

تحلیل تنش پادصفحه‌یی صفحه‌ی بی‌نهایت حاوی چندین ترک براساس نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی

محمد نوکلی (کارشناس ارشد)
علیرضا فتوحی* (استادیار)
گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

در تحقیق حاضر با استفاده از حل نابه‌جایی پادصفحه‌یی در صفحه‌ی بی‌نهایت، و نیز با استفاده از نظریه‌ی توزیع نابه‌جایی، میدان تنش پادصفحه‌یی اطراف ترک ارائه شده است. میدان تنش در نوک نابه‌جایی هیچ‌گونه تکینگی ندارد که با نتایج نظریه همخوانی دارد. به همین ترتیب حل ترک در صفحه‌ی بی‌نهایت نیز دارای هیچ‌گونه تکینگی در نوک ترک نیست و مقدار تنش در نوک ترک مشخص است. چند مثال عددی برای نشان دادن صحت و قابلیت روش حل مسئله ارائه شده است که اثر طول ترک، پارامتر شبکه به همراه یک ثابت عددی در پارامتر غیرموضعی به‌عنوان متغیری که در برگزیده‌ی همه‌ی آن‌هاست لحاظ شده است. نمودار تنش در نوک ترک و خارج آن رسم شده و نتایج به دست آمده با نتایج کلاسیک در این زمینه مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: کشسانی غیرموضعی، ترک، توزیع نابه‌جایی، نابه‌جایی پادصفحه‌یی، پادصفحه‌یی، صفحه‌ی بی‌نهایت.

۱. مقدمه

پیش‌بینی می‌شود. این موضوع باعث شد تا محققین ملاک‌هایی مستقل از حالت تنش در نوک ترک -- نظیر نرخ آزادسازی انرژی، چقرمگی شکست، انتگرال جی^۱ و غیره -- برای شکست ارائه دهند.

در ادامه مرور کوتاهی بر کارهای مربوط به نابه‌جایی و ترک تحت بارگذاری پادصفحه‌یی خواهیم داشت. معادلات اساسی کشسانی غیرموضعی به‌وسیله‌ی دینامیک شبکه‌یی توسط کرام هنسل^[۱-۳] ارائه شده است. حل کشسانی غیرموضعی ارائه شده توسط ارینگن و کیم^[۴] نشان داد که تنش در نوک ترک محدود است و به مقدار بیشینه‌اش می‌رسد و با فاصله گرفتن از نوک ترک کاهش می‌یابد. این نتایج منجر به معرفی یک معیار شکست، براساس فرضیه‌ی تنش بیشینه شد. تحقیقات در مورد میدان تنش و انرژی کرنش یک نابه‌جایی پادصفحه‌یی نیز با استفاده از تابع گرین در معادله‌ی هلمهولتز توسط ارینگن^[۵] انجام شده است. در این تحقیق معادلات انتگرالی در کشسانی خطی غیرموضعی به معادلات انتگرالی تکین که کرنل آنها از لحاظ فیزیکی قابل دست‌یابی است، ساده شده است. حل معادلات مذکور برای نابه‌جایی و امواج سطحی به دست آمده، و مشاهدات آزمایشگاهی و نتایج دینامیک شبکه‌یی گواهی بر درستی روابط حاصله‌اند. ارینگن^[۶] با استفاده از نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی، روش حلی برای نابه‌جایی لبه‌یی ارائه داده است. او در این تحقیق علاوه بر به‌دست آوردن میدان تنش، انرژی کرنش را نیز محاسبه کرده است. تکینگی موجود در میدان تنش براساس نظریه‌ی کلاسیک در این تحقیق که از نظریه‌ی غیرموضعی بهره برده است مشاهده نمی‌شود. با استفاده از معادلات غیرموضعی میدان تنش در صفحه‌یی با یک ترک که تحت تنش برشی پادصفحه‌یی

نابه‌جایی‌های موجود در نوک ترک یا به‌طور کلی در اجسام جامد، بسته به موقعیت و توزیع شان روی میدان تنش تأثیرگذارند. ثابت شده است که حل کلاسیک مسائل و روابط بین ترک و نابه‌جایی در ناحیه‌ی هسته‌ی نوک ترک و نابه‌جایی به‌دلیل آن که روابط تنش مربوط به این عیوب دارای تکینگی هستند شکست خورده است. حل کلاسیک باعث به دست آمدن مقدار بی‌نهایت برای تنش شده که امکان‌پذیر نیست. برای حل این مشکل باید از مدل‌های شبکه‌ی اتمی یا از کشسانی غیرموضعی کمک گرفت. حلی که کشسانی غیرموضعی از ترک و نابه‌جایی ارائه می‌دهد شامل این تکینگی در نوک ترک یا نابه‌جایی نیست. علاوه بر این، چقرمگی و استحکام نظری پیش‌بینی شده توسط این نظریه‌ی خیلی به نتایج نظریه‌ی شبکه‌ی اتمی و آزمایشگاهی نزدیک است.

کشسانی غیرموضعی مدل‌سازی مکانیک محیط پیوسته است که به‌دلیل داشتن طول مشخص ماده در روابط تنش و کرنش می‌تواند برای مسائل در مقیاس اتمی به کار رود. نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی در مورد فیزیک مواد است به‌گونه‌یی که رفتار در یک نقطه‌ی دلخواه تحت تأثیر حالت همه‌ی نقاط جسم است.

نظریه‌ی غیرموضعی توجه بسیاری از نویسندگان را به خود جلب کرد. شاید دلیل این جذب، موفقیت زود هنگام در حل دوباره‌ی مسائل قدیمی در مکانیک شکست باشد. براساس نظریه‌ی کشسانی کلاسیک تنش بی‌نهایت در نوک ترک

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۱۲/۷، اصلاحیه ۱۳۹۳/۶/۱۲، پذیرش ۱۳۹۳/۷/۱.

ثابت قرار دارد^[۷] به دست آمده که به‌عنوان مود ۳ شناخته می‌شود. یکی از دلایل اصلی به کارگیری کشسانی غیرموضعی، حل مشکل تکیه‌گی تنش در نوک ترک است که با توجه به نتایج حاصله در این مرجع، این تکیه‌گی در نوک ترک حذف شده و مقدار تنش در آن مقداری مشخص است. با مساوی قرار دادن تنش برشی بیشینه در نوک ترک با تنش برشی لازم برای شکستن پیوند بین اتمی در جسم، مقدار بحرانی تنش برشی اعمالی برای شروع شکست به دست آمده است. یکی از کارهای انجام شده روی مسئله‌ی گریفیث^۲ برای حذف تکیه‌گی تنش در نوک ترک، استفاده از نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی است.^[۸] در این مرجع مدل دوبعدی مسئله‌ی گریفیث بررسی شده است. معادلات انتگرالی حاصل از شرایط مرزی مسئله به‌صورت عددی محاسبه شده‌اند که در مورد شرایط همگرایی آن‌ها نیز بحث شده است. حل کشسانی غیرموضعی ترک شامل هیچ‌گونه تکیه‌گی در نوک ترک نیست و در نتیجه به‌وضوح نشان می‌دهد که در ماهیت فیزیکی مسئله -- در نزدیکی ناپوستگی‌های هندسی در جسم -- نیروهای بین مولکولی غیرموضعی غالب‌اند. بنابراین برای چنین مسائلی کم‌ترین کاری که باید انجام داد دخیل کردن اثرات غیرموضعی در همسایگی ناپوستگی‌ها در جسم است.

در یکی از تحقیقات انجام شده، میدان تنش غیرموضعی ترک در مود ۱ با استفاده از مدل کردن ناهنجاری‌ها به دست آمده است.^[۹] در این تحقیق از ناهنجاری لبه‌یی برای مدل کردن ترک استفاده شده است. علاوه بر این، اثر نیروی بین دو لبه بالای و پایینی ترک لحاظ شده است زیرا فرض بر این بوده که میزان جابه‌جایی بین دو لبه‌ی ترک از مرتبه‌ی فاصله‌ی بین اتمی در مواد است که در محدوده‌ی کاربردی کشسانی غیر موضعی است. بنابراین نه تنها تنش‌های کلاسیک لحاظ شده است بلکه اثر نیروی پیوستگی بین اتمی^۳ بین دو لبه‌ی بالا و پایین ترک نیز در نظر گرفته شده است. یکی دیگر از کارهای انجام شده حل مسائل با شرایط مرزی ترکیبی در کشسانی غیرموضعی است.

علاوه بر بررسی میدان تنش ترک در حالت اعمال تنش پادصفحه‌یی، ارینگن^[۱۰] میدان تنش در مود ۲ را با استفاده از نظریه‌ی کشسانی مذکور برای ترک به دست آورد. میدان تنش در نزدیکی یک ترک مستقیم که تحت تنش برشی یکنواخت قرار دارد در یک صفحه‌ی کشسان به دست آمده است. ثابت شده است که روابط تنش به دست آمده دارای هیچ‌گونه تکیه‌گی در نوک ترک نیستند و لذا با استفاده از معیار شکست بیشینه‌ی تنش برشی مقدار بحرانی تنش برشی زمانی که باعث ناپایداری ترک می‌شود به دست آمده است. با استفاده از مفهوم انرژی سطح امکان محاسبه‌ی تنش لازم برای شکستن پیوندهای اتمی در مواد شکننده و ترد فراهم می‌شود که در این مرجع تنش پیوستگی فولاد در حالت بدون ناهنجاری محاسبه شده است. با به کارگیری نظریه‌ی غیرموضعی^[۱۱] روابط تنش کرنشی صفحه‌یی و میدان جابه‌جایی ترک که تحت تنش برشی صفحه‌یی قرار دارد به دست آمده است. برای حل این مسئله از روش اشیمیت^۴ استفاده شده است. برخلاف حل ارائه شده در نظریه‌ی کلاسیک، ورود پارامتر شبکه در معادلات باعث محدود شدن مقدار تنش در نوک ترک می‌شود. هر دو متغیر زاویه‌یی تنش و تابع چگالی انرژی کرنشی برای پیدا کردن موقعیت شروع شکست به‌همراه مقادیر ثابت آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. معیارهای قبلی شکست، زاویه‌ی ۴۵ درجه را برای شروع شکست با استفاده از کشسانی غیر موضعی پیش‌بینی کرده‌اند در حالی که این مقدار از نظریه‌ی کلاسیک ۷۵ درجه است. براساس معیار چگالی انرژی کرنش که در این مرجع استفاده شده، با نسبت پواسون ۰/۲۸ زاویه‌ی شکست ۸۰ درجه برای شروع گسیختگی ترک محاسبه شده که این مقدار به نتایج کلاسیک نزدیک‌تر است.

مسئله‌ی تمرکز تنش در نوک ترک در صفحه‌ی کشسان زمانی که صفحه تحت

بارکششی یکنواخت عمود بر خط ترک در بی‌نهایت (با انواع دیگر بار) است توجه بسیاری را به دلیل ارتباط آن با پدیده‌ی شکست به خود جلب کرده است. با استفاده از نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی تمرکز تنش در نوک ترک محاسبه شده است که تمرکز تنش به دست آمده مقداری مشخص و محدود دارد و وابسته به طول ترک است.^[۱۲] رفتار یک ناهنجاری پادصفحه‌یی با یک ترک سطحی با استفاده از کشسانی غیرموضعی تحت بارگذاری برشی^[۱۳] بررسی شده است. در این تحقیق از روشی برای توزیع ناهنجاری پادصفحه‌یی برای مدل کردن ترک سطح در مود ۳ (تنش برشی خارج از صفحه) استفاده شده است. سپس تنش‌های ناهنجاری پادصفحه‌یی و ترک سطحی در کشسانی غیر موضعی به دست آمده است. نزدیک نوک ترک و ناهنجاری مقادیر حدی محاسبه شده‌اند. تنش برای ترک در غیاب ناهنجاری و ناهنجاری در غیاب ترک نیز به‌طور جداگانه به دست آمده است. در غیاب ناهنجاری، ترک سطحی به‌تنهایی تحلیل شده است و موقعی که ترک سطحی وجود ندارد ناهنجاری تحلیل شده است. مقادیر بیشینه‌ی تنش برشی با استفاده از نظریه‌ی غیرموضعی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده که نشان می‌دهد نتایج این نظریه به نتایج آزمایشگاهی نسبت به نتایج کلاسیک نزدیک‌تر است.

در این مقاله با توجه به کاربرد مفهوم ترک به‌عنوان توزیع پیوسته‌یی از ناهنجاری‌ها، حل یک ترک مستقیم در صفحه‌ی کشسان که تحت تنش برشی ثابت پادصفحه‌یی قرار دارد با استفاده از نظریه‌ی توزیع ناهنجاری و روابط به دست آمده از ناهنجاری پادصفحه‌یی به دست آمده است. ابتدا شرح مختصری بر معادلات مربوط به کشسانی غیرموضعی در حالت پادصفحه‌یی خواهیم داشت و سپس با استفاده از معادلات کشسانی غیرموضعی برای صفحه‌ی بی‌نهایت حاوی ناهنجاری پادصفحه‌یی و نظریه‌ی توزیع ناهنجاری، مسئله‌ی صفحه‌ی بی‌نهایت حاوی ترک تحت تنش پادصفحه‌یی به دست می‌آید. به‌منظور روشن‌تر شدن نتایج به دست آمده و قابلیت روش مورد استفاده، چند مثال حل شده است.

۲. معادلات کشسانی غیرموضعی

در این بخش معادلات اساسی مربوط به نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی که برای تحلیل مسئله مورد استفاده قرار می‌گیرد بیان می‌شود و در نهایت معادلات مربوط به مسئله‌ی ترک بیان خواهد شد.

براساس نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی که توسط ارینگن ارائه شد، تانسور تنش در یک نقطه‌ی دلخواه مانند x در دامنه‌ی ماده فقط به تانسور کرنش در این نقطه بستگی ندارد بلکه به تانسور کرنش در هر نقطه (x') از دامنه‌ی جسم وابسته است.^[۱۴] با احتساب اثر برد بلند بین اتم‌های یک ماده، معادله‌ی اساسی خطی در ماده‌ی کشسان همگن عبارت است از:^[۱۵]

$$t_{kl} = \lambda e_{rr} \delta_{kl} + \int_{\mathcal{V}} (\lambda' e_{rr}(x') \delta_{kl} + 2\mu' e_{kl}(x')) dv(x') \quad (1)$$

$$e'_{kl} = \frac{1}{\nu} (u'_{k,l} + u'_{l,k}) u'_k = u_k(x') \quad (2)$$

$$u'_{k,l} = \partial u'_k / \partial x'_l \quad (3)$$

λ و μ ثابت‌های ماده و λ' و μ' ضرایب کشسانی غیرموضعی‌اند که تابعی از فاصله‌ی بین یک نقطه‌ی دلخواه در جسم و نقطه‌ی مرجع تحت محاسبه‌اند و می‌توان آن را

به صورت ریاضی نمایش داد: [۶]

$$\lambda' = \lambda' (|x' - x|), \quad \mu' = \mu' (|x' - x|) \quad (۴)$$

اجزای تانسور کرنش است که می توان آن را بر حسب بردار جابه جایی u چنین نوشت: [۶]

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (۵)$$

معادله حرکت نیز عبارت است از:

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \ddot{u}_l) = 0 \quad (۶)$$

که در آن f_l و \ddot{u}_l به ترتیب جزء l ام نیروی حجمی و بردار شتاب هستند. با صرف نظر کردن از نیروی اینرسی و حجمی معادله بالا چنین ساده می شود:

$$t_{kl,k} = 0 \quad (۷)$$

معادله ۱ را می توان با تلفیق λ و μ در λ' و μ' به صورت رابطه ۸ نوشت:

$$t_{kl} = \int_v (\lambda' e_{rr}(x') \delta_{kl} + 2\mu' e_{kl}(x')) dv(x') \quad (۸)$$

در اینجا فرض بر این است که پراکنندگی مدول غیر موضعی در محدوده مشخصی است و توابع مثبت معینی در دامنه محدودی حول نقطه x هستند که خارج از این دامنه وجود ندارند. در حد وقتی که این توابع به تابع دلتای دیراک تبدیل می شود معادله ۸ به فرم معادله ساختاری کشسانی کلاسیک تبدیل می شود. از میان توابع ممکن برای λ' و μ' تابع ۹ به عنوان بهترین توصیف برگزیده شده است: [۶]

$$(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)\alpha(|x' - x|) \quad (۹)$$

که در آن، $\alpha(|x' - x|)$ یک ضریب کاهش می باشد که برهمکنش های غیر موضعی را مشخص می کند و با توجه به این که سطح زیر منحنی α واحد است به طوری که در حالت یک بعدی وقتی a به سمت صفر میل کند رابطه مربوط به کشسانی کلاسیک به دست می آید. برای حالت دو و سه بعدی، باید $\alpha(x)$ را با در نظر گرفتن سطح یا حجم انتگرال $\alpha(|x' - x|)$ روی ناحیه اشغال شده توسط جسم و مساوی قرار دادن آن با مقدار واحد بی بعد کرد: [۱۵]

$$\int_v \alpha(|x' - x|) dv' = 1 \quad (۱۰)$$

با جایگذاری رابطه ۹ در رابطه ۸ و استفاده از رابطه ۱۰ خواهیم داشت: [۶]

$$t_{kl} = \int_v \alpha(|x' - x|) \sigma'_{kl} dv' \quad (۱۱)$$

که براساس قانون هوک کلاسیک σ'_{kl} عبارت است از: [۶]

$$\sigma'_{kl} = \sigma_{kl}(x') = \lambda e_{rr}(x') \delta_{kl} + 2\mu e_{kl}(x') \quad (۱۲)$$

یک فرم مناسب برای تابع $\alpha(|x' - x|)$ در مسائل دوبعدی، فرم گوسی آن است: [۶]

$$\alpha(|x' - x|) = \alpha \cdot \exp\left[-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 (x' - x) \cdot (x' - x)\right] \quad (۱۳)$$

که در آن، β مقدار ثابتی است و a طول مشخصه داخلی یا پارامتر ثابت شبکه کریستالی ماده است. ثابت α نیز براساس رابطه ۱۰، به صورت رابطه ۱۴ بیان می شود:

$$\alpha = \frac{(\beta/a)^2}{\pi} \quad (۱۴)$$

با جایگذاری رابطه ۱۱ در رابطه ۷، و استفاده از قضیه گرین رابطه ۱۵ حاصل می شود. موقعی که ابعاد جسم بزرگ باشد می توان از تنش ها در بی نهایت صرف نظر کرد: [۶]

$$\int_v \alpha(|x' - x|) \sigma_{kl,k}(x') dv(x') + \oint_{\partial v} \alpha(|x' - x|) \sigma_{kl}(x') da_k(x') = 0 \quad (۱۵)$$

۱.۲. روابط پادصفحه‌یی

در حالتی که تغییر شکل ها فقط در راستای x_3 باشد تنها متغیر تغییر شکل غیر صفر w خواهد بود؛ در نتیجه مؤلفه های جابه جایی و تنشی مطابق روابط ۱۶ تا ۱۹ خواهد بود. این حالت را پادصفحه‌یی نامیده اند: [۱۶]

$$u = v = 0 \quad (۱۶)$$

$$w = w(x, y) \quad (۱۷)$$

$$e_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (۱۸)$$

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (۱۹)$$

معادله غیرموضعی تنش در حالت پادصفحه‌یی عبارت است از:

$$t_{xz} = \int_v \alpha(|x' - x|) \sigma'_{xz} dv' \quad (۲۰)$$

$$t_{yz} = \int_v \alpha(|x' - x|) \sigma'_{yz} dv' \quad (۲۱)$$

۳. میدان تنش حاصل از نابه جایی پادصفحه‌یی

میدان تنش حاصل از نابه جایی پادصفحه‌یی در صفحه بی نهایت (شکل ۱)، در دستگاه مختصات دکارتی عبارت است از: [۱۷]

$$t_{xz} = -\left(\frac{\mu b_z}{2\pi}\right) \frac{y}{x^2 + y^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 (x^2 + y^2)}\right) \quad (۲۲)$$

$$t_{yz} = \left(\frac{\mu b_z}{2\pi}\right) \frac{x}{x^2 + y^2} \left(1 - e^{-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2 (x^2 + y^2)}\right) \quad (۲۳)$$

۴. مسئله ترک در صفحه بی نهایت

برای حل مسئله از اصل باکنر و مدل کردن ترک با استفاده از توزیع نابه جایی در امتداد خط ترک استفاده می شود. ابتدا تکنیک مدل کردن ترک با استفاده از روش توزیع نابه جایی معرفی می شود و در ادامه به فرمول بندی مسئله می پردازیم.

روی سطح ترک نام به دلیل حضور توزیع نابه‌جایی ذکر شده روی N تا ترک برابر است با:

$$\tau_{nz}(\alpha_i(t), \beta_i(t)) = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 F_{ij}(t, s) \sqrt{[\alpha'_j(s)]^2 + [\beta'_j(s)]^2} B_{zj}(s) ds \quad (26)$$

$-1 \leq t \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N$

که در آن:

$$F_{ij}(t, s) = f_{yz}(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) \cos \theta_i - f_{xz}(\alpha_i, \beta_i, \alpha_j, \beta_j) \sin \theta_i \quad (27)$$

صفحه‌ی بی‌نهایت مورد نظر، که توسط N ترک تضعیف شده است، تحت بردار تنش یکنواخت (مطابق رابطه‌ی ۲۸) در صفحات ترک را در نظر بگیرید.

$$\tau_{nz}(\alpha_i(t), \beta_i(t)) = \tau_0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad -1 \leq t \leq 1 \quad (28)$$

حال با تلفیق روابط ۲۸ و ۲۶، N معادله‌ی انتگرالی برای مسئله‌ی مورد بررسی به دست می‌آید:

$$\tau_0 = \sum_{j=1}^N \int_{-1}^1 F_{ij}(t, s) \sqrt{[\alpha'_j(s)]^2 + [\beta'_j(s)]^2} B_{zj}(s) ds \quad (29)$$

$i = 1, 2, \dots, N$

که در آن مقدار $F_{ij}(t, s)$ از رابطه‌ی ۲۷ به دست می‌آید. مقدار بازشدگی دهانه‌ی ترک در هر نوک ترک صفر است در نتیجه با حرکت از یک نوک ترک به سمت نوک دیگر نابه‌جایی خالص صفر است.

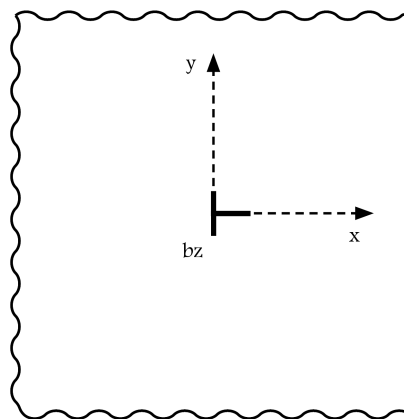
$$\int_{-1}^1 \sqrt{[\alpha'_j(s)]^2 + [\beta'_j(s)]^2} B_{zj}(s) ds = 0 \quad (30)$$

$j = 1, 2, \dots, N$

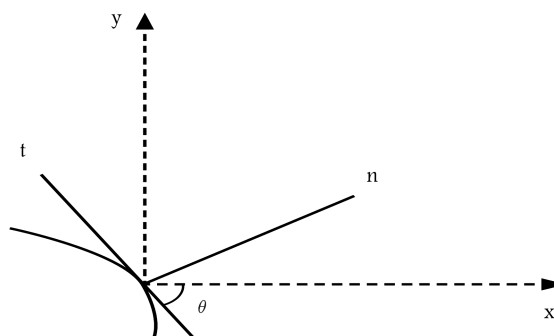
برای محاسبه‌ی چگالی نابه‌جایی در صفحات ترک باید معادلات ۲۹ و ۳۰ را به‌طور همزمان حل کرد. برای این منظور از روش گوس - چیشیف^۵ استفاده شده است.^[۱۸] در اینجا چگالی نابه‌جایی دارای تکیه‌گی از نوع ریشه دوم در نوک ترک است.^[۱۹] بنابراین، چگالی نابه‌جایی به‌عنوان تابع ۳۱ در نظر گرفته شده است.

$$B_{zj}(s) = \frac{\phi_{zj}(s)}{\sqrt{1-s^2}}, \quad -1 \leq s \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (31)$$

با جایگزین کردن معادلات ۳۱ در معادلات انتگرالی ۲۹ و ۳۰ و تجزیه‌ی بازه $-1 \leq s \leq 1$ به $N+1$ زیربازه، معادلات انتگرالی مذکور به یک دستگاه معادلات شامل $N \times N$ معادله‌ی جبری خطی ساده می‌شوند. ذکر این نکته ضروری است که با توجه به این که مسئله باید به‌طور همزمان توسط معادلات ۲۹ و ۳۰ حل شود، از رابطه‌ی ۲۹ تعداد $(N-1) \times N$ معادله حاصل می‌شود و از رابطه‌ی ۳۰ تعداد $N \times 1$ معادله که با ترکیب آن‌ها یک دستگاه معادلات $N \times N$



شکل ۱. محل قرارگیری نابه‌جایی در صفحه‌ی بی‌نهایت.



شکل ۲. نمایش ترک در دستگاه مختصات.

صفحه‌ی بی‌نهایت شامل N ترک منحنی شکل با معادلات پارامتری $x_i = \alpha_i(t)$ و $y_i = \beta_i(t)$ ، $i = 1, 2, \dots, N$ ، $-1 \leq t \leq 1$ مفروض است. در شکل ۲ ترک نام نشان داده شده است. با توجه به دستگاه مختصات عمود بر هم $n-t$ در نظر گرفته شده روی ترک را که مبدأ آن روی ترک قرار دارد و محور t آن همواره مماس بر صفحه‌ی ترک باقی می‌ماند، در نظر بگیرید. بردار تنش در صفحه‌ی ترک نام ناشی از توزیع نابه‌جایی، برحسب مؤلفه‌های تنش در دستگاه مختصات دکارتی عبارت است از:

$$\tau_{nz}(\alpha_i, \beta_i) = \tau_{yz}(\alpha_i, \beta_i) \cos \theta_i(t) - \tau_{xz}(\alpha_i, \beta_i) \sin \theta_i(t) \quad (24)$$

که در آن $\theta_i(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\beta'_i(t)}{\alpha'_i(t)} \right)$ زاویه‌ی بین محور x و t ، و علامت پریم نشان‌گر مشتق نسبت به متغیر وابسته است.

مؤلفه‌های تنش به وجود آمده توسط نابه‌جایی پادصفحه‌ی را که در مختصات (x', y') واقع بر خط نابه‌جایی واقع شده‌اند، می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۲۵ نوشت:

$$\tau_{jz}(x, y) = b_z \times f_{jz}(x, y, x', y') \quad (25)$$

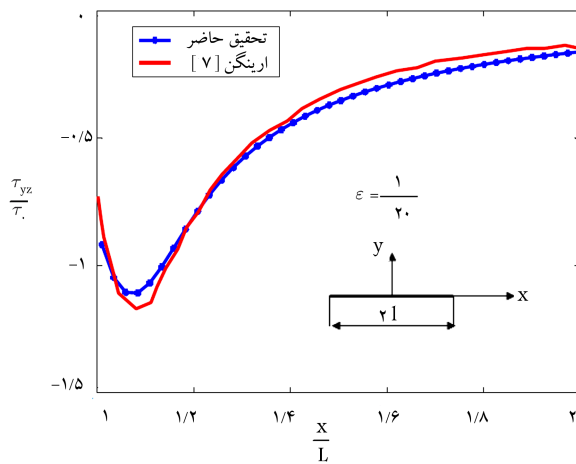
که در آن $f_{jz}(x, y, x', y')$ و $j = x, y$ ضرایب b_z هستند و از روابط ۲۲ و ۲۳ به دست می‌آیند.

اگر نابه‌جایی‌ها با تابع چگالی مجهول $B_{zj}(s)$ روی قسمتی از ترک زام به طول $dx'_j = \sqrt{[\alpha'_j(s)]^2 + [\beta'_j(s)]^2} ds$ توزیع شده باشد، آنگاه تنش پادصفحه‌ی

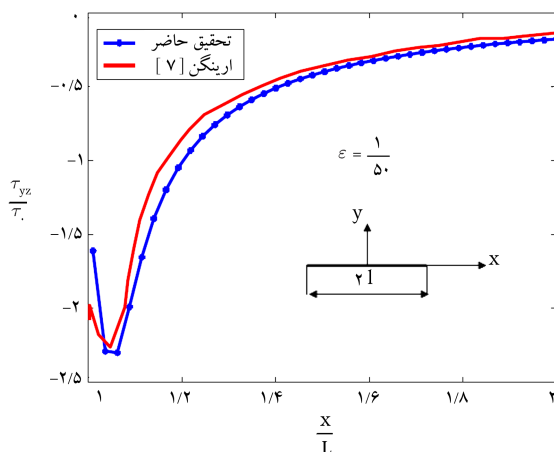
شده است. نتایج یک صفحه‌ی بی‌نهایت با چند ترک مستقیم تحت تنش برشی پادصفحه‌یی، مورد بررسی قرار گرفته است. اعتبارسنجی این روش با در نظر گرفتن یک ترک تحت بار برشی ثابت پادصفحه‌یی و با توجه به پارامتر $\varepsilon = \frac{a}{\beta l}$ انجام شده که a پارامتر شبکه، β عددی ثابت و l نصف طول ترک است. سپس مسئله‌ی دو ترک مستقیم هم‌راستا، مثال‌هایی از دو ترک در موقعیت‌های مختلف و همچنین مسئله‌ی دو ترک خمیده حل شده است که برخی از نتایج قابل مقایسه با نتایج دیگر مطالعات [۷] خواهد بود. در تمام مثال‌ها برای سادگی $l = 1$ در نظر گرفته شده و در محاسبات مقدار $\varepsilon = \frac{1}{\beta}$ لحاظ شده است.

الف) یک ترک مستقیم

در این مثال یک صفحه‌ی بی‌نهایت تضعیف شده با یک ترک به طول $2l$ تحت بارگذاری قرار گرفته است. تغییرات تنش بی‌بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_0}$ در امتداد راستای ترک از نوک ترک و خارج آن برحسب متغیر بی‌بعد طول ترک $\frac{x}{l}$ یعنی متغیر t با مقادیر $\varepsilon = \frac{1}{\beta}$ ، $\varepsilon = \frac{1}{5}$ ، $\varepsilon = \frac{1}{10}$ و $\varepsilon = \frac{1}{20}$ در شکل‌های ۳ تا ۶ به همراه نتایج ارائه شده [۷] برای یک ترک مستقیم به منظور اعتبار روش استفاده شده، نشان داده شده است.



شکل ۳. مقایسه‌ی تنش بی‌بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_0}$ حاصل از این تحقیق و ارینگن [۷] در مقدار $\varepsilon = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{20}$.



شکل ۴. مقایسه‌ی تنش بی‌بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_0}$ حاصل از این تحقیق و ارینگن [۷] در مقدار $\varepsilon = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{5}$.

تشکیل می‌شود. شکل ماتریسی این دستگاه معادلات عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{z1}(s_i) \\ \phi_{z2}(s_i) \\ \vdots \\ \phi_{zN}(s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(t_k) \\ q_2(t_k) \\ \vdots \\ q_{zN}(t_k) \end{bmatrix} \quad (32)$$

که مجموعه‌ی N نقطه‌ی مجزا انتگرال‌گیری در بازه $[-1, 1]$ برابر است با:

$$s_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N}\right), \quad i = 1, \dots, N \quad (33)$$

و $N-1$ نقطه‌ی میانی در همان بازه برابر است با:

$$t_k = \cos\left(\pi \frac{k}{N}\right), \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (34)$$

همچنین درایه‌های ماتریس A برابر است با:

$$A_{ij} = \frac{\pi}{N} \begin{bmatrix} F_{ij}(t_1, s_1) \Delta_j(s_1) & F_{ij}(t_1, s_2) \Delta_j(s_2) & \dots & F_{ij}(t_1, s_N) \Delta_j(s_N) \\ F_{ij}(t_2, s_1) \Delta_j(s_1) & F_{ij}(t_2, s_2) \Delta_j(s_2) & \dots & F_{ij}(t_2, s_N) \Delta_j(s_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{ij}(t_{N-1}, s_1) \Delta_j(s_1) & F_{ij}(t_{N-1}, s_2) \Delta_j(s_2) & \dots & F_{ij}(t_{N-1}, s_N) \Delta_j(s_N) \\ \delta_{ij} \Delta_j(s_1) & \delta_{ij} \Delta_j(s_2) & \dots & \delta_{ij} \Delta_j(s_N) \end{bmatrix} \quad i, j = 1, \dots, N \quad (35)$$

و در سطر آخر δ_{ij} تابع دلتای کرونکر است و عبارت است از:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (36)$$

$$\Delta_j(s) = \sqrt{[\alpha'_j(s)]^2 + [\beta'_j(s)]^2} \quad (37)$$

و نهایتاً مؤلفه‌های بردارهای به کاررفته در رابطه‌ی ۳۶ برابر است با:

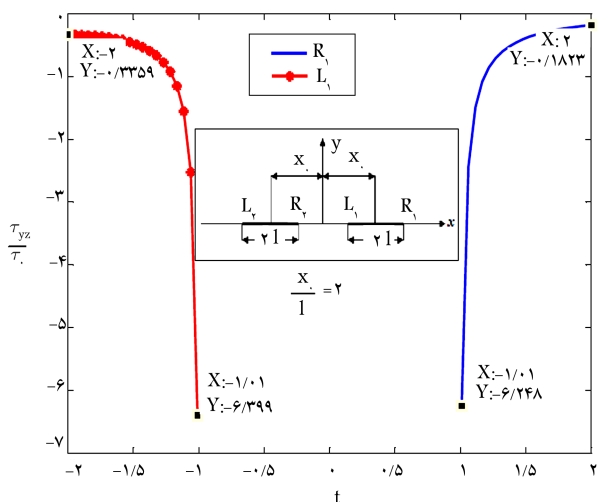
$$\phi_{zj}(s_i) = [\phi_{zj}(s_1) \quad \phi_{zj}(s_2) \quad \dots \quad \phi_{zj}(s_N)]^T \quad (38)$$

$$q_j(t_k) = [\tau_{nz}(x_j(t_1), y_j(t_1)) \quad \tau_{nz}(x_j(t_2), y_j(t_2)) \quad \dots \quad \tau_{nz}(x_j(t_{N-1}), y_j(t_{N-1})) \quad 0]^T \quad (39)$$

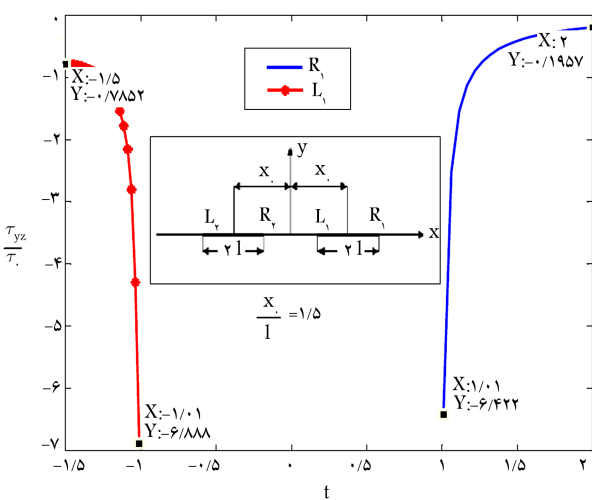
در روابط ۳۸ و ۳۹ بالاترین T نشانگر ترانهاده‌ی بردار مربوطه است.

۵. نتایج عددی

برای نشان دادن کارایی روش توزیع نابه‌جایی در حل مسائل چندین ترک، چند مثال مختلف حل شده است. در تمامی مثال‌ها تنش $\tau_{yz} = \tau_0$ روی ترک اعمال



شکل ۷. تنش بی بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_c}$ بر حسب متغیر بی بعد $t, \frac{x_0}{l} = 2$



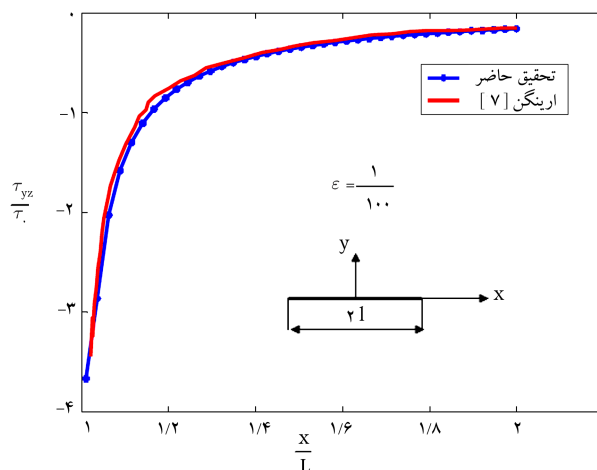
شکل ۸. تنش بی بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_c}$ بر حسب متغیر بی بعد $t, \frac{x_0}{l} = 1/5$

چنان که از نتایج شکل‌های ۷ و ۸ پیداست، تغییر در فاصله‌ی بین مراکز ترک با طول ترک ثابت باعث تغییر در مقدار تنش برشی بی‌بعد در اطراف ترک می‌شود به طوری که با کاهش این فاصله تنش‌ها هم در نوک داخلی و هم در نوک خارجی ترک‌ها افزایش یافته است. علاوه بر این، مقدار این افزایش در نوک داخلی ترک به دلیل تأثیرپذیری بیشتر دو ترک نسبت به هم از نوک خارجی آن بیشتر است.

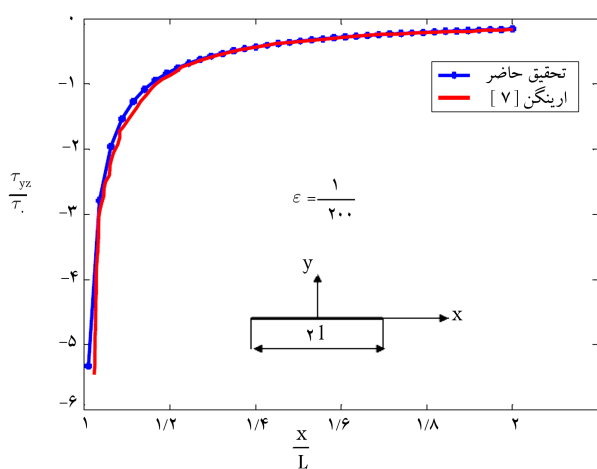
ج) دو ترک مستقیم با فاصله‌ی عمودی و افقی از یکدیگر

در مثال سوم دو ترک مستقیم بررسی می‌شود. لبه‌های داخلی دو ترک با فاصله‌ی افقی $0.3l$ و در فاصله‌ی عمودی $h = 0.2l$ از یکدیگر قرار دارند و با حالتی که دو ترک با فاصله‌ی عمودی $h = 0.2l$ قرار دارند مقایسه شده است. طول دو ترک یکسان و برابر با $2l$ است.

با توجه به نتایج به دست آمده از شکل ۹، درمی‌یابیم که وقتی دو ترک نسبت به هم نزدیک‌ترند تنش در بین دو ترک، نسبت به حالتی که نوک‌های داخلی دو ترک دارای فاصله‌ی افقی از یکدیگرند، بیشتر است.



شکل ۵. مقایسه‌ی تنش بی بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_c}$ حاصل از این تحقیق و ارینگن [۷] در مقدار $\epsilon = \frac{1}{100}$

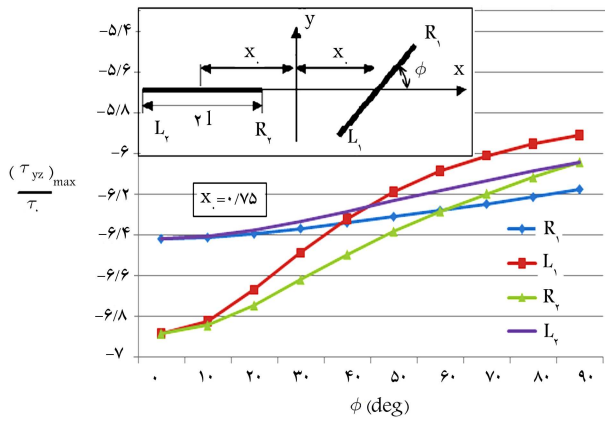


شکل ۶. مقایسه‌ی تنش بی بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_c}$ حاصل از این تحقیق و ارینگن [۷] در مقدار $\epsilon = \frac{1}{200}$

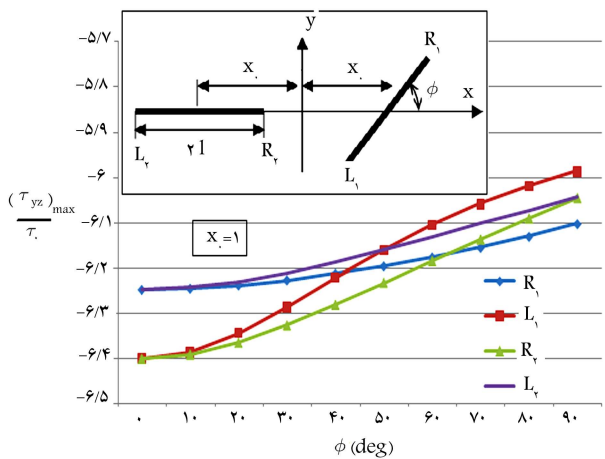
از آنجا که مسئله نسبت به محور y متقارن است نمودارهای تنش بی‌بعد برحسب فاصله‌ی بی‌بعد شده به نصف طول ترک در یک لبه‌ی ترک رسم شده‌اند. همان‌طور که از نتایج شکل‌های ۳ تا ۶ پیداست، تغییرات تنش با دور شدن از نوک ترک روند نزولی داشته و مقدار بیشینه‌ی آن در نوک ترک است که در هر دو نظریه‌ی توزیع ناهم‌جایی و ارینگن نیز این نتیجه مشهود است و تطابق خوبی با یکدیگر دارند. یکی از نتایج مهم دیگر این است که از مقدار $\epsilon = \frac{1}{200}$ دیگر تغییری در مقدار تنش در نوک ترک و خارج از آن حاصل نمی‌شود و به یک همگرایی می‌رسد.

ب) دو ترک مستقیم هم‌راستا

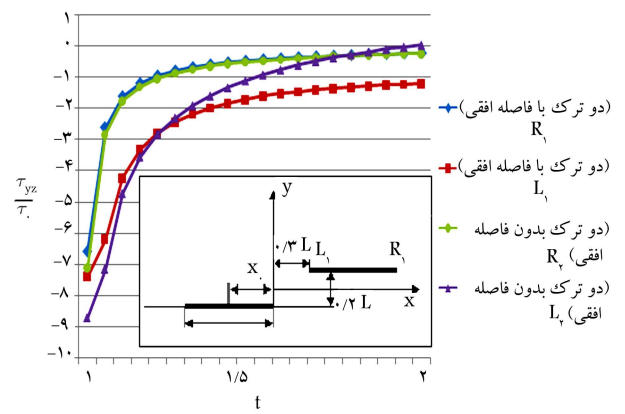
در مثال دوم دو ترک مستقیم هم‌راستا روی محور x و مرکز هر ترک به اندازه x_0 از مبدأ مختصات قرار گرفته‌اند. طول دو ترک یکسان و برابر با $2l$ است. اثر فاصله‌ی مراکز ترک‌ها بر تنش نوک داخلی دو ترک در مقدار ثابت $\epsilon = \frac{1}{300}$ ، طول ترک ۱ و دو مقدار $\frac{x_0}{l} = 1/5$ و $\frac{x_0}{l} = 2$ مورد بررسی قرار گرفته است. چنان که پیش‌تر بیان شد متغیر t پارامتر بی‌بعد مختصه x نسبت به نصف طول ترک یعنی l است.



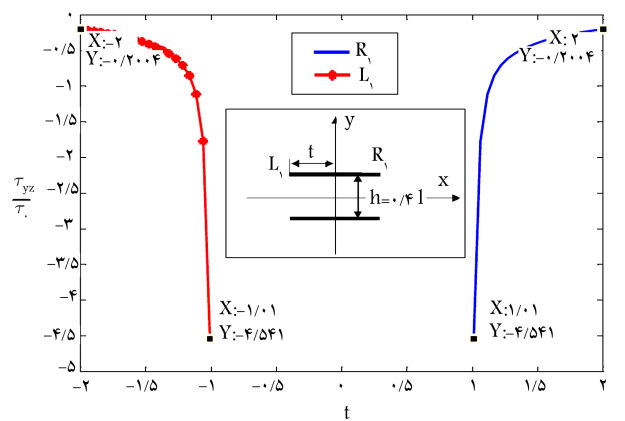
شکل ۸. تنش بی بعد $\frac{(\tau_{yz})_{max}}{\tau_c}$ بر حسب متغیر زاویه بر حسب $\frac{x_c}{l} = 0.75$.



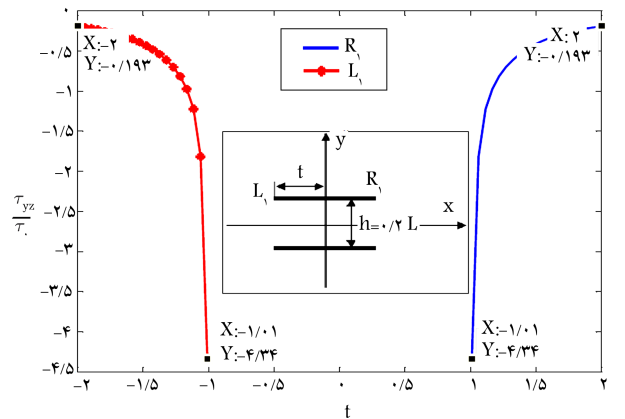
شکل ۹. تنش بی بعد $\frac{(\tau_{yz})_{max}}{\tau_c}$ بر حسب متغیر زاویه بر حسب $\frac{x_c}{l} = 1$.



شکل ۹. تنش بی بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_c}$ بر حسب متغیر بی بعد t .



شکل ۱۰. تنش بی بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_c}$ بر حسب متغیر بی بعد t , $h = 0.4l$.



شکل ۱۱. تنش بی بعد $\frac{\tau_{yz}}{\tau_c}$ بر حسب متغیر بی بعد t , $h = 0.2l$.

هـ) دو ترک یکی چرخان و دیگری مستقیم

در مثال پنجم دو ترک، یکی تحت زاویه نسبت به محور x و دیگری مستقیم و بدون زاویه، روی محور x بررسی می‌شود. مقادیر بیشینه تنش در نوک ترک در زوایای صفر تا نود درجه محاسبه شده است. طول دو ترک یکسان و برابر با $2l$ است. اثر فاصله مراکز ترک‌ها بر تنش داخلی دو ترک در مقدار ثابت $\frac{h}{l} = \frac{1}{5}$ ، طول ترک واحد و دو مقدار $\frac{x_c}{l} = 1.5$ و $\frac{x_c}{l} = 2$ مورد بررسی قرار گرفته است.

چنان‌که در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مشاهده می‌شود، تنش‌ها در هر ۴ نوک ترک با افزایش زاویه ترک اول تا 90° درجه افزایش پیدا کرده‌اند، به نحوی که مقدار تنش در زاویه 90° درجه در نوک R_1 کم‌تر از نوک L_1 بوده و همچنین مقادیر تنش در نوک R_2 و L_2 در زاویه 90° درجه به مرز یکسان می‌رسد که در مقایسه با تنش‌ها در ترک اول، مقادیر آن‌ها بین مقادیر تنش در ترک اول قرار دارد. علاوه بر این چنان‌که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود، کاهش فاصله‌ی بین دو ترک باعث افزایش تنش‌ها می‌شود.

د) دو ترک مستقیم موازی

در مثال چهارم دو ترک مستقیم موازی و اثر تغییر فاصله بین دو ترک بررسی می‌شود. دو ترک در فاصله‌ی عمودی $h = 0.4l$ و $h = 0.2l$ هستند و لبه‌های آن‌ها در یک امتداد قرار دارد. طول دو ترک یکسان و برابر با $2l$ است.

چنان‌که مشاهده می‌شود، تنش در نوک ترک با افزایش فاصله بین دو ترک موازی افزایش می‌یابد که در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ نشان داده شده است.^[۲۰]

و) دو ترک خمیده

در مثال هفتم دو ترک خمیده و اثر تغییر زاویه‌ی نوک داخلی از محور قائم بررسی می‌شود. برای تعریف انحنای دو ترک از معادله‌ی بیضی استفاده شده است؛

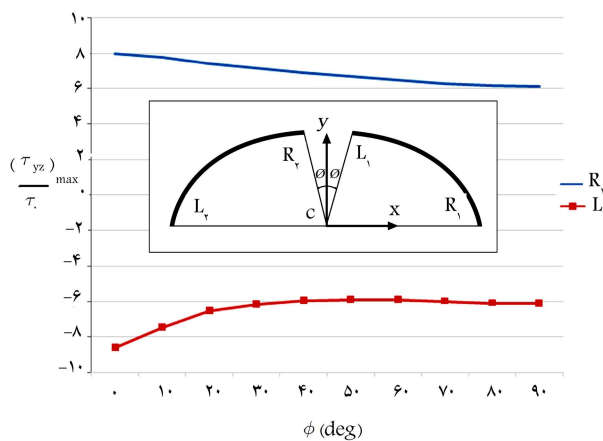
افزایش زاویه بر تنش نوک خارجی نیز تأثیرگذار است به‌گونه‌ی که تنش نوک خارجی نیز تدریجاً کم می‌شود.

۶. نتیجه‌گیری

در این مطالعه، تحلیل تنش صفحه‌ی بی‌نهایت، تضعیف شده با چندین ترک تحت بارگذاری پادصفحه‌ی ثابت با استفاده از روش ناهنجاری مورد بررسی قرار گرفت. برای این توزیع ناهنجاری، از ناهنجاری پادصفحه‌ی استفاده شده از قسمت قبل و روابط آن استفاده شده است که براساس نتایج به دست آمده می‌توان چیدمان مختلف ترک‌ها تحت بارگذاری دلخواه را مورد بررسی قرار داد.

پس از تحلیل و بررسی‌های صورت گرفته روی نتایج می‌توان به این نتیجه رسید که:

- با استفاده از نتایج مربوط به ناهنجاری در بحث مربوط به ترک، تنش در نوک ترک نیز با توجه به مثال‌های ارائه شده دارای مقدار مشخصی است که حاکی از عدم تکینگی تنش در نوک ترک است.
- تغییر در فاصله‌ی بین مراکز ترک با طول ترک ثابت باعث تغییر در مقدار تنش برشی بی‌بعد در اطراف ترک می‌شود، به طوری که با کاهش این فاصله تنش‌ها هم در نوک داخلی و هم در نوک خارجی ترک‌ها افزایش یافته است. علاوه بر این مقدار این افزایش در نوک داخلی ترک به دلیل تأثیرپذیری بیشتر دو ترک نسبت به هم از نوک خارجی آن بیشتر است.
- با کاهش فاصله‌ی عمودی دو ترک مستقیم، هم در نوک داخلی و هم در نوک خارجی بر مقدار تنش افزوده می‌شود که این افزایش در نوک داخلی به دلیل تأثیرپذیری دو ترک از یکدیگر بیشتر است.
- تنش در نوک در دو ترک موازی با افزایش فاصله بین دو ترک موازی افزایش و با کاهش فاصله کاهش می‌یابد.
- در دو ترک خمیده، هنگامی که دو نوک داخلی ترک به یکدیگر نزدیک‌اند تنش در نوک داخلی بیشتر از نوک خارجی است و با افزایش زاویه از صفر درجه به کم‌ترین مقدار خود در زاویه‌ی ۹۰ درجه می‌رسد. همچنین این افزایش زاویه بر تنش نوک خارجی نیز تأثیرگذار است به‌گونه‌ی که تنش نوک خارجی نیز رو به کاهش می‌گذارد.



شکل ۱۴. تنش بی‌بعد $\frac{(\tau_{yz})_{max}}{\tau_c}$ بر حسب انحراف لبه‌های داخلی ترک از محور عمودی.

معادلات پارامتری مربوط به این نوع ترک عبارت‌اند از: [۲۱]

$$\alpha_i(t) = x_c + (-1)^i a \cos \left[\frac{1}{\gamma} \left(1 - (-1)^i t \right) \psi \right] \quad (40)$$

$$\beta_i(t) = y_c + b \sin \left[\frac{1}{\gamma} \left(1 - (-1)^i t \right) \psi \right], \quad -1 \leq t \leq +1 \quad (41)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \cot \varphi \right) \quad (42)$$

که در آن نصف قطر بزرگ بیضی (a) برابر ۷/۰ و نصف قطر کوچک آن (b) برابر ۵/۰ است. x_c و y_c به ترتیب مختصات مرکز بیضی هستند و مقدار آن‌ها در این مثال برابر صفر در نظر گرفته شده است.

در شکل ۱۴، تنش بی‌بعد $\frac{(\tau_{yz})_{max}}{\tau_c}$ بر حسب متغیر ϕ در دو نوک یک ترک رسم شده است. چنان که مشاهده می‌شود هنگامی که دو نوک داخلی ترک به یکدیگر نزدیک‌اند تنش در نوک داخلی بیشتر از نوک خارجی است و با افزایش زاویه از صفر درجه به کم‌ترین مقدار خود در زاویه‌ی ۹۰ درجه می‌رسد. همچنین این

پانویس‌ها

1. J-Integral
2. Griffith
3. cohesive force
4. Schmitz
5. Gauss-Chebyshev

منابع (References)

1. Krumhansl, J.A. "Some considerations of the relation between solid state physics and generalized contin-

uum mechanics", in Mechanics of Generalized Continua, E. Kroner, Ed., Springer-Verlag, Berlin, pp. 298-311 (1968).

2. Kröner, E. and Datta, B.K. "Nichtlokale elastostatik: Ableitung aus der gittertheorie", *Zeitschrift für Physik*, **196**(3), pp. 203-211 (1966).

3. Kunin, I.A. "Model of elastic medium with simple structure and space dispersion", in Russian, *Prikl. Mat. Mekh.*, **30**, pp. 542-550 (1966).

4. Eringen, A.C. and Kim, B.S. "On the problem of crack tip in nonlocal elasticity", in Continuum Mechanics Aspects of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics,

- Thoft-Christensen, Ed., Reidel, Dordrecht, pp. 107-113 (1974).
5. Eringen, A.C. "On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *J. of Appl. Phys.*, **54**(9), pp. 4703-4710 (1983).
 6. Eringen, A.C. "Edge dislocation in nonlocal elasticity", *Int. J. of Engng. Sci.*, **15**(3), pp. 177-183 (1977).
 7. Eringen, A.C. "Line crack subject to antiplane shear", *Engng. Fracture Mech.*, **12**(2), pp. 211-219 (1979).
 8. Eringen, A.C., Speziale, C.G. and Kim, B.S. "Crack-tip problem in non-local elasticity", *J. of the Mech. and Phys. of Solids*, **25**(2), pp. 339-355 (1977).
 9. Wang, R. "Crack problem in nonlocal elasticity", *Sci. in China*, **33**(5), pp. 551-561 (1990).
 10. Eringen, A.C. "Line crack subject to shear", *Int. J. of Fracture*, **14**(4), pp. 367-379 (1978).
 11. Zhou, Z.G., Du, S.Y. and Han, J.C. "Non-local theory solution for in-plane shear of through crack", *Theo. and Appl. Fracture Mech.*, **30**(3), pp. 185-194 (1998).
 12. Eringen, A.C. and Byoung, S.K. "Stress concentration at the tip of crack", *Mech. Research Communications*, **1**(4), pp. 233-237 (1974).
 13. Pan, K.-L. "Interaction of a dislocation with a surface crack in nonlocal elasticity", *Int. J. of Fracture*, **69**(4), pp. 307-318 (1995).
 14. Sun, Y.-G. and Zhen-Gong, Z. "Stress field near the crack tip in nonlocal anisotropic elasticity", *Euro. J. of Mech. A/Solids*, **23**(2), pp. 259-269 (2004).
 15. Eringen, A.C., *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer-Verlag Inc., New York, pp. vi-ix (2001).
 16. Sadd, M.H., *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*, Academic Press, pp. 83-90 (2009).
 17. Tavakoli, M. and Fotuhi, A.R. "Anti-plane stress analysis of half plane with screw dislocation in nonlocal elasticity", 22th Ann. Int. Conf. on Mech. Engng., Ahvaz, Iran (2014).
 18. Erdogan, F. "The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under antiplane shear loading", *J. of Appl. Mech.*, **52**(4), pp. 823-828 (1985).
 19. Erdogan, F., Gupta, G.D. and Cook, T.S. "Numerical solution of integral equations", In: Sih, G.C. (Ed.), *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*. Leyden Holland, Noordhoof (1973).
 20. Zhou, Z.-G., Biao, W. and Shan-Yi, D. "Analysis of the dynamic behavior of two parallel symmetric cracks using the non-local theory", *Int. J. of Engng. Sci.*, **40**(9), pp. 1023-1035 (2002).
 21. Fotuhi, A.R. and Fariborz, S.J. "Anti-plane analysis of a functionally graded strip with multiple cracks", *Int. J. of Solids and Structures*, **43**(5), pp. 1239-1252 (2006).