

استفاده از یک روش MLPG جدید برای مطالعه‌ی اثر زاویه گرادیان مواد بر ضریب شدت تنش مود ترکیبی در ورق‌های مدرج تابعی

علی عبداللہی فر (دانشجوی دکتری)

محمد رحیم نامی* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه شیواز

مهندسی مکانیک شریف، (پار ۱۳۹۴)
دربی ۲ - ۳۱، شمار ۱، ص. ۹۵-۱۰۰، (پادداشت نشی)

روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین (MLPG) یک روش بدون مش واقعی است که در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. تا سال ۲۰۰۲ شش نوع مختلف این روش براساس تابع آزمون انتخابی معرفی شده که در میان آنها از روش MLPG ۱ بیش از سایر روش‌ها در تحلیل مسائل مهندسی کاربرد داشته است. اما در سال ۲۰۱۲ یک روش MLPG جامع جدید برای حل مسائل الاستوستاتیک معرفی شد. این روش قادر به یکسان‌سازی انواع مختلف MLPG است و بالقوه نتایج چهار نوع MLPG را در درون خود دارد. در این نوشتار برای اولین بار از روش MLPG جامع جدید برای تحلیل ورق ترک‌دار مدرج تابعی استفاده شده است. ضریب شدت تنش مود اول و دوم تحت تأثیر نسبت ناهمگنی، طول ترک و زاویه‌ی گرادیان خواص مختلف محاسبه شده و نتایج با روش مرسوم MLPG ۱ و حل دقیق مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین جامع (UMLPG)، مواد مدرج تابعی (FGM)، ضریب شدت تنش مود ترکیبی.

abdollahifar@shirazu.ac.ir
nami@shirazu.ac.ir

۱. مقدمه

مواد مدرج تابعی^۱ دسته‌یی از مواد مرکب پیشرفته‌ی ناهمگن‌اند که در گروه مواد باهوش^۲ طبقه‌بندی می‌شوند.^[۱] ایده‌ی اولیه‌ی ساخت آنها با استفاده از کپی‌برداری از مواد طبیعی مانند بامبو^۳ صورت گرفته است.^[۲] ماده‌ی مدرج تابعی از دو یا چند فاز تشکیل شده، به‌گونه‌یی که درصد ترکیب فازها در جهت خاصی تغییر می‌کند. تغییر خواص معمولاً توسط یک تابع غیرخطی بیان می‌شود.^[۳] مواد تشکیل‌دهنده‌ی آنها اغلب سرامیک و فلز است. فلزها مقاومت حرارتی پایین ولی سفتی بالایی دارند در حالی که سرامیک‌ها مقاومت حرارتی بالا اما سفتی پایینی دارند. ترکیب این دو ماده به‌طور پیوسته می‌تواند منجر به بهره‌گیری از هر دو خواص مطلوب «مقاومت به حرارت» و «سفتی بالا» در یک قطعه شود، اما مواد مرکب حاصل از اتصال مواد غیرمشابه (مانند فلزات و سرامیک‌ها)، به‌دلیل ضرایب انبساط حرارتی متفاوت، با قرار گرفتن در معرض دما دچار تنش‌های داخلی می‌شوند. همچنین وقتی این مواد تحت بارگذاری مکانیکی قرار می‌گیرند، این ناسازگاری در خصوصیات باعث ایجاد میدان‌های جابه‌جایی مختلف و تنش‌های چندمحوره در سطوح مشترک و لبه‌ها می‌شود، و ممکن است باعث ایجاد و رشد ترک در آنها شود. برای بهبود این حالت می‌توان با انتقال تدریجی ساختار، از تمرکز تنش دو ماده و تخریب مرزها جلوگیری کرد.^[۴]

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۲/۱، اصلاحیه ۱۳۹۲/۷/۳، پذیرش ۱۳۹۲/۹/۲.

مفهوم مواد مدرج تابعی اولین بار در سال ۱۹۸۴ در آزمایشگاه ملی هوافضای ژاپن برای تولید عایق حرارتی در سازه‌های فضایی و راکتورها پیشنهاد شد.^[۵] اولین ماده‌ی مدرج تابعی با به‌کارگیری روش رسوب‌گیری شیمیایی^۴ و رسوب‌گیری فیزیکی^۵ ساخته شد، اما معمول‌ترین روش ساخت آنها استفاده از متالوژی پودر است. برای ساخت آنها از روش‌های دیگر، نظیر ریخته‌گری گریز از مرکز، پخت با ماکروویو الکترومکانیکی، اسپری پلاسما در دمای بالا^۶، و ریخته‌گری به‌کمک جاذبه^۷ استفاده می‌شود.^[۵،۶]

برای مدل‌سازی مواد مدرج تابعی می‌توان فرض کرد که خواص الاستیک در هر نقطه‌ی آن در تمام جهات یکسان است. پس در حالت پیوسته فرض می‌کنیم که این مواد «ایزوتروپیک غیرهمگن»^[۸] اند. این غیرهمگنی حل تحلیلی آنها را نسبتاً مشکل می‌کند. در سال ۱۹۸۳ نشان داده شد که می‌توان نسبت پواسون را ثابت و مدول یانگ را تابعی از ضخامت فرض کرد.^[۹]

در چند سال اخیر کاربرد این مواد در صنایع مختلف -- مانند هوافضا، نظامی، پزشکی و حتی ورزشی -- افزایش چشم‌گیری داشته که مهم‌ترین دلیل آن رفع عیوب مرسوم ترکیب مواد غیرمشابه در یک سازه است. با توجه به گسترش روزافزون کاربرد این مواد، تحقیق روی آنها با هدف طراحی و ساخت ماده‌یی با گرادیان خواص مطلوب در دو بعد تحلیلی و تجربی به‌طور وسیع ادامه دارد. حل مسائل کشسانی برای مواد ناهمگن مانند مواد مدرج تابعی نیازمند روش‌های پیشرفته‌ی ریاضی است.

اگرچه روش‌های تحلیلی پاسخ به فرم بسته را نتیجه می‌دهند، محدود به هندسه‌ی ساده و حالت خاصی از ناهمگنی است. لذا استفاده از روش‌های عددی در تحلیل مسائل مختلف اجتناب‌ناپذیر است. برای تحلیل عددی این مواد، روش‌های مختلفی مانند اختلاف محدود، اجزاء محدود و بدون مش قابل استفاده‌اند اما در دو دهه‌ی اخیر از روش‌های بدون مش، به دلیل عدم نیاز به مش‌بندی دامنه، در حل مسائل مقدار مرزی استفاده چشم‌گیری شده است. این روش‌ها در مقایسه با روش اجزاء محدود و اختلاف محدود از مزایای زیادی مانند دقت بیشتر، آسان‌تر بودن شبیه‌سازی رشد ترک و عدم اتلاف زمان برای ایجاد مش، دقت بالاتر در محاسبه تنش‌ها و... برخوردارند.^[۶]

در روش‌های بدون مش دامنه‌ی مسئله و مرزهای آن با استفاده از یک مجموعه گره توزیع شده بر روی آن، مشخص می‌شود. این گره‌ها به وجود آورنده‌ی مش نیستند و نیازی به اطلاعات درخصوص رابطه‌ی مستقیم بین گره‌ها نیست، پس مسئله در افزایش یا کاهش تعداد گره‌ها در زمان و مکان دلخواه و لازم، انعطاف زیادی دارد. برای مثال در مسائل تمرکز تنش و رشد ترک می‌توان با افزایش تعداد گره‌ها حول محل تمرکز تنش یا ترک نتایج بهتری به دست آورد، یا در مسائل رشد ترک بدون شکسته شدن اجزا و مش‌بندی مجدد و صرفاً با کاهش یا افزایش گره‌ها می‌توان مدل‌سازی را ادامه داد.^[۷]

روش‌های مذکور در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه بوده‌اند، ولی قدیمی‌ترین روش بدون مش «هیدروپنایمیک ذرات هموار»^[۸] است که اولین بار در سال ۱۹۷۷^[۸] معرفی شد. در سال ۱۹۹۳ با افزودن جمله‌یی به تابع کرنل برای تصحیح عملکرد آن روی مرز، روش «بازتولیدی ذرات هسته‌یی»^[۹] معرفی شد^[۹] که نسبت به روش هیدروپنایمیک ذرات هموار بسیار دقیق‌تر بود. در سال ۱۹۹۲ برای اولین بار از تقریب حداقل مربعات متحرک^[۱۰] در روش گالرکین استفاده شد^[۱۰] که روش حاصل از آن را «روش اجزاء پراکنده»^[۱۱] نامیدند. سپس در سال ۱۹۹۴ با بررسی این ایده‌ی نوین و افزودن برخی جملات به فرمول‌بندی روش اجزاء پراکنده، روشی بسیار دقیق‌تر به نام روش اجزاء آزاد^[۱۲] به دست آمد.^[۱۱] این دسته از روش‌ها از پیوستگی و پایداری مناسبی برخوردارند ولی از نظر محاسباتی نسبت به روش هیدروپنایمیک ذرات هموار پرهزینه‌ترند. معمولاً در این روش‌ها برای انتگرال‌گیری ماتریس‌های به دست آمده از فرم ضعیف عمومی معادلات، به سلول پس‌زمینه‌ی کلی نیاز است و به همین دلیل این روش‌ها بدون مش واقعی نیستند. برای اجتناب از ایجاد سلول پس‌زمینه‌ی کلی از روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین^[۱۳] استفاده می‌شود. این روش مبتنی بر فرم ضعیف متقارن محلی است و در آن از تخمین حداقل مربعات متحرک برای تقریب تابع میدان استفاده می‌شود. استفاده از فرمول‌بندی ضعیف محلی در این روش مزایای زیادی دارد، از جمله کم‌تر بودن پیوستگی مورد نیاز برای متغیرهای میدان و درجه‌ی تابع شکل نسبت به روش‌های قوی؛ این پیوستگی روی کل دامنه مورد نیاز نیست و باید فقط روی دامنه‌ی کوچک محلی برای هر نود (گره) ارضا شود. روش‌های مبتنی بر فرم ضعیف نسبت به روش‌های مبتنی بر فرم قوی پایداری بیشتری دارند. از طرفی روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین ساختاری ساده و کارا شبیه به روش‌های فرم قوی (بیان معادلات براساس هر نود به صورت مجزا) دارد همچنین این روش نیاز به سلول پس‌زمینه‌ی کلی برای درون‌یابی متغیرهای میدان و انتگرال‌گیری ندارد و تقریباً یک روش واقعاً بدون مش است.^[۶] لذا این روش بیش از سایر روش‌های فاقد مش مورد توجه قرار گرفته است. این روش در سال ۱۹۹۸ پایه‌گذاری شد^[۱۲] و در حل مسائل بسیاری از جمله الاستواستاتیک،^[۱۳] ارتعاشات آزاد و اجباری،^[۱۴] تحلیل ترک^[۱۵] و... کاربرد موفقیت‌آمیزی داشته است. در سال ۲۰۰۲ تحقیقات و پیشرفت‌های صورت گرفته درخصوص این روش جمع‌آوری شد

و کارایی و دقت انواع مختلف آن براساس «توابع آزمون»^[۱۴] انتخابی» مقایسه شد. در نتیجه شش روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین براساس توابع آزمون مختلف معرفی شد^[۱۶] که روش اول بیشتر از روش‌های دیگر مورد توجه محققین قرار گرفت و اینک به مرسوم‌ترین نوع MLPG در حل مسائل مختلف بدل شده است. روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین نوع اول برای تحلیل ترک ورق‌های مدرج تابعی نیز کاربرد دارد.^[۱۷] با استفاده از این روش، اثر زاویه‌ی گرادیان خواص با راستای ترک بر ضریب شدت تنش مود اول در ورق ترک‌دار لبه‌یی تحت تنش ثابت^[۱۸]، و نیز بر ضریب شدت تنش مود ترکیبی^[۱۵] در ورق ترک‌دار لبه‌یی تحت بارگذاری‌های تنش و کرنش ثابت^[۱۹] بررسی شده است.

محققین برای اولین بار روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین جدیدی با استفاده از تابع آزمون نمایی ارائه کردند^[۲۰] که نسبت به روش‌های پیشین از دقت بیشتری برخوردار بود. در این روش با تغییر پارامتر تابع آزمون معرفی شده، نتایج چهار روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین قابل تولید است؛ این روش که در راستای یکسان‌سازی روش‌های MLPG گام برداشته «UMLPG» نامیده شده است. از این روش برای تعیین ضریب شدت تنش مود اول در ورق‌های مدرج تابعی استفاده شده است.^[۲۱]

در نوشتار حاضر برای اولین بار از روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین جدید (UMLPG) برای تحلیل ترک مود ترکیبی ورق مدرج تابعی استفاده شده و تأثیر طول ترک، مقدار گرادیان خواص و زاویه‌ی گرادیان خواص با راستای ترک بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است. نتایج حاصله با حل تحلیلی (در حالت‌های ساده‌یی که حل تحلیلی موجود است) و روش مرسوم MLPG^[۱۹] مقایسه شده است. در این نوشتار به منظور مقایسه‌ی صحیح‌تر UMLPG و MLPG^[۱۹]، مسائلی مشابه آنچه که در مطالعات پژوهشگران مطرح شده^[۱۸] و با مشخصات لحاظ شده در دیگر مطالعات^[۲۳،۲۲] تحلیل شده است. در روش حاضر برای شبیه‌سازی میدان جابه‌جایی و تنش در اطراف ترک از روش تابع وزن توسعه یافته به منظور عدم افزایش حجم محاسبات استفاده شده است. ضریب شدت تنش با استفاده از انتگرال‌های مستقل از مسیر J^* که برای مواد ناهمگن فرمول‌بندی شده‌اند محاسبه شده است.

۲. فرمول‌بندی روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین

برای مسائل الاستواستاتیک دوبعدی، معادله‌ی تعادل و شرایط مرزی روی دامنه‌ی Ω که با مرز Γ احاطه شده، چنین بیان می‌شود:^[۲۰،۲۱]

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

$$u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u \quad \text{شرط مرزی اساسی}$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t} \text{ on } \Gamma_t \quad \text{شرط مرزی طبیعی} \quad (۱)$$

$\bar{u}$ و $\bar{t}$ به ترتیب مقادیر جابه‌جایی و تنش سطحی معلوم روی مرزها، و n بردار واحد عمود بر مرز به سمت خارج است. فرم انتگرالی ضعیف معادله‌ی تعادل (معادله ۱) برای گره I در غیاب نیروهای وزنی براساس روش باقی‌مانده‌ی وزنی عبارت است از:^[۲۳]

$$\int_{\Omega_Q} (\nabla \cdot \sigma) \nu_I d\Omega = 0 \quad (۲)$$

که در آن Ω_Q ناحیه‌ی انتگرال‌گیری حول گره I است. همچنین ν_I تابع آزمون گره I است که با تغییر آن، نوع روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین تغییر می‌کند.

و با استفاده از قانون هوک و رابطہ‌ی کرنش جابہ‌جایی خواهیم داشت:

$$\sigma = c\varepsilon = c \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \sum_I^n \Phi_I \mathbf{u}_I = c \sum_I^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \quad (7)$$

کہ در آن:

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \varphi_{I,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{I,y} \\ \varphi_{I,y} & \varphi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (8)$$

و c ماتریس ثابت ماده نام دارد و برای مواد همگن ایزوتروپیک به صورت رابطہ‌ی ۹ تعریف می‌شود:

$$c = \frac{E^*}{1 - \nu^{*2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu^* & 0 \\ \nu^* & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^*)/2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

توابع مدول کشسانی و نسبت پواسون عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} E^* &= E, & \nu^* &= \nu & \text{تنش صفحه‌یی} \\ E^* &= E/(1 - \nu^2), & \nu^* &= \nu/(1 - \nu^2) & \text{کرنش صفحه‌یی} \end{aligned}$$

و:

$$\Phi_I = \begin{bmatrix} \phi_I(x) & 0 \\ 0 & \phi_I(x) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$\phi_I(x)$ تابع شکل گره I بوده و چنین تعریف می‌شود:

$$\phi_I(x) = \sum_j^m p_j(x)(\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x))_{jI} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_I \quad (11)$$

کہ در آن:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= \sum_I^N W_I(x) \mathbf{P}(x_I) \mathbf{P}^T(x_I) \\ \mathbf{B}_I &= W_I(x) \mathbf{P}(x_I) \end{aligned} \quad (12)$$

و $\mathbf{P}^T$ بردار کاملی از چندجمله‌یی پایه تا درجہ‌ی ۲ است.

$W_I(x)$ تابع وزن است کہ روی دامنه‌ی تأثیر گره I چنین تعریف می‌شود:

$$W_I(x) = \begin{cases} 1 - 6r_I^2 + 8r_I^3 - 3r_I^4 & \text{for } r_I \leq 1 \\ 0 & \text{for } r_I > 1 \end{cases} \quad (13)$$

است از: $r_I = |x - x_I|/d_I$ و d_I اندازه دامنه‌ی تأثیر است. بردار تنش سطحی عبارت

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \sigma = n c \sum_j^N \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \quad (14)$$

تابع آزمون در $\text{MLPG } 1$ تا $\text{MLPG } 6$ به ترتیب، مشابه تابع وزن، تابع دلتا، مشابه تابع خطا، حل اساسی 16 بهبود یافته تابع پله هوبساید 17 و مشابه تابع شکل انتخاب می‌شود.

محققین برای اولین بار تابع نمایی ۳ را به عنوان تابع آزمون معرفی $[20]$ و موفقیت آن را در حل مسائل الاستوستاتیک نشان دادند. در نوشتار حاضر نیز از این تابع به عنوان تابع آزمون استفاده شده است.

$$v = e^{(-\beta r^*)} \quad (3)$$

پارامتر β شکل تابع آزمون را کنترل می‌کند. اگر β عدد کوچکی نزدیک به صفر انتخاب شود، تابع آزمون v به تابع پله تبدیل می‌شود و در نتیجه $\text{MLPG } 5$ حاصل می‌شود. اگر β عدد بزرگی انتخاب شود، با ضرب $\sqrt{\beta/\pi}$ در تابع آزمون v این تابع به تابع دلتا تبدیل می‌شود و در نتیجه $\text{MLPG } 2$ حاصل می‌شود. اگر β ما بین این دو انتخاب شود تابع زنگوله‌یی حاصل می‌شود، کہ با انتخاب آن به عنوان تابع وزن در MLS به $\text{MLPG } 1$ دست می‌یابیم؛ و بالاخره اگر تابع وزن در MLS را متفاوت (مثلاً تابع اسپیلاین درجہ ۴) انتخاب کنیم MLPG جدیدی حاصل می‌شود کہ عملکرد بهتری دارد. در شکل ۱ نحوه‌ی تغییر تابع آزمون برحسب پارامتر β نشان داده شده است.

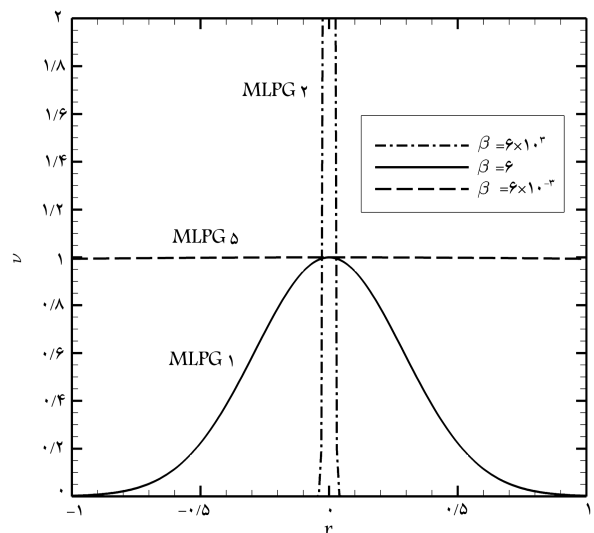
با اعمال واگرایی (دیورژانس) و ساده‌سازی معادله‌ی ۲ را می‌توان چنین نوشت:

$$\int_{\Omega_Q} \mathbf{V}_I^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_{Q_u}} \mathbf{v}_I \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_{Q_t}} \mathbf{v}_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (4)$$

کہ در آن:

$$\mathbf{v}_I = \begin{bmatrix} v_I & 0 \\ 0 & v_I \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{V}_I = \begin{bmatrix} v_{I,x} & 0 \\ 0 & v_{I,y} \\ v_{I,y} & v_{I,x} \end{bmatrix} \quad (6)$$



شکل ۱. تغییر تابع آزمون برحسب پارامتر β .

که در آن $\mathbf{n}$ بردار واحد عمود بر مرز به سمت بیرون است:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (15)$$

با جاگذاری روابط ۱۴ و ۱۵، معادلات خطی گسسته سیستم برای گره I ام تولید می‌شود:

$$\int_{\Omega_Q} \mathbf{V}_I^T \sum_{J=1}^N \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J d\Omega - \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{v}_I \mathbf{n} c \sum_{J=1}^N \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J d\Gamma = \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{v}_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (16)$$

که می‌توان آن را به شکل ماتریسی زیر بیان کرد:

$$\sum_{J=1}^N \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J = \mathbf{f}_I \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega_Q} \mathbf{V}_I^T \mathbf{B}_J d\Omega - \int_{\Gamma_{Qu}} \mathbf{v}_I \mathbf{n} c \mathbf{B}_J d\Gamma \quad (18)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_{Qt}} \mathbf{v}_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (19)$$

باید توجه داشت که ماتریس سختی حاصل، به دلیل استفاده از فرمول بندی پتروف - گالرکین، غیرمتقارن است. همچنین به دلیل استفاده از معادلات ۱۱ و ۱۲ که ناشی از تقریب حداقل مربعات متحرک است خاصیت دلتای کروکرکیر توسط معادلات ۱۷ ارضا نمی‌شود و به همین دلیل شرایط مرزی اساسی به راحتی ارضا نمی‌شوند. یکی از روش‌هایی که غالباً برای اعمال شرایط مرزی اساسی در الگوریتم‌های بدون مش استفاده می‌شود روش پنازلی است، اما انتخاب نامناسب ضریب پنازلی ممکن است موجب ناپایداری روش یا نتایج غلط شود. یکی دیگر از روش‌های اعمال شرایط مرزی اساسی، روش درون‌یابی مستقیم^{۱۸} است^[۲۴] که برای اعمال شرایط مرزی در روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین پیشنهاد شده است. از آنجا که در روش بدون مش پتروف - گالرکین معادلات برای هر گره به طور مجزا به دست می‌آید امکان استفاده از معادلات متفاوت برای گره‌های داخلی و مرزی وجود دارد. در این نوشتار از این روش برای ارضای شرایط مرزی اساسی استفاده شده است؛ اعمال شرایط مرزی در این روش آسان است و با دقت انجام می‌شود. همچنین حجم محاسبات برای گره‌های روی مرز اساسی را کاهش می‌دهد، اما بر باند ماتریس سختی می‌افزاید. حل مسائل مکانیک شکست با استفاده از روش‌های بدون مش، نیازمند اضافه کردن تعداد گره‌ها در ناحیه ترک است که باعث افزایش حجم محاسبات می‌شود. یکی از روش‌های معمول برای رفع این مشکل، توسعه‌ی توابع پایه^[۲۵] است که علی‌رغم سادگی، استفاده از آن باعث افزایش تعداد توابع پایه و در نتیجه افزایش مدت زمان لازم برای محاسبه‌ی تابع شکل می‌شود. کاربرد این روش در مسائلی که ترک به مرز نزدیک است و مسائل چندترکی و ترک تحت بار دینامیکی مناسب نیست. از طرف دیگر، میدان جابه‌جایی در طول ترک دارای ناپیوستگی است، در حالی که روش‌های بدون مش همواره تابع شکل و مشتقات آن را به طور پیوسته و هموار نتیجه می‌دهند. به همین دلیل روش‌های متعددی برای ایجاد ناپیوستگی میدان جابه‌جایی در طول ترک ابداع شده‌اند. بعضی از این روش‌ها عبارت‌اند از: روش مشاهده‌ی^[۲۶] و روش انکسار^[۲۷] که در عین سادگی از دقت خوبی برخوردارند. اما در سال ۲۰۰۶ روش توابع وزن توسعه‌یافته^[۲۸] برای تحلیل مسائل مکانیک شکست در روش اجزاء آزاد پیشنهاد شد که در این نوشتار، برای تحلیل مسائل شکست در روش بدون مش پتروف گالرکین جامع مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از توابع وزن اصلاح شده،

نیازی به توسعه‌ی توابع پایه و استفاده از روش‌های اصلاح میدان جابه‌جایی نیست. با استفاده از این روش نه تنها در اطراف ترک ناپیوستگی ایجاد می‌شود، بلکه منفرد بودن تنش نوک ترک نیز مدل‌سازی می‌شود.

۳. شکست مواد مدرج تابعی

کاربرد مواد مدرج تابعی یک راه حل مناسب برای رفع مشکل تغییرات شدید در مرز مشترک بین دو ماده غیرمتشابه است. این مواد شامل یک گرادیان پیوسته یا ناپیوسته‌اند که با طراحی آن می‌توان از ترکیبات اجزای تشکیل‌دهنده برای رسیدن به یک نیاز خاص به نحو احسن استفاده کرد. برای تحلیل مواد مدرج تابعی می‌توان تغییرات مدول کشسانی را چنین فرض کرد:^[۲]

$$E(X) = E_0 \exp(\beta X),$$

$$\zeta = \ln(E_1/E_0)/L, \quad E_0 = E(0)$$

$$E(x, y) = E_0 \exp(\alpha x + \gamma y),$$

$$\alpha = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}}, \quad \gamma = \frac{\zeta \tan(\varphi)}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}} \quad (20)$$

که در آن ζ ثابت ناهمگنی و φ زاویه‌ی گرادیان خواص با ترک و X راستای تغییر گرادیان مواد و x و y مختصات ثابت روی ورق است (شکل ۲).

انتگرال J برای مواد ناهمگن همیشه مستقل از مسیر نیست و نشان داده شده^[۲۹]

که این انتگرال برای مواد مدرج تابعی تنها زمانی مستقل از مسیر است که گرادیان خواص عمود بر ترک باشد و در غیر این صورت این انتگرال وابسته به مسیر خواهد بود. لذا هنگامی که φ در مواد مدرج تابعی تغییر می‌کند نمی‌توان از آن استفاده کرد و به جای آن می‌توان از انتگرال‌های مستقل از مسیر J^* که به صورت رابطه‌ی ۲۱ استخراج می‌شوند، استفاده کرد. اگر $W = W(\varepsilon_{ij}, x_i)$ انرژی کرنشی باشد، مشتق آن نسبت به مختصات محلی نوک ترک عبارت است از:

$$\frac{\partial W}{\partial x_k} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_{\text{صریح}} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} + (W_{,k})_{\text{صریح}} \quad (21)$$

که عبارت صریح طبق مفاهیم مشتقات جزئی بدین معناست که با فرض ثابت بودن سایر پارامترها، از پارامتر مذکور مشتق‌گیری می‌شود. برای مواد کشسان خطی رابطه‌ی ۲۱ عبارت خواهد بود از:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_{\text{صریح}} = \frac{1}{2} \varepsilon^T \left(\frac{\partial c}{\partial x_k} \right) \varepsilon \quad (22)$$

با استفاده از ویژگی تقارن تانسور تنش و استفاده از رابطه‌ی خطی تنش - کرنش و قانون تعادل با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$(W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k})_{,j} - (W_{,k})_{\text{صریح}} = 0 \quad (23)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی ۲۳ و به کارگیری قاعده‌ی واگرایی، رابطه ۲۴ حاصل می‌شود:^[۲۹]

$$\oint_{\Gamma} (W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma - \int_{\Omega} (W_{,k})_{\text{صریح}} d\Omega = 0 \quad (24)$$

از آنجا که میدان تنش در نوک ترک، منفرد است ناحیه‌ی Ω نباید نوک ترک را شامل شود. بدین منظور، کانتر انتگرال‌گیری مطابق شکل ۳ فرض می‌شود. در نتیجه

پارامتر J_k^* تعریف می‌شود، که با ساده‌سازی و جایگزینی رابطه خواهیم داشت:

$$J_k^* = \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow \Gamma^0} \int_{\Gamma_\epsilon} b_k d\Gamma = \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow \Gamma^0} \left\{ \int_{\Gamma^+} b_k d\Gamma + \int_{\Gamma_c^+} b_k d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} b_k d\Gamma \right\} \quad (27)$$

برای ساده‌کردن انتگرال به دست آمده می‌توان انتگرال‌های مربوط به سطوح ترک را با هم جمع کرد. بدین‌منظور، فرض می‌شود مسیر Γ^0 سطوح بالایی و پایینی ترک را در فواصل یکسان از نوک ترک قطع می‌کند. پس:

$$J_k^* = \lim_{\Gamma_\epsilon \rightarrow \Gamma^0} \left\{ \int_{\Gamma^+} (W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k}) d\Gamma - \int_{\Omega} (W_{,k})_{\text{صریح}} d\Omega + \int_{\Gamma_c} ([W^+ - W^-] n_k^+ - [t_i^+ u_{i,k}^+ - t_i^- u_{i,k}^-]) d\Gamma \right\} \quad (28)$$

نمادهای + و - اشاره به سطوح بالایی و پایینی ترک دارند. در نهایت با فرض عدم تنش سطحی بر روی ترک، رابطه‌ی به دست آمده برای مودهای اول و دوم چنین تفکیک می‌شود:

مود اول ($k=1$):

$$J_1^* = \int_{\Gamma} (W n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,1}) d\Gamma - \int_{\Omega} (W_{,1})_{\text{صریح}} d\Omega \quad (29)$$

مود دوم ($k=2$):

$$J_2^* = \int_{\Gamma} (W n_2 - \sigma_{ij} n_j u_{i,2}) d\Gamma - \int_{\Omega} (W_{,2})_{\text{صریح}} d\Omega + \int_{\Gamma_c} [W^+ - W^-] n_2^+ d\Gamma \quad (30)$$

ضرایب شدت تنش مطابق روابط ۳۱ به انتگرال‌های J^* وابسته می‌شود:

$$J_1^* = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E_{tip}^*} \quad (31)$$

$$J_2^* = \frac{-2K_I K_{II}}{E_{tip}^*}$$

که با ساده‌سازی خواهیم داشت: [۳۰]

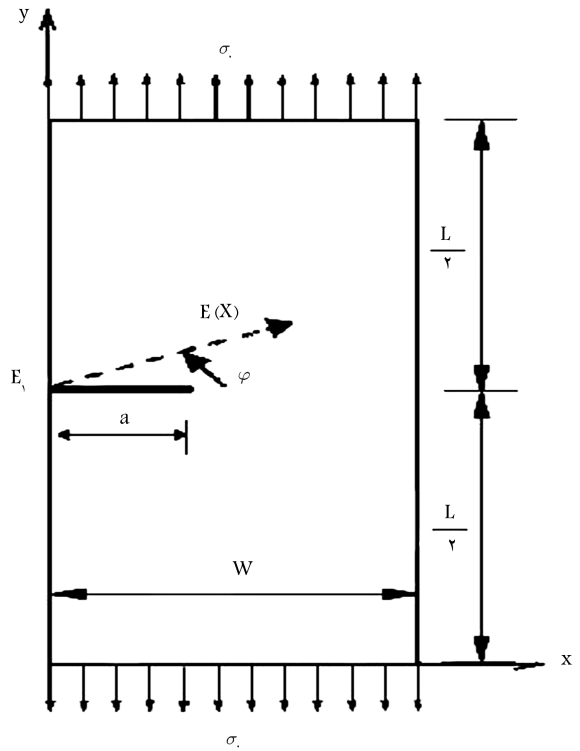
$$K_I = \left\{ \frac{E_{tip}^* J_1^*}{\frac{1}{2}} \left[1 \pm \left(1 - \left(\frac{J_2^*}{J_1^*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$K_{II} = \pm \left\{ \frac{E_{tip}^* J_2^*}{\frac{1}{2}} \left[1 \mp \left(1 - \left(\frac{J_2^*}{J_1^*} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

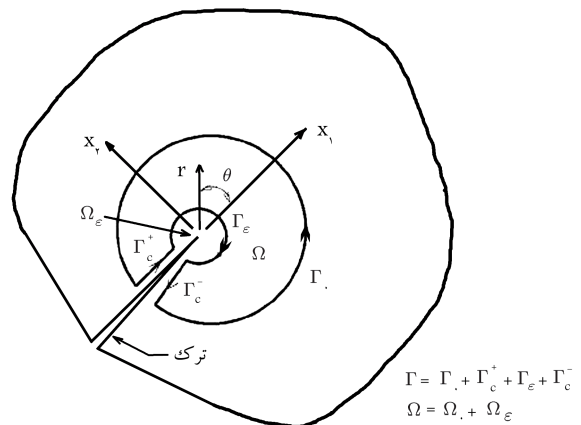
E_{tip}^* مقدار مدول یانگ در محل نوک ترک است.

۴. مسائل حل شده

در این نوشتار به‌منظور مقایسه‌ی صحیح‌تر روش‌های UMLPG و MLPG، دو مسئله‌ی حل‌شده در مطالعات محققین [۱۹] مطابق مشخصات ارائه‌شده [۲۳، ۲۲] با



شکل ۲. نوار مدرج تابعی ترک دار لبه‌یی تحت بارگذاری تنش ثابت.



شکل ۳. کانتور مورد استفاده در انتگرال J^* .

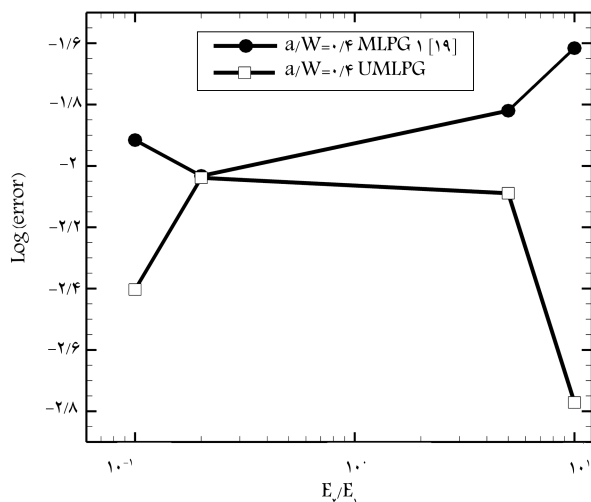
رابطه‌ی ۲۴ چنین بازنویسی می‌شود:

$$\int_{\Gamma^+} b_k d\Gamma - \int_{\Omega} (W_{,k})_{\text{صریح}} d\Omega + \int_{\Gamma_c^+} b_k d\Gamma + \int_{\Gamma_c^-} b_k d\Gamma = \int_{\Gamma_\epsilon} b_k d\Gamma - \int_{\Omega_\epsilon} (W_{,k})_{\text{صریح}} d\Omega \quad (25)$$

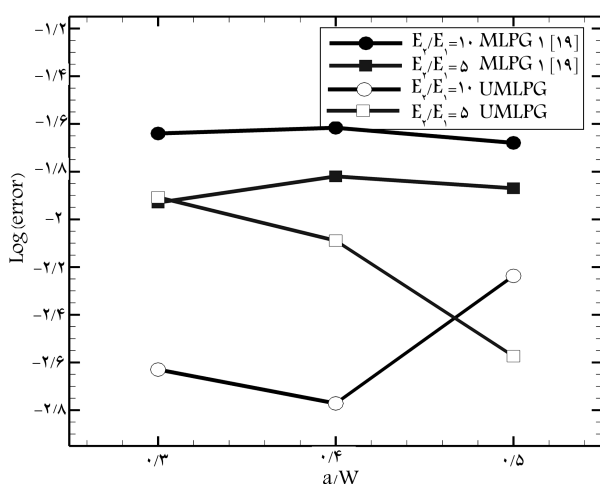
که در آن:

$$b_k = W n_k - \sigma_{ij} n_j u_{i,k} \quad (26)$$

با فرض این که کانتور دایره‌یی حول ترک به سمت صفر میل کند یا به عبارتی کانتور مورد استفاده به نوک ترک نزدیک شود ($\Gamma_\epsilon \rightarrow \Gamma^0$)، طرف راست معادله‌ی ۲۵ با عنوان

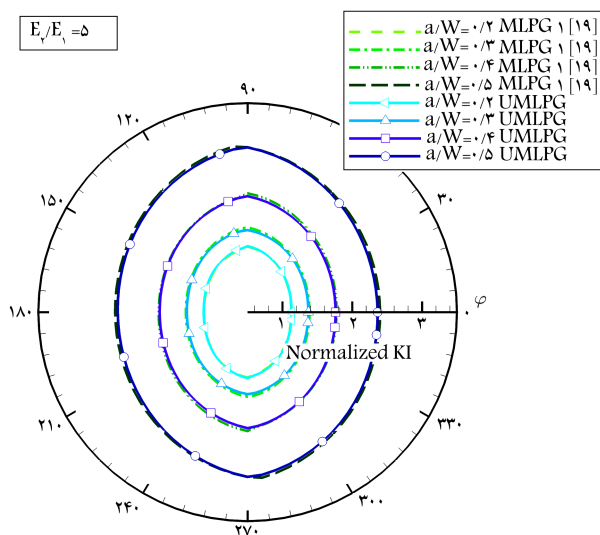


الف) $a/W=0.4$ به ازای E_2/E_1 مختلف؛



ب) $E_2/E_1=10$ & 5 به ازای نسبت a/W مختلف.

شکل ۴. مقایسه خطای $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ در روش‌های MLPG 1 و UMLPG.



شکل ۵. تغییرات $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ برحسب $E_2/E_1 = 5$ به ازای نسبت طول ترک مختلف.

روش UMLPG تحلیل شده و ضریب شدت تنش مود اول و دوم در ورق مدرج تابعی شامل ترک لبه‌یی تحت تنش و کرنش ثابت محاسبه شده است. در زاویه‌ی گرادیان صفر که حل دقیق وجود دارد نتایج روش جدید با پاسخ دقیق و روش مرسوم MLPG 1 مقایسه شده و در دیگر زوایا با پاسخ MLPG 1 مقایسه می‌شود.

۱.۴. ورق مدرج تابعی شامل ترک لبه‌یی تحت تنش کششی ثابت در دو انتها

ورقی از جنس مواد مدرج تابعی شامل یک ترک لبه‌یی به طول a تحت تنش کششی ثابت $\sigma_0 = 1 \text{ (unit)}$ مطابق شکل ۲ فرض شده است. در این شکل φ زاویه‌ی گرادیان خواص با راستای ترک است. مشخصات ورق مذکور به منظور مقایسه چنین فرض شده است: [۲۳، ۲۲، ۱۹]

• طول: $L = 20 \text{ (unit)}$ ؛

• عرض: $W = 10 \text{ (unit)}$ ؛

• ضریب پوسان: $\nu = 0.3$ ؛

• مدول کشسانی ناحیه‌ی اول: $E_1 = 1 \text{ (unit)}$.

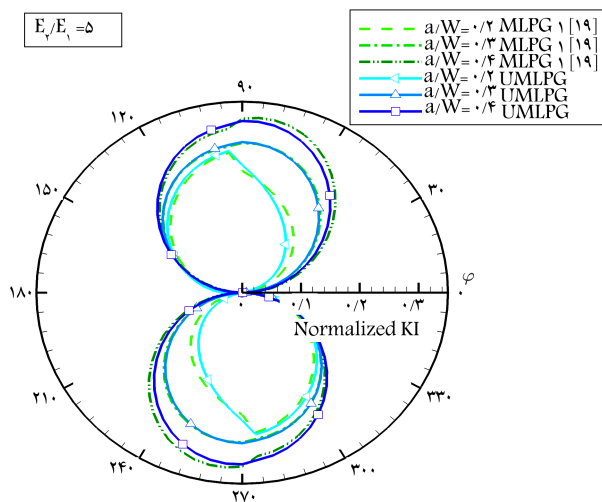
برای مدل‌سازی مسئله، نودبندی 22×11 در کل دامنه و 6×6 نقطه‌ی گوسی در نواحی انتگرال‌گیری استفاده شده است. بازه $3.5 \leq \beta \leq 6.5$ برای ضریب تابع آزمون پیشنهاد، و برای حل مسائل شکست از مقدار 6.5 استفاده شده است. [۲۰] در این مقاله نیز مقدار β معادل 6.5 انتخاب شده است.

در ابتدا ورق ترک‌دار لبه‌یی مدرج تابعی با $\varphi = 0$ تحلیل شده و ضریب شدت تنش مود اول بی‌بعد شده $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ به ازای طول‌های مختلف ترک با استفاده از روش UMLPG محاسبه شده و با پاسخ MLPG 1 [۱۹] و حل دقیق [۲۳] مقایسه شده است. در شکل ۴ لگاریتم خطای ضریب شدت تنش بی‌بعد شده برحسب a/W و E_2/E_1 مختلف با استفاده از روش‌های MLPG 1 و UMLPG رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد که دقت روش فوق نسبت به روش مرسوم MLPG 1 بالاتر است.

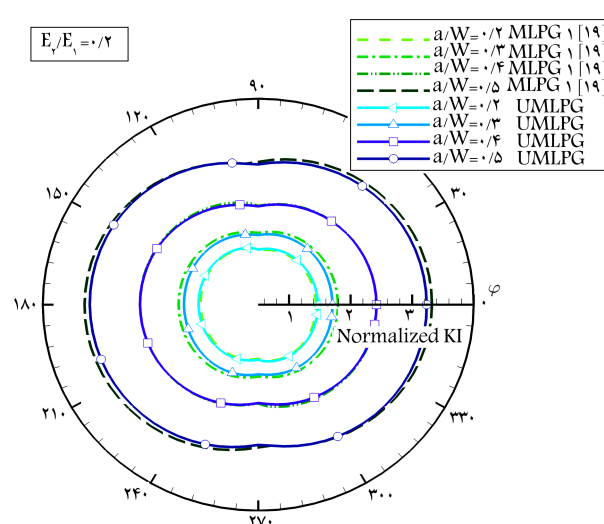
سپس با تغییر زاویه‌ی گرادیان خواص، ضریب شدت تنش مود اول و دوم با روش جدید محاسبه شده و با روش مرسوم MLPG 1 مقایسه شده است. در اشکال ۵ و ۶ ضریب شدت تنش بی‌بعد شده به ازای تغییر زاویه‌ی گرادیان از صفر تا 360 برای نسبت $E_2/E_1 = 5$ ، 0.2 رسم شده و در شکل ۷ $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از 0 تا 360 به ازای پارامتر E_2/E_1 مختلف برای $a/W = 0.4$ رسم شده است.

در اشکال ۵ تا ۷ مشاهده می‌شود [۱۹] که برای $E_2/E_1 = 1$ ، تغییر زاویه تأثیری بر ضریب شدت تنش مود اول ندارد. برای $E_2/E_1 > 1$ بیشینه $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ در زوایای 90 تا 95 و 270 تا 275 ، و کمینه‌ی آن در زوایای صفر و 180 رخ می‌دهد. برای $E_2/E_1 < 1$ کمینه‌ی $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ در زوایای 90 تا 95 و 270 تا 275 و بیشینه‌ی آن در زوایای صفر و 180 رخ می‌دهد. با افزایش طول ترک، $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ در تمام نقاط افزایش می‌یابد. نمودارهای فوق دارای دوره تناوب π هستند.

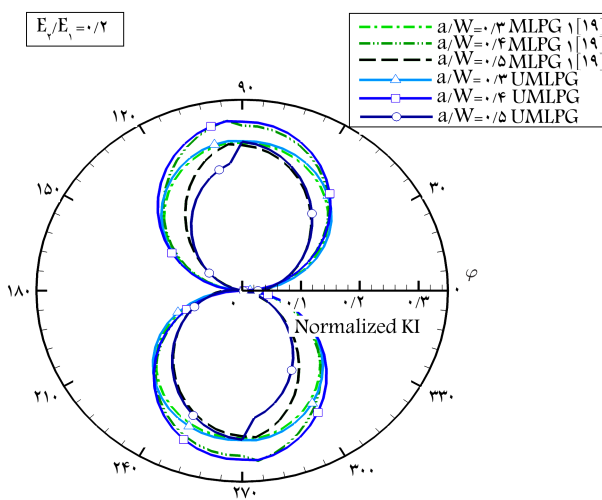
چنان که در شکل ۷ مشاهده می‌شود، در دو نقطه بین زوایای 90 تا 95 و 270 تا 275 تغییر نسبت E_2/E_1 تأثیری بر ضریب شدت تنش ندارد؛ این نقاط را «نقاط خنثی» نامیده‌اند. در این نقاط تغییر مقدار گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش تأثیر ندارد.



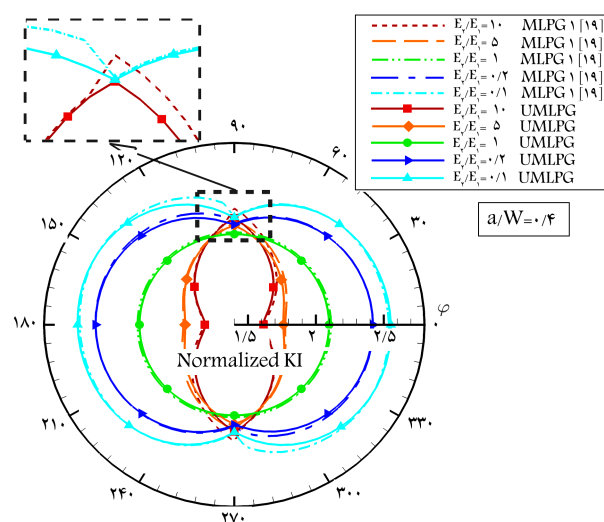
شکل ۸. تغییرات $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $E_2/E_1 = 5$ به ازای نسبت طول ترک مختلف.



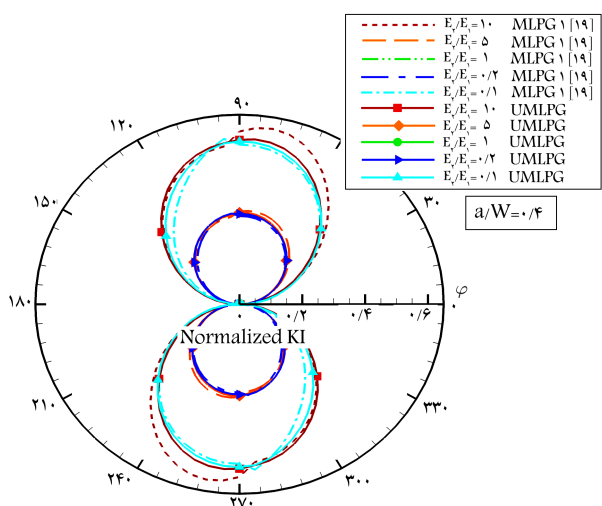
شکل ۶. تغییرات $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $E_2/E_1 = 0.2$ به ازای نسبت طول ترک مختلف.



شکل ۹. تغییرات $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $E_2/E_1 = 0.2$ به ازای نسبت طول ترک مختلف.



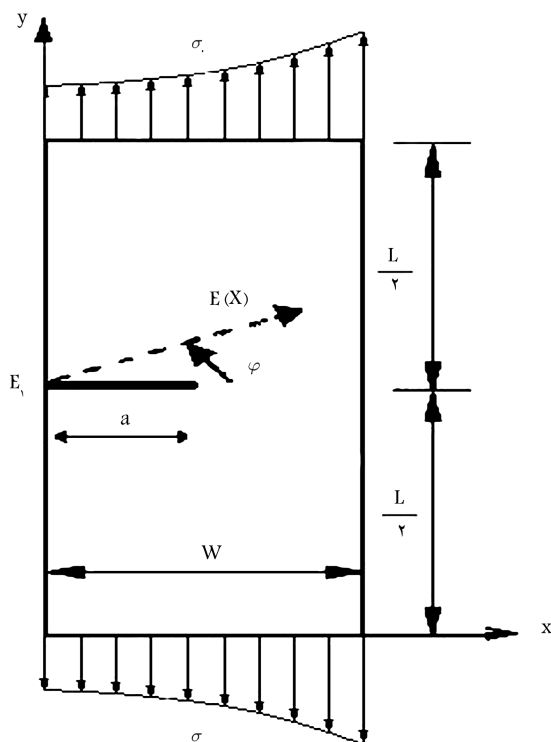
شکل ۷. تغییرات $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $a/W = 0.4$ به ازای E_2/E_1 مختلف.



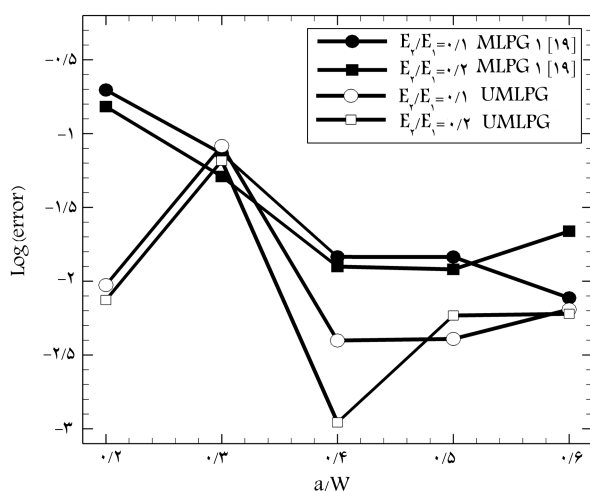
شکل ۱۰. تغییرات $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $a/W = 0.4$ به ازای E_2/E_1 مختلف.

در اشکال ۵ تا ۷ مشاهده می‌شود که نتایج روش UMLPG در بیشتر نقاط تطابق خوبی با روش مرسوم MLPG^[۱۹] دارد. در شکل ۷، در قسمتی که به صورت بزرگ‌نمایی نشان داده شده، تطابق کم‌تری بین دو روش وجود دارد. با توجه به هندسه‌ی مسئله که کاملاً متقارن است انتظار می‌رود در زاویه‌ی ۹۰ درجه نمودار مربوط به $E_2/E_1 = 10$ و 0.1 در ادامه یکدیگر تغییر نکنند، در نتیجه با توجه به شکل ۷ (قسمت بزرگ‌نمایی) روش جدید (UMLPG) پاسخ صحیح‌تر و مطلوب‌تری نسبت به روش مرسوم MLPG^[۱۹] ارائه داده که نشان می‌دهد این روش دقیق‌تر است.

وقتی گرادیان خواص زاویه‌ی غیر از صفر ($\varphi \neq 0$) دارد، علاوه بر مود اول، مود دوم شکست نیز در مسئله ظاهر می‌شود. ضریب شدت تنش مود دوم بی‌بعد شده نیز محاسبه شده و در اشکال ۸ و ۹، با افزایش زاویه از صفر تا ۳۶۰ برای نسبت $E_2/E_1 = 5, 0.2$ نشان داده شده است. در شکل ۱۰ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از صفر تا ۳۶۰ به ازای پارامتر E_2/E_1 مختلف برای $a/W = 0.4$ رسم شده است.



شکل ۱۱. نوار مدرج تابعی ترک دار لبه‌یی تحت کرنش ثابت.



شکل ۱۲. مقایسه خطای $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ در روش‌های MLPG ۱ و UMLPG برحسب $E_2/E_1 = 0.1, 0.2$ به ازای a/W .

در اشکال ۱۶ و ۱۷ نمودار ضریب شدت تنش بی‌بعد شده‌ی مود دوم $E_2/E_1 = 5, 0.2$ برای نسبت 36° تا 90° با تغییر زاویه از صفر تا 36° نشان داده شده، و در شکل ۱۸ $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از صفر تا 36° به‌ازای پارامتر E_2/E_1 مختلف برای $a/W = 0.3$ رسم شده است. از آنجا که مقادیر ضریب شدت تنش مود دوم در این مسئله بسیار نزدیک به یکدیگرند به‌منظور نمایش بهتر برای نسبت‌های E_2/E_1 بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ۱، $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ در شکل ۱۸ ب و ۱۸ ج در مختصات دکارتی از صفر تا 90° درجه رسم شده است. در اشکال ۱۶ تا ۱۸ مشاهده می‌شود که ضریب شدت تنش مود دوم برای

چنان که در اشکال ۸ تا ۱۰ مشاهده می‌شود ضریب شدت تنش مود دوم در زوایای 0° و 180° برابر صفر است ولی در دیگر زوایا مقادیر غیر صفر دارد و بیشترین مقدار آن در زاویه‌ی 90° درجه است. نقاط خنثی در این نمودارها در زاویه‌ی صفر و 180° است. در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که تقارنی بین نمودارهای رسم شده برای نسبت‌های $E_2/E_1 = 0.1$ و 10 و همچنین 5 و 0.2 وجود دارد که این موضوع به‌لحاظ فیزیکی نیز تأیید می‌شود و مورد انتظار است.

همچنین در اشکال ۸ تا ۱۰ مشاهده می‌شود روش پیشنهادی در نوشتار حاضر و روش MLPG ۱ در بیشتر نقاط تطابق مطلوبی دارند. با توجه به تقارن موجود در مسئله انتظار می‌رود که نمودار برای نسبت ناهمگنی 0.1 و 10 همچنین 5 و 0.2 در یک طول ترک خاص بر یکدیگر منطبق باشند. در شکل ۱۰ نیز مشاهده می‌شود که تحلیل مسئله با روش جدید صحیح‌تر از روش MLPG ۱ بوده و این انطباق را بهتر نشان داده که ناشی از دقت بالاتر روش حاضر است.

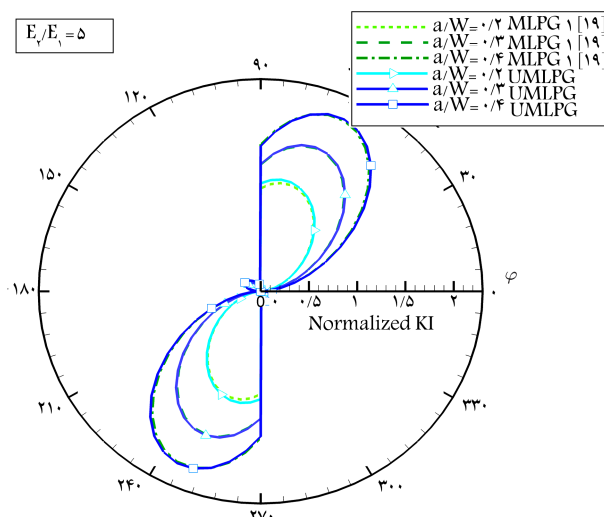
۲.۴. نوار مدرج تابعی ترک دار لبه‌یی تحت کرنش ثابت

نواری از جنس مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری کرنش ثابت $\epsilon_0 = 1$ (unit) در دو انتها (در این حالت تنش برابر $\sigma_0(x) = E(x)/(1 - \nu^2)$ است) و با عرض $W = 10$ (units) نسبت طول به عرض 2 شامل یک ترک لبه‌یی افقی به‌طول a با مدول کشسانی ناحیه‌ی اول $E_1 = 1$ (unit) مفروض است. در شکل ۱۱ هندسه‌ی ورق فوق نشان داده شده است. در این شکل ϕ زاویه‌ی بین گرادیان خواص و راستای ترک است. مشخصات ورق به‌منظور مقایسه مطابق مطالعات انجام شده^[۲۳،۲۴] فرض شده و مدل‌سازی نیز مانند مسئله‌ی قبل انجام شده است.

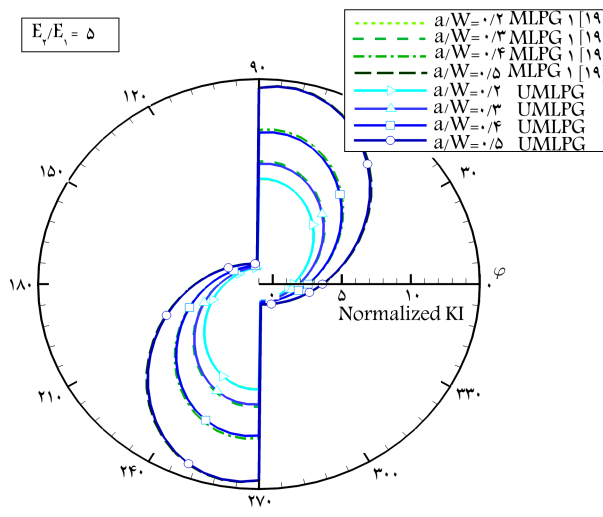
در ابتدا ورق ترک دار لبه‌یی مدرج تابعی با $\phi = 0^\circ$ تحلیل شده و ضریب شدت تنش مود اول با استفاده از $\sigma_0 = E_1\epsilon_0/(1 - \nu^2)$ بی‌بعد شده و به‌ازای طول‌های مختلف ترک با استفاده از روش جدید محاسبه، و با پاسخ MLPG ۱^[۱۹] و حل دقیق آن^[۲۳،۲۴] مقایسه شده است. در شکل ۱۲ لگاریتم خطای ضریب شدت تنش بی‌بعد شده برحسب a/W و E_2/E_1 مختلف با استفاده از روش‌های^[۱۹] MLPG ۱ و UMLPG رسم شده است. نتایج نشان می‌دهد که دقت روش فوق نسبت به روش مرسوم MLPG ۱ بالاتر است.

سپس با استفاده از این روش، تأثیر زاویه‌ی گرادیان خواص بر ضریب شدت تنش مود اول و دوم بررسی می‌شود. در اشکال ۱۳ و ۱۴ ضریب شدت تنش بی‌بعد شده با تغییر زاویه از صفر تا 36° برای نسبت $E_2/E_1 = 5, 0.2$ رسم شده است. در شکل ۱۵ نیز $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ با تغییر زاویه از صفر تا 36° به‌ازای پارامتر E_2/E_1 مختلف برای $a/W = 0.3$ رسم شده است.

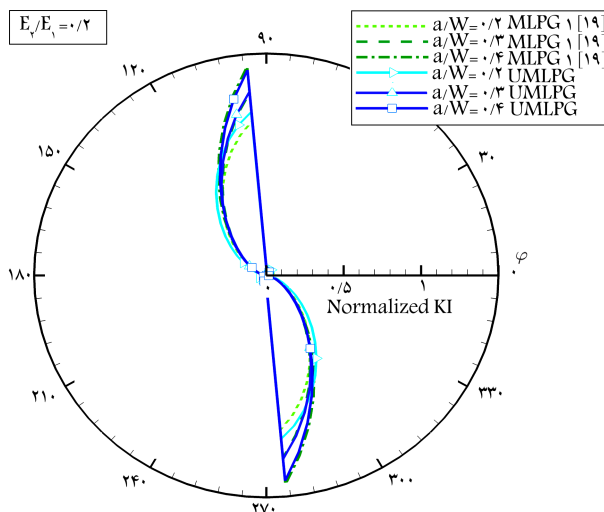
مطابق نتایج حاصله^[۱۹] مشاهده می‌شود که برای $E_2/E_1 = 1$ ، تغییر زاویه تأثیری بر ضریب شدت تنش مود اول ندارد؛ برای $E_2/E_1 > 1$ بیشینه‌ی $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ در حدود زوایای 85° و 265° و کمینه‌ی آن در زوایای 95° و 275° رخ می‌دهد؛ برای $E_2/E_1 < 1$ حداقل $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ در زوایای 95° و 275° و حداکثر آن در زوایای 90° و 270° رخ می‌دهد. نقاط خنثی در زوایای 0° و 180° تا 180° رخ می‌دهد. در اشکال ۱۳ تا ۱۵ مشاهده می‌شود که روش جدید تطابق بسیار خوبی با روش مرسوم MLPG ۱^[۱۹] دارد.



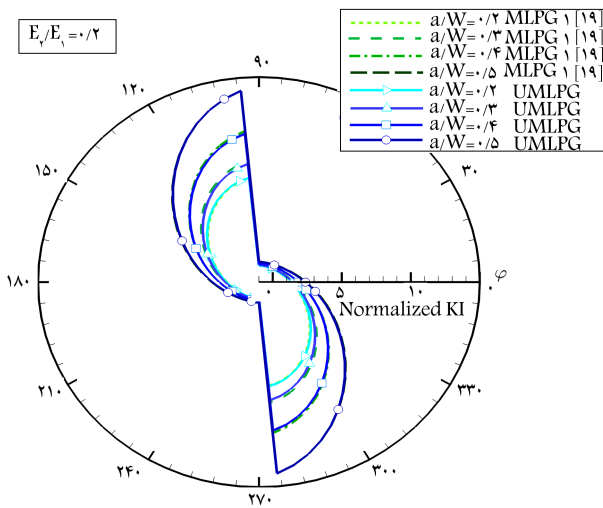
شکل ۱۲. تغییرات $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $E_2/E_1 = 5$ به ازای نسبت طول ترک مختلف.



شکل ۱۳. تغییرات $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $E_2/E_1 = 5$ به ازای نسبت طول ترک مختلف.



شکل ۱۴. تغییرات $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $E_2/E_1 = 0.2$ به ازای نسبت طول ترک مختلف.

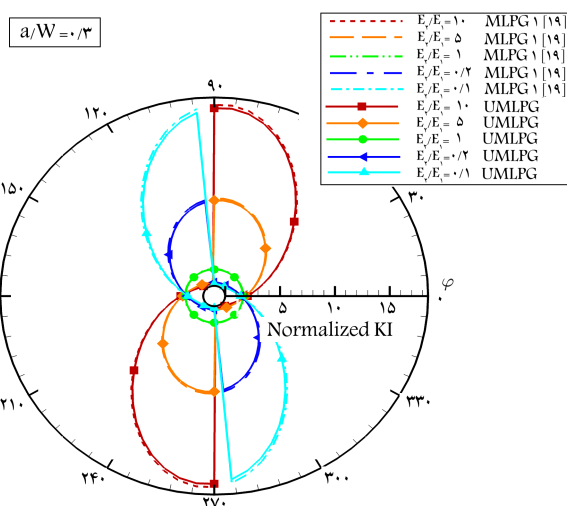


شکل ۱۵. تغییرات $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $E_2/E_1 = 0.2$ به ازای نسبت طول ترک مختلف.

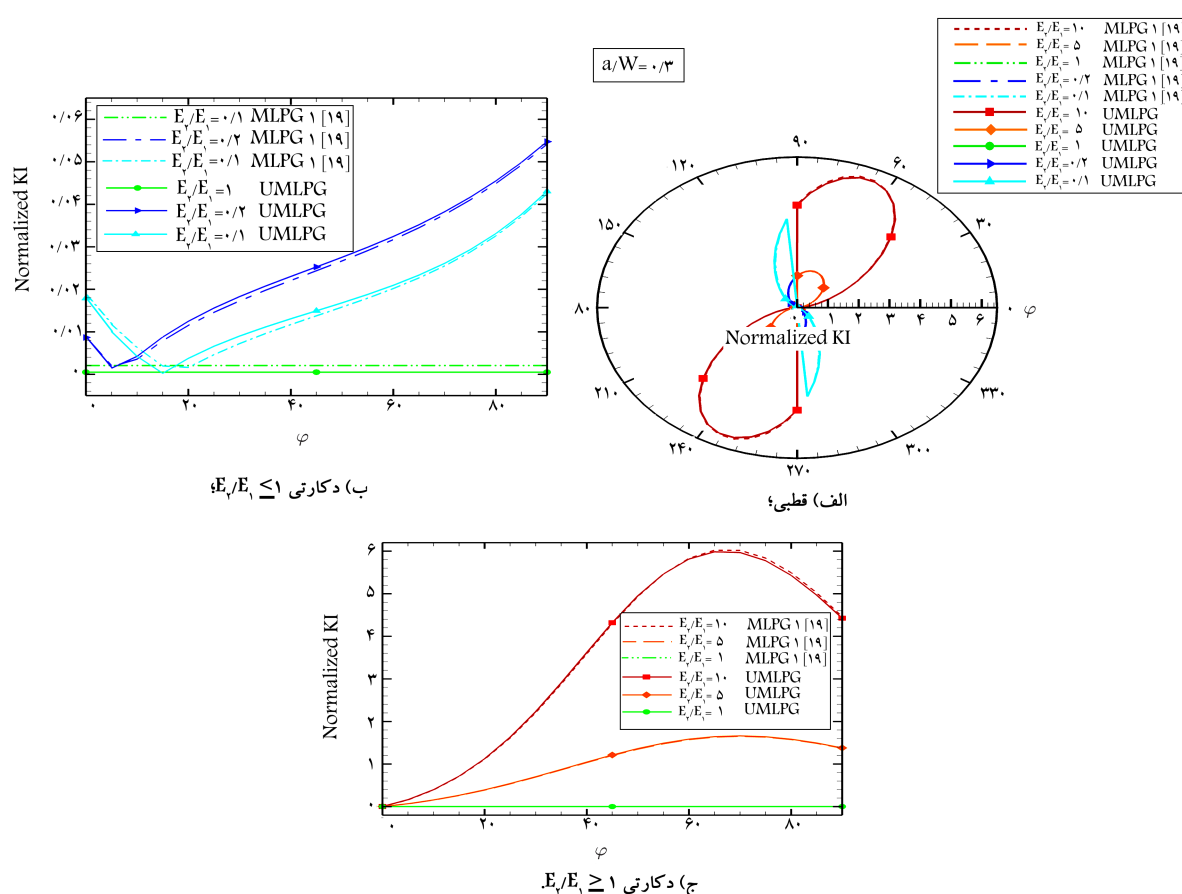
برای $E_2/E_1 > 1$ برابر بیشترین مقدار $K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ در زوایای بین 75° تا 80° درجه است.^[۱۹] برای $E_2/E_1 < 1$ بیشینه مقدار در زوایای 95° و 275° است. نقاط خنثی در این نمودارها در زاویه 0° و 180° است. در شکل ۱۸ مشاهده می شود که تقارنی ما بین نسبت های $E_2/E_1 = 10$ و 0.1 و همچنین 5 و 0.2 وجود دارد که این موضوع به لحاظ فیزیکی نیز تأیید می شود و مورد انتظار است. همچنین در این اشکال مشاهده می شود که روش حاضر و روش MLPG تطابق مطلوبی دارند.

۵. نتیجه گیری

در این نوشتار برای اولین بار به منظور تحلیل ترک مود ترکیبی ورق مدوج تابعی از یک روش بدون مش محلی پتروف - گالرکین جامع جدید^[۲۰] استفاده شده است. ورق ترک دار لایه ای از جنس مدوج تابعی تحت دو بارگذاری تنش ثابت و کرنش



شکل ۱۶. تغییرات $K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a}$ بر حسب $a/W = 0.3$ به ازای E_2/E_1 مختلف.



شکل ۱۸. تغییرات $K_{II}/\sigma_0 \sqrt{\pi a}$ برحسب $a/W = 0.3$ به ازای E_2/E_1 مختلف.

از روش جدید با نتایج روش MLPG^[۱۹] مقایسه شده و نشان داده شده که این دو روش در بیشتر نقاط تطابق مطلوبی دارند، و در نقاطی که تطابق کمتری دارند روش پیشنهادی حاضر مسئله را صحیح تر تحلیل می کند و دقیق تر است.

از طرفی، روش حاضر می تواند نتایج چهار MLPG را تولید کند^[۲۰] و در راستای یکسان سازی روش های مختلف بدون مش پتروف - گالرگین گام برداشته است. در نتیجه با استفاده از روش UMLPG ضمن ارائه ی روشی بسیار دقیق مشکل انتخاب تابع آزمون در روش های MLPG رفع می شود. پس می توان انتظار داشت که روش حاضر جایگزین بسیار خوبی برای سایر روش های MLPG شود.

ثابت فرض شده و ضریب شدت تنش مود اول و دوم با استفاده از انتگرال های مستقل از مسیر J^* ، که برای مواد ناهمگن فرمول بندی شده اند، محاسبه شده است.

اثر تغییر زاویه ی گرا دیان خواص، پارامتر ناهمگنی و طول ترک بر ضرایب شدت تنش مود اول و دوم بررسی شده است. سپس نتایج حاصله در زاویه ی گرا دیان خواص برابر صفر ($\varphi = 0^\circ$) که حل تحلیلی آن موجود است با روش تحلیلی و روش MLPG^[۱] (که یکی از دقیق ترین و مرسوم ترین نوع MLPG است) مقایسه شده است. نتایج نشان می دهد که روش UMLPG نسبت به روش مرسوم MLPG^[۱] دارای دقت بالاتری است. در دیگر زوایا، نتایج به دست آمده

پانوشته ها

1. functionally graded material (FGM)
2. smart material
3. Bamboo
4. chemical vapor deposition (CVD)
5. physical vapor deposition (PVD)

6. high-temperature plasma
7. gravity-assisted casting
8. smoothed particle hydrodynamics (SPH)
9. reproducing kernel particle (RKPM)
10. moving least square (MLS)
11. diffuse element method (DEM)
12. element free Galerkin (EFG)
13. meshless local Petrov-Galerkin (MLPG)

14. test function
15. mixed-mode
16. fundamental solution
17. Heaviside
18. direction interpolation method

منابع (References)

1. Schwartz, M., *Encyclopedia of Smart Material*, John Wiley & Sons, Inc (2002).
2. Shukla A., *Dynamic Fracture Mechanics*, World Scientific Publishing Co. (2006).
3. Jain, N., Rousseau, C.E. and Shukla, A. "Crack-tip stress fields in functionally graded materials with linearly varying properties", *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **42**, pp. 155-170 (2004).
4. Niino, M., Hirai, T. and Watanabe, R. "functionally gradient material as barrier for space plane", *J. Jpn. Son. Com. Mater.*, **13**, pp. 257-264 (1987).
5. Sasaki, M., Wang, Y., Hirano, T. and Hirai, T. "Design of Sic/C functionally gradient material and its propagation by chemical vapor deposition", *J. Ceramic Society of Japna (in Japanese)*, **97**(5), pp. 539-543 (1989).
6. Liu, G.R., *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, Second Edition, CRC Press (2002).
7. Liu, G.R. and Gu, Y.T., *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, Springer (2005).
8. Lucy, L. "A numerical approach to testing the fission hypothesis", *Astron. J.*, **82**, pp. 1013-1024 (1977).
9. Liu, W.K., Adee, J. and Jun, S. "Reproducing kernel and wavelet particle methods for elastic and plastic problems", *Advanced Computational Methods for Material Modeling*, Benson, D. J., Ed., 180/PVP 268 ASME, pp. 175-190 (1993).
10. Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P. "Generalizing the finite element method: Diffuse approxima-approximation and diffuse elements", *Comput. Mech.*, **10**, pp. 307-318 (1992).
11. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. "Element-free Galerkin methods", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **37**, pp. 229-256 (1994).
12. Atluri, S.N. and Zhu, T. "A new meshless local petrov galerkin (MLPG) approach in computational mechanics", *Comp. Mech.*, **22**, pp. 117-127 (1998).
13. Atluri, S.N. and Zhu, T.L. "The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics", *Comp. Mech.*, **25**, pp. 169-179 (2000).
14. Gu, Y.T. and Liu, G.R. "A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free and forced vibration analysis for solids", *Comp. Mech.*, **27**(3), pp. 188-198 (2001).
15. Ching, H.K. and Batra, R.C. "Determination of crack tip fields in linear elastostatics by the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method", *Comp. Mode. in Eng. & Scie.*, **2**(2), pp. 273-289 (2001).
16. Atluri, S.N. and Shen, S.P., *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method*, Tech. Science Press (2002).
17. Qian, L.F. and Chang, H.K. "Static and dynamic analysis of 2-D functionally graded elasticity by using meshless local Petrov-Galerkin method", *J. Chin. Inst. of Eng.*, **27**(4), pp. 491-503 (2006).
18. Nami, M.R. and Abdollahifar, A. "Determination of stress intensity factor in FGM plate by MLPG mthod", 20th Inter. Confer. on Mech. Enging, Iran, Shiraz (2012).
19. Abdollahifar, A. and Nami, M.R. "Investigating the effect of angle between the material gradation direction and crack on mixed-mode stress intensity factor of FGM plates using MLPG method", *Modares Mech. Enging*, **13**(1), pp. 138-150 (2013) (In persian).
20. Abdollahifar, A., Nami, M.R. and Shafiei, A.R. "A new MLPG method for elastostatic problems", *Enging Anal. with Bound. Elem.*, **36**, pp. 451-457 (2012).
21. Nami, M.R. and Abdollahifar, A. "Determination of stress intensity factor in FGM plate by a new MLPG mthod", 21th Inter. Confer. on Mech. Enging, Iran, Tehran (2013).
22. Rao, B.N. and Rahman, S. "Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials", *Eng. Frac. Mech.*, **70**, pp. 1-27 (2003).
23. Erdogan, F. and Wu, B.H., "Analysis of FGM specimens for fracture toughness testing", *Ceramic Transaction*, **34**, pp. 2435-2441 (1993).
24. Liu, G.R. and Yan, L., *A Modified Meshless Local Petrov-Galerkin Method for Solid Mechanics*, Advances in Computational Engineering and Sciences, Tech Science Press, pp. 1374-1379 (2000).
25. Fleming, M., Chu, Y., Moran, B. and Belytschko, T. "Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, **40**, pp. 1483-1504 (1997).
26. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. "Element-free Galerkin methods", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, **37**, pp. 229-256 (1994).
27. Organ, D.J., Fleming, M. and Belytschko, T. "Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency", *Comput. Mech.*, **18**, pp. 225-235 (1996).
28. Duflo, M. "A meshless method with enriched weight functions for three dimensional crack propagation", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, **65**, pp. 1970-2006 (2006).
29. Chen, J., Wu, L. and Du, S. "A modified J integral for functionally graded materials", *Mech. Res. Commun.*, **27**(3), pp. 301-306 (2000).
30. Eischen, J. "Fracture of nonhomogeneous materials", *Int. J. Fract.*, **34**, pp. 3-22 (1987).