

پایدارسازی راه رفتن ربات دوپای سه رابطی صفحه‌ی روی سطح شیب‌دار به روش پایداری مداری روی خمینه‌ی دینامیک صفر سیستم

سیده محمدرضا سیدنورانی (دانشجوی دکتری)

احمد قنبری* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

محمدعلی جعفری‌زاده (استاد)

گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک، دانشگاه تبریز

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۳)
دوری ۲ - ۳۰، شماره ۲/۲، ص. ۹۵-۸۳

در دهه‌ی گذشته تحلیلی راه رفتن ربات‌های دوپای با تکیه بر مفهوم دینامیک صفر در کنترل یک سیستم زیرفعال مرتبه‌ی یک، دیدگاهی نوین در ساخت و پایدارسازی گام‌های حرکتی ربات‌های دوپای فراهم آورده است. تکیه‌ی اصلی در این روش ساخت و ردگیری مسیرهای مرجع، تابعی از یک متغیر مختصاتی غیرفعال پیکره‌بندی با تغییراتی یکنوا در دوره‌ی تکمیل یک گام است. در این نوشتار ضمن تحلیل دینامیک تلفیقی راه رفتن دوپای، شامل دینامیک و هله‌ی آونگی و نگاشت رخداد برخورد، نحوه‌ی ساخت و پایدارسازی گام راه رفتن یک ربات دوپای سه رابطی صفحه‌ی با پای تماس نقطه‌ی در حرکت روی سطح شیب‌دار بررسی خواهد شد. در این رهیافت پایدارسازی گام راه رفتن به پایداری مداری سیستم روی خمینه‌ی دینامیک صفر آن تقلیل می‌یابد. برای تحقق این هدف، با پارامترسازی مسئله‌ی ساخت مسیرها توسط چندجمله‌ی‌های بزیپر، نگاشت بازگشتی پویانکاره متناظر با دینامیک صفر سیستم صریحاً استخراج و هم‌گرایی آن بررسی خواهد شد. در آخر نتایج شبیه‌سازی، هم‌گرایی به سمت گام پایدار را تأیید می‌کنند.

واژگان کلیدی: ربات دوپای صفحه‌ی، دینامیک صفر تلفیقی، پایداری مداری، نگاشت رخداد برخورد.

۱. مقدمه

علمی و مهندسی قرار داد. البته با وجود خاستگاه‌های همیشگی برای تقلیدی هرچند ابتدایی از الگوهای انسانی در طرح‌های مصنوعی، تحقق عینی این موضوع به سبب پیچیدگی‌های خلقت انسانی تا دهه‌های اخیر به تأخیر افتاده است.

در این میان، توسعه‌ی ربات‌های دوپای، علاوه بر انگیزه‌های تبلیغاتی، با اهدافی چون کاوش در مکان‌های پرخطر برای حضور انسان، ساخت ابزار توان‌بخشی برای ناتوانان حرکتی، و نیز مطالعه‌ی آناتومی و مشخصه‌های فیزیولوژیک ساختار ماهیچه - استخوانی انسان در علوم پزشکی و جانورشناسی، انجام می‌پذیرد. همچنین، طبیعت ناپایدار ایستادن و قدم برداشتن با دو پا و دینامیک پیچیده و دارای چندین درجه آزادی ساختار پاها، همراه با زیرفعال شدن (یعنی لولا شدن عضوی روی مفصلی فاقد محرکه) سازوکار در وهله‌هایی از حرکت، موضوع ربات دوپای را در حوزه‌ی مهندسی رباتیک پرچالش ساخته است. ساخت خط‌سیر مفاصل^۲ و هماهنگی جنبش اعضا، حفظ تعادل پیکره، پایداری گام، بازدهی و بهینه‌سازی مصرف انرژی و طبیعی کردن سیمای حرکت، درخصوص طراحی و کنترل ربات‌های دوپای از جمله موضوعاتی هستند که در دو دهه‌ی اخیر تلاش بسیاری از محققین بر آن متمرکز شده است.^[۱]

طبیعت همواره برای دانشمندان و مهندسين منشأ بسیاری از الهامات بدیع و خلاقانه بوده و موجب گره‌گشایی از مسائل مطرح گوناگون در زمینه‌های علمی و فنی شده است. نقش طبیعت به عنوان معلمی امین برای ارتقای کیفیت زندگی بشری به اندازه‌یی است که امروزه شاهد ظهور مباحثی تحت عنوان «زیست‌مهندسی»^۱ هستیم. این مبحث با دیدگاهی مبتنی بر الهام‌گیری از طبیعت زنده، شالوده‌ی دانشی نو در مهندسی را بنا کرده و براساس الگوبرداری از عالم جاندار به طراحی و خلق ابزارهای مصنوعی می‌پردازد.

با نظر به فرضیه‌ی تکامل، بی‌ربط نخواهد بود اگر ادعا کنیم که طبیعت جاندار به بهای بقای نوع خود همواره در تلاش برای بهینه‌سازی رفتارهای زیستی خود است؛ از این رو بسیاری از پدیده‌های رفتاری که در موجودات زنده و به‌ویژه جانوران مشاهده می‌شود می‌تواند الهام بخش طرح یک مسئله‌ی مهندسی باشد. در این میان می‌توان بدن انسان را به عنوان کامل‌ترین دستگاه زیست‌شناختی، کانون مطالعات

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۱۱/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۲/۲/۲۳، پذیرش ۱۳۹۲/۶/۴.

smrs.noorani@tabrizu.ac.ir
a-ghanbari@tabrizu.ac.ir
jafarizadeh@tabrizu.ac.ir

طبق تعریف ارائه شده توسط تاگا، حرکت را می‌توان یک دینامیک جاذب^۲ تلقی کرد که از برهم‌کنش پویا، میان اندام‌های حرکتی و محیط پیرامون حاصل می‌شود.^[۲] طبق این تعریف، در هر دستگاه حرکتی نظیر دو پای انسان، دو مؤلفه‌ی اساسی وجود دارد: ۱. تناوب در جابه‌جایی‌های اعضای دخیل در حرکت؛ ۲. تعامل با زمین و برخاستن نیروهای تکیه‌گاهی. با تکیه بر این اصول، راه رفتن یک دوپای رباتیکی نیز هنگامی محقق می‌شود که اولاً طی گام‌های متوالی و با کنترل پس‌خورد، حرکت رابط‌ها به‌طور پایدار روی مسیرهای تناوبی مطلوب دنبال شود. ثانیاً، نیروی واکنشی سطح شرایط لازم برای رانش پیکره به جلو را تأمین کند. در یک طبقه‌بندی کلی دو دیدگاه برای هدایت ربات‌های دوپا در ادبیات فن به چشم می‌خورد:

۱. هدایت به‌طور استاتیکی متعادل، روی مسیرهای مرجع از پیش طراحی شده که اغلب تحت عنوان «معیار نقطه‌ی لنگر صفر»^۴ معرفی می‌شوند.^[۲] در این دیدگاه مسیرها تابعی از زمان و به‌نحوی طراحی می‌شوند که سایه‌ی مرکز جرم پیکره از چند ضلعی تکیه‌گاهی — ناحیه‌یی محدب متشکل از تمام نقاط تماس پا با زمین — خارج نمی‌شود. جلوه‌ی راه رفتن به این سبک مصنوعی و متفاوت با ظاهر راه رفتن انسان است، چرا که انسان حین راه رفتن با متمایل کردن بدن به سمت جلو، در مرحله‌ی از حرکت مرکز جرم پیکره‌اش را به جلوتر از سطح تکیه‌گاهی پای ایستاده می‌اندازد و این‌گونه مرکز فشار نیروی واکنشی زمین را به‌طور مداوم از پاشنه تا پنجه جابه‌جا کرده و آنگاه پیکره را حول پنجه دوران می‌دهد.^[۲]

۲. هدایت ربات به‌طور دینامیکی متعادل، که در این موارد سیستم یا منفعل^۵ (فاقد محرکه) است یا زیرفعال^۶ (فاقد محرکه در نقطه‌ی تماس پا با زمین در وهله‌ی تاب‌خوردن روی پای ایستاده)، و در حرکت خود از انرژی گرانشی ناشی از وزن پیکره بهره می‌گیرد. پرواضح است که در این شکل راه رفتن نیروی وزن در وهله‌یی از حرکت، محرک بیشتر شده و بدین صورت انرژی لازم برای گام برداشتن نسبت به حالت راه رفتن تمام‌فعال کاهش می‌یابد. راه رفتن ربات‌های تماس نقطه‌یی (فاقد کف پا) تنها این‌گونه قابل اجراست. دیدگاه اساسی در هدایت ربات به این روش، ساخت مسیرهای تناوبی پایدار در فضای حالت سیستم است که با تنظیم شرایط اولیه‌ی حرکت یا متغیرهای فیزیکی دوپا، در سیستم‌های منفعل،^[۷] یا طراحی کنترل پس‌خورد برای سیستم‌های زیرفعال،^[۸-۱۵] محقق می‌شود.

در دهه‌ی گذشته گروهی از پژوهش‌گران، به تحلیل پایداری دوپا — با تکیه بر مفهوم دینامیک صفر^۷ یک سیستم حرکتی زیرفعال مرتبه‌ی یک — علاقه‌مند شده‌اند. از نخستین تلاش‌ها می‌توان به آثار گریزل و همکارانش (۲۰۰۱)، و سپس شاگردش، وسترولت (۲۰۰۳) اشاره کرد، که به ترتیب راه رفتن دوپای سه‌رابطی و پنج‌رابطی در حرکت روی سطح تخت، با پای تماس نقطه‌یی و برخورد آنی را مورد بررسی قرار داده‌اند.^[۹] ربات دوپای RABBIT حاصل این پژوهش‌ها بود که به سرپرستی چوالریو تحقق یافت.^[۱۰] تکیه اصلی در این آثار ساخت و ردگیری مسیرهای مرجع، تابعی از یک متغیر مختصاتی غیرفعال پیکره‌بندی با تغییراتی یکنوا در دوره‌ی تکمیل یک گام بود. چوالریو این روش را در اثری مجزا در سال ۲۰۰۴ مجدداً مطرح می‌کند.^[۱۱] پژوهش‌گران نامبرده در سال ۲۰۰۵ روش خود را برای پایدارسازی دویدن ربات مذکور به‌کار بردند. تفاوت اصلی بین دویدن و راه رفتن اضافه‌شدن وهله‌ی پرواز است، که سبب می‌شود معادلات حرکت دوپا دارای دو دینامیک تلفیقی — یکی در وهله‌ی ایستایش و دیگری در وهله‌ی پرواز — شود. همچنین کنترل دوپا در وهله‌ی پرواز هنگام حرکت بالستیک خود به‌سبب افزایش درجات زیرفعالی ربات پیچیده‌تر خواهد شد.^[۱۲] وسترولت و همکارانش (۲۰۰۷) از این روش برای تحلیل

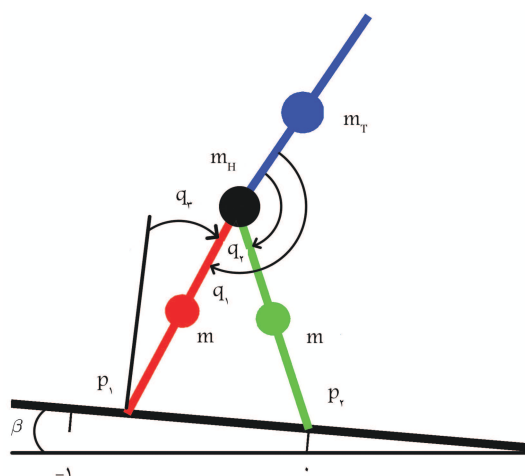
راه رفتن یک دوپای دورابطی (گام پرگاری) و بدون تنه در حرکت روی سطح شیب‌دار بهره گرفتند.^[۱۳] چوالریو و همکارانش (۲۰۰۹) در ادامه‌ی توسعه‌ی روش مذکور به راه رفتن یک ربات زیرفعال با حرکت‌های خارج صفحه‌یی مفصل ران پرداختند. مدل ربات مشابه قبل دارای پیچ رابط بود که تنها تفاوت آن اضافه‌شدن درجه‌ی آزادی برای حرکت خارج صفحه‌ی مفصل ران و نیز اضافه‌شدن همین درجه‌ی آزادی برای مفصل فرضی در نقطه‌ی تماس پای ایستاده با زمین بود.^[۱۴] همچنین در سال ۲۰۱۱ از همین روش برای پایدارسازی مدل راه رفتن ربات RABBIT با وهله‌ی دوتکیه‌گاهی غیرآنی در حرکت روی سطح تخت استفاده شد.^[۱۵]

منچستر و همکارانش در سال ۲۰۱۱ یک ربات دوپای پرگاری با زانوهای کشویی برای عبور روی بستری ناهموار را مورد مطالعه قرار دادند. آنها نیز به تولید خط‌سیرهای پایدار اما غیرتناوبی با تحلیلی نو در پایدارسازی مداری دوپاها به‌نام مقطع پوانکاره‌ی متحرک پرداختند.^[۱۶]

ناروکاوا و همکارانش (۲۰۰۷) به پایدارسازی یک ربات زیرفعال صفحه‌یی سه‌رابطی برای راه رفتن روی بستر شیب‌دار پرداختند. آنها پس از مدل‌سازی وهله‌ی آونگی و رخداد برخورد، یک کنترل‌کننده‌ی پس‌خورد ساده‌ی تناسبی — مشتقی برای تحریک محرکه‌های ران طراحی کردند که ضرایب بهره‌ی آن براساس ساده‌سازی‌های خطی حول زاویه‌ی دوران‌های صفر محاسبه شد. سپس برای تحلیل پایداری از روش نگاشت بازگشتی پوانکاره استفاده شد که در آن نقطه‌ی ثابت به‌صورت عددی و به‌روش نیوتن — رافسون جست‌وجو شده و در صورت وجود جواب با خطی‌سازی و محاسبه‌ی ماتریس ژاکوبین پایداری آن معین شده است. روش به‌کار گرفته شده در این پژوهش مبتنی بر محاسبات عددی تکراری است و تحلیل بسته‌یی از شرایط پایداری راه رفتن دوپا روی سطح شیب‌دار ارائه نشده است.^[۱۷]

ماشیل و همکارانش (۲۰۱۱) نیز مدل دوپای سه‌رابطی صفحه‌یی برای راه رفتن روی سطح تخت را، که قبلاً توسط گریزل^[۸] و ناروکاوا^[۱۷] مورد مطالعه قرار گرفته بود، برای تولید مسیرهای مفصلی بهینه که نیاز به کم‌ترین گشتاور کنترلی داشته باشند انتخاب کردند و با استفاده از الگوریتم ژنتیک جواب مطلوب را در یازده بازتولید به‌دست آوردند.^[۱۸]

در این نوشتار قصد داریم در ادامه‌ی این مجموعه پژوهش‌ها، ساخت و پایدارسازی گام راه رفتن برای یک مدل دوپای سه‌رابطی با پای تماس نقطه‌یی (شکل ۱) را، با فرض رخداد برخورد آنی^۸، در حرکت روی سطح شیب‌دار مورد بررسی قرار دهیم.



شکل ۱. مدل دوپای سه‌رابطی صفحه‌یی روی سطح شیب‌دار.

است. همچنین $E' = \frac{\partial(q_1, q_2)}{\partial q}$ و بیانگر تأثیر تغییرات زوایای نسبی فعال روی مختصه‌های تعمیم‌یافته‌ی انتخابی است. واضح است که در اینجا دو زاویه‌ی نسبی فعال وجود دارد که به همراه زاویه‌ی مطلق $q_N = q_3$ که مختصه‌ی غیرفعال است، مختصات تعمیم‌یافته‌ی مجموعه را تشکیل می‌دهد. بنابراین در اینجا E عبارت است از $E = \begin{bmatrix} 1 \times 2 & 0 \times 1 \\ 0 \times 2 & 1 \times 1 \end{bmatrix}'$ که در آن ماتریس همانی از مرتبه‌ی n است.

برای شبیه‌سازی و حل معادلات حرکت، آنها را در قالب معادلات حالت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ -M^{-1}(q)[C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}(q)E \end{bmatrix} u \quad (2)$$

$$\equiv f(x) + g(x)u$$

که در آن $x = [q; \dot{q}] \in TQ$ متغیرهای حالت سیستم تعریف شده‌اند. همچنین توجه کنیم که $g(x)$ مستقل از $\dot{q}$ است. بدیهی است که هر پیکره‌بندی متعلق به حوزه‌ی تعریف متغیرهای حالت از نظر فیزیکی موجه نیست و باید حل معادلات حرکت همراه با شرایط قابل قبول مسئله انجام گیرد. در این راستا باید پیکره‌بندی حاصله با شرایط تکیه‌گاهی مدل سازگار باشد و انتظار داریم نیروی واکنش سطح وارده بر انتهای پای ایستاده، داخل مخروط اصطکاک ایستایی قرار گیرد و سوی آن نیز رو به بالا (مثبت) باشد. چنین قیدهایی در حل مسئله را می‌توان در قالب قیدهای یک‌طرفه تعریف کرد. بدین ترتیب با تعریف یک تابع مقداری از متغیرهای حالت -- مانند $\lambda: TQ \rightarrow \mathbb{R}$ -- پاسخی چون x را برای پیکره‌بندی ربات معتبر در نظر می‌گیریم اگر و تنها اگر در شرط یک‌طرفه‌ی $\lambda(x) \geq 0$ صدق کند.

۲.۲. مدل رخدادهای برخورد و محاسبه‌ی نیروی واکنش سطح

طبق فرض دوم، برخورد پای آونگی با زمین به صورت آبی لحاظ شده و به این دلیل نیروی واکنش سطح روی پای فرود آمده به شکل ضربه مدل می‌شود. به علاوه فرض می‌شود با فرود پای آونگی، بی‌درنگ پای ایستاده (سابق) از زمین جدا شود. لذا برای داشتن یک برخورد صحیح، تحقق دو شرط الزامی است:

۱. برای عدم لغزش پا در لحظه‌ی برخورد، نیروی واکنش سطح در انتهای پای فرود آمده باید داخل مخروط اصطکاک ایستایی بیفتد و به علاوه سوی آن رو به بالا (مثبت) باشد.

۲. سوی بردار سرعت در نقطه‌ی انتهایی پای ایستاده (سابق)، بلافاصله پس از برخورد، رو به بالا باشد.

برای محاسبه‌ی نیروی واکنش سطح در حین راه رفتن باید از مختصات تعمیم‌یافته -- شامل متغیرهای پیکره‌بندی و جابه‌جایی ربات -- استفاده کنیم. از این رو مختصات تعمیم‌یافته‌ی افزوده‌ی چون $q_e = [q; p_e]$ را تعریف می‌کنیم که در آن q متغیرهای پیکره‌بندی و $p_e = (x_e; y_e)$ مختصات مکانی یک نقطه‌ی ثابت از مجموعه یا مرکز جرم آن است. براین اساس معادله‌ی حرکت برحسب مختصات تعمیم‌یافته‌ی افزوده استخراج خواهد شد:

$$M_e(q_e)\ddot{q}_e + C_e(q_e, \dot{q}_e)\dot{q}_e + G_e(q_e) = E_e u + [J(p_s)]' F \quad (3)$$

جمله‌ی آخر مربوط به نیروی واکنش سطح بوده و سبب تکیه‌ی صحیح پای ایستاده روی زمین می‌شود. به علاوه $p_s = p_s(q_e)$ مختصات مکانی نقطه‌ی انتهای پای

ادامه‌ی این مقاله در ۵ بخش تنظیم می‌شود. در بخش دوم مدل دینامیکی کامل دوبا -- شامل وهله‌ی آونگی و رخداد برخورد -- استخراج می‌شود. سپس در بخش سوم دینامیک صفر و پایداری دوبا روی خمینه‌ی دینامیک صفر برای مدل تلفیقی عنوان خواهد شد. در بخش چهارم نحوه‌ی ساخت مسیرهای مرجع به منظور دست‌یابی به الگوی مطلوب راه رفتن و پارامترسازی^۹ مسئله‌ی پایداری با استفاده از چندجمله‌ی‌های بزییر^{۱۰} مطرح می‌شود. فصل پنجم به بحث پیرامون نتایج شبیه‌سازی اختصاص یافته، و در آخر نیز جمع‌بندی مطالب مذکور بیان می‌شود.

۲. مدل‌سازی و بیان معادلات حرکت

یک ربات دوپای سه‌رابطی را در نظر بگیرید (شکل ۱). این مدل از دو رابط یکسان برای پاها و یک رابط تته تشکیل شده که در صفحه‌ی قائم در نقطه‌ی مشترک، متناظر با مفصل لگن، به هم متصل‌اند. در مدل ارائه‌شده نبود رابط کف پا -- و در نتیجه نبود مفصل فوزک -- از یک سو، و یک تکه گرفتن پا و بالطبع حذف شدن مفصل زانو از سوی دیگر منجر به بروز شرایطی خاص در راه رفتن ربات می‌شود که این شرایط در قالب فرضیات زیر عنوان می‌شود.

فرض اول: پای تکیه‌گاهی دارای تماس نقطه‌یی با زمین است و نقطه‌ی تماس به شکل یک لولای ثابت غیرفعال بین پای ایستاده و زمین فرض می‌شود. بدین صورت نبود مفصل فوزک از دیدگاه کنترلی منجر به زیرفعال شدن مجموعه خواهد شد. این بدان معناست که تعداد درجات آزادی مجموعه بیشتر از تعداد محرکه‌های کنترل‌کننده‌ی آن است. در اینجا مختصه‌های تعمیم‌یافته برای توصیف پیکره‌بندی مجموعه $q = [q_1; q_2; q_3] \in Q$ و نیز گشتاور محرکه‌ها روی مفاصل لگن $u = [u_1; u_2]$ لحاظ شده‌اند.

فرض دوم: وهله‌ی دوتکیه‌گاهی آبی در نظر گرفته می‌شود بدین معنا که هنگام فرود پای آونگی، تعویض نقش تکیه‌گاهی و آونگی بین پاها به صورت آبی انجام گیرد. بنابراین رخداد برخورد به صورت آبی، و نیز بدون جهش و لغزش پای فرود آمده فرض می‌شود.

فرض سوم: به علت فقدان مفصل زانو، در بخشی از وهله‌ی آونگی پا روی زمین سائیده می‌شود که از آن چشم‌پوشی می‌کنیم.

برخلاف بیشتر کارهای انجام شده در ارتباط با پایداری ربات‌های دوپای غیرمنفعل، در این پژوهش مسیر حرکت روی زمین شیب‌دار در نظر گرفته شده است. در ادامه با ملاحظه‌ی روند مشابه در حرکت پاها، و به منظور بررسی شرایط صحیح ایستایش و برخورد، به استخراج معادلات حرکت در وهله‌ی آونگی و نگاشت گذار در رخداد برخورد و نیز محاسبه‌ی نیروی واکنش سطح (تکیه‌گاهی) می‌پردازیم.

۱.۲. مدل وهله‌ی آونگی

طبق فرض اول، در وهله‌ی آونگی انتهای پای تکیه‌گاهی روی زمین بی‌حرکت و به شکل لولا در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برپایه‌ی مختصات تعمیم‌یافته‌ی انتخابی معادلات حرکت به روش لاگرانژی استخراج می‌شود:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = E u \quad (1)$$

$M(q)$ ماتریس اثرات لختی موسوم به ماتریس جرم، $C(q, \dot{q})$ ماتریس اثرات شتاب‌های جانب‌مرکزی و کوریولیس، و $G(q)$ بردار حاوی اثرات نیروی گرانش

تا با روی زمین لولا شود. پس بلافاصله پس از برخورد خواهیم داشت:

$$\dot{p}_r = J(p_r) \dot{q}_e^+ = \frac{\partial p_r(q_e^-)}{\partial q_e^-} \dot{q}_e^+ = 0 \quad (8)$$

از ترکیب دو معادله ی ۷ و ۸ نیز خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} M_e(q_e^+) & -[J(p_r)]' \\ J(p_r) & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_e^+ \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_e(q_e^-) \dot{q}_e^- \\ 0_{2 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

دروهمه ی آونگی، مختصه ی جابه جایی افزوده p_e را می توان تابعی برحسب متغیرهای پیکره بندی q با ضابطه ی $p_e = P_e(q)$ تلقی کرد. آنگاه معادله ی نهایی برحسب متغیرهای حالت پیش از برخورد عبارت خواهد بود از:

$$\begin{bmatrix} M_e & -[J(p_r)]' \\ J(p_r) & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_e^+ \\ F_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_e \begin{bmatrix} 1_{N \times N} \\ \frac{\partial P_e}{\partial q} \end{bmatrix} \\ 0_{2 \times N} \end{Bmatrix} \dot{q}^- \quad (10)$$

اگر پاسخ مورد انتظار از معادله ی ۱۰ عبارت باشد از:

$$[\dot{q}_e^+, F_r]' = [\bar{\Delta}_{\dot{q}}, \Delta_{F_r}]' \dot{q}^- \quad (11)$$

آنگاه نگاشت های $\Delta(\cdot)$ معرف نحوه ی گذر از لحظه ی پیش از برخورد به لحظه ی پس از برخورد هستند و عبارت اند از:

$$\Delta_{F_r} = -[J(p_r) [M_e(q_e^-)]^{-1} J'(p_r)]^{-1} J(p_r) \begin{bmatrix} 1_{N \times N} \\ \frac{\partial P_e}{\partial q} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{\Delta}_{\dot{q}} = [M_e(q_e^-)]^{-1} J'(p_r) \Delta_{F_r} + \begin{bmatrix} 1_{N \times N} \\ \frac{\partial P_e}{\partial q} \end{bmatrix} \quad (12)$$

به سبب تناوبی که از همسانی گام ها در حرکت پدید می آید، مرسوم است پیش از ضربه چارچوب لخت متصل به انتهای پای ایستاده و پس از برخورد متصل به انتهای پای فرود آمده (که در نقش پای ایستاده ی جدید است) منظور شود. از این رو پس از هر برخورد، نام متغیرهای حالت در چارچوب لخت جدید که متصل به پای فرود آمده خواهد بود، به روز می شود. تعویض نام ها به واسطه ی ضرب یک ماتریس چرخه یی بر بردار متغیرهای گام قبلی صورت می گیرد. اگر ماتریس تعویض نام را با R نشان دهیم، آنگاه $RR = 1$. همچنین شرایط آغازین گام بعدی با متغیرهای تعویض نام شده عبارت خواهد بود از:

$$x^+ = \begin{Bmatrix} q^+ \\ \dot{q}^+ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_q q^- \\ \Delta_{\dot{q}} \dot{q}^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R q^- \\ [R \circ_{N \times 2} \bar{\Delta}_{\dot{q}}] \dot{q}^- \end{Bmatrix} \equiv \Delta(x^-) \quad (13)$$

که در آن نگاشت Δ معرف نحوه ی کامل گذر متغیرهای حالت از لحظه ی پیش از برخورد به لحظه ی پس از برخورد است. لازم است مجدداً بر این نکته تأکید شود که اعتبار مدل فوق برای دست یابی به شرایط برخورد صحیح باید در شبیه سازی هر برخورد بررسی شود. از این رو برخورد هنگامی صحیح صورت خواهد گرفت که شرایط بیان شده در ابتدای این بخش برآورده شود؛ نقض هریک از آن شرایط به معنی مردود شدن راه رفتن است.

ایستاده یا فرود آمده است و $J(p_s) = \frac{\partial}{\partial q_e} [p_s(q_e)]$ نیز ژاکوبین آن برحسب مختصات تعمیم یافته ی افزوده است. اگر p_1 و p_2 را به ترتیب مختصات مکان نقاط انتهایی پای ایستاده و آونگی در نظر بگیریم، آنگاه تا پیش از رخداد برخورد $p_s = p_1$ و درست در لحظه ی برخورد $p_s = p_2$ خواهد بود. همچنین F_1 با تغییراتی پیوسته متناظر با نیروی تکیه گاهی وارد بر p_1 در وهله ی آونگی، و نیز δF_2 نیروی ضربه یی وارد بر p_2 برای رخداد برخورد، در نظر گرفته می شود.

$p_e = p_1$ یک انتخاب مناسب برای مختصه ی جابه جایی در مختصات تعمیم یافته ی افزوده است. در این صورت هنگام محاسبه ی نیروی تکیه گاهی F_1 در وهله ی آونگی که در آنجا $p_s = p_1$ منظور می شود، خواهیم داشت:

$$J(p_1) = \frac{\partial p_1(q_e)}{\partial q_e} = \frac{\partial p_1}{\partial (q; p_1)} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times N} & 1_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

آنگاه می توان معادلات حرکت ۳ را چنین تفکیک کرد:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{p}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p}_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_e u \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_1 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که در آن با فرض لولاشدن پای ایستاده روی سطح تکیه گاهی، $\dot{p}_1 = 0$ لحاظ شده است. با حذف $\ddot{p}_1$ بین دو معادله می توان بردار F_1 را برحسب متغیرهای پیکره بندی و گشتاور محرکه ها محاسبه کرد:

$$F_1 = H^{\dagger} [(H M_{21} - M_{11}) \ddot{q} + (H C_{21} - C_{11}) \dot{q} + (H G_2 - G_1) + B u] \quad (6)$$

که در آن $H^{\dagger} = (H' H)^{-1} H'$ و $H = M_{12} M_{22}^{-1}$.

در رخداد برخورد با فرود پای آونگی و ضربه ی آنی آن بر زمین، پای ایستاده (سابق) هم زمان از زمین بلند می شود و بدین ترتیب نقش پاها عوض می شود. از آنجا که نشست پای آونگی بر زمین به صورت یک برخورد غیرکشسان با اتلاف انرژی جنبشی مجموعه همراه است، انتظار می رود متغیرهای حالت سرعت دستخوش ناپیوستگی شود، و این در حالی است که متغیرهای حالت پیکره بندی پیوسته می مانند. اعمال ضربه آنی فرض می شود و با نادیده گرفتن اثر نیروهای غیرضربه یی در بازه ی بی نهایت کوچک اعمال ضربه، می توانیم بگوئیم تنها نیروی خارجی وارد بر مجموعه در گذر برخورد همان نیروی ضربه است. بنابراین طبق قانون بقای تکانه ی زاویه یی، باید تغییرات تکانه ی زاویه یی مجموعه حول نقطه ی p_2 (انتهای پای فرود آمده) برابر با شدت ضربه یی وارد شده باشد. لذا با انتگرال گیری از رابطه ی ۳ روی بازه ی اعمال ضربه و صرف نظر از نیروهای غیرضربه یی داریم:

$$M_e(q_e^+) \dot{q}_e^+ - M_e(q_e^-) \dot{q}_e^- = [J(p_r)]' F_r \quad (7)$$

در اینجا متغیرهای دارای بالانویس - و + به ترتیب بیان گر مقدار متغیر بلافاصله پیش و پس از ضربه اند و داریم $F_r = \int_{t^-}^{t^+} \delta F_r(\tau) d\tau$. به علاوه چنان که بیان شد متغیرهای حالت پیکره بندی در گذر برخورد پیوسته می مانند؛ پس: $q_e^+ = q_e^-$. از تساوی فوق (معادله ی ۷) تعداد $N + 2$ معادله تشکیل خواهد شد که در آن ها $N + 4$ مجهول شامل $[F_r]_{2 \times 1}$ و $[\dot{q}^+]_{(N+2) \times 1}$ ظاهر می شود. علاوه بر معادله ی ۷، فرض عدم لغزش و جهش انتهای پای آونگی پس از فرود بر زمین اقتضا می کند

۳.۲. مدل دینامیک تلفیقی

در دو بخش قبلی مدل‌های دینامیک آونگی (در قالب یک معادله‌ی دیفرانسیل با تحول پیوسته) و گذر برخورد (در قالب یک نگاشت گسسته) برای تکمیل یک گام حین راه رفتن به‌طور جداگانه استخراج شدند. راه رفتن از به چرخه درآمدن گام‌ها حاصل خواهد شد. هر گام عبارت است از حل معادله‌ی حرکت و هله‌ی آونگی که در آن حالت اولیه‌ی پاها از یک پیکره‌بندی دوتکیه‌گاهی آغاز شده و به پیکره‌بندی دوتکیه‌گاهی بعدی ختم می‌شود. بنابراین در یک چرخه‌ی تکراری، معادله‌ی حرکت پای آونگی پس از تکمیل هر گام، با شرایط اولیه‌ی جدیدی که از نگاشت برخورد محاسبه می‌شود، برای پای مقابل حل خواهد شد. مدل تلفیقی عبارت است از:

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u & x^- \notin S \\ x^+ = \Delta(x^-) & x^- \in S \end{cases} \quad (14)$$

در اینجا S زیرمجموعه‌ی گنجیده در فضای پیکره‌بندی Q است که سطح تکیه‌گاهی (زمین) را درون فضای Q توصیف می‌کند؛ از این رو آن را «ابریصفه‌ی تقاطع» نیز می‌گوییم، زیرا روی آن شرایط برخورد انتهایی پای آونگی بر سطح تکیه‌گاهی برقرار می‌شود. ابعاد این ابریصفه، یکی کم‌تر از ابعاد فضای پیکره‌بندی (یا کلاف مماسی‌اش) خواهد بود و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S = \{(q, \dot{q}) \in TQ | p_v^*(q) = 0, p_h^*(q) > 0\} \quad (15)$$

۳.۳. پایدارسازی حرکت روی دینامیک صفر سیستم

در بخش قبل معادلات حرکت و نگاشت گذر در هر گام استنتاج شد. اینک در این بخش قصد داریم یک ورودی کنترلی چنان محاسبه کنیم که به‌ازای آن، معادلات دینامیک تلفیقی سیستم یک الگوی راه رفتن قابل قبول ارائه دهند. یکی از سراسرترین روش‌ها در تحقق چنین خواسته‌ی، روش «گشتاور محاسبه‌شده» یا همان محاسبه‌ی «دینامیک معکوس» است. در این روش به تعداد ورودی‌های سیستم، خروجی‌هایی وابسته به متغیرهای حالت تعریف می‌شود که با طراحی یک کنترل‌کننده‌ی پسخورد حالت سعی می‌شود خروجی‌ها به‌طور مجانبی به صفر برده شوند. بدین روش الگوی هندسی مطلوب برای پیکره‌بندی ربات حین حرکت در قالب مجموعه‌ی خروجی‌ها رمزینه می‌شود به‌طوری که صفرشدن مجانبی خروجی‌ها معادل است با دسترسی به الگوی مطلوب. در اینجا خروجی در قالب قیده‌های هولونومیک مجازی روی متغیرهای پیکره‌بندی سیستم تعریف می‌شود که باید به‌واسطه‌ی پسخوردگیری از حالت‌ها و اعمال ورودی کنترلی مناسب -- و نه به‌سبب قیدوبندی واقعی در سازوکار مکانیکی سیستم -- حفظ شود. اگر $\chi_0(q)$ رابطه‌ی قیدی باشد که می‌خواهیم بین متغیرهای پیکره‌بندی سیستم حفظ شود و $\chi_d \circ \theta(q)$ مقدار مطلوب این تابع را در هر لحظه و برحسب موقعیت یک متغیر هندسی غیرفعال از پیکره‌بندی ربات تعیین کند، به‌شرط آن که $\theta(q)$ در سیر حرکت در وهله‌ی آونگی دارای تغییراتی یکنوا باشد، آنگاه تابع خروجی که انتظار داریم در طول حرکت به‌طور مجانبی به صفر میل کند در قالب معادله‌ی ۱۶ تعریف می‌شود:

$$y = \chi(q) := \chi_0(q) - \chi_d \circ \theta(q) \quad (16)$$

شایان ذکر است که مطابق روش فوق، تحول سیستم به جای آن که در امتداد زمان دنبال شود در امتداد متغیری تناوبی از پیکره‌بندی دنبال می‌شود که به‌مانند زمان

دارای سیری یکنوا در نمو دوره‌ی خود است. بدین ترتیب بررسی پایداری سیستم به‌طور صریح برحسب زمان انجام نمی‌گیرد بلکه بر مبنای «پایداری مداری» (بسته) روی صفحه‌ی فاز سیستم بررسی می‌شود.

۱.۳. استخراج دینامیک صفر تلفیقی

با توجه به توضیحات بیان شده، در انتخاب تابع خروجی $y = \chi(q)$ فرض می‌کنیم: [۱۸]

$$1. \chi \text{ تنها تابعی از مختصه‌های پیکره‌بندی سیستم است} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \dot{q}} = 0 \right).$$

۲. زیرمجموعه‌ی بازی از دامنه‌ی مختصات تعمیم‌یافته -- مانند $Q \subset \bar{Q}$ -- وجود دارد به‌نحوی که به‌ازای هر نقطه $q \in \bar{Q}$ ، ماتریس تفکیک $L_f L_g \chi(q)u$ مربعی و معکوس پذیر باشد.

۳. تابع همواره حقیقی مقداری چون $\theta(q) = \theta$ موجود است که:

$$[\chi(q), \theta(q)] : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}^N$$

نگاشتی یک‌به‌یک به داخل تصویرش باشد.

۴. دست‌کم یک نقطه نظیر $q_0 \in \bar{Q}$ موجود است که به‌ازای آن χ صفر می‌شود.

۵. نقطه‌ی یگانه چون $q^* \in \bar{Q}$ وجود دارد به‌طوری که $[0; 0] = [\chi(q^*); p_v^*(q^*)]$ و $p_h^*(q^*) > 0$ و به‌علاوه مرتبه‌ی بردار $[L_g \chi(q); p_v^*(q)]|_{q^*}$ کامل باشد. این شرط متضمن عدم لغزش پا هنگام فرود بر زمین است. به دیگر سخن، این شرط بیان می‌کند که معادله‌ی تقاطع پا با سطح زمین دارای ریشه‌های مجزا خواهد بود.

تحت فرضیات فوق زیرمجموعه‌ی هموار و دوبعدی از کلاف مماسی Q مانند Z وجود دارد که روی آن، تابع خروجی (χ) و مشتق آن $(\dot{\chi})$ صفر می‌مانند؛ یعنی:

$$Z = \{x \in TQ | \chi(x) = 0, L_f \chi(x) = 0\} \quad (17)$$

که با توجه به معادله‌ی ۲، $\dot{\chi}$ چنین محاسبه شده است:

$$\dot{\chi} = \frac{\partial \chi}{\partial x} \dot{x} = \left[\frac{\partial \chi}{\partial q} \quad \frac{\partial \chi}{\partial \dot{q}} \right] [f(x) + g(x)u] = L_f \chi \quad (18)$$

به‌علاوه، کنترل پسخورد:

$$u^* = -(L_g L_f \chi(x))^{-1} (L_f^* \chi(x)) \quad (19)$$

Z را تحت دینامیک و هله‌ی آونگی ناوردا درمی‌آورد:

$$\forall z \in Z : f_{zero}(z) \equiv f(z) + g(z)u^* \in T_z Z \quad (20)$$

طبق تعریف، Z را «خمینه‌ی دینامیک صفر» و $\dot{z} = f_{zero}(z)$ را دینامیک صفر سیستم می‌نامیم.

برای بیان دینامیک صفر سیستم در وهله‌ی آونگی حرکت، تبدیل مختصات $\Phi(q) = [\chi(q); \theta]$ را تعریف می‌کنیم که تحت آن مختصه‌های تعمیم‌یافته‌ی سیستم را از فضای پیکره‌بندی Q به فضای متغیرهای خروجی و متغیر غیرفعال سیستم می‌نگاریم. آنگاه تبدیلات ۲۱ در فضای TQ معتبر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \chi(q), & \eta_2 &= (L_f \chi)(q, \dot{q}) \\ \xi_1 &= \theta(q), & \xi_2 &= (L_f \theta)(q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (21)$$

در نتیجه معادلات حرکت سیستم در فضای حالت جدید تبدیل خواهد شد به:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= (L_f^T \chi)(q, \dot{q}) + [(L_g L_f \chi)(q, \dot{q})] u \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, & \dot{\xi}_2 &= (L_f^T \theta)(q, \dot{q}) + [(L_g L_f \theta)(q, \dot{q})] u \\ y &= \eta_1\end{aligned}\quad (22)$$

که در آن باید مقادیر $(q, \dot{q})$ را تحت معکوس تبدیل بیان شده با معادله ۲۱ محاسبه و جایگذاری کرد:

$$q = \Phi^{-1}(\eta_1, \xi_1), \quad \dot{q} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

صفر شدن خروجی $(y = 0)$ که منجر به برقراری قیود -- یعنی $\eta_2 = 0$ -- خواهد شد، به واسطه ای اعمال ورودی پسخورد u^* داده شده در معادله ۱۹ است. آنگاه تحول $\theta(q)$ نیز تحت دینامیک صفر سیستم انجام می گیرد:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= (L_f^T \theta)(q, \dot{q}) + [(L_g L_f \theta)(q, \dot{q})] u^*\end{aligned}\quad (24)$$

این شکل معادله برای دینامیک صفر، اگرچه از مرتبه ای دو است ولی به دلیل آنکه در یافتن ورودی u^* نیاز به محاسبه ای معکوس ماتریس تفکیک است، حل آن دشوار خواهد بود. برای اجتناب از این مسئله می توان ثابت کرد در همسایگی هر نقطه که ماتریس تفکیک حول آن معکوس پذیر باشد، تابعی عددی و هموار مانند $\gamma(q, \dot{q})$ وجود دارد به طوری که $L_g \gamma(q, \dot{q}) = 0$ و:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \chi(q), & \eta_2 &= (L_f \chi)(q, \dot{q}) \\ \xi_1 &= \theta(q), & \xi_2 &= \gamma(q, \dot{q})\end{aligned}\quad (25)$$

تبدیل مختصات معتبر برای تعریف دینامیک صفر است.^[۱۹] به علاوه می توان نشان داد که تابع $\gamma(q, \dot{q})$ معرف تکانه ای زاویه ای مجموعه حول مفصل غیرفعال (انتهای پای تکیه گاهی) بوده و بنابراین به جاست آن را بر حسب سطر آخر ماتریس جرم (مطابق با مختصه های انتخاب شده در اینجا) منظور داشت:

$$\xi_2 = \gamma(q, \dot{q}) = [M(q)]_N \dot{q} \equiv \gamma_0(q) \dot{q} \quad (26)$$

با این ملاحظات، تبدیل مختصات بیان شده در سراسر TQ معتبر بوده و معادلات حالت سیستم در فضای جدید خواهند بود:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_1 &= \eta_2, & \dot{\eta}_2 &= (L_f^T \chi)(q, \dot{q}) + [(L_g L_f \chi)(q, \dot{q})] u \\ \dot{\xi}_1 &= (L_f \theta)(q, \dot{q}), & \dot{\xi}_2 &= (L_f \gamma)(q, \dot{q})\end{aligned}\quad (27)$$

مقادیر $(q, \dot{q})$ از رابطه ی ساده شده ی ۲۸ محاسبه می شوند:

$$q = \Phi^{-1}(\eta_1, \xi_1), \quad \dot{q} = \left[\frac{\partial \chi}{\partial q} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \eta_2 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

آنگاه دینامیک صفر وهله ی آونگی که انتظار می رود روی خمینه ی دینامیک صفر Z نمو کند، عبارت خواهد شد از:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= (L_f \theta)(q, \dot{q}) \equiv \mu_1(\xi_1) \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= (L_f \gamma)(q, \dot{q}) \equiv \mu_2(\xi_1)\end{aligned}\quad (29)$$

در این شرایط مقادیر $(q, \dot{q})$ از رابطه ی ۲۸ و به ازای $\eta_1 = \eta_2 = 0$ محاسبه خواهد شد. با عبارتی که در مورد متغیرهای دینامیک صفر عنوان شد، کمیت های تعریف شده در معادلات فوق، روی خمینه ی دینامیک صفر، طبق روابط ۳۰ استخراج می شود (منطبق بر مختصه های تعمیم یافته ی منتخب در اینجا):

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \theta|_Z = q_N \\ \xi_2 &= \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_N} \Big|_Z \equiv \gamma(q, \dot{q}) \equiv \gamma_0(q) \dot{q} \\ \mu_1(\xi_1) &= \frac{\frac{\partial \theta}{\partial q} \cdot \left[\frac{\partial \chi}{\partial q} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \times N & N \times N & N \times 1 \end{pmatrix} \Big|_Z} \\ \mu_2(\xi_1) &= -\frac{\partial V}{\partial q_N} \Big|_Z\end{aligned}\quad (30)$$

که در آن $K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}' M(q) \dot{q}$ انرژی جنبشی و $V(q)$ انرژی پتانسیل مجموعه اند.

«معادلات دینامیک صفر در واقع توصیف گر قانون تعادل تکانه ای زاویه ای مجموعه است که بیان می دارد نرخ تغییرات تکانه ای زاویه ای ربات حین دوران در وهله ی آونگی حول مفصل غیرفعال متکی به زمین (ξ_2) برابر است با برآیند گشتاورهای خارجی اعمال شده بر مجموعه (که در اینجا تنها گشتاور نیروی وزن مجموعه است).» این تعبیر را می توانستیم مستقیماً از لاگرانژین مجموعه به ازای مختصه ی تعمیم یافته ی غیر فعال (در اینجا q_N) استخراج کنیم. در این رهیافت باید به این نکته توجه داشت که q_N مختصه ی دوره یی است به این مفهوم که انرژی جنبشی مجموعه مستقل از q_N است، چرا که q_N زاویه ی مطلق است که موقعیت پیکره ی مجموعه را با چارچوب لخت می سنجد و انرژی جنبشی همواره مستقل از چارچوب لخت انتخابی است. بنابراین $\partial K / \partial q_N = 0$ آنگاه:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_N} \right) + \frac{\partial K}{\partial q_N} + \frac{\partial V}{\partial q_N} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_N} \right) &= \frac{d}{dt} ([M(q)]_N \dot{q}) \\ &= \frac{d}{dt} (\gamma_0(q) \dot{q}) = \dot{\xi}_2 = -\frac{\partial V}{\partial q_N}\end{aligned}\quad (31)$$

اکنون باید بین دینامیک صفر سیستم در وهله ی آونگی و مدل گذر در رخداد برخورد پیوندی ایجاد کنیم تا مدلی کامل از دینامیک دوپا در یک گام به دست آید. انتظار داریم هنگام تلاقی مسیری روی خمینه ی دینامیک صفر دوپا با ابرصفحه ی توصیف گر سطح تکیه گاهی، نقطه ی اشتراک پدید آمده تحت نگاشت گذر همچنان متعلق به خمینه ی دینامیک صفر دوپا باقی بماند؛ یعنی به ازای $x^- \in (S \cap Z)$ داشته باشیم $x^+ = \Delta(x^-) \in \Delta(S \cap Z) \subset Z$. بدین گونه درگام بعدی راه رفتن نیز شرایط اولیه ی دینامیک آونگی مجدداً روی خمینه ی دینامیک صفر قرار می گیرد و روی آن دنبال می شود. از این رو تحول سیستم همواره روی خمینه ی دینامیک صفر دنبال شده و در این شرایط دینامیک صفر تلفیقی سیستم تعریف می شود:

$$\Sigma_{zero} : \begin{cases} \dot{z} = f_{zero}(z) & z^- \notin S \cap Z \\ z^+ = \Delta(z^-) & z^- \in S \cap Z \end{cases} \quad (32)$$

آنگاه:

$$\begin{aligned} S \cap Z &= \{(\xi_1^-, \xi_2^-) | \xi_1^- = \theta^-, \xi_2^- \in \mathbb{R}\} \\ \Delta : (\xi_1^-, \xi_2^-) &\rightarrow (\xi_1^+, \xi_2^+) = (\theta^-, \delta_{zero} \xi_2^-) \end{aligned} \quad (34)$$

که در اینجا ثابت δ_{zero} ، با لحاظ روابط ۱۳، ۲۶ و ۳۳ و نیز با توجه به این که $q_+^+ = q_-^+$ ، برحسب متغیرهای پیش از برخورد به دست می‌آید:

$$\delta_{zero} = \gamma_*(q_-^-) \Delta_{\dot{q}}(q_-^-) \Omega_{\dot{q}} \quad (35)$$

به‌طور خلاصه باید گفت در وهله‌ی آونگی، حرکت دوبا بر مبنای دینامیک صفر رابطه‌ی ۲۹ بر مسیری روی خمینه‌ی ناوردا Z دنبال می‌شود تا به شرایط برخورد با مقطع $S \cap Z$ برسد و تحت نگاشت گذر Δ شرایط اولیه‌ی گام بعدی به‌روز شود و مجدداً در مسیری روی خمینه‌ی دینامیک صفر جلو رود.

پیش‌تر توضیح دادیم که $\dot{\xi}_1 = \dot{\theta} = \omega$ متغیری همواره مثبت در سیر تحول ربات در وهله‌ی آونگی است. پس می‌توان تغییر متغیر $\kappa = \frac{1}{\dot{\xi}_1}(\xi_2^-)$ را معتبر دانست، و نیز با حذف زمان از معادلات حالت ۲۹، دینامیک صفر سیستم را در صفحه‌ی فاز بازنویسی کرد:

$$\frac{\xi_2^- d\xi_2^-}{d\xi_1^-} = \frac{d(\frac{1}{\dot{\xi}_1}(\xi_2^-))}{d\xi_1^-} = \frac{d\kappa}{d\xi_1^-} = \frac{\mu_2(\xi_1^-)}{\mu_1(\xi_1^-)} \quad (36)$$

شایان ذکر است دینامیک صفر سیستم توسط متغیرهای همیلتونی شامل مختصات و تکانه بیان شده است. اگر $\kappa = \frac{1}{\dot{\xi}_1}(\xi_2^-)$ را به‌عنوان انرژی جنبشی دوبا در دینامیک صفر سیستم تعبیر کنیم، و تابع پتانسیلی را طبق تعریف برای دینامیک صفر سیستم ارائه دهیم:

$$v(\xi_1^-) = - \int_{\theta^+}^{\xi_1^-} \frac{\mu_2(\xi)}{\mu_1(\xi)} d\xi, \quad \theta^+ \leq \xi_1^- \leq \theta^- \quad (37)$$

آنگاه با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه‌ی ۳۶ روی یک گام کامل به شرط آن که $\kappa^+ - \max_{\theta^+ \leq \xi_1^- \leq \theta^-} v(\xi_1^-) > 0$ ، خواهیم داشت:

$$\kappa^- = \kappa^+ - v(\theta^-) \quad (38)$$

شرط مذکور متضمن آن است که انرژی جنبشی مجموعه در ابتدای وهله‌ی آونگی چنان خواهد بود که در سیر پیشروی دوبا، قادر به غلبه بر کار منفی انجام شده روی مجموعه توسط نیروی وزن شود. قانون گذر در رخداد عبارت خواهد بود از:

$$\kappa^+ = \delta_{zero}^T \kappa^- \quad (39)$$

از ترکیب قانون دینامیکی ۳۸ -- که مشابه قانون کار و انرژی است و با انتگرال‌گیری روی مسیر از دینامیک صفر سیستم استنتاج شد -- و قانون گذر ۳۹ رابطه‌ی بازگشتی حاصل می‌شود که آن را «نگاشت بازگشتی پوانکاره» می‌نامیم و عبارت است از:

$$\kappa^- = \rho(\kappa^-) := \delta_{zero}^T \kappa^- - v(\theta^-) \quad (40)$$

که وسیع‌ترین حوزه‌ی تعریف آن چنین است:

$$\mathcal{D}_\rho = \{\kappa^- > 0 | \delta_{zero}^T \kappa^- - \max_{\theta^+ \leq \xi_1^- \leq \theta^-} v(\xi_1^-) > 0\} \quad (41)$$

که حالت خاصی از دینامیک تلفیقی سیستم بیان‌شده در معادله‌ی ۱۴ است و به‌ازای تحول سیستم روی خمینه‌ی ناوردا Z -- که به‌سبب قیده‌های مجازی تعریف شده در خروجی شکل می‌گیرد -- حاصل شده است.

۲.۳. پایداری سازی راه‌رفتن بر مبنای تحلیل پایداری مدار و نگاشت بازگشتی پوانکاره

در این بخش می‌خواهیم تحلیل پایداری دینامیک کامل سیستم را به تحلیل پایداری مدار روی دینامیک صفر سیستم کاهش داده و شرایط لازم برای دست‌یابی به پایداری را استخراج کنیم.

می‌دانیم که الگوی حرکت دوبا، به‌واسطه‌ی خط سیر مفاصل فعال آن و تحت ورودی حساب‌شده از قانون کنترل پسخوردی، محقق می‌شود. از آنجا که الگوی مطلوب روی توابع خروجی رمزین شده، لذا ساخت خط‌سیرهای مطلوب معادل است با تعریف توابع خروجی مناسب برحسب متغیر دارای تغییرات اکیداً یکنوا در امتداد تحول دوبا حین وهله‌ی آونگی. به عبارت دیگر باید تناظری یک‌به‌یک بین هر مقدار از متغیر مذکور و هر وضعیت از پیکره‌بندی دوبا حین حرکت برقرار باشد. اگر $\theta(q)$ زاویه‌ی پای ایستاده در وهله‌ی آونگی تصور شود، در حین راه‌رفتن پایدار، تغییرات این متغیر در وهله‌ی آونگی اکیداً یکنواست و بنابراین انتظار داریم که در هیچ نقطه‌ی در بازه دو برخورد متوالی متغیر $\dot{\theta}(q, \dot{q}) = \omega$ صفر نشود. به علاوه، طبق فرض مبنی بر برخاستن پای ایستاده در لحظه‌ی پس از برخورد خواهیم داشت: $\dot{\theta}^+ \neq 0$. همچنین فرض ضربه‌یی بودن تماس پای فرود آمده در رخداد برخورد اقتضا می‌کند که: $\dot{\theta}^- \neq 0$. بنابراین θ متغیر مناسبی است برای این که بتوان برحسب آن، پیکره‌بندی مطلوب در هر وضعیت از سیر تحول دوبا را به شکل یک‌به‌یک رمزگذاری کرد.

علاوه بر این، با ملاحظه‌ی فرض ۵ در انتخاب تابع خروجی، نگاشت یک‌به‌یک $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow S \cap Z$ وجود دارد به‌طوری که می‌توان حالت سیستم حین تحول روی خمینه‌ی دینامیک صفر را در لحظه‌ی پیش از برخورد، برحسب پیکره‌بندی پیش از برخورد (q_-^-) و سرعت زاویه‌یی انتظاری پای ایستاده در این لحظه ($\omega = \dot{\theta}^-$)، معین کرد:

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} \Omega_q \\ \Omega_{\dot{q}\omega} \end{bmatrix}; \quad \Omega_q = q_-^-, \quad \Omega_{\dot{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q}(q_-^-) \\ \gamma_*(q_-^-) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

با این توضیحات می‌توان انتظار داشت چنانچه مقدار θ در سیر تناوب خود در هر گام برداشتن، به‌طور مجانبی به مدار پایداری در صفحه‌ی فاز خود هم‌گرا شود -- در حالی که خروجی تعریف شده برحسب θ نیز در همین سیر به‌طور مجانبی به سمت صفر میل داده شود -- آنگاه پیکره‌بندی دوبا حین راه‌رفتن به‌طور مجانبی به الگوی مطلوب رمزین شده در خروجی میل کند. اکنون تصور کنید مسیرهای چرخه‌یی که متناوباً در هر گام در صفحه‌ی فاز θ تشکیل می‌شود در محلی معین، صفحه‌یی فرضی موسوم به «مقطع پوانکاره» را قطع کنند؛ اگر در هر تناوب چرخه‌ها به‌طور مجانبی به مداری پایدار مانند $\mathcal{O}$ نزدیک شوند، انتظار داریم نقاط تقاطع روی مقطع پوانکاره نیز به‌طور مجانبی به سمت نقطه‌یی ثابت مانند z^* میل کنند؛ و بالعکس. بنابراین اگر $S \cap Z$ مقطع پوانکاره، و $\rho : S \cap Z \rightarrow S \cap Z$ نگاشت پوانکاره باشد و نیز مختصات صفحه‌ی فاز مسیرهای تناوبی را حالت‌های تعریف شده در دینامیک صفر دوبا در نظر بگیریم، یعنی متغیرهای همیلتونی $(\xi_1^-, \xi_2^-) = (\theta, \gamma)$ ،

باید پاسخ دینامیک فوق روی $\mathbb{R}^{2N-2}$ موجود و یگانه باشد و به طور پیوسته تابعی از شرایط اولیه‌ی مسئله باشد و افزون بر این، در زمانی محدود و به طور مجانبی پایدار به سمت مبدأ هم‌گرا شود و زمان نشست نیز به طور پیوسته تابعی از شرایط اولیه باشد. یک قانون پس‌خورد پیوسته برای $v(y, \dot{y})$ به شکل زیر ارائه شده است:

$$v(y, \dot{y}) = \Psi(y, \dot{y}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1(y_1, \varepsilon \dot{y}_1) \\ \vdots \\ \psi_{N-1}(y_{N-1}, \varepsilon \dot{y}_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (48)$$

در اینجا $\varepsilon > 0$ زمان نشست خروجی را تنظیم می‌کند و به ازای $1 < \alpha < \infty$ توابع ψ_i تعریف می‌شود: [۸]

$$\psi_i(y_i, \varepsilon \dot{y}_i) := -\text{sign}(\varepsilon \dot{y}_i) |\varepsilon \dot{y}_i|^\alpha - \text{sign}(\phi_i(y_i, \varepsilon \dot{y}_i)) |\phi_i(y_i, \varepsilon \dot{y}_i)|^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (49)$$

و نیز:

$$\phi_i(y_i, \varepsilon \dot{y}_i) := y_i + \frac{1}{1-\alpha} \cdot \text{sign}(\varepsilon \dot{y}_i) |\varepsilon \dot{y}_i|^{1-\alpha} \quad (50)$$

۴. ساخت و پارامترسازی مسیرها

چنان که پیش‌تر اشاره شد، الگوی مطلوب راه رفتن در صفحه‌ی حرکت در قالب قیودی مجازی روی متغیرهای پیکره‌بندی دوبا رمزین می‌شود. همچنین به منظور اعمال این قیود، که هر یک را می‌توان مسیری روی صفحه‌ی حرکت دوبا تعبیر کرد، خروجی سیستم طبق رابطه‌ی ۱۶ تعریف و به واسطه‌ی قانون کنترل پس‌خورد به سمت صفر هدایت می‌شود. باید توجه داشت که این یک طرح تعقیب مسیر نیست، زیرا تحول $\chi_0(q)$ بر θ که تابعی از پیکره‌بندی است، بار شده است نه بر زمان. در این روند ابتدا معادله‌ی قیدهای مجازی برحسب متغیرهای پیکره‌بندی (q) تنظیم می‌شود و سپس تحت تغییر مختصات، به متغیر مختصاتی دینامیک صفر سیستم (θ) وابسته می‌شود. آنگاه ردگیری قیود با پایدارسازی مسیر θ روی صفحه‌ی فاز دینامیک صفر سیستم حاصل خواهد شد. افزون بر این، رابطه‌ی هر قید را توسط چندجمله‌بی‌های بزیر پارامترسازی می‌کنیم؛ یعنی روابط قیدی مطلوب را به شکل توابعی با ساختار چندجمله‌بی‌های بزیر و شناور روی مقادیر کنترلی آنها در نظر می‌گیریم. با این فرض که رابطه‌ی قیدهای منظور شده روی پیکره‌بندی دوبا حین راه رفتن، و نیز متغیر غیرفعال سیستم نسبت به متغیرهای پیکره‌بندی دارای ساختاری آفین باشند:

$$\begin{bmatrix} \chi_0(q) \\ \theta(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ c \end{bmatrix} q \equiv Xq \quad (51)$$

اگر مرتبه‌ی ماتریس X کامل باشد، رابطه‌ی ۵۱ تغییر مختصاتی معکوس‌پذیر را برای سیستم دینامیکی ۱۴ پیشنهاد می‌دهد. تحت معکوس این تغییر مختصات خواهیم داشت:

$$q = X^{-1} \begin{bmatrix} \chi_d(\theta) \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \dot{q} = X^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_d(\theta)}{\partial \theta} \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (52)$$

که در آن $\chi_d(\theta) = \chi_d \circ \theta(q)$ مقدار مطلوب روابط قیدی برحسب θ است و چنان که گفته شد آنها توابعی با ساختار چندجمله‌بی‌های بزیر در نظر گرفته می‌شوند.

آنگاه «نقطه‌ی ثابت» این نگاشت بازگشتی به‌ازای $\kappa^* = \rho(\kappa^*)$ ، به شرط آن که $\kappa^* \in \mathcal{D}_\rho$ و $\delta_{zero}^2 \neq 1$ به دست خواهد آمد:

$$\kappa^* = -\frac{v(\theta^-)}{1 - \delta_{zero}^2} \quad (42)$$

از سوی دیگر، κ^* «نقطه‌ی تعادلی به‌طور نمایی پایدار» دینامیک بازگشتی:

$$\kappa(n+1) = \rho(\kappa(n)) \quad (43)$$

خواهد بود، اگر و تنها اگر $0 < \delta_{zero}^2 < 1$. شایان ذکر است بنا به نگاشت بازگشتی ۴۰، سیستم در هر گام متناسب با میزان $\delta_{zero}^2 \kappa^- - v_{\max}(\xi_1)$ انرژی می‌طلبد، که سهمی مربوط به اتلاف انرژی در هنگام ضربه و سهمی مربوط به بلندکردن مرکز جرم دوبا حین تاب‌خوردن روی پای ایستاده در وهله‌ی آونگی است. این کم‌ترین مقدار انرژی است که باید در انتهای هر گام برای سیستم باقی بماند تا گام بعدی امکان تحقق و تکمیل داشته باشد. در واقع این نکته شرط لازم و کافی است برای وجود مسیر چرخه‌یی قاطع بر مقطع پوانکاره‌ی $\mathcal{S} \cap \mathcal{Z}$. به علاوه شرط لازم و کافی برای آن که چرخه‌ها به‌طور مجانبی به مدار پایداری چون $\mathcal{O}$ میل کنند آن است که $0 < \delta_{zero}^2 < 1$. این نکته را نیز یادآوری می‌کنیم که پاسخ حاصل از این رهیافت باید قیود یک‌طرفه‌ی تعریف شده برای داشتن شرایط صحیح تکیه‌گاهی را نیز ارضا کند.

۳.۳. طراحی کنترل پس‌خورد برای پایدارسازی نمایی مسیر

در بخش قبل ابتدا مدل دینامیک کامل سیستم را متناظر کردیم با مدل دینامیک صفر سیستم، و سپس پایداری مداری روی صفحه‌ی فاز دینامیک صفر را معادل پایداری نقطه‌ی ثابت نگاشت بازگشتی پوانکاره روی مقطع برخورد در نظر گرفتیم. بنا بر این اگر $(t, z_0) = \varphi(t, z_0)$ پاسخی از دینامیک صفر سیستم وابسته به شرایط اولیه‌ی z_0 باشد و زمان رسیدن به برخورد بعدی — هنگامی که گام از شرایط اولیه‌ی z_0 آغاز شده است — توسط تابع $T(z_0)$ داده شود، و نیز $z^* \in \mathcal{S} \cap \mathcal{Z}$ نقطه‌ی ثابت نگاشت پوانکاره باشد، آنگاه مدار بسته و تناوبی $\mathcal{O} \subset \mathcal{Z}$ متناظر با نقطه‌ی ثابت z^* است:

$$\mathcal{O} := \{z \in \mathcal{Z} | z = \varphi(t, \Delta(z^*)), 0 \leq t < T(\Delta(z^*))\} \quad (44)$$

تحت ورودی کنترلی:

$$u(t) = u^* \circ \varphi(t, \Delta(z^*)) \quad (45)$$

پاسخی تناوبی و پایدار برای دینامیک کامل سیستم به دست می‌دهد. در واقع این امر هنگامی محقق می‌شود که خروجی تعریف‌شده، به واسطه‌ی کنترل پس‌خورد همواره صفر نگه داشته شود تا از این راه قیود مجازی رمزین شده در خروجی، حین حرکت برقرار بماند. از این رو قانون کنترلی ۴۶ را برای پایدارسازی نمایی حرکت ارائه می‌دهیم. ابتدا پیش‌پس‌خورد حالت $u(x)$ را تعریف کنیم:

$$u(x) = (L_g L_f \chi(x))^{-1} (v - L_f^2 \chi(x)) \quad (46)$$

که پس‌خورد $v = v(y, \dot{y})$ با خطی‌سازی زنجیره‌ی حلقه‌بسته، خروجی سیستم را تحت دینامیک زیر به صفر میل خواهد داد:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = v(y, \dot{y}) \quad (47)$$

از این رو لازم است تغییرات متغیر θ در بازه $[0, 1]$ به‌هنگار شود. بنابراین:

$$\hat{\theta} = \frac{\theta(q) - \theta^+}{\theta^- - \theta^+} \quad (53)$$

روی بازه $0 \leq s \leq 1$ به‌هنگار s ضابطه‌ای یک چندجمله‌ای بزیبر و ضابطه‌ای مشتق آن عبارت است از:

$$B_i(s) = \sum_{k=0}^m \alpha_k^i \frac{m!}{k!(m-k)!} s^k (1-s)^{m-k} \quad (54)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} B_i(s) = \sum_{k=0}^{m-1} (\alpha_{k+1}^i - \alpha_k^i) \frac{m!}{k!(m-k-1)!} s^k (1-s)^{m-k-1} \quad (55)$$

که در آن m درجه‌ی چندجمله‌ای و α_k^i ها مقادیر کنترلی برای تنظیم هندسه‌ی منحنی آن چندجمله‌ای است. مهم‌ترین ویژگی این چندجمله‌ای‌ها گنجیده شدن منحنی‌شان داخل چندضلعی متشکل از مقادیر کنترلی آنهاست. بنابراین برد تغییرات تابع محدود به کمیته و بیشه‌ی مقادیر کنترلی خواهد بود. همچنین از ضوابط ۵۴ و ۵۵ داریم:

$$B_i(s=0) = \alpha_0^i, \quad \left. \frac{\partial B_i}{\partial s} \right|_{s=0} = m(\alpha_1^i - \alpha_0^i) \\ B_i(s=1) = \alpha_m^i, \quad \left. \frac{\partial B_i}{\partial s} \right|_{s=1} = m(\alpha_m^i - \alpha_{m-1}^i) \quad (56)$$

روابط قیدی را برحسب متغیر به‌هنگار شده $\hat{\theta}$ و با ساختار چندجمله‌ای‌های بزیبر در قالب یک بردار ستونی در نظر بگیریم:

$$\chi_d(\theta) = [B_i \circ \hat{\theta}(q)], \quad i = 1 \dots N-1 \quad (57)$$

اگر چندجمله‌ای‌ها همگی از درجه‌ی m فرض شود، آنگاه در رابطه‌ی فوق مقادیر کنترلی α_k^i همگی در قالب ماتریسی به‌نام A از مرتبه‌ی $(N-1) \times (m+1)$ نشان داده می‌شود. در ابتدا و انتهای دوره‌ی حرکت روی وهله‌ی آونگی مقادیر θ^+ و θ^- به‌ترتیب متناظرند با $\hat{\theta} = 0$ و $\hat{\theta} = 1$ ، بدین‌ترتیب مقدار توابع قیدی روی این موقعیت‌ها بنا به روابط ۵۶ عبارت است از:

$$\chi_d(\theta^+) = A_0, \quad \chi_d(\theta^-) = A_m \quad (58)$$

و نیز تحت تبدیل معکوس ۵۲ و تغییر متغیر ۵۳ داریم:

$$q^+ = X^{-1} \begin{bmatrix} A_0 \\ \theta^+ \end{bmatrix}, \quad \dot{q}^+ = X^{-1} \begin{bmatrix} \frac{m(A_1 - A_0)}{\theta^- - \theta^+} \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}^+ \quad (59)$$

$$q^- = X^{-1} \begin{bmatrix} A_m \\ \theta^- \end{bmatrix}, \quad \dot{q}^- = X^{-1} \begin{bmatrix} \frac{m(A_m - A_{m-1})}{\theta^- - \theta^+} \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}^- \quad (60)$$

اکنون نشان می‌دهیم که با تنظیم مقادیر کنترلی A می‌توان مسیر ساخته شده از دینامیک ۳۲ روی خمینه‌ی دینامیک صفر را تحت نگاشت برخورد ناوردا نگاه داشت: $\Delta(\mathcal{S} \cap \mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$. توجه کنیم که این مسئله بنا به رابطه‌ی ۱۷ معادل است با:

$$\chi_d \circ \Delta(\mathcal{S} \cap \mathcal{Z}) = 0 \quad (61)$$

$$L_f \chi_d \circ \Delta(\mathcal{S} \cap \mathcal{Z}) = 0 \quad (62)$$

دو تساوی فوق متضمن برقرارماندن قیود مجازی تعریف شده در پیکره‌بندی حرکت دوبا، پس از برخورد، و آغاز گام جدید هستند. از ترکیب روابط ۱۳ با روابط ۵۹ و ۶۰ به این نتیجه می‌رسیم:

$$q^+ = X^{-1} \begin{bmatrix} A_0 \\ \theta^+ \end{bmatrix} = \Delta_q q^- = \Delta_q X^{-1} \begin{bmatrix} A_m \\ \theta^- \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\dot{q}^+ = X^{-1} \begin{bmatrix} \frac{m(A_1 - A_0)}{\theta^- - \theta^+} \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}^+ = \Delta_{\dot{q}} \dot{q}^- \\ = \Delta_{\dot{q}} X^{-1} \begin{bmatrix} \frac{m(A_m - A_{m-1})}{\theta^- - \theta^+} \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\theta}^- \quad (64)$$

از حل دو معادله‌ی ۶۳ و ۶۴، مقادیر کنترلی A_0 و A_1 وابسته به مقادیر کنترلی A_m و A_{m-1} می‌شوند و عبارت خواهند بود از:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ \theta^+ \end{bmatrix} = X \Delta_q X^{-1} \begin{bmatrix} A_m \\ \theta^- \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$A_1 = \frac{\theta^- - \theta^+}{m} X_0 \Delta_{\dot{q}} \varpi (c \Delta_{\dot{q}} \varpi)^{-1} + A_0 \quad (66)$$

که در آن $\varpi \equiv X^{-1} \begin{bmatrix} A_m - A_{m-1} \\ \frac{1}{m}(\theta^- - \theta^+) \end{bmatrix}$ جزئی از جمله است. شایان ذکر است برای برقراری این روابط، چندجمله‌ای‌های بزیبر باید دست کم از درجه‌ی $m = 3$ انتخاب شده باشند. اگر توابع مذکور از درجات بالاتری انتخاب شوند، آنگاه می‌توان از مقادیر کنترلی آزاد برای بهینه‌سازی مسیرها استفاده کرد.

در این مرحله نظریه‌ی لازم برای پایدارسازی راه‌رفتن یک دوبا که در آن پای تکیه‌گاهی غیرفعال است، کامل می‌شود و به‌طور خلاصه می‌توان گفت که اگر پیکره از شروع تا خاتمه‌ی حرکت حین یک گام، نوسان پایداری روی تک‌پای تکیه‌گاهی غیرفعال خود داشته باشد، و به علاوه در انتهای گام چنان پا بر زمین گذارد که شرایط برای نوسان پایدار در گام بعدی نیز مهیا شود، آنگاه توالی این روند منجر به پیشروی پایدار برای دوبا خواهد شد. افزون بر این، پایداری پیکره روی مسیر پیشروی دوبا -- که این مسیرها در قالب خروجی سیستم کنترلی تعریف شده‌اند -- به‌واسطه‌ی کنترل پس‌خورده برقرار می‌شود.

۵. شبیه‌سازی و ارائه‌ی نتایج

در این بخش به شبیه‌سازی مدل ساده‌ی از دوبا‌ی صفحه‌ی (شکل ۱) می‌پردازیم، و با پیاده‌سازی روش ارائه‌شده برای ساخت و پایدارسازی گام راه‌رفتن روی سطح شیب‌دار، با توجه به نتایج حاصل اعتبار روش مذکور را محک خواهیم زد. معادله‌ی حرکت دوبا در رابطه‌ی ۱ آمده است که در آن ماتریس جرم $M(q)$ و بردار اثر گرانش $G(q)$ ، برای مدل شکل ۱ به‌ترتیب مطابق روابط ۱ و ۲ در بخش پیوست استخراج خواهد شد که در آن $q_1 = \theta_1$ ، $q_2 = \theta_2$ ، $q_3 = \theta_3$ ، $\lambda_T = \frac{l_T}{l}$ ، $\mu_H = \frac{m_H}{m}$ و $\mu_T = \frac{m_T}{m}$ ، همچنین:

$$C(q, \dot{q}) = \left[\frac{\partial}{\partial q} p(q, \dot{q}) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial q} p(q, \dot{q}) \right]' \quad (67)$$

که در آن $p(q, \dot{q}) = M(q) \dot{q}$ تکانه‌ی تعمیم‌یافته‌ی مجموعه است. کمیت‌های فیزیکی و مقادیر کنترلی در اجرای شبیه‌سازی مطابق جدول ۱ انتخاب شده‌اند.

جدول ۱. کمیت‌های فیزیکی و مقادیر کنترلی در اجرای شبیه‌سازی.

m	m_H	m_T	l	l_T	α	ε
(kg)	(kg)	(kg)	(m)	(m)		
۵	۱۵	۱۰	۱	۰/۵	۰/۹	۰/۱

در انتخاب خروجی‌ها، راستای تنه و زاویه‌ی بین پاها به‌عنوان قیود تعیین‌کننده‌ی الگوی راه رفتن برحسب متغیرهای پیکره‌بندی ضابطه‌مند می‌شوند، و در قالب معادلات قیدی ۶۸ و ۶۹ بیان می‌شوند:

$$\chi_1 := (q_2 - q_1) - \chi_{1d} \circ q_2 \quad (68)$$

$$\chi_2 := (2q_2 + q_2 - q_1) - (q_2^+ - q_2^+) \chi_{2d} \circ q_2 \quad (69)$$

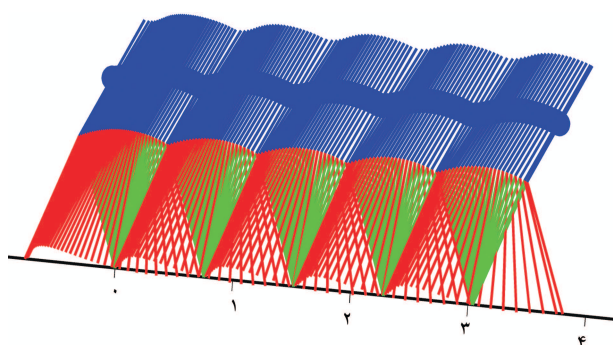
که در آن χ_{id} مقادیر مطلوب آنها در امتداد تحول دوبا در وهله‌ی آونگی، تابعی از مختصه‌ی غیرفعال سیستم است و عبارت خواهد بود از:

$$\chi_{id} \circ \theta := \alpha_{i1} \theta^3 + \alpha_{i2} \theta^2 + \alpha_{i3} \theta + \alpha_{i4}; \quad i = 1, 2 \quad (70)$$

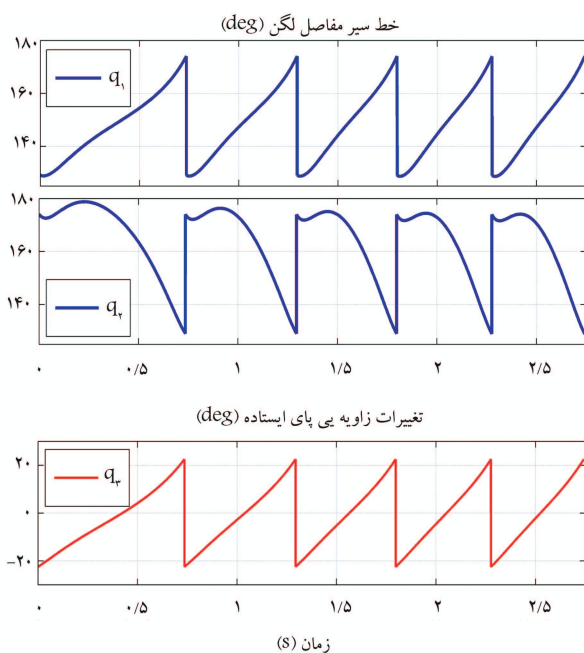
مقادیر کنترلی α_{ij} براساس مقادیر بهینه‌ی ارائه‌شده‌ی موجود^[۱۸] تنظیم شده که البته مربوط به راه رفتن روی سطح تخت است. باید به این نکته اشاره می‌کنیم که جمله‌ی $(q_2^+ - q_2^+)$ در قید مربوط به زاویه‌ی بین پاها متضمن آن است که در بازه‌ی برخورد، $q_2 \in (q_2^-, q_2^+)$ ، هر دو پا باید روی زمین قرار گرفته باشد. مقدار مطلوب زاویه‌ی نشست و برخاست پا از زمین است.

از نتایج حاصل از شبیه‌سازی، نمایش پیوسته‌ی راه رفتن دوبا و نیز خط‌سیر مختصه‌ها در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است. چنان که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، اولاً زاویه‌ی پای ایستاده دارای تغییراتی یکنوا از $-q_{2d} = q_2^+$ تا $+q_{2d} = q_2^-$ است که در اینجا $q_{2d} = \frac{\pi}{\lambda}$ انتخاب شده است. ثانیاً در هنگام برخورد، زاویه‌ی بین دو پا -- همان اختلاف زاویه‌ی مفصل لگن -- معادل $q_{2d} = \frac{\pi}{\lambda}$ به دست آمده است. به عبارت دیگر در نمودارهای q_1 و q_2 مشاهده می‌شود که $q_2^+ - q_2^- = 2q_{2d} = \frac{\pi}{\lambda}$ و بلافاصله پس از برخورد با تعویض نقش پاها و نام مختصه‌ها مجدداً داریم $q_2^+ - q_2^+ = 2q_{2d} = \frac{\pi}{\lambda}$. شایان ذکر است ناپیوستگی نمودارها هنگام گذر از مقادیر بیش از برخورد به مقادیر پس از آن، نه به دلیل گسستگی در مقدار کمیت‌های پیکره‌بندی، بلکه به دلیل تعویض نام پاها در گذر برخورد است. در شکل ۴ مسیرهای تشکیل شده در صفحه‌ی فاز هریک از مختصه‌های تعمیم یافته نیز نشان داده شده است. هم‌گرایی هریک از مسیرها به سمت یک مدار بسته، یا همان چرخه‌ی حدی، مؤید موفقیت روش کنترلی در پایدارسازی گام دوپاست. نمودارهای مربوط به گشتاور محاسبه‌شده از قانون کنترلی که باید توسط محرکه‌ها بر مفصل لگن اعمال شوند در شکل ۵ رسم شده است. مقادیر گشتاورها کران‌دار بوده و طی هر گام به حالت پایا نزدیک می‌شوند؛ همچنین در هر شبیه‌سازی شرایط صحیح تکیه‌گاهی باید بررسی شود. شرط عدم لغزش پای ایستاده حین تاب خوردن پای آونگی اقتضا می‌کند، نیروی واکنش سطح در انتهای پای ایستاده، داخل مخروط اصطکاک ایستایی افتاده و نیز سوی آن رو به بالا باشد. در شکل ۶ با بررسی این موارد صحت شرایط تکیه‌گاهی تأیید می‌شود.

در جدول ۲، داده‌های مربوط به لحظات برخورد برای ده قدم اول ارائه شده است. مشاهده می‌شود که تعداد گام‌های زمانی برای تکمیل دو یا سه قدم اول طولانی‌تر از حالت پایاست و این بدان معناست که شروع راه رفتن با سرعت کم‌تری



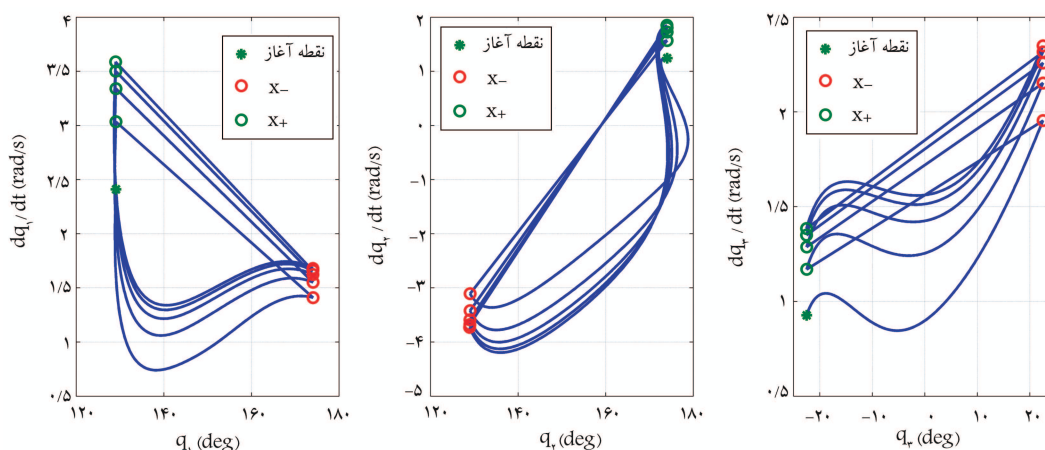
شکل ۲. شبیه‌سازی حرکت دوبا روی سطح شیب‌دار.



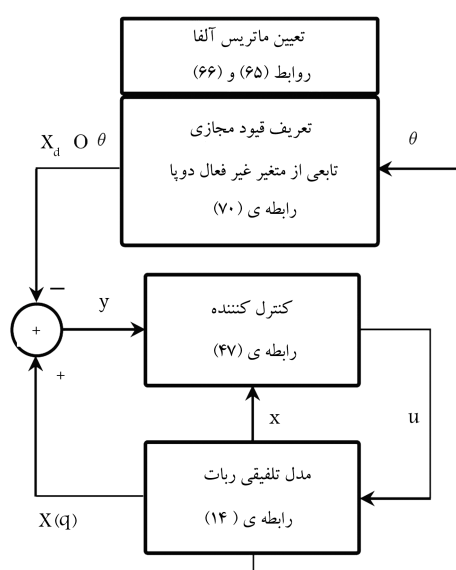
شکل ۳. خط‌سیر مفصل لگن و تغییرات زاویه‌ی پای ایستاده.

جدول ۲. داده‌های مربوط به لحظات رخداد برخورد طی اجرای ده قدم.

قدم	زمان	δ_{zero}	F_t / F_n	طول قدم	سرعت متوسط
۱	۰/۶۸۶	۰/۱۰۰۷	-۰/۵۹۹۵۳	۰/۷۶۲۶	۱/۱۱۸۸
۲	۱/۲۳۳	۰/۱۰۰۶	-۰/۵۹۹۵۸	۰/۷۵۳۱	۱/۳۶۶۰
۳	۱/۷۲۴۱	۰/۱۰۰۳	-۰/۵۹۹۷۶	۰/۷۶۱۱	۱/۵۴۹۵
۴	۲/۲۰۵۳	۰/۱۰۰۱	-۰/۵۹۹۹۶	۰/۷۵۳۷	۱/۵۶۶۳
۵	۲/۶۶۶۴	۰/۱۰۰۰	-۰/۶۰۰۱۱	۰/۷۵۹۶	۱/۶۴۷۴
۶	۳/۱۲۷۵	۰/۰۹۹۹	-۰/۶۰۰۲۲	۰/۷۵۷۶	۱/۶۴۳۰
۷	۳/۵۷۸۵	۰/۰۹۹۸	-۰/۶۰۰۲۷	۰/۷۵۱۶	۱/۶۶۶۵
۸	۴/۰۳۹۶	۰/۰۹۹۸	-۰/۶۰۰۳۱	۰/۷۵۷۳	۱/۶۷۹۲
۹	۴/۴۹۰۷	۰/۰۹۹۸	-۰/۶۰۰۳۳	۰/۷۶۲۱	۱/۶۸۹۴
۱۰	۴/۹۴۱۸	۰/۰۹۹۷	-۰/۶۰۰۳۴	۰/۷۶۶۶	۱/۶۹۹۴



شکل ۴. مسیرهای تشکیل شده در صفحه‌ی فاز هر یک از متغیرهای تعمیم‌یافته که به سمت چرخه‌ی حدی خود هم‌گرا می‌شوند.

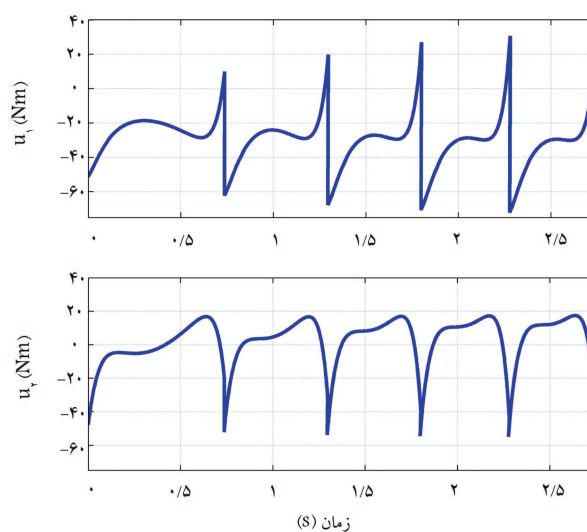


شکل ۷. نمودار جعبه‌یی نحوی ساخت و پایدارسازی گام راه‌رفتن ربات دوبا با نگه‌داشتن سیستم روی خمینه‌ی صفر به‌واسطه‌ی کنترل پس‌خورده.

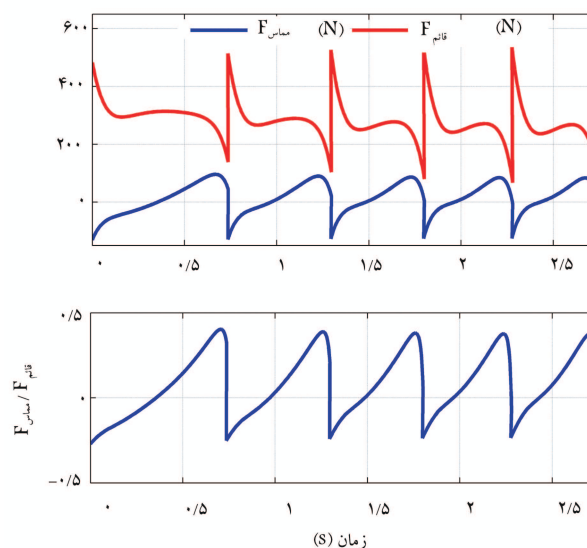
آغاز می‌شود. به علاوه، مقدار ضریب δ_{zero} در شروع همه‌ی قدم‌ها در محدوده‌ی قابل قبول پایداری بوده و رفته‌رفته در هر قدم به مقدار مطمئن‌تری نزدیک می‌شود. همچنین شرایط تکیه‌گاهی پای فرود آمده حاکی از آن است که کم‌ترین مقدار برای ضریب اصطکاک ایستایی بین پاها و زمین باید از 0.76 بیشتر باشد. در آخر، نمودار جعبه‌یی شکل ۷ به‌منظور جمع‌بندی مطالب و روشن تر شدن فرایند کنترلی ارائه شده، ترسیم شده است.

۶. نتیجه‌گیری

در این اثر با مدل‌سازی یک ربات دوبا‌ی صفحه‌یی سه‌رابطی به پایدارسازی راه‌رفتن آن روی یک سطح شیب‌دار پرداخته شد. برخلاف تحلیل‌های پایداری معمول در کنترل ربات‌ها که متکی به مفهوم پایداری از دیدگاه لیپانوف است و تحول سیستم در آن درامداد زمان دنبال می‌شود، روش ارائه شده در این مقاله متکی به مفهوم



شکل ۵. گشتاورهای ورودی کنترلی به محرکه‌های لگن.



شکل ۶. مؤلفه‌های نیروی واکنشی سطح تکیه‌گاهی وارد بر انتهای پای ایستاده - نسبت نیروی اصطکاک افقی به نیروی عمودی سطح.

یک بعدی موسوم به «خمینه‌ی دینامیک صفر سیستم» تقلیل پیدا می‌کرد. در واقع زیر فعال بودن سیستم، تحلیل پایداری روی خمینه‌ی دینامیک صفر سیستم را موجه می‌ساخت. همچنین در تعریف زیرفضای مذکور از مختصه‌های همیلتونی به جای لاگرانژی استفاده شد (یعنی از تکانه به جای سرعت) و این امکان فراهم آمد که نگاشت بازگشتی پوانکاره با ضابطه‌ی صریح استخراج شود. البته طبیعت ضربه‌ی گام‌زدن موجب می‌شد که در یک راه رفتن پایدار، هنگام برخورد پای آونگی با صفحه‌ی تکیه‌گاهی (یا همان مقطع پوانکاره)، در متغیرهای غیرپیکره‌بندی پرش ایجاد شود. از این رو نگاشت گذار نیز در زیرفضای دینامیک صفر سیستم بازنویسی شد و به این ترتیب دینامیک صفر تلفیقی سیستم حاصل شد. در آخر شرط پایداری کامل دوبا وابسته به پایداری دینامیک صفر تلفیقی متناظر شد و از شرط پایداری نگاشت بازگشتی پوانکاره به دست آمد. با شبیه‌سازی مدل ربات دوبا‌ی مفروض، درستی روش ارائه‌شده در هدایت و پایدارسازی راه رفتن دوبا روی یک سطح شیب‌دار تحقیق شد. نتایج شبیه‌سازی مؤید موفقیت روش ارائه‌شده است.

پایداری مداری بوده که در آن تحول سیستم در امتداد یک متغیر پیکره‌بندی (یعنی مختصه‌ی غیرفعال سیستم) دنبال شده و تحلیل پایداری با استخراج ضابطه‌ی صریح برای نگاشت بازگشتی پوانکاره بررسی شد.

بدین منظور، ابتدا دینامیک‌های فعال (کنترل‌پذیر) سیستم توسط یک کنترل پس‌خورده حالت مهار شدند؛ یعنی برای ساخت راه رفتن دوبا مسیرهای مرجعی به تعداد متغیرهای فعال سیستم، تابعی از متغیر غیرفعال سیستم تعریف شدند، و به واسطه‌ی یک کنترل‌کننده‌ی پس‌خورده سعی می‌شد پیکره‌بندی دوبا در هر موقعیت به حالت مطلوب مقید شده به متغیر غیرفعال سیستم رانده شود. به عبارت دیگر، با تعریف قیود مجازی برای سیستم، مسیرهای مرجعی که می‌بایست حرکت دوبا در امتداد آنها دنبال شود، در خروجی سیستم کنترلی رمزینه شدند و قانون کنترلی با دریافت پس‌خورده‌های حالت سعی می‌کرد خروجی‌های تعریف شده را به صفر میل دهد. بدین‌گونه پیکره‌بندی دوبا در هر موقعیت تابعی از یک متغیر پیکره‌بندی غیر فعال نگاه داشته می‌شد. آنگاه تحول سیستم از فضای پیکره‌بندی به یک زیرفضای

پانوشته‌ها

1. bio-engineering
2. joint trajectories
3. attractive dynamics
4. zero moment point
5. passive
6. under-actuated
7. zero dynamics
8. instantaneous impact event
9. parameterization
10. Bezier polynomials

منابع (References)

1. Hurmuzlu, Y., Genot, F. and Brogliato, B. "Modeling, stability and control of biped robots-a general framework", *Automatica*, **40**, pp. 1647-1664 (2004).
2. Taga, G. "A model of the neuro-musculo-skeletal system for human locomotion; I. Emergence of basic gait", *Biol. Cybern.*, **73**, pp. 97-111 (1995).
3. Vukobratović, M., Borovac, B., Šurdilović, D., and Stokić, D., *Zero-Moment Point-Proper Interpretation*, in: O. D.I. Nwokah & Y. Hurmuzlu (Eds.), *The Mechanical systems design handbook: modeling, measurement, and control*. Ch. 27, Sec.1, CRC Press, USA (2002).
4. Tlalolini, D., Chevallereau, C. and Aoustin, Y. "Comparison of different gaits with rotation of the feet for a planar biped", *Robotics and Autonomous Systems*, **57**, pp. 371-383 (2009).
5. Huang, Y., Wang, Q., Chen B., Xie, G. and Wang, L. "Modeling and gait selection of passivity-based seven-link bipeds with dynamic series of walking phases", *Robotica*, **30**(1), pp. 39-51 (2012).
6. Farshimi, F. and Naraghi, M. "A passive-biped model with multiple routes to chaos", *Acta Mechanica Sinica*, **27**(2), pp. 277-284 (2011).
7. Freidovich, L.B., Mettin, U., Shiriaev, A.S. and Spong, M.W. "A passive 2-DOF walker: Hunting for gaits using virtual holonomic constraints", *Robotics: IEEE Trans*, **25**(5), pp. 1202-1208 (2009).
8. Grizzle, J.W., Abba, G. and Plestan, F. "Asymptotically stable walking for biped robots: Analysis via systems with impulse effects", *Automatic Control: IEEE Trans*, **46**(1), pp. 51-64 (2001).
9. Westervelt, E.R., Grizzle, J.W. and Koditschek, D.E. "Hybrid zero dynamics of planar biped walkers", *Automatic Control: IEEE Trans*, **48**(1), pp. 42-56 (2003).
10. Chevallereau, Ch., Abba, G., Aoustin, Y., Plestan, F., Westervelt, E.R., Canudas-de-Wit, C. and Grizzle, J.W. "RABBIT: A testbed for advanced control theory", *Control Systems, IEEE*, **23**(5), pp. 57-79 (2003).
11. Chevallereau, Ch., Formal'sky, A. and Djoudi, D. "Tracking a joint path for the walk of an underactuated biped", *Robotica*, **22**, pp. 15-28 (2004).
12. Chevallereau, C., Westervelt, E.R. and Grizzle, J.W. "Asymptotically stable running for a five-link, four-actuator, planar bipedal robot", *The Int. J. of Robotics Research*, **24**(6), pp. 431-4 (2005).
13. Westervelt, E.R., Morris, B. and Farrell, K.D. "Analysis results and tools for the control of planar bipedal gaits using hybrid zero dynamics", *Autonomous Robots*, **23**, pp. 131-145 (2007).
14. Chevallereau, C., Grizzle, J.W. and Shih, C.-L. "Asymptotically stable walking of a five-link underactuated 3-D bipedal robot", *Robotics, IEEE Trans*, **25**(1), pp. 37-50 (2009).
15. Akbari-Hamed, K., Sadati, N., Gruver, W.A. and Dumont, G.A. "Stabilization of periodic orbits for planar

- walking with non-instantaneous double support phase”, *Systems, Man, and Cybernetics (Part A): IEEE Trans.*, **42**(3), pp. 685-706 (2011).
16. Manchester, I.R., Mettin, U., Iida, F. and Tedrake, R. “Stable dynamic walking over uneven terrain”, *The Int. J. of Robotics Research*, **30**(3), pp. 265-279 (2011).
17. Narukawa, T., Takahashi, M. and Yoshida, K., *Stability Analysis of a Simple Active Biped Robot with a Torso on Level Ground Based on Passive Walking Mechanisms*, in: Hackel, M. (Ed.), *Humanoid Robots: Human-like Machines*. pp. 163-174, I-Tech, Vienna, Austria (2007).
18. Cardenas-Maciel, S.L., Castillo, O. and Aguilar, L.T. “Generation of walking periodic motions for a biped robot via genetic algorithms”, *Applied Soft Computing*, **11**(8), pp. 5306-5315 (2011).
19. Isidori, A., *Nonlinear Control Systems*, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin (1995).

$$G_{\lambda} = \frac{\partial V}{\partial q_{\lambda}} = mgl \left[\frac{\lambda}{r} \sin \theta_{\tau} - \beta + \mu_T \lambda_T \sin_{q_{\lambda} - (q_{\tau} + \beta)} \right],$$

$$G_{\tau} = \frac{\partial V}{\partial q_{\tau}} = -\frac{\lambda}{r} mgl \sin \theta_{\tau} - \beta,$$

$$G_{\tau} = \frac{\partial V}{\partial q_{\tau}} = -mgl \left[\left(\frac{r}{r} + \mu_H + \mu_T \right) \sin_{q_{\tau} + \beta} + \mu_T \lambda_T \sin_{q_{\lambda} - (q_{\tau} + \beta)} + \frac{\lambda}{r} \sin \theta_{\tau} - \beta \right]. \quad (2)$$

$$M_{\lambda\lambda} = \frac{\lambda}{r} ml^{\tau} \left(\lambda + r \mu_T \lambda_T^{\tau} \right), \quad M_{\tau\tau} = \frac{\lambda}{r} ml^{\tau},$$

$$M_{\tau\tau} = ml^{\tau} \left[r \left(\frac{r}{\lambda} - \cos_{q_{\lambda} - q_{\tau}} \right) + \mu_H + \mu_T \left(\lambda + \lambda_T^{\tau} - r \lambda_T \cos_{q_{\lambda}} \right) \right],$$

$$M_{\lambda\tau} = M_{\tau\lambda} = -\frac{\lambda}{r} ml^{\tau},$$

$$M_{\lambda\tau} = M_{\tau\lambda} = -ml^{\tau} \left[\frac{\lambda}{r} \left(\frac{\lambda}{r} - \cos_{q_{\lambda} - q_{\tau}} \right) + \mu_T \lambda_T (\lambda_T - \cos_{q_{\lambda}}) \right],$$

$$M_{\tau\tau} = M_{\tau\tau} = \frac{\lambda}{r} ml^{\tau} \left(\frac{\lambda}{r} - \cos_{q_{\lambda} - q_{\tau}} \right). \quad (1)$$