n_\rho = 0$ و $n_\rho \neq 0$ در شکل ۵ رسم شده است. نتایج نمودارهای شکل ۵ نشان می‌دهد چشم‌پوشی از تغییرات چگالی سبب می‌شود تا در محدوده‌ی مقادیر منفی پارامترهای توان، بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز برای استوانه‌ی مدرج تابعی دوار بیشتر از مقدار واقعی به دست آید. از سوی دیگر، در محدوده‌ی مقادیر مثبت پارامترهای توان، در نظر نگرفتن تغییرات چگالی

پارامتر بی‌بعد بارگذاری بیشینه $(DLP)_{Max}$ ، محاسبه و تعیین خواهد شد. اکنون می‌توان شروع تسلیم را لحظه‌ی معرفی کرد که تنش $\bar{\sigma}_{Tresca}$ برای نخستین بار برابر صفر می‌شود. درحقیقت در شروع بارگذاری و به‌ازای سرعت‌های زاویه‌ی کوچک، تنش بی‌بعد ترسکا $(\bar{\sigma}_{Tresca})$ برحسب \bar{r} متغیر است، اما در سرتاسر ناحیه‌ی $1 \leq \bar{r} \leq (a/b)$ منفی خواهد بود. به تدریج با افزایش سرعت زاویه‌ی و در نتیجه افزایش پارامتر DLP، به‌ازای سرعت زاویه‌ی خاصی که متناظر با پارامتر بی‌بعد بارگذاری بیشینه $(DLP)_{Max}$ ، است در یک مقدار مشخص از \bar{r} مقدار $\bar{\sigma}_{Tresca}$ برابر صفر خواهد شد.

برای تعیین بیشترین سرعت زاویه‌ی مجاز، ابتدا مقدار مشخصی برای نسبت (b/a) ، توان‌های n_E ، n_ρ و n_σ و نیز ضریب پواسون انتخاب می‌شود. سپس طی یک فرایند سعی و خطا، با افزایش تدریجی پارامتر بی‌بعد بارگذاری، DLP، تابع $(\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r}))$ رسم می‌شود. به‌گونه‌ی که پارامتر بی‌بعد بارگذاری بیشینه $(DLP)_{Max}$ ، که به‌ازای آن نخستین بار $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ برابر صفر می‌شود و نهایتاً موقعیت شروع تسلیم مشخص شود.

۳. نتایج و بحث

۳.۱. ارزیابی و اعتبارسنجی نتایج

پیش از ارائه‌ی نتایج برای بیشترین سرعت زاویه‌ی مجاز استوانه‌ی مدرج تابعی دوار و بررسی اثر پارامترهای مادی بر روی آن، ابتدا روابط ارائه شده ارزیابی و اعتبارسنجی می‌شوند. برای این منظور، با استفاده از روابط ارائه شده در بخش قبل، بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز برای استوانه‌ی همگن دوار استخراج و با نتایج مراجع پیشین مقایسه می‌شود.

با قرار دادن مقدار صفر برای پارامترهای توان، $n_E = n_\rho = n_\sigma = 0$ ، روابط به دست آمده در بخش پیش به روابط مربوط برای استوانه‌ی دوار همگن تبدیل خواهند شد. در این صورت حل این روابط به منظور محاسبه‌ی بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز بی‌بعد، به معادله‌ی ۲۱ می‌انجامد.^[۱۳]

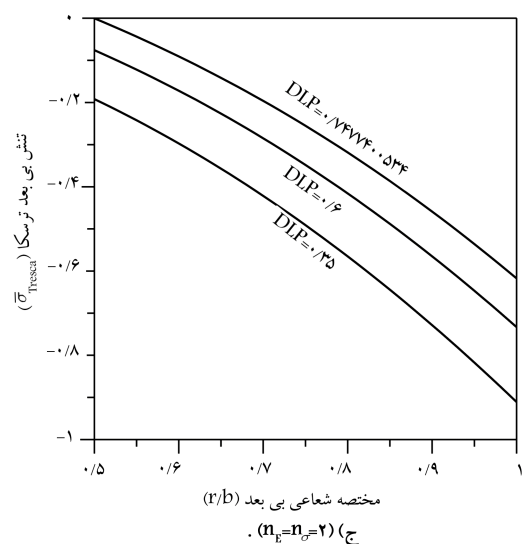
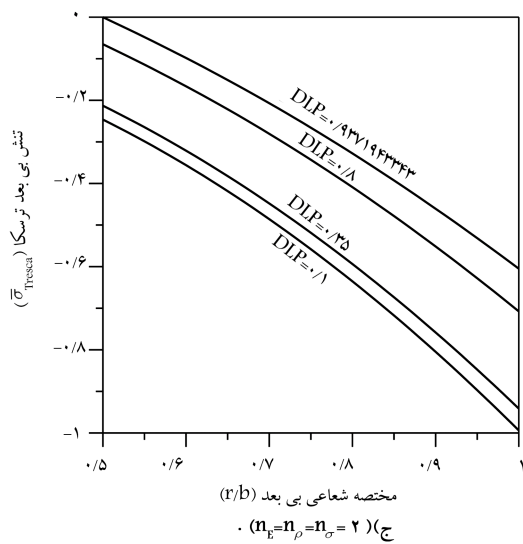
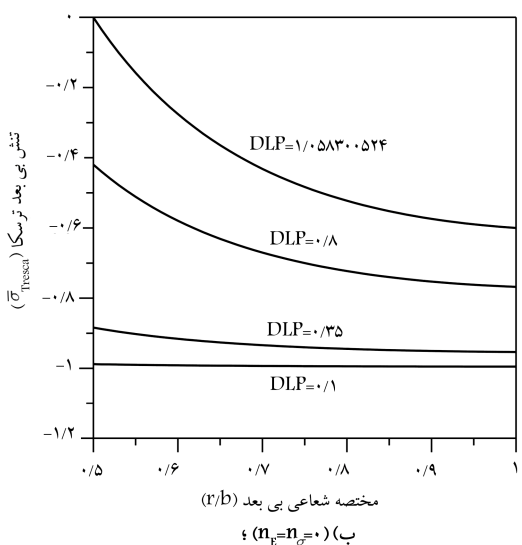
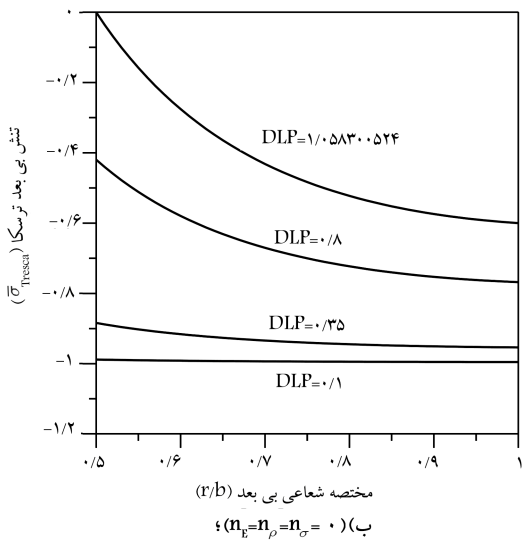
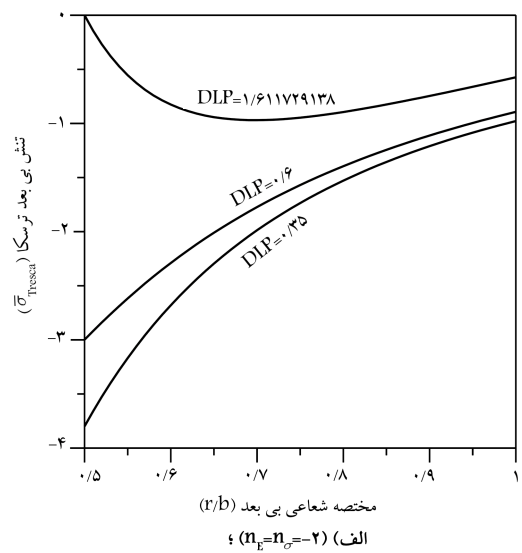
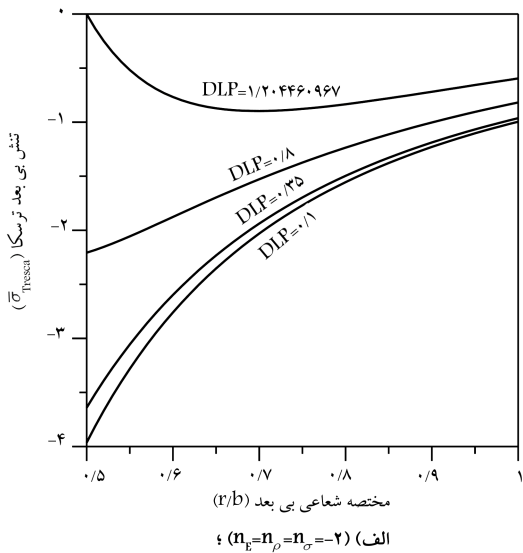
$$\frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\bar{\sigma}_0}} = 2 \left(\frac{b}{a} \right) \sqrt{\frac{1 - \nu}{(1 - 2\nu) + (3 - 2\nu) \left(\frac{b}{a} \right)^2}} \quad (21)$$

۳.۲. بررسی اثر تغییر توان‌ها بر توزیع مؤلفه‌های تنش

چنان که پیش‌تر اشاره شد، سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز، از معادله‌ی $\bar{\sigma}_{Tresca} = 0$ به دست می‌آید. به این منظور و برای تشکیل تنش بی‌بعد ترسکا $(\bar{\sigma}_{Tresca})$ مطابق معادله‌ی ۱۸، بررسی ترتیب مؤلفه‌های تنش ضرورت می‌یابد.

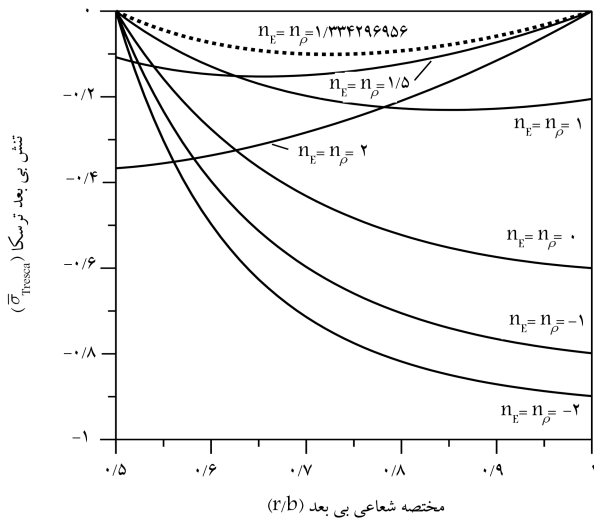
در این بخش، اثر تغییر توان‌های n_E ، n_ρ و n_σ بر توزیع و نیز ترتیب مؤلفه‌های محیطی، محوری و شعاعی تنش بررسی می‌شود. مسئله به‌ازای حالت ویژه $(b/a) = 2$ و $\nu = 0.3$ بررسی می‌شود. به‌علاوه چنان که قبلاً نیز بیان شد، بررسی نتایج برای حالتی که پارامترهای توان n_E ، n_ρ و n_σ یکسان و مساوی باشند، انجام می‌شود.

در شکل ۲ نمودار مؤلفه‌های محیطی، محوری و شعاعی تنش برای محدوده‌ی $-2 \leq (n_E = n_\rho) \leq 2$ از پارامترهای توان، برحسب مختصه‌ی شعاعی بی‌بعد $(1 \leq \bar{r} \leq 2)$ نشان داده شده است. انتخاب محدوده‌ی پارامترهای توان به‌گونه‌ی انجام شده که هم مقادیر منفی و هم مقادیر مثبت را شامل شود. به‌علاوه این محدوده، مشابه مقادیر عددی بررسی شده در مراجع پیشین^[۱۱] است.

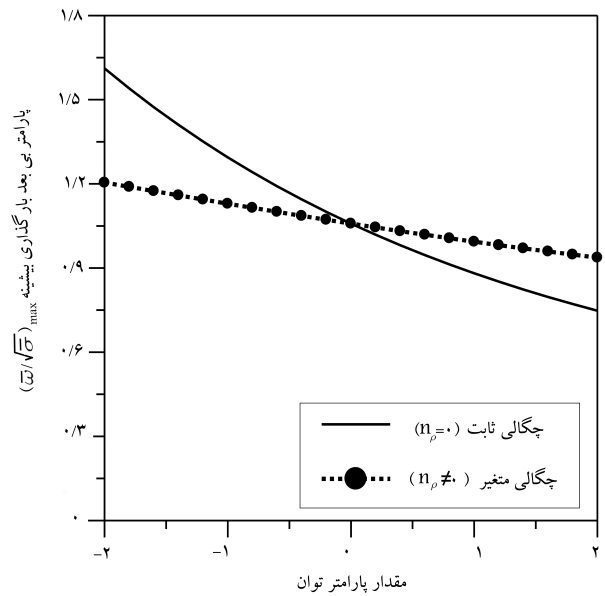


شکل ۴. نمودار تابع تنش بی بعد ترسکا $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ ، در حالت چگالی متغیر $(n_p \neq 0)$ و برای مقادیر مختلف پارامترهای توان به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی بعد بارگذاری $DLP = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\bar{\sigma}_c}}$.

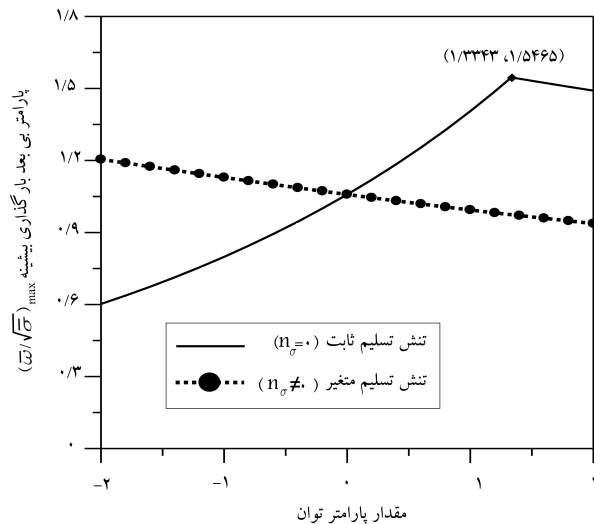
شکل ۳. نمودار تابع تنش بی بعد ترسکا $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ ، در حالت چگالی ثابت $(n_p = 0)$ و برای مقادیر مختلف پارامترهای توان، به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی بعد بارگذاری $DLP = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\bar{\sigma}_c}}$.



شکل ۶. نمودار تابع تنش بی بعد ترسکا $\bar{\sigma}_{Tresca}$ ، در حالت شروع تسلیم، با فرض تنش تسلیم ثابت ($n_\sigma = 0$) و برای مقادیر مختلف پارامترهای توان؛ تغییر وضعیت شروع تسلیم از شعاع داخلی به شعاع خارجی، به ازای $n_E = n_\rho = 1/334296956$.



شکل ۵. نمودار پارامتر بی بعد بارگذاری بیشینه مجاز، $(DLP)_{Max} = \max(\bar{\sigma}/\sqrt{\sigma_0})$ ، بر حسب تغییر مقدار پارامترهای توان، برای دو حالت چگالی ثابت ($n_\rho = 0$) و چگالی متغیر ($n_\rho \neq 0$).



شکل ۷. نمودار پارامتر بی بعد بارگذاری بیشینه مجاز، $(DLP)_{Max} = \max(\bar{\sigma}/\sqrt{\sigma_0})$ ، بر حسب تغییرات مقادیر پارامترهای توان، برای دو حالت تنش تسلیم ثابت ($n_\sigma = 0$) و تنش تسلیم متغیر ($n_\sigma \neq 0$).

تسلیم همواره از شعاع داخلی آغاز می شود به گونه ای که با افزایش مقدار توان از ۲- تا $(1/3343)$ مقدار تابع تنش ترسکا به ازای شعاع خارجی، $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r} = 1)$ ، در وضعیت شروع تسلیم، به تدریج افزایش می یابد تا جایی که به ازای پارامتر توان $n_E = n_\rho = 1/33429$ تسلیم هم زمان از شعاع داخلی و خارجی آغاز می شود. پس از آن و به ازای توان های بزرگ تر از $1/3343$ ، $(n_E = n_\rho > 1/3343)$ ، تسلیم از شعاع خارجی آغاز می شود.

بر این اساس، نمودار پارامتر بی بعد بارگذاری بیشینه مجاز، $(DLP)_{Max}$ ، بر حسب تغییر پارامترهای توان برای دو حالت تنش تسلیم ثابت ($n_\sigma = 0$) و تنش تسلیم متغیر ($n_\sigma \neq 0$)، در شکل ۷ رسم شده است. با توجه به نتایج شکل ۷ مشاهده می شود که چشم پوشی از تغییرات تنش تسلیم، موجب می شود که در

به تخمین پایین تری از بیشینه سرعت زاویه ای مجاز برای استوانه ای مدرج تابعی دوار منجر می شود؛ به گونه ای که چشم پوشی از تغییرات چگالی تا ۳۰٪ خطا در محدوده مقادیر منفی پارامترهای توان و حدود ۲۰٪ خطا در محدوده مقادیر مثبت پارامترهای توان، به همراه خواهد داشت. این نتایج به روشنی نشان می دهد در نظر نگرفتن تغییرات چگالی خطای قابل توجهی در تعیین و محاسبه سرعت زاویه ای بیشینه ای مجاز استوانه ای مدرج تابعی دوار به همراه خواهد داشت.

۴.۳. بررسی اثر تغییر تنش تسلیم بر بیشینه سرعت زاویه ای مجاز

«تنش تسلیم» پارامتر مهم دیگری است که بر چگونگی شروع تسلیم و بیشینه سرعت زاویه ای مجاز مؤثر است. در این بخش اثر در نظر گرفتن تغییر تنش تسلیم بر الگوی شروع تسلیم و نیز مقدار پارامتر بی بعد بیشینه ای مجاز بررسی می شود. همانند بخش پیشین که اثر تغییر چگالی بررسی شد، بیشینه سرعت زاویه ای مجاز یک بار با فرض $n_\sigma = 0$ و به ازای مقدارهای مختلف پارامترهای توان در محدوده $-2 \leq (n_E = n_\rho) \leq 2$ و بار دیگر با فرض $n_\sigma \neq 0$ و به ازای مقدارهای مختلف پارامترهای توان در محدوده $-2 \leq (n_E = n_\rho = n_\sigma) \leq 2$ محاسبه و تعیین می شود.

بررسی های انجام شده در این پژوهش نشان می دهد که فرض تنش تسلیم متغیر، $n_\sigma \neq 0$ ، تأثیری بر موقعیت شروع تسلیم ندارد و همواره تسلیم از شعاع داخلی آغاز می شود. اما در حالتی که تنش تسلیم ثابت فرض شود، بسته به مقدار پارامترهای توان n_E و n_ρ ، تسلیم از شعاع داخلی، شعاع خارجی یا در یک حالت خاص هم زمان از شعاع داخلی و خارجی شروع خواهد شد.

برای نشان دادن این موضوع، نمودار تابع $\bar{\sigma}_{Tresca}(\bar{r})$ با فرض $n_\sigma = 0$ و به ازای پارامتر بی بعد بارگذاری بیشینه که تسلیم شروع شده، برای چند مقدار از پارامترهای توان در محدوده $-2 \leq (n_E = n_\rho) \leq 2$ در شکل ۶ رسم شده است. چنان که مشاهده می شود، به ازای توان های کوچک تر از $1/3343$ ،

محدوده‌ی مقادیر منفی پارامترهای توان، بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز تا حدود ۵۰٪ کم‌تر از مقدار واقعی و در محدوده‌ی مقادیر مثبت پارامترهای توان، تا حدود ۶۰٪ بیشتر از مقدار حقیقی آن پیش‌بینی شود. این نتایج نیز به‌خوبی نشان‌گر اهمیت در نظر گرفتن تأثیر تغییر تنش تسلیم در تعیین بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز در استوانه‌ی مدرج تابعی دوار است.

۴. نتیجه‌گیری

در این نوشتار اثر در نظر گرفتن تغییرات چگالی و تنش تسلیم بر بیشترین سرعت زاویه‌ی مجاز برای استوانه‌ی مدرج تابعی دوار به‌صورت تحلیلی بررسی شد. تحلیل‌ها بر مبنای تغییر شکل‌های بسیار کوچک در حالت کرنش صفحه‌ی انجام شد. سرعت زاویه‌ی بیشینه‌ی مجاز مربوط به لحظه‌ی شروع تسلیم تعریف و از معیار تسلیم ترسکا استفاده شده است. مدول کشسانی، چگالی و تنش تسلیم به‌صورت تابع توانی از مختصه‌ی شعاعی در نظر گرفته شدند. برای بررسی عددی نتایج، پارامترهای توان غیر صفر، برابر و در محدوده‌ی ۲- تا ۲+، نسبت شعاع‌ها $(b/a) = 2$ و ضریب پواسون $\nu = 0.3$ فرض شدند. نتایج به‌دست آمده را می‌توان چنین برشمرد:

۱. در نظر گرفتن یا چشم‌پوشی از تغییرات چگالی اثری بر شروع تسلیم ندارد و تسلیم همواره از شعاع داخلی شروع می‌شود.
۲. چشم‌پوشی از تغییرات چگالی سبب می‌شود تا در محدوده‌ی مقادیر منفی پارامترهای توان، بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز برای استوانه‌ی مدرج تابعی دوار، بیشتر از مقدار واقعی و در محدوده‌ی مقادیر مثبت پارامترهای توان، کم‌تر از مقدار واقعی به دست آید؛ به‌گونه‌ی که چشم‌پوشی از تغییرات چگالی تا ۳۰٪ خطا در محدوده‌ی مقادیر منفی پارامترهای توان و حدود ۲۰٪ خطا در محدوده‌ی مقادیر مثبت پارامترهای توان، به‌همراه خواهد داشت (شکل ۵).
۳. در حالتی که تنش تسلیم متغیر در نظر گرفته شود، تسلیم همواره از شعاع داخلی آغاز می‌شود. اما اگر تنش تسلیم ثابت فرض شود، بسته به مقدار پارامترهای توان مدول کشسانی و چگالی، $(n_p$ و n_E)، تسلیم از شعاع داخلی، شعاع خارجی یا در یک حالت خاص هم‌زمان از شعاع داخلی و خارجی شروع شود (شکل ۶).
۴. چشم‌پوشی از تغییرات تنش تسلیم، نه تنها بر روند تغییرات بلکه بر بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز نیز اثر قابل توجهی دارد؛ به‌گونه‌ی که در نظر نگرفتن تغییرات تنش

تسلیم می‌تواند سبب شود که در محدوده‌ی مقادیر منفی پارامترهای توان، بیشینه سرعت زاویه‌ی مجاز تا حدود ۵۰٪ کم‌تر از مقدار واقعی و در محدوده‌ی مثبت مقادیر پارامترهای توان، تا حدود ۶۰٪ بیشتر از مقدار حقیقی آن پیش‌بینی شود (شکل ۷).

نتایج به دست آمده به‌روشنی نشان‌گر اهمیت در نظر گرفتن اثر تغییرات چگالی و تنش تسلیم بر چگونگی شروع تسلیم و تعیین بیشترین سرعت زاویه‌ی مجاز برای استوانه‌ی مدرج تابعی دوار است. مطالعه و بررسی این اثر در پژوهش‌های پیشین انجام نشده و تازگی دارد.

فهرست علائم

نمادهای لاتین

z, θ, r : مختصات در دستگاه استوانه‌ی (به ترتیب مختصه‌ی شعاعی، محیطی و محوری)
 $u(\bar{u})$: جابه‌جایی شعاعی (جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد)
 a, b : شعاع داخلی و خارجی استوانه
 $E(E_0)$: مدول کشسانی (مدول کشسانی در شعاع خارجی)
 n_E, n_p, n_σ : پارامترهای توان ماده‌ی مدرج تابعی (به ترتیب توان تابع مدول کشسانی، چگالی و تنش تسلیم)
 A_i, m_i, k : ثابت‌های بی‌بعد
 C_i : ثابت‌های انتگرال‌گیری
 DLP: پارامتر بی‌بعد بارگذاری

نمادهای یونانی

$\rho(\rho_0)$: چگالی (چگالی در شعاع خارجی)
 ν : ضریب پواسون
 $\sigma_Y(\sigma_0)$: تابع تنش تسلیم (تنش تسلیم در شعاع خارجی)
 $\sigma_i(\bar{\sigma}_i)$: مؤلفه‌های تنش (تنش بی‌بعد)
 ε_i : مؤلفه‌های کرنش
 $\omega(\bar{\omega})$: سرعت زاویه‌ی (سرعت زاویه‌ی بی‌بعد)

پانوشت‌ها

1. magnetoelectric
2. magnetic permeability
3. Orthotropic
4. Fredholm integral equation
5. dimensionless loading parameter

منابع (References)

1. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed, McGraw-Hill, NewYork (1970).
2. Mendelson, A., *Plasticity, Theory and Application*, Macmillan, NewYork (1968).

3. Chakrabarty, J., *Theory of Plasticity*, 3rd ed., Elsevier Butterworth-Heinemann (2006).
4. You, L.H., Zhang, J.J. and You, X.Y. "Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **82**, pp. 347-354 (2005).
5. Dai, H.L., Fu, Y.M. and Dong, Z.M. "Exact solutions for functionally graded pressure vessels in a uniform magnetic field", *International Journal of Solids and Structures*, **43**, pp. 5570-5580 (2006).
6. Eraslan, A.N. and Akis, T. "Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, **83**, pp. 635-644 (2006).
7. Akis, T. "Elastoplastic analysis of functionally graded spherical pressure vessels", *Computational Materials Science*, **46**, pp. 545-554 (2009).
8. Eraslan, A.N. and Akis, T. "On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems", *Acta Mechanica*, **181**, pp. 43-63 (2006).
9. Kargarnovin., M.H., Faghidian, S.A. and Arghavani, J. "Limit analysis of FGM circular plates subjected to arbitrary rotational symmetric loads", *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*, **1:4**, pp. 192-197 (2007).
10. You, L.H., You, X.Y., Zhang, J.J. and Li, J. "On rotating circular disks with varying material properties", *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **58**, pp. 1068-1084 (2007).
11. Akis, T. and Eraslan, A.N. "Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress", *Archive of Applied Mechanics*, **77**, pp. 745-765 (2007).
12. Peng, X.L. and Li, X.F. "Elastic analysis of rotating functionally graded polar orthotropic disks", *International Journal of Mechanical Sciences*, **60**, pp. 84-91 (2012).
13. Mack, W. "Rotating elastic-plastic tube with free ends", *International Journal of Solids and Structures*, **27**, pp. 1462-1476 (1991).