

# ارائه‌ی پاسخ نیمه تحلیلی برای ضربه‌ی کم سرعت ورق مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند

فرشاد فرزانه (کارشناس ارشد)

محمد شریعت\* (دانشیار)

رحمت‌الله قاجار (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۳)  
دوری ۲ - ۳، شماره ۲/۲، ص. ۷۴-۶۷

تحلیل‌های ارائه شده در زمینه‌ی ضربه‌ی کم سرعت، عموماً به سازه‌های ساخته شده از مواد همسانگرد یا کامپوزیت (به‌ویژه، با همسان‌گردی عرضی) تعلق داشته‌است. از سوی دیگر، در این مدل‌ها تنها سختی سطح در معرض ضربه در نظر گرفته شده و اثر سختی لایه‌های زیرین در پاسخ‌های ضربه نادیده گرفته شده است. در برخی دیگر از مقالات موجود، از خطی‌سازی قانون تماس استفاده شده است. در پژوهش حاضر تلاش شده است تا ضمن گسترش تحلیل‌های یادشده به ورق‌های دارای ساختار هدفمند و نیز رفع نارسایی‌های یادشده، پاسخی نیمه تحلیلی برای آن ارائه شود. به همین منظور، اثر پارامترهای مختلف ضربه‌زن و ورق با ساختار مواد هدفمند بر پاسخ‌های ضربه‌ی کم سرعت، در محدوده‌ی کشسان مورد بررسی قرار گرفته و در تحلیل مسئله از قانون غیرخطی تماس هرتر استفاده شده است. از آنجا که نتایج کنونی با استفاده از پاسخ تحلیلی حاصل شده، خطاهای مدل‌سازی، خطی‌سازی و تقریب‌های عددی متداول در آن‌ها آشکار نمی‌شود. نتایج پژوهش کنونی در مقایسه با نتایج دیگر محققین برای حالت‌های ویژه، مورد تأیید قرار گرفته است.

**واژگان کلیدی:** ضربه‌ی کم سرعت، ورق ساخته شده از مواد هدفمند، حل نیمه تحلیلی.

## ۱. مقدمه

مواد دارای ساختار هدفمند، نسل جدیدی از مواد مهندسی‌اند که در آنها جزئیات ریزساختاری ماده ضمن یک تابع هدفمند و کنترل شده، به‌صورت پیوسته و تدریجی (با استفاده از تغییر در ویژگی‌های مکانیکی، اندازه و شکل ذرات فاز تقویت‌کننده) از نقطه‌ی به نقطه‌ی دیگر تغییر می‌کند. نتیجه‌ی این امر، ریزساختاری است که در خواص مکانیکی و حرارتی ماده تغییرات ماکروسکوپی پیوسته ایجاد می‌کند. مواد هدفمند ترکیب‌هایی از موادی که در آنها کسر حجمی دو یا چند فاز از مواد تشکیل‌دهنده به‌صورت پیوسته و به‌شکل تابعی از مکان در امتداد یک یا چند بعد از سازه تغییر می‌کند. در شکل ۱ شماتیکی از تغییرات تدریجی خواص مکانیکی مواد (مثلاً مدول کشسانی) در راستای ضخامت یک ورق ساخته شده از ماده‌ی هدفمند نشان داده شده است.

از موارد کاربرد این مواد می‌توان به ساخت پیستون و سوپاپ‌های موتور که در معرض بارهای انفجاری قرار دارند، سپرهای مقاوم در برابر بارهای ضربه‌ی، بدنه و شاسی بعضی از اتومبیل‌ها و استفاده در صنایع هواپیمایی اشاره کرد. بسیاری از مدل‌های ضربه‌ی ارائه شده، مبتنی بر گسسته‌سازی از طریق استفاده

\* نویسنده مسئول

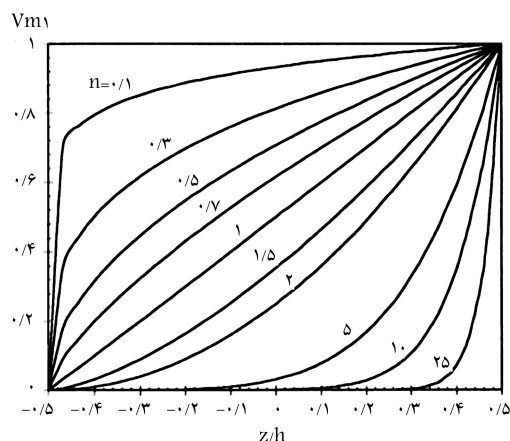
تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۱۰/۲۴، اصلاحیه ۱۳۹۲/۵/۲۶، پذیرش ۱۳۹۲/۷/۱۳.

farshad\_farzan@sina.kntu.ac.ir  
shariyat@kntu.ac.ir  
ghajar@kntu.ac.ir

از المان‌های جرم و فنرند.<sup>[۱-۴]</sup> بدیهی است این مدل‌ها توانایی آشکارسازی آثار مدهای ارتعاشی بالاتر از مود اول را، که گاهی چشم‌گیرند، ندارند. برخی از محققین مرور جامعی درخصوص مدل‌های ارائه شده در زمینه ضربه‌ی کم سرعت ورق‌های کامپوزیتی ارائه کرده‌اند<sup>[۵]</sup> و برخی دیگر پژوهش‌هایی را که در سال‌های اخیر در این زمینه ارائه شده مرور کرده‌اند.<sup>[۶]</sup>

درخصوص استفاده از مدل‌های پیوسته در تحلیل ضربه‌ی کم سرعت ورق، برخی از پژوهش‌گران تنها به بررسی تنش‌ها و جابه‌جایی‌های کلی پدید آمده در ورق پرداخته‌اند؛ در این تحلیل‌ها میزان فروروی ضربه‌زن مورد توجه قرار نگرفته است.<sup>[۷-۹]</sup> برخی دیگر نیز از مدل‌سازی هندسی ناحیه‌ی تماس (برای ورق فاقد امکان جابه‌جایی عرضی) استفاده کرده‌اند.<sup>[۹-۱۳]</sup>

برای ورق کامپوزیت با قابلیت جابه‌جایی عرضی نیز تحلیل‌هایی انجام شده است.<sup>[۱۴-۱۶]</sup> در مطالعات بعدی، روابط مربوط به تماس ورق‌های ارتوتروپیک، از طریق جایگزینی مدول کشسانی مواد همسانگرد<sup>۱</sup> در رابطه‌ی هرتر با مدول کشسانی عرضی اصلاح شد<sup>[۱۷]</sup> و سپس پژوهش‌گران بعدی با استفاده از مطالعات تجربی خود، نتایج حاصله را از «نیم‌فضا» به «ورق» اصلاح کردند.<sup>[۱۸]</sup> در نهایت با استفاده از مدلی مبتنی بر سازگاری هندسی ضربه‌زن و تغییر فرم سطح ورق،<sup>[۱۹]</sup> و نیز با استفاده از روش اجزای محدود، پاسخ ضربه‌ی کم سرعت ورق بررسی و تحلیل شد.<sup>[۲۰]</sup>



شکل ۲. تغییرات کسر حجمی در راستای ضخامت، طبق مدل توانی به‌ازای مقادیر مختلف  $n$ .

جدول ۱. خواص مکانیکی اجزای تشکیل‌دهنده‌ی ورق هدف‌مند.

| Zirconia                     | Aluminum                     |
|------------------------------|------------------------------|
| $E = 151 \text{ GPa}$        | $E = 70 \text{ GPa}$         |
| $\nu = 0.3$                  | $\nu = 0.3$                  |
| $\rho = 3800 \text{ kg/m}^3$ | $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ |

چنان‌که پیشتر بیان شد، برخلاف فرض متداول در تحلیل‌های موجود، سختی ناحیه‌ی ضربه (تماس) نه‌تنها به سختی لایه‌ی روپین ورق، بلکه به نحوه‌ی تغییر ویژگی‌های مواد در جهت عرضی نیز وابسته است. این موضوع در بخش بعدی مورد بررسی قرار گرفته است.

### ۳. ویژگی‌های مکانیکی معادل ورق هدف‌مند

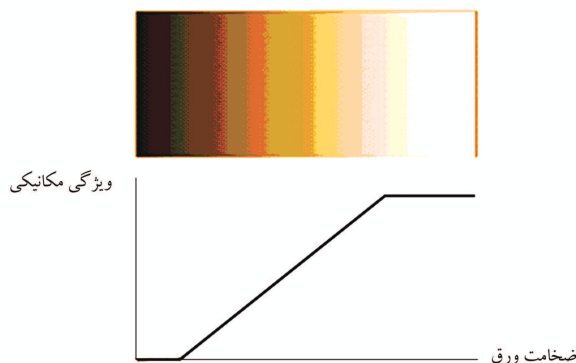
چنان‌که در بخش قبل بیان شد، برخلاف فرض متداول در تحلیل‌های موجود، سختی ناحیه تماس نه‌تنها به سختی لایه‌ی روپین ورق، بلکه به نحوه‌ی تغییر ویژگی‌های مواد در جهت عرضی نیز وابسته است. خواص مکانیکی مواد مورد استفاده برای ورق هدف‌مند zirconia/aluminum در پژوهش کنونی، در جدول ۱ ارائه شده است. در این جدول،  $\rho$  معرف چگالی جرمی و  $\nu$  معرف ضریب پواسون است.

با انتگرال‌گیری از عبارت کسر حجمی (رابطه‌ی ۱) روی ضخامت  $h$  داریم:

$$(V_f)_{cer} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n dz = \frac{1}{n+1},$$

$$(V_f)_{met} = 1 - (V_f)_{cer} \quad (3)$$

که در آن  $(V_f)_{cer}$  معرف کسر حجمی سرامیک و  $(V_f)_{met}$  معرف کسر حجمی فلز است. با استفاده از رابطه‌ی ۳ که حاصل انتگرال‌گیری از کسر حجمی موضعی است، قادر به یافتن کسر حجمی کلی هریک از اجزای تشکیل‌دهنده هستیم. اکنون برای یافتن خاصیت مکانیکی کلی ماده‌ی هدف‌مند از قانون اختلاط<sup>۲</sup> استفاده می‌کنیم.



شکل ۱. شماتیک تغییرات تدریجی خواص ماده در امتداد یک بعد از یک ماده هدف‌مند.

تاکنون پژوهش جامعی درخصوص تحلیل ضربه‌ی کم‌سرعت ورق هدف‌مند ارائه نشده است. در مطالعات موجود، ورق هدف‌مند به لایه‌هایی با ویژگی‌های مواد همسان‌گرد و همگن تجزیه شده، و تحلیل‌ها در محیط نرم‌افزارهای اجزاء محدود تجاری صورت گرفته است. در پژوهش حاضر پاسخ نیمه تحلیلی برای پیش‌بینی پاسخ‌های ضربه‌ی کم‌سرعت ورق هدف‌مند، بدون تبدیل ورق به یک سیستم ارتعاشی گسسته یا تجزیه‌ی ورق به لایه‌های همسان‌گرد و همگن، ارائه شده است. معادله‌ی حاکم بر ورق، هم‌زمان با معادله‌ی حاکم بر ضربه‌زن، در کلی‌ترین حالت و بدون استفاده از خطی‌سازی رابطه‌ی هرتز حل شده است. از این رو، دقت پاسخ‌ها بسیار بالاست.

### ۲. توصیف تغییرات ویژگی‌های مواد در ماده‌ی هدف‌مند

خواص مکانیکی در یک ماده‌ی هدف‌مند به‌طور تدریجی و پیوسته در امتداد یک یا چند بعد تغییر می‌کند. مواد ورق هدف‌مند مورد استفاده در این پژوهش (شکل ۱)، در جهت عرضی، از مواد کاملاً فلزی به مواد کاملاً سرامیکی تغییر می‌کند. مدل‌های مختلفی برای توصیف تغییرات تدریجی خواص ماده‌ی هدف‌مند در امتداد ضخامت آن وجود دارد. مدل مورد استفاده در مطالعه‌ی کنونی، «مدل توانی» است. در مدل تابع توانی، تغییرات کسر حجمی موضعی چنین بیان می‌شود:

$$V_f(z) = \left( \frac{z + h/2}{h} \right)^n = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \quad (1)$$

که در آن  $z$  مختص مکانی در راستای ضخامت است که از لایه‌ی میانی اندازه‌گیری می‌شود،  $h$  ضخامت ورق و  $n$  نمای قانون توانی<sup>۲</sup> است. بنابراین، تغییرات یک خاصیت دلخواه ماده ( $P$ ) در راستای ضخامت (نظیر مدول یانگ  $E$ ، چگالی  $\rho$  یا ضریب پواسون  $\nu$ )، طبق مدل توانی به رابطه‌ی ۲ تبدیل می‌شود:

$$P(z) = V_f(z)P_t + (1 - V_f(z))P_b \quad (2)$$

که در آن  $P_t$  خاصیت ماده در سطح بالایی ورق ( $z = +h/2$ ) و  $P_b$  خاصیت ماده در سطح پایینی ورق ( $z = -h/2$ ) است. در شکل ۲، تغییرات کسر حجمی ماده‌ی سطح روپین ورق در راستای ضخامت، طبق مدل تابع توانی و به‌ازای مقادیر مختلف  $n$  نمایش داده شده است.

با استفاده از فرضیات این قانون داریم:

$$\begin{aligned} E_z &= \left( \frac{(V_f)_{cer}}{E_{cer}} + \frac{(V_f)_{met}}{E_{met}} \right)^{-1} \\ E_x &= E_y = E_{cer} (V_f)_{cer} + E_{met} (V_f)_{met} \\ \rho &= \rho_{cer} (V_f)_{cer} + \rho_{met} (V_f)_{met} \\ G_{xy} &= G_{xz} = \left( \frac{(V_f)_{cer}}{G_{cer}} + \frac{(V_f)_{met}}{G_{met}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

بدین ترتیب، با استفاده از مجموعه روابط ۴ خواص مکانیکی کلی ورق هدفمند محاسبه می‌شود.

نکته‌ی حائز اهمیت این است که در تحلیل‌های موجود در مطالعات دیگر، روابط تماس هرتز که اصولاً برای نیم‌فضای کاملاً همسان‌گرد ارائه شده، تنها به نیم‌فضای همسان‌گرد عرضی همگن (مانند کامپوزیت‌های لایه‌یی) گسترش داده شده و همان روابط برای ورق دارای ضخامت محدود استفاده شده‌اند. علاوه بر آن، تنها ویژگی‌های ماده‌ی لایه‌ی رویین جسم در محاسبات استفاده شده و سخت یا نرم بودن لایه‌های زیرین بی‌تأثیر فرض شده است. در این بخش: الف) روشی برای گسترش روابط به ورق (با دخالت دادن اثر ضخامت در محاسبه‌ی کسر حجمی ظاهری یا متوسط) از طریق روابط ۳ و ۴؛ ب) گسترش روابط جسم همسان‌گرد همگن به جسم دارای خواص همسان‌گرد ولی ناهمگن عرضی؛ ج) روشی برای پرهیز از خطای متداول استفاده از روابط نیم‌فضا برای جسم دارای ضخامت محدود (ورق) ارائه شده است. قسمتی از این موارد با مطالب بیان شده در بخش‌های آینده تکمیل شده‌اند.

#### ۴. قانون تماس هرتز

در این پژوهش از قانون تماس هرتز به‌منظور توصیف پدیده‌ی تماس استفاده شده است. فرضیات هرتز برای یافتن قانون تماس عبارت‌اند از:

۱. اجسام در تماس بدون اصطکاک‌اند؛
۲. فشار خارج از ناحیه‌ی دایره‌یی تماس صفر است؛
۳. فاصله‌ی بین سطوح دو جسم در داخل ناحیه‌ی دایره‌یی تماس صفر، و بیرون دایره‌ی تماس بزرگ‌تر از صفر است؛
۴. انتگرال توزیع فشار در محدوده‌ی ناحیه‌ی دایره‌یی تماس، نیروی تماس را در اختیار قرار می‌دهد.

هرتز بر پایه‌ی فرضیات یادشده رابطه‌ی ۵ را برای نیروی تماس ارائه کرد:

$$\begin{aligned} F &= K \alpha^{\frac{2}{3}} \\ K &= \frac{4}{3} \sqrt{R} E \\ 1/E &= 1/E_1 + 1/E_2 \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $E_1$  مدول کشسانی ورق،  $E_2$  مدول کشسانی ضربه‌زن،  $K$  سختی تماسی ورق، و  $\alpha$  مقدار فروروی ضربه‌زن در ورق است.

#### ۵. سختی تماسی ظاهری ورق در محل ضربه

رابطه‌ی هرتز صرفاً برای ماده‌ی همسان‌گرد معتبر است. محققین نشان داده‌اند که چنانچه مدول ماده‌ی همسان‌گرد در رابطه‌ی هرتز با ترکیبی از ویژگی‌های مکانیکی

همسان‌گرد عرضی جایگزین شود، میزان نفوذ را می‌توان از رابطه‌ی هرتز مشابه با رابطه‌ی تماس مواد همسان‌گرد محاسبه کرد.<sup>[۱]</sup> آنان مدول جایگزین برای ورق همسان‌گرد عرضی را در قالب رابطه‌ی ۶ ارائه کردند:

$$\alpha = \left( \frac{3F}{2\sqrt{R}E_{TI}^*} \right)^{2/3} \quad (6)$$

که در آن  $E_{TI}^*$  مدول مؤثر مواد همسان‌گرد عرضی است و از رابطه‌ی ۷ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left( \frac{E_x/E_y - v_{xz}^2}{1 - v_{xy}^2} \right)^{1/2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1 + \left( \frac{E_x}{2G_{xz}} - 1 \right) - v_{xz}(1 + v_{xy})}{1 - v_{xy}^2}, \\ \alpha_3 &= \left\{ \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1 - v_{xy}}{G_{xy}} \right\}, \\ E_{TI}^* &= \left( \frac{2}{\alpha_1 \alpha_3} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

با استفاده از تصحیح پیشنهاد شده در این نوشتار (رابطه‌های ۳ و ۴) می‌توان روابط ۵ و ۷ را در محاسبه‌ی سختی تماسی ظاهری ورق هدفمند، برای در نظر گرفتن ناهمگنی عرضی گسترش داد.

#### ۶. معادلات حاکم بر خیز ورق و حرکت ضربه‌زن

در پژوهش کنونی از فرض رخ ندادن تغییر شکل‌های خمیری در حین ضربه بهره گرفته شده است. فرض یادشده با تعریف ضربه‌ی کم‌سرعت ورق نیز مرتبط است، اگرچه تاکنون تعاریف متعددی برای ضربه‌ی کم‌سرعت ارائه شده است. برقراری فرض یادشده با مدل‌سازی ورق در نرم‌افزارهای اجزاء محدود تحلیل تنش، کنترل شده و سرعت‌های انتخاب شده در بخش نتایج به‌مراتب پایین‌تر از سرعت حدی یاد شده (در حدود ۵ متر بر ثانیه در بدترین شرایط) انتخاب شده است. با نوشتن معادلات حرکت اویلر - لاگرانژ، برای ورق ساخته شده از مواد هدفمند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta u_s : \quad & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} \\ \delta v_s : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} \\ \delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = I_s \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (8)$$

همچنین با استفاده از روابط نظریه‌ی کلاسیک ورق، رابطه‌ی گشتاور خمشی بر واحد طول برحسب خیز چنین به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \\ M_{yy} &= - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \\ M_{xy} &= -2D_{xy} \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

با جای‌گذاری مجموعه معادلات گشتاور خمشی در معادله‌ی حرکت ورق (معادله‌ی ۸)، معادله‌ی حاکم بر خیز به دست می‌آید:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) - 4 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left( D_{16} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( D_{22} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + D_{23} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) + q = I_z \frac{\partial^4 w_s}{\partial t^4} \quad (10)$$

که در آن  $q$  معرف بار گسترده و  $D$  نمایانگر سختی خمشی ورق است. از سوی دیگر، نیروی وارد بر ضربه‌زن با توجه به جهت نیرو (در جهت منفی  $z$ ) بر حسب جرم و شتاب ضربه‌زن به دست می‌آید:

$$F_1 = -m\ddot{\xi} \quad (11)$$

که در آن  $m$  جرم ضربه‌زن و  $\xi$  جابه‌جایی مرکز ضربه‌زن است. همچنین نیروی تماسی وارد بر ورق که از رابطه‌ی هرتز با اصلاح ترنر و مقاله‌ی کنونی محاسبه می‌شود، عبارت است از:

$$F_2 = k\alpha^{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

نیروهای وارد بر ورق و ضربه‌زن، نیروی عمل و عکس‌العمل است که از نظر بزرگی یکسان‌اند، بنابراین داریم:

$$|F_1| = |F_2| \quad (13)$$

همچنین برای حالتی که ضربه‌زن کروی با ورق نازک برخورد می‌کند، میزان نفوذ با استفاده از رابطه‌ی ۱۴ به خیز ورق و جابه‌جایی ضربه‌زن مرتبط می‌شود:

$$\alpha = \xi - w \quad (14)$$

در این معادله،  $\alpha$  نفوذ ضربه‌زن در ورق،  $\xi$  میزان جابه‌جایی ضربه‌زن، و  $w$  خیز لایه‌ی میانی ورق است. با جایگذاری روابط ۱۴ و ۱۲ در رابطه‌ی ۱۱ داریم:

$$\ddot{w} = \left( \frac{-k}{m} \right) \alpha^{\frac{2}{3}} - \ddot{\alpha} \quad (15)$$

## ۷. حل معادلات حاکم بر ورق و ضربه‌زن

با توجه به ساده بودن تکیه‌گاه‌های ورق و آشکارشدن مشتقات مکانی با مرتبه‌ی زوج در معادله‌ی حاکم ۱۰، برای حل معادله‌ی حاکم بر ورق، از پاسخی شبیه به پاسخ ناویر استفاده می‌کنیم. در این راستا، فرم پاسخ خیز چنین در نظر گرفته می‌شود:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 w_{mn}(t) \cdot \sin \frac{m\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{b} \quad (m, n = 1, 3, \dots) \quad (16)$$

همچنین معادله‌ی بار  $q(x, y, t)$  مطابق معادله ۱۷ در نظر گرفته می‌شود:

$$q(x, y, t) = \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 q_{mn}(t) \cdot \sin \frac{m\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{b} \quad (17)$$

از آنجا که نیروی وارد به صورت فشاری است تا نیرویی گسترده با توزیع یکنواخت، برای نیروی ضربه  $F(t)$  وارد بر نقطه‌ی مرکزی ورق به مختصات  $x = a/2$  و  $y = b/2$  می‌توان نوشت:

$$q(x, y, t) = F(t) \cdot \delta(x - a/2, y - b/2) \quad (18)$$

در نتیجه در رابطه‌ی ۱۷:

$$q_{mn}(t) = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y, t) dx dy = \frac{4p}{ab} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (19)$$

با جای‌گذاری روابط ۱۶، ۱۷ و ۱۹ در معادله‌ی کلی ورق (معادله‌ی ۱۰) داریم:

$$\ddot{w}_{mn}(t) + \frac{1}{I_z} \left[ D_{11} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] w_{mn}(t) - \frac{4k}{I_z ab} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \alpha^{\frac{2}{3}} = 0 \quad (20)$$

که در آن:

$$\hat{D}_{12} = D_{12} + 2D_{66} \quad (21)$$

همچنین، از جای‌گذاری پاسخ ارائه شده در رابطه‌ی ۱۶ در معادله‌ی حاکم بر جرم ضربه‌زن (رابطه‌ی ۱۵) معادله‌ی ۲۲ به دست می‌آید:

$$\sum_{m,n} \ddot{w}_{mn}(t) \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} = \left( \frac{-k}{m} \right) \alpha^{\frac{2}{3}} - \ddot{\alpha} \quad (22)$$

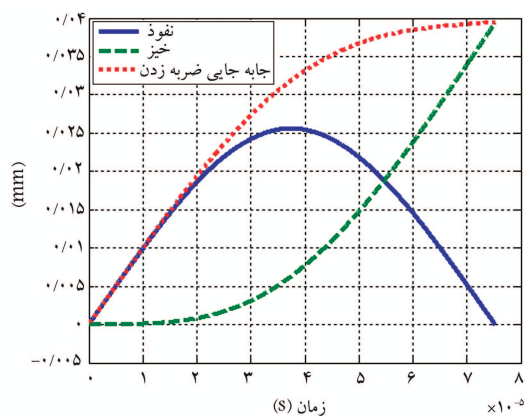
از حل همزمان معادلات ۲۰ و ۲۲ با استفاده از روش انتگرال‌گیری زمانی رانژ-کوتا (عملگر ODE45 در نرم‌افزار MATLAB)، مقادیر خیز و فروروی ورق به دست می‌آید.

## ۸. نتایج

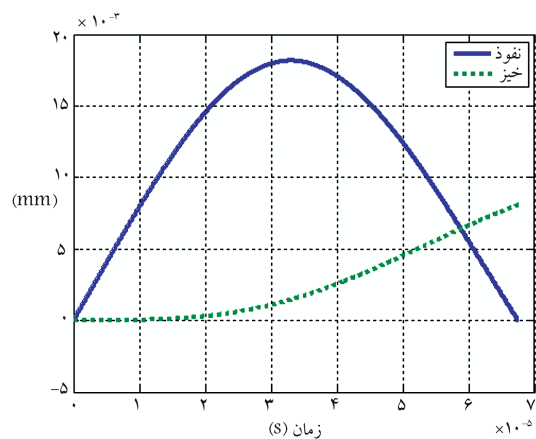
درخصوص بررسی ضربه‌ی کم‌سرعت ورق مستطیلی هدف‌مند، نتایج جامعی در اختیار نیست. لذا چون در پژوهش حاضر پس از بهره‌گیری از قانون اختلاط، رابطه‌ی تماس هرتز با اصلاح روابط ترنر در این مقاله تصحیح شده، امکان تحلیل دقیق‌تر وجود دارد. ورق مورد بررسی دارای تکیه‌گاه‌های ساده با ابعاد زیر است:

$$a = 500 \text{ mm}, \quad b = 400 \text{ mm}, \quad h = 2 \text{ mm}$$

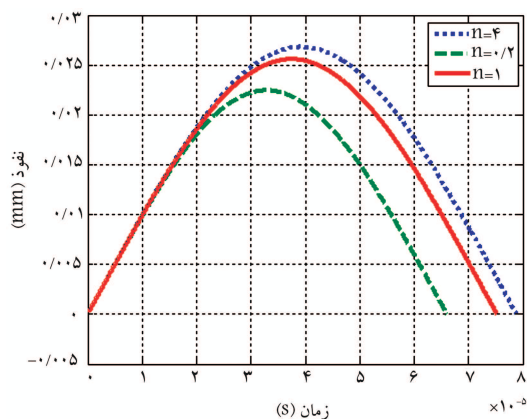
برای صحه‌گذاری، نتایج حل نیمه تحلیلی ضربه‌ی کنونی با نتایج ضربه‌ی کم‌سرعت ورق همسان‌گرد<sup>[۱۹]</sup> مقایسه شده است. در شکل ۳ تاریخچه‌ی زمانی خیز و نفوذ ضربه‌زن با استفاده از روش ارائه شده در این پژوهش نمایش داده شده است. در شکل ۴ نیز تغییرات زمانی کمیت‌های فوق بر پایه‌ی نتایج گزارش شده توسط محققین<sup>[۲]</sup> و با استفاده از روش المان محدود نشان داده شده است. در جدول ۲، نفوذ بیشینه‌ی ضربه‌زن و خیز ورق بر پایه‌ی تحلیل کنونی و روش Wu مقایسه، و درصد انحراف نتایج کنونی از نتایج Wu مشخص شده است. داده‌های جدول ۲ نشان می‌دهد که عموماً این نتایج تطابق خوبی با یکدیگر دارند. اختلاف نتایج، عمدتاً ناشی از روش‌های به‌کار گرفته شده برای حل است. از آنجا که در پژوهش کنونی از روش نیمه تحلیلی استفاده شده، انتظار می‌رود که دقت نتایج بالاتر بوده باشد.



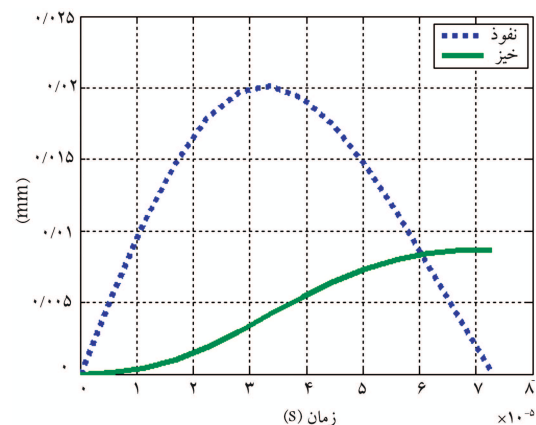
شکل ۵. نمودار تغییرات خیز، نفوذ و جابه جایی ضربه زن برای حالت  $n = 1$ .



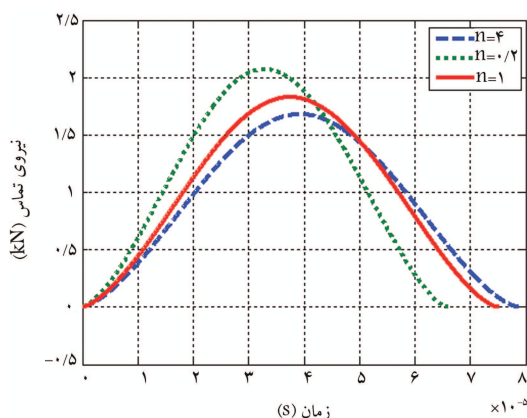
شکل ۳. تغییرات خیز ورق و نفوذ ضربه زن با استفاده از روش ارائه شده در پژوهش حاضر.



شکل ۶. مقایسه‌ی میزان نفوذ ضربه زن برای سه توان مختلف رابطیه‌ی ویژگی‌های ماده‌ی هدف‌مند.



شکل ۴. نتایج به دست آمده توسط Wu [۱۹].



شکل ۷. مقایسه‌ی تغییرات نیروی ضربه برای توان‌های مختلف رابطیه‌ی ویژگی‌های ماده‌ی هدف‌مند.

۱۵۱ GPa) است، ورق نرم‌تر می‌شود. در نتیجه بر اثر افزایش  $n$  از  $0.2$  به  $4$ ، مدت زمان تماس افزایش می‌یابد و نیز بر نفوذ بیشینه‌ی ضربه زن و خیز ورق افزوده می‌شود (جدول ۳).

در ادامه، تأثیر تغییر سرعت اولیه‌ی ضربه زن بر میزان نفوذ و نیروی ضربه بررسی شده است. بدین منظور ابتدا به اثر تغییر سرعت اولیه بر میزان نفوذ ضربه زن برای ماده‌ی هدف‌مند با توان  $n = 1$  (شکل ۸) و سپس اثر تغییر سرعت اولیه در میزان

جدول ۲. مقایسه‌ی نتایج و درصد انحراف برای مقادیر نفوذ ضربه زن و خیز ورق.

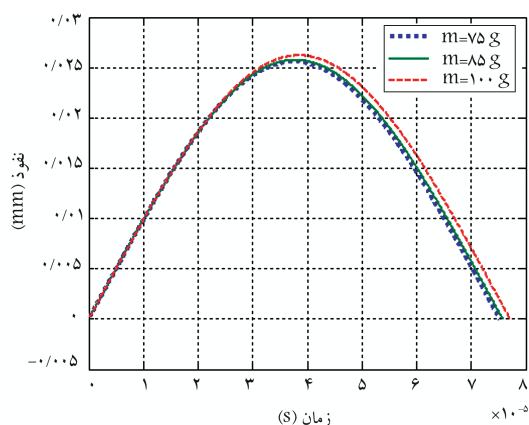
| روش تحقیق   | میزان نفوذ بیشینه (m) | میزان خیز بیشینه (m) |
|-------------|-----------------------|----------------------|
| پژوهش حاضر  | $1.8165e-5$           | $8.085e-5$           |
| روش Wu      | $2.0127e-5$           | $8.631e-5$           |
| درصد انحراف | ۹٫۷                   | ۶٫۳۲                 |

تاریخچه‌ی تغییرات زمانی خیز، نفوذ و جابه جایی ضربه زن برای ماده‌ی هدف‌مند در حالت  $n = 1$  در شکل ۵ نشان داده شده است. از آنجا که رابطیه‌ی ۱ کسر حجمی مواد سرامیکی لایه‌ی روین را نشان می‌دهد، با افزایش توان  $n$ ، این کسر حجمی کوچک‌تر شده و کسر حجمی مواد فلزی مقطع افزایش می‌یابد؛ رابطیه‌ی ۳ نیز مؤید این موضوع است. لذا در این حالت، میزان فروری و خیز ورق نسبت به شکل ۳ افزایش می‌یابد. در شکل ۶، مقایسه‌ی میزان نفوذ ضربه زن برای سه توان مختلف رابطیه‌ی ویژگی‌های مکانیکی ماده‌ی هدف‌مند نشان داده شده است. در شکل ۷ نیز مقایسه‌ی تاریخچه‌ی زمانی نیروی ضربه برای سه توان مختلف رابطیه‌ی ویژگی‌های مکانیکی ماده‌ی هدف‌مند مشاهده می‌شود.

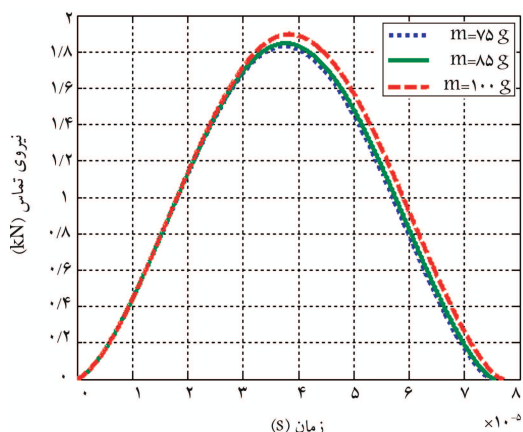
در جدول ۳ بیشترین مقادیر خیز، نفوذ و جابه جایی ضربه زن به همراه مدت زمان تماس برای توان‌های مختلف رابطیه‌ی ویژگی‌های مکانیکی مواد مقایسه شده‌اند. چنان که انتظار می‌رود، با افزایش توان پادشده درصد مواد فلزی ورق در مقطع افزایش می‌یابد، و چون مدول کشسانی این مواد ( $70 \text{ GPa}$ ) کوچک‌تر از مواد سرامیکی

جدول ۳. مقایسه‌ی مقادیر بیشینه خیز، نفوذ و جابه‌جایی ضربه‌زن، و نیز مدت زمان تماس در سه حالت متفاوت توزیع ماده‌ی هدف‌مند.

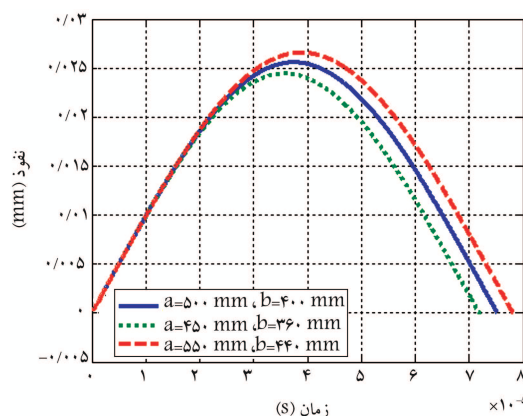
| $n$ | نفوذ بیشینه (m) | خیز بیشینه (m) | مدت زمان تماس (s) |
|-----|-----------------|----------------|-------------------|
| ۰٫۲ | $2,244e-5$      | $3,33e-5$      | $6,609e-5$        |
| ۱   | $2,556e-5$      | $3,944e-5$     | $7,530e-5$        |
| ۴   | $2,678e-5$      | $4,102e-5$     | $7,889e-5$        |



شکل ۱۰. اثر تغییر جرم ضربه‌زن بر مقدار نفوذ برای حالت  $n = 1$ .



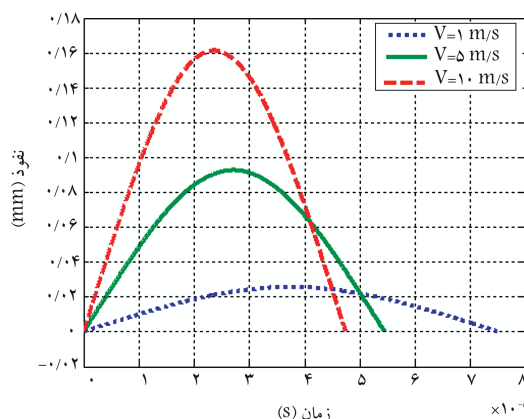
شکل ۱۱. اثر تغییر جرم ضربه‌زن بر نیروی تماسی برای حالت  $n = 1$ .



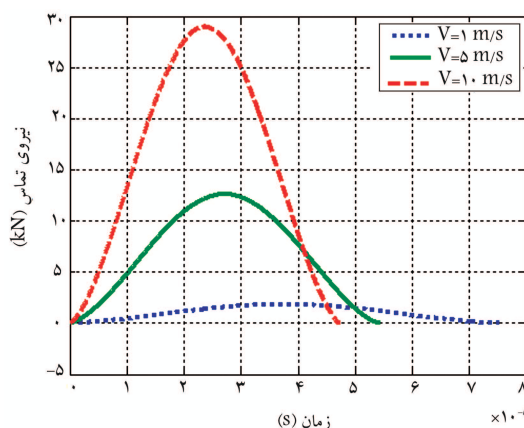
شکل ۱۲. اثر تغییر ابعاد ورق بر میزان نفوذ ماده‌ی هدف‌مند در حالت  $n = 1$ .

حالت  $n = 1$  در شکل ۱۲ نشان داده شده است. شکل ۱۳ نیز نمایان‌گر اثر تغییر ابعاد ورق بر میزان نیروی تماسی است.

از آنجا که در استخراج این نتایج، نسبت طول ضلع به ضخامت ورق ثابت نگه داشته شده، افزایش طول اضلاع ورق به افزایش سفتی خمشی که با توان سوم ورق ارتباط دارد ( $D$ ) منجر می‌شود. به‌طوری‌که امکان‌پذیر ورق از برابر جرم ضربه‌زن کاهش یافته و میزان فروروی جرم ضربه‌زن افزایش می‌یابد. این موضوع با توجه به افزایش نیروی تماس ناشی از قابلیت حرکت کم‌تر ورق در این حالت، تشدید می‌شود.



شکل ۸. اثر تغییر سرعت اولیه بر میزان نفوذ ضربه‌زن برای حالت  $n = 1$ .



شکل ۹. اثر تغییر سرعت اولیه‌ی ضربه‌زن بر میزان نیروی تماسی.

نیروی تماس (شکل ۹) پرداخته شده است. بدیهی است که با افزایش سرعت اولیه‌ی ضربه‌زن، انرژی جرم یادشده، و در نتیجه میزان نیرو و فروروی افزایش می‌یابد. نتایج شکل‌های ۸ و ۹ همچنین آشکار می‌سازند که با افزایش سرعت اولیه‌ی ضربه‌زن، زمان تماس کاهش می‌یابد.

در گام بعد، اثر تغییر جرم ضربه‌زن با انرژی اولیه‌ی یکسان بر میزان نفوذ و نیروی ضربه بررسی شده است. اثر تغییر جرم ضربه‌زن بر تاریخچه‌ی مقدار نفوذ ماده‌ی هدف‌مند در حالت  $n = 1$  در شکل ۱۰، و اثر تغییر جرم ضربه‌زن بر نیروی تماسی در شکل ۱۱ نشان داده شده است. نتایج حاصله نشان می‌دهد که با افزایش جرم ضربه‌زن (برای انرژی اولیه‌ی یکسان)، مقادیر فروروی و نیروی تماس به میزان ناچیزی افزایش می‌یابند.

در ادامه سعی شده تا اثر تغییر ابعاد ورق بر تاریخچه‌ی نفوذ و نیروی ضربه بررسی و مقایسه شود. چگونگی تأثیر تغییر ابعاد ورق بر میزان فروروی ضربه‌زن برای

چشمگیری بر میزان نفوذ ضربه زن، خیز ورق، و بیش از همه بر نیروی تماس خواهد داشت. طبق نتایج ارائه شده، افزایش ضخامت ورق موجب کاهش چشمگیر خیز ورق می شود، ولی این امر بر میزان نفوذ ضربه زن نتیجه ی معکوس داشته و باعث افزایش آن می شود.

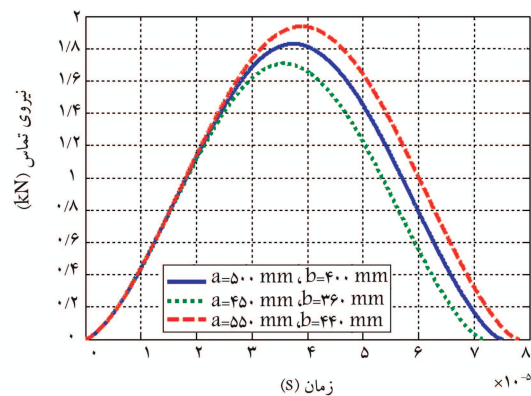
پژوهش کنونی حاوی نکات بسیار ظریف و متعددی است که پیشتر از دایره ی توجهات پژوهشگران داخل و خارج از کشور خارج بوده است. افزون بر این، هیچ پژوهشی در داخل کشور در زمینه ی ضربه ی کم سرعت ورق هدفمند انجام نگرفته و نوشتار حاضر اولین پژوهش در این زمینه است. همچنین، حتی در پژوهش های انجام شده برای ورق های کامپوزیتی و نیز همسان گرد معمولی، اشکالات قابل تأملی وجود دارد. برخی از دستاوردهای علمی مقاله عبارتند از:

الف) تحلیل ضربه ی کم سرعت ورق ساخته شده از مواد هدفمند برای اولین بار در کشور.

ب) ارائه ی روشی برای عدم استفاده ی مستقیم از روابط تماس هرترکه برای نیم فضای همگن ارائه شده، در تحلیل ضربه ی ورق که دارای ضخامت بی نهایت نبوده و به سادگی خیز برداشته و نیروی تماس و میزان فروروی بسیار کمتری متحمل می شود.

ج) ارائه ی روشی برای دخالت دادن اثر جنس مواد لایه های زیرین سطح تماس، که در مقالات موجود این اثر کاملاً نادیده گرفته شده است. مسلماً مقادیر نیروهای تماس، میزان فروروی و خیز برای حالات حدی که ورق نازک روی یک تکیه گاه کاملاً صلب قرار داده شده یا زیر ورق نازک خالی است (ورق بر روی لایه ی بی سفتی صفر قرار دارد)، تفاوتی آشکار دارند.

د) ارائه ی حل نیمه تحلیلی - عددی برای روابط غیرخطی حاکم بر ضربه ی ورق.



شکل ۱۳. اثر تغییر ابعاد ورق بر میزان نیروی تماسی ماده ی هدفمند در حالت  $n = 1$

## ۹. نتیجه گیری

براساس صحنه گذاری نتایج به دست آمده، شیوه ی مدل سازی و حل نیمه تحلیلی ارائه شده در پژوهش کنونی پاسخ های دقیقی به همراه دارد. همچنین اثر کسر حجمی سرامیک در ماده ی هدفمند در افزایش استحکام ورق و در نتیجه جلوگیری ضمنی از ورود به ناحیه ی خمیری بررسی شد. همچنین با توجه به نتایج به دست آمده، با افزایش  $n$  خیز ورق کاهش می یابد. با توجه به کاربرد مواد هدفمند در سازه های فضایی و صنایع خودروسازی به نظر می رسد که هرچه تغییر شکل ایجاد شده در ورق کم تر باشد، مطلوبیت آن بیشتر خواهد بود. افزایش سرعت اولیه ی ضربه زن تأثیر

## پانویس ها

1. isotropic
2. power-law exponent
3. rule of mixtures (ROM)

## منابع (References)

1. Gong, S.W. and Lam, K.Y. "Effects of structural damping and stiffness on impact response of layered structures", *AIAA J.*, **38**(9), pp. 1730-1735 (2000).
2. Jacquelin, E., Laine', J.-P., Bennani, A. and Massenzio, M. "A modelling of an impacted structure based on constraint modes", *Journal of Sound and Vibration*, **301**(3-5), pp. 789-802 (2007).
3. Pashah, S., Massenzio, M. and Jacquelin, E. "Prediction of structural response for low velocity impact", *International Journal of Impact Engineering*, **35**(2), pp. 119-132 (2008).
4. Anderson, T.A. "An investigation of SDOF models for large mass impact on sandwich composites", *Composites: Part B*, **36**(2), pp. 135-142 (2005).
5. Abrate, S., *Impact Engineering of Composite Structures*, CISM, Udine, Springer (2011).
6. Qiu, X.M. and Yu, T.X. "Some topics in recent advances and applications of structural impact dynamics", *Applied Mechanics Reviews*, **64**(3), Article No. 034001 (2011).
7. Nosier, A., Kapania, R.K. and Reddy, J.N. "Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory", *Computational Mechanics*, **13**, pp. 360-379 (1994).
8. Sun, D. and Luo, S.-N. "Wave propagation and transient response of a FGM plate under a point impact load based on higher-order shear deformation theory", *Composite Structures*, **93**, pp. 1474-1484 (2011).
9. Yigit, A.S. and Christoforou, A.P. "On the impact between a rigid sphere and a thin composite laminate supported by a rigid substrate", *Composite Structures*, **30**(2), pp. 169-177 (1995).
10. Christoforou, A.P. and Yigit, A.S. "Effect of flexibility on low velocity impact response", *Journal of Sound and Vibration*, **217**, pp. 563-578 (1998).
11. Yigit, A.S. and Christoforou, A.P. "Limits of asymptotic solutions in low-velocity impact of composite plates", *Composite Structures*, **81**, pp. 568-574 (2007).

12. Christoforou, A.P. and Yigit, A.S. "Scaling of low-velocity impact response in composite structures", *Composite Structures*, **91**, pp. 358-365 (2009).
13. Shariyat, M., Ghajar, R. and Alipour, M.M. "An analytical solution for a low velocity impact between a rigid sphere and a transversely isotropic strain-hardening plate supported by a rigid substrate", *Journal of Engineering Mathematics*, **75**, pp. 107-125 (2012).
14. Guan, Z. and Yang, C. "Low-velocity impact and damage process of composite laminates", *Journal of Composite Materials*, **36**, pp. 851-871 (2002).
15. Zheng, D. and Binienda, W.K. "Semianalytical solution of wave-controlled impact on composite laminates", *ASCE Journal of Aerospace Engineering*, **22**, pp. 318-323 (2009).
16. Olsson, R. "Analytical model for delamination growth during small mass impact on plates", *International Journal of Solids and Structures*, **47**, pp. 2884-2892 (2010).
17. Turner, J.R. "Contact on a transversely isotropic half-space, or between two transversely isotropic bodies", *International Journal of Solids Structures*, **16**(16), pp. 409-19 (1979).
18. Swanson, S.R. "Contact deformation and stress in orthotropic plates", *Composites: Part A*, **36**, pp. 1421-1429 (2005).
19. Wu, H.-Y.T. and Springer, G.S. "Impact induced stresses, strains and delaminations in composite plates", *Journal of Composite Materials*, **22**, pp. 533-560 (1988).
20. Christoforou, A.P. and Swanson, S.R. "Analysis of impact response in composite plates", *International Journal of Solids and Structures*, **27**, pp. 161-170 (1991).