Research Note

# روشی جدید برای اعمال شرط مرزی فشار بر مرزهای منحنی‌شکل در روش شبکه‌ی بولتزمن

**مهدی رحمانی گورتانی** * **(دانشجوی دکتری)**

**محمود اشرفی‌زاده (استادیار)**

**دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان**

مهندسی مکانیک شریف، (بهار ۱۳۹۴)
دوره‌ی ۳ - ۳۱، شماره‌ی ۱، ص. ۸۳-۸۸، (یادداشت فنی)

در این مطالعه روشی جدید برای پیاده‌سازی شرط مرزی فشار روی مرزهای منحنی در روش شبکه‌ی بولتزمن پیشنهاد شده است. در این روش که مبتنی بر برون‌یابی و اصل برهم‌نهی[۱] است، تابع توزیع روی نقطه‌ی مرزی به دو قسمت تعادلی و غیرتعادلی تقسیم شده است: قسمت تعادلی به‌کمک چگالی مشخص مرزی و برون‌یابی سرعت از نقاط مجاور، و قسمت غیرتعادلی نیز با استفاده از شرط کمانش محاسبه می‌شود. سپس مقادیر مجهول تابع توزیع در نقاط مجاور مرز، به‌کمک میان‌یابی محاسبه و طوری اصلاح می‌شود که فشار (چگالی) مورد نظر روی مرز اعمال شود. نتایج عددی به دست آمده نشان می‌دهد که روش مذکور از مرتبه‌ی دوم دقت است. مثال‌های حل شده برای حالت دوبعدی طرح شده است، اما از این روش به‌راحتی می‌توان برای مسائل سه‌بعدی نیز بهره‌مند شد.

**واژگان کلیدی:** روش شبکه‌ی بولتزمن، شرط مرزی فشار، برون‌یابی، تابع توزیع تعادلی، تابع توزیع غیرتعادلی.

m_rahmani56@me.iut.ac.ir
mahmud@cc.iut.ac.ir

## ۱. مقدمه

در دهه‌های اخیر «شبکه‌ی بولتزمن» به‌عنوان روشی قدرت‌مند در زمینه‌ی دینامیک سیالات محاسباتی مطرح شده و موفقیت خوبی در مدل‌کردن پدیده‌های فیزیکی جریان کسب کرده است.[۱] در این روش مانند سایر روش‌های عددی، شرایط مرزی دقت و پایداری روش را تحت تأثیر قرار می‌دهند. متداول‌ترین شرط مرزی که در روش شبکه‌ی بولتزمن مورد استفاده قرار می‌گیرد و این روش را برای شبیه‌سازی جریان در هندسه‌های پیچیده مناسب می‌سازد، «کمانش» است. گرچه شکل اولیه در این شرط دارای دقت مرتبه اول است،[۲] راهکارهای متعددی برای افزایش دقت شرط مرزی عدم لغزش ارائه شده است.[۳-۵]

پس از آن که نخستین شرط مرزی از مرتبه‌ی دوم دقت برای دیواره‌های منحنی ارائه شد،[۶] پایداری این روش در ادامه بهبود داده شد.[۷و۸] محققین براساس میان‌یابی و بالانس مومنتوم روی مرز روشی ارائه کردند[۹] که در آن برخلاف روش پیشین[۶] از یک رابطه برای میان‌یابی استفاده شده است. از دیگر روش‌های ارائه شده برای مرزهای منحنی می‌توان به روش گو اشاره کرد که براساس برون‌یابی و در نظر گرفتن ترم غیرتعادلی انجام می‌شود.[۱۰]

شرایط مرزی سرعت و فشار، از دیگر شرایط مرزی‌اند که در شبیه‌سازی فرایندهای فیزیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در روش شبکه‌ی بولتزمن روش‌های مختلفی برای استفاده از این شرایط مرزی ارائه شده است. البته در این روش مشخص بودن فشار، معادل مشخص بودن چگالی است. در کارهای اولیه، در این‌گونه موارد مقدار تابع توزیع برابر تابع توزیع تعادلی محاسبه شده از سرعت و چگالی (فشار) مرزی قرار داده می‌شد. از آنجا که این روش خطای زیادی دارد، پیشنهاد شد که جمله‌یی به‌عنوان ترم غیرتعادلی به مقادیر تعادلی اضافه شود.[۱۱]

در مطالعات بعدی از روش‌های دیگری برای شبیه‌سازی‌های استفاده شد[۱۲و۱۳] و نیز یکی از متداول‌ترین روش‌ها برای این منظور ارائه شد.[۱۴] در این روش که مبتنی بر کمانش قسمت غیرتعادلی است، تنها یکی از مقادیر سرعت یا چگالی در روی مرز باید مشخص باشد. تمام این روش‌ها برای حالتی است که مرز روی نقاط شبکه مستقر باشد.

در ادامه، روشی برای اعمال شرط مرزی ورودی در حالتی که مرز روی نقاط شبکه نیست، با معلوم بودن سرعت و چگالی مرزی ارائه شد که بر پایه‌ی میان‌یابی و ترکیب جملات تعادلی و غیرتعادلی تابع توزیع استوار است.[۱۵] با بررسی پنج روش متداول اعمال شرط مرزی سرعت در حل عددی معادلات ناویر ـ استوکس با استفاده از روش شبکه‌ی بولتزمن،[۱۶] پایداری این روش‌ها با هم مقایسه شده است. همچنین روشی برای اعمال شرط مرزی فشار ارائه شده است[۱۷] که در آن، فشار متوسط بر مرز اعمال می‌شود و به‌عبارتی نمی‌توان این شرط مرزی را به‌عنوان شرط مرزی دیریشله دسته‌بندی کرد.[۱۷] همچنین روشی برای اعمال شرط مرزی فشار در خروجی ــ برای جریان لوله ــ ارائه شد که در آن نیز فشار متوسط بر مرز اعمال می‌شود. این روش دارای دقت مرتبه ۲ سرعت و دقت مرتبه ۱ از آن فشار است.[۱۸] اخیراً روشی جدید برای اعمال شرط مرزی کمانش مرزهای پیچیده ارائه

---

* نویسنده مسئول

*تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۸/۱۶، اصلاحیه ۱۳۹۲/۱۰/۹، پذیرش ۱۳۹۲/۱۰/۲۱.*

شده، که در مقایسه با روش‌های قبلی از الگوریتم ساده‌تری برخوردار است و لذا برای مسائلی که سطح مشترک سیال و جامد در آنها زیاد است، مانند جریان در محیط‌های متخلخل، مناسب است.[۱۹]

محققین با بررسی چگونگی پیاده‌سازی روش شبکه‌ی بولتزمن روی پردازنده‌های گرافیکی، راهکارهایی برای افزایش دقت و راندمان جریان‌هایی با مرزهای منحنی‌شکل ارائه کرده‌اند.[۲۰]

در این مقاله روشی برای اعمال شرط مرزی دیریشله[۲] فشار روی سطوح منحنی ارائه شده که اساساً بر برون‌یابی و اصل برهم‌نهی استوار است. برای این منظور، تابع توزیع تعادلی روی نقطه‌ی مرزی به دو قسمت تعادلی و غیر تعادلی تقسیم شده است؛ قسمت تعادلی به‌کمک چگالی مشخص مرزی و برون‌یابی سرعت از نقاط مجاور، و قسمت غیر تعادلی نیز با استفاده از شرط کمانش محاسبه می‌شود. سپس مقادیر مجهول تابع توزیع در نقاط مجاور مرز، به‌کمک میان‌یابی محاسبه و طوری اصلاح می‌شود که فشار (چگالی) مورد نظر روی مرز اعمال شود. بررسی رفتار خطای مسائل حل‌شده نشان می‌دهد که روش مذکور از مرتبه‌ی دوم دقت است. روند ارائه‌ی مطالب در این مقاله به این صورت است که ابتدا روش شبکه‌ی بولتزمن به اختصار توضیح داده می‌شود، و پس از بیان کامل شرط مرزی ارائه‌شده، در انتها مثال‌های حل‌شده بررسی می‌شود.

## ۲. روش شبکه‌ی بولتزمن

در این روش معادله‌ی نظریه‌ی جنبشی برای تابع توزیع سرعت ذرات حل شده و متغیرهای ماکروسکوپی جریان مانند سرعت و فشار به‌کمک این تابع توزیع به دست می‌آید. یکی از مدل‌های متداول برای بررسی نظریه‌ی جنبشی، مدل (BGK)[۳] است که در آن عملگر برخورد معادله‌ی بولتزمن به‌کمک یک زمان آرامش[۴] محاسبه و چنین بیان می‌شود:[۲۱,۲۲]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi.\nabla f = -\frac{1}{\lambda}(f - f^{eq}) \qquad (۱)$$

که در آن، $\xi$ بردار سرعت ذره، $\lambda$ زمان آرامش، $f$ تابع توزیع سرعت و $f^{eq}$ تابع توزیع تعادلی است. این معادله در یک فضای سرعت متشکل از مجموعه‌ی محدودی از سرعت‌ها، $\{\mathbf{e}_\alpha\}$، به‌صورت رابطه‌ی ۲ بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{e}_\alpha.\nabla f_\alpha = -\frac{1}{\lambda}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \qquad (۲)$$

که در آن، $f_\alpha(\mathbf{x},t) \equiv f(\mathbf{x},\mathbf{e}_\alpha,t)$ بیانگر تابع توزیع متناظر با $\alpha$امین جهت سرعت است. برای حل عددی معادله‌ی فوق، آن را به‌صورت رابطه‌ی ۳ در یک شبکه‌ی منظم گسسته می‌کنند:

$$f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{e}_\alpha\delta t, t+\delta t) - f_\alpha(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{\tau}\left[f_\alpha(\mathbf{x},t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x},t)\right] \qquad (۳)$$

که در آن $\tau = \lambda/\delta t$، $\mathbf{x}$، $t$ و $\delta t$ به‌ترتیب بیانگر زمان آرامش بی‌بعد (برای اختصار زمان آرامش گفته می‌شود)، بردار موقعیت، زمان و گام زمانی هستند. برای مسائل دوبعدی معمولاً از مدل D۲Q۹ در حل معادله‌ی ۳ استفاده می‌شود. در این مدل بردارهای سرعت و تابع توزیع تعادلی چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{e}_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ c\left(\cos((\alpha-1)\pi/4), \sin((\alpha-1)\pi/4)\right) & \alpha = 1,3,5,7 \\ \sqrt{2}c\left(\cos((\alpha-1)\pi/4), \sin((\alpha-1)\pi/4)\right) & \alpha = 2,4,6,8 \end{cases} \qquad (۴)$$

$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{x},t) = \rho\cdot w_\alpha\left[1 + \frac{3}{c^2}\mathbf{e}_\alpha.\mathbf{u} + \frac{9}{2c^4}(\mathbf{e}_\alpha.\mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2}\mathbf{u}.\mathbf{u}\right] \qquad (۵)$$

ضرایب وزنی $w_\alpha$ برای این حالت عبارت‌اند از:

$$w_\alpha = \begin{cases} 4/9 & \alpha = 0 \\ 1/9 & \alpha = 1,3,5,7 \\ 1/36 & \alpha = 2,4,6,8 \end{cases} \qquad (۶)$$

همچنین کمیت‌های ماکروسکوپی سیال در رابطه‌ی ۵ نیز با استفاده از توابع توزیع محاسبه می‌شود:

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} \qquad \rho\mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha f_\alpha^{eq} \qquad (۷)$$

سرعت صوت در این مدل برابر است با $c_s = c/\sqrt{3}$ که در آن $c = \delta x/\delta t$. همچنین معادله‌ی حالت گاز ایده‌ال به‌صورت $p = \rho c_s^2$ نوشته می‌شود.

رابطه‌ی ۳ طی دو مرحله‌ی برخورد[۵] و پخش[۶] حل می‌شود. در مرحله‌ی برخورد (رابطه‌ی ۸)، تابع توزیع پس از برخورد، به‌کمک تابع توزیع و تابع توزیع تعادلی به‌صورت محلی محاسبه شده و سپس این مقدار در مرحله‌ی پخش (رابطه‌ی ۹)، به نقاط مجاور و در راستای بردار سرعت گسسته شده، منتقل می‌شود.

$$\tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t+\delta t) = f_\alpha(\mathbf{x},t) - \frac{1}{\tau}\left[f_\alpha(\mathbf{x},t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{x},t)\right] \qquad (۸)$$

$$f_\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{e}_\alpha\delta t, t+\delta t) = \tilde{f}_\alpha(\mathbf{x}, t+\delta t) \qquad (۹)$$

با استفاده از بسط چاپمن ـ انسکوک[۷]، به‌صورت ریاضی می‌توان نشان داد که در صورت کوچک بودن عدد ماخ، این مدل، معادلات ناویر ـ استوکس را ارضاء می‌کند. در این حالت، گران‌روی مطابق رابطه‌ی ۱۰ با زمان آرامش مرتبط می‌شود:[۲۳]

$$\upsilon = (\tau - 1/2)c_s^2\delta t \qquad (۱۰)$$

در بررسی حاضر از یک مدل تراکم‌ناپذیر[۲۴] استفاده شده که در آن روابط ۵ و ۷ چنین تغییر می‌کند:

$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{x},t) = w_\alpha\left[\rho + \rho_\circ\left(\frac{\mathbf{e}_\alpha.\mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_\alpha.\mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}.\mathbf{u}}{2c_s^2}\right)\right] \qquad (۱۱)$$

$$\rho = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{eq} \qquad \rho_\circ\mathbf{u} = \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha \mathbf{e}_\alpha f_\alpha^{eq} \qquad (۱۲)$$

## ۳. شرایط مرزی

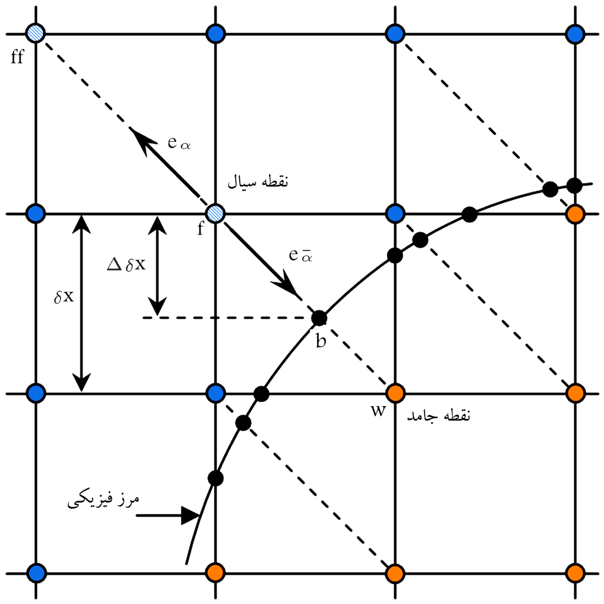
شرایط مرزی در تمامی روش‌های عددی از اهمیت ویژه‌یی برخوردارند. از طرفی چون متغیرهای اصلی در روش شبکه‌ی بولتزمن، توابع توزیع سرعت ذرات($f_i$)

هستند ــ نه متغیرهای فیزیکی جریان مانند سرعت و فشار ــ اعمال شرایط مرزی در این روش، به دقت بیشتری نیاز دارد. به‌عبارتی در تعیین مقادیر مجهول تابع توزیع روی مرزها باید چنان عمل شود که علاوه بر حصول مقادیر فیزیکی مورد نظر در روی مرز، معادلات ناویر ـ استوکس نیز ارضاء شوند.[۵]

چنان که می‌دانیم در روش شبکه‌ی بولتزمن، بعد از مرحله‌ی جاری‌شدن، مقادیر $f_\alpha$ در اولین نقاط سیال که در مجاورت مرز قرار دارند و جهت آنها به طرف داخل دامنه‌ی حل است، مجهول بوده و به‌کمک شرایط مرزی باید تعیین شوند. اعمال شرایط مرزی برای مرزهای منحنی ــ نسبت به سایر مرزها ــ از پیچیدگی بیشتری برخوردار است چرا که علاوه بر متغیر بودن فاصله‌ی نقاط سیال از مرز، تعداد و جهت توابع توزیع مجهول برای نقاط مختلف نیز با یکدیگر فرق می‌کنند. در روش شبکه‌ی بولتزمن برای این‌گونه مرزها معمولاً از روش‌های مبتنی بر درون‌یابی یا برون‌یابی استفاده می‌شود.[۷-۱۰] روش ارائه شده در این مقاله نیز ترکیبی از این روش‌ها و روش برهم‌نهی است. از آنجا که روش شبکه‌ی بولتزمن یک روش تفاضل محدود برای معادله‌ی بولتزمن روی یک شبکه‌ی گسسته است، استفاده از روش‌های میان‌یابی یا برون‌یابی برای محاسبه‌ی متغیرها منطقی است.[۲۳]

مرز منحنی نشان داده شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید. نقطه‌ی شبکه در سمت سیال مرز با $\mathbf{x}_f$ و نقطه‌یی که در طرف دیگر مرز قرار دارد با $\mathbf{x}_w$ نشان داده شده است. خط ارتباطی این دو نقطه مرز را در نقطه‌ی $\mathbf{x}_b$ قطع می‌کند. به‌عبارتی نقاط پر مشخص شده روی مرز، نقاط تقاطع مرز و جهت‌های شبکه هستند. کسری از پاره خط ارتباطی که در ناحیه‌ی سیال قرار دارد برابر است با $\Delta = \frac{|\mathbf{x}_f-\mathbf{x}_b|}{|\mathbf{x}_f-\mathbf{x}_w|}$.

با توجه به مطالب فوق، مقدار $f_\alpha(\mathbf{x}_f, t+\delta t)$ مجهول است که باید با توجه به شرط مرزی مشخص شود. هدف از این کار، اعمال فشار مشخص $p_b$ (چگالی مشخص $\rho_b = ۳p_b$) روی مرز منحنی شکل است. با توجه به بسط چاپمن ـ انسکوک، مقدار $f_\alpha(\mathbf{x}_f)$ را می‌توان به دو قسمت تعادلی و غیرتعادلی تقسیم کرد: $f_\alpha(\mathbf{x}_f) = f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}_f) + f_\alpha^{neq}(\mathbf{x}_f)$ که $f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}_f)$ و $f_\alpha^{neq}(\mathbf{x}_f)$ به ترتیب توابع توزیع تعادلی و غیرتعادلی هستند. به‌عبارتی در هر نقطه می‌توان با تعیین توابع توزیع تعادلی و غیر تعادلی در جهت $\alpha$، مقدار $f_\alpha$ در آن نقطه را به دست آورد. از آنجا




شکل ۱. تصویر دوبعدی شبکه‌ی مربعی و مرز منحنی.

که مقدار $f_\alpha(\mathbf{x}_{ff})$ بعد از مرحله‌ی جاری شدن مشخص است در صورت تعیین $f_\alpha(\mathbf{x}_b)$ می‌توان از رابطه‌ی ۱۳ برای تعیین $f_\alpha(\mathbf{x}_f)$ استفاده کرد:

$$f_\alpha(\mathbf{x}_f) = \frac{f_\alpha(\mathbf{x}_b) + \Delta f_\alpha(\mathbf{x}_{ff})}{۱+\Delta} \tag{۱۳}$$

در نقطه‌ی $\mathbf{x}_b$ بر روی مرز مورد نظر، چگالی مشخص است $\rho(\mathbf{x}_b) = \rho_b$ و سرعت تقریبی را نیز می‌توان چنین محاسبه کرد:

$$\bar{\mathbf{u}}_b = (۱+\Delta)\mathbf{u}_f - \Delta\mathbf{u}_{ff}$$
$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}(\mathbf{x}_f), \qquad \mathbf{u}_{ff} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_{ff}) \tag{۱۴}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی ۱۱ داریم:

$$\bar{f}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}_b) = w_\alpha\left[\rho_b + \rho_\circ\left(\frac{\mathbf{e}_\alpha.\bar{\mathbf{u}}_b}{c_s^۲} + \frac{(\mathbf{e}_\alpha.\bar{\mathbf{u}}_b)^۲}{۲c_s^۴} - \frac{\bar{\mathbf{u}}_b.\bar{\mathbf{u}}_b}{۲c_s^۲}\right)\right] \tag{۱۵}$$

با توجه به این که $\mathbf{e}_{\bar\alpha} = -\mathbf{e}_\alpha$ و $w_{\bar\alpha} = w_\alpha$:

$$f_{\bar\alpha}^{eq}(\mathbf{x}_b) = \bar{f}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}_b) - ۲\rho_\circ w_\alpha\left(\frac{\mathbf{e}_\alpha.\bar{\mathbf{u}}_b}{c_s^۲}\right) \tag{۱۶}$$

از طرفی با توجه به این که مقدار $f_{\bar\alpha}$ در نقاط $\mathbf{x}_f$ و $\mathbf{x}_w$ بعد از مرحله‌ی جاری شدن معلوم است، می‌توان مقدار این کمیت را در روی مرز و با استفاده از میان‌یابی محاسبه کرد:

$$f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_b) = \frac{f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_w) + (۱-\Delta)f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_f)}{\Delta} \tag{۱۷}$$

در نتیجه به‌کمک روابط ۱۶ و ۱۷ بخش غیرتعادلی $f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_b)$ به دست می‌آید. چنانچه مشابه روش Zou & He از روش کمانش قسمت غیرتعادلی استفاده شود می‌توان بخش غیرتعادلی $f_\alpha(\mathbf{x}_b)$ را محاسبه کرد:[۱۴]

$$f_{\bar\alpha}^{neq}(\mathbf{x}_b) = f_{\bar\alpha}(\mathbf{x}_b) - f_{\bar\alpha}^{eq}(\mathbf{x}_b)$$
$$f_\alpha^{neq}(\mathbf{x}_b) = f_{\bar\alpha}^{neq}(\mathbf{x}_b) \tag{۱۸}$$

بنابراین مقدار $f_\alpha(\mathbf{x}_b) = f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}_b) + f_\alpha^{neq}(\mathbf{x}_b)$ مشخص می‌شود و با استفاده از رابطه‌ی ۱۳ می‌توان $f_\alpha(\mathbf{x}_f)$ را به دست آورد. به این ترتیب می‌توان مقادیر مجهول $f_\alpha$ را برای تمام نقاط مرزی به دست آورد. ولی برخلاف آنچه تصور می‌شود با محاسبه‌ی مقادیر مجهول به روش فوق، مقدار چگالی حاصل روی مرز با چگالی مورد نظر اختلاف دارد. برای برطرف کردن این مشکل چنین عمل می‌شود:

بعد از تعیین تمامی مقادیر مجهول $f_\alpha$ در نقطه‌ی $\mathbf{x}_f$، مقدار چگالی این نقطه به‌کمک میان‌یابی از چگالی مرزی و چگالی جدید نقاط مجاور $(\mathbf{x}_{ff})$ تعیین می‌شود. سپس مقادیر مجهول محاسبه شده، با توجه به ضرایب وزنی که دارند $(w_\alpha)$ با استفاده از رابطه ۱۹ اصلاح می‌شوند:

$$f_\alpha(\mathbf{x}_f) = f_\alpha(\mathbf{x}_f) - \frac{w_\alpha}{\sum_{\alpha\in I} w_\alpha}\delta\rho$$
$$\mathrm{I} = \{\alpha|(\mathbf{x}_f - \mathbf{e}_\alpha) \text{ is not a fluid node}\} \tag{۱۹}$$

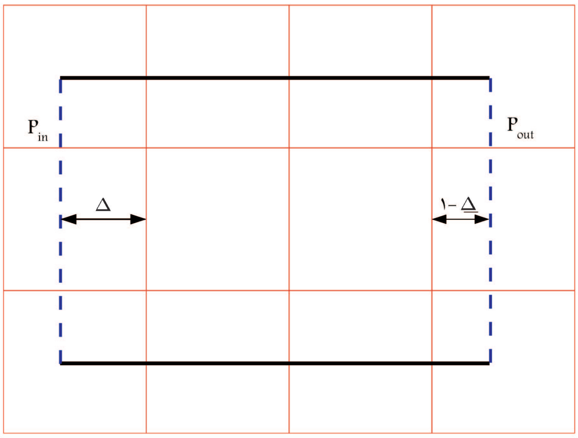
که در آن:

$$\delta\rho = \sum\nolimits_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}_f) - \rho_{f,\text{int}}, \qquad \rho_{f,\text{int}} = \frac{\rho_b + \Delta\sum_\alpha f_\alpha(\mathbf{x}_{ff})}{۱+\Delta} \tag{۲۰}$$

با توجه به این که تمامی میان یابی‌های مورد استفاده از مرتبه دوم دقت‌اند: $\mathbf{u}_b - \bar{\mathbf{u}}_b = O(\delta^۲)$ و نیز، چگالی روی مرز هم از شرایط مرزی مشخص است، بنابراین اختلاف بین تابع توزیع تعادل تقریبی و مقدار واقعی آن را می‌توان چنین تقریب زد:

$$f_\alpha^{eq}(\mathbf{x}_b) - \bar{f}_\alpha^{eq}(\mathbf{x}_b) = O(\delta^۲) \qquad (۲۱)$$

همچنین برای محاسبه‌ی قسمت غیرتعادلی مشابه روش Zou & He ــ که یک روش مرتبه‌ی دوم است ــ عمل شده است. بنابراین انتظار می‌رود روش ارائه شده نیز از مرتبه‌ی دوم دقت باشد که نتایج عددی این مهم را تأیید می‌کنند.




شکل ۲. کانال دوبعدی و محل استقرار مرزها در شبکه.

## ۴. مثال‌های عددی حل‌شده

در بررسی خطای مثال‌های حل‌شده، با تغییر اندازه‌ی شبکه، پارامترهای شبیه‌سازی به‌گونه‌یی تغییر داده می‌شوند که عدد رینولدز جریان ثابت بماند. از سوی دیگر برای پیشگیری از اثرات تراکم‌پذیری روی دقت نتایج، اثرات این ترم نیز باید کاهش یابد.[۱۶] خطای تراکم‌پذیری متناسب با مربع عدد ماخ بوده و بنابراین می‌توان آن را به‌صورت $O(u_{lb}^۲)$ تخمین زد. این خطا باید دست‌کم با سرعت خطای گسسته‌سازی $Er_{\delta x} = O(L_{lb}^{-۲}) = O(N^{-۲})$ کاهش یابد. بنابراین با توجه به رابطه‌ی $\mathrm{Re} = u_{lb}L_{lb}/\nu$ و رابطه‌ی ۱۰، مقدار $\tau$ در هنگام تغییر اندازه شبکه باید ثابت نگه داشته شود.

در ابتدا جریان در یک کانال دوبعدی $(L \times h)$ با شرط مرزی فشار در ورودی و خروجی مورد بررسی قرار گرفته است. در کانال مورد نظر، مرزهای بالا و پایین در وسط نقاط شبکه قرار داشته و مرزهای ورودی و خروجی نیز مطابق شکل ۲ در فاصله‌ی $\Delta$ از نقاط شبکه قرار دارند. جریان در این هندسه با یک افت فشار ثابت در طول کانال مشخص می‌شود. این افت فشار را می‌توان با استفاده از شرط مرزی فشار در ورودی و خروجی آن به دست آورد. حل تحلیلی برای این جریان با یک پروفیل سهموی به‌صورت رابطه‌ی ۲۲ مشخص می‌شود:

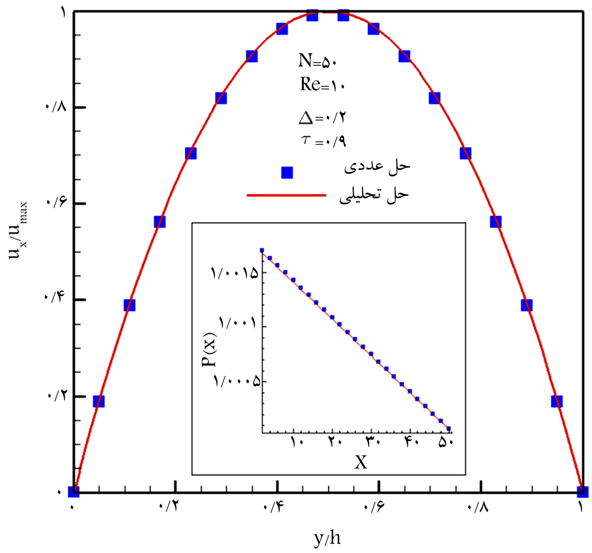
$$\mathbf{u}(x,y) = \mathbf{u}(y) = ۴u_{\max}y(h-y)\hat{\mathbf{i}}$$

$$u_{\max} = \frac{(P_{out} - P_{in})}{۸\mu L}h^۲$$

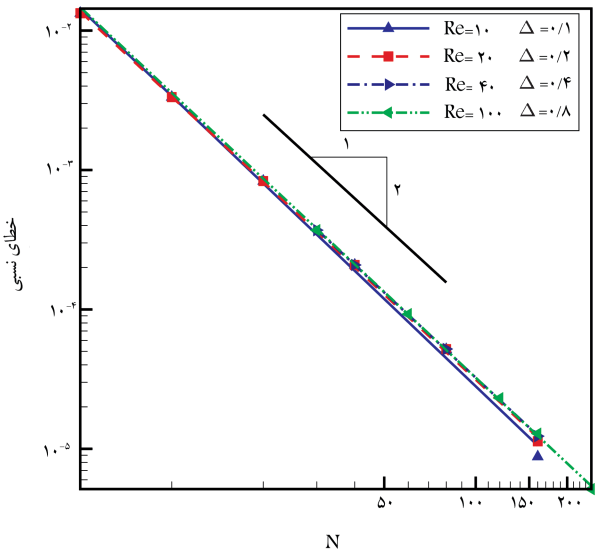
$$P(x) = P_{in} + \frac{(P_{out} - P_{in})}{L}x \qquad (۲۲)$$

که در آن $u_{\max}$ سرعت در مرکز کانال، $\mu$ گران‌روی سیال، $P_{in}$ و $P_{out}$ نیز فشار در ورودی و خروجی کانال است. عدد رینولدز نیز به‌صورت $\mathrm{Re} = \frac{u_{\max}h}{\nu}$ تعریف می‌شود.

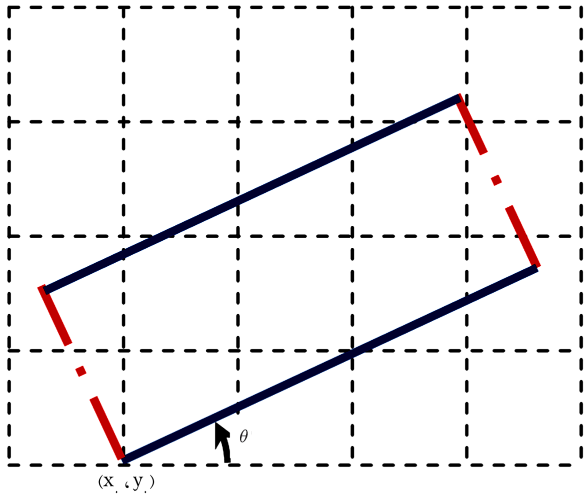
در شبیه‌سازی‌های انجام‌شده، کانال مربعی شکل $(L = h = N)$ بوده، فشار خروجی $P_{out} = \rho_۰/۳$ و فشار ورودی با توجه به عدد رینولدز و اندازه شبکه، برابر $P_{in} = P_{out} + ۸\rho_۰\mathrm{Re}\nu^۲/N^۲$ در نظر گرفته شده است. (با توجه به محل استقرار مرزها تعداد نقاط شبکه در هر جهت $N + ۲$ است.) پروفیل سرعت و فشار در شکل ۳ نشان داده شده است؛ چنان که مشاهده می‌شود نتایج به دست آمده کاملاً بر حل تحلیلی منطبق است. در شکل ۴ تغییرات نرم دوم خطای نسبی سرعت بر حسب اندازه شبکه در مقادیر مختلف Re و $\Delta$ رسم شده است. برای این منظور مقدار $N$ (اندازه شبکه) از ۵ تا ۱۶۰ تغییر می‌کند. شیب نمودارها نشان می‌دهد که روش اعمال شده از مرتبه‌ی دوم دقت است. مقدار خطا چنین محاسبه



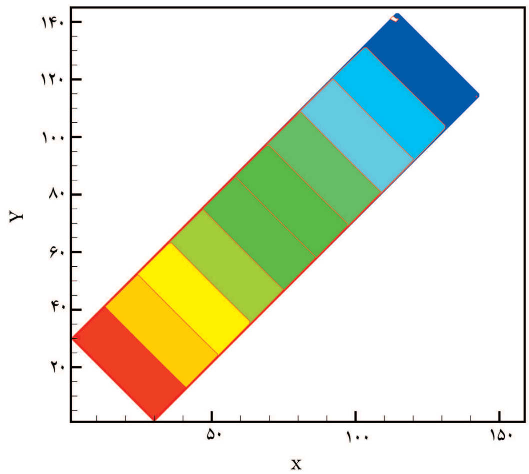

شکل ۳. پروفیل سرعت و فشار حاصل از شبیه‌سازی در مقایسه با حل تحلیلی.




شکل ۴. تغییرات خطای نسبی برحسب اندازه شبکه در حالت‌های مختلف.




شکل ۵. نمای کلی از کانال کج‌شده و شبکه مورد استفاده.




شکل ۶. کانتورهای فشار برای کانال کج شده با زاویه ۴۵.

شده است:

$$E_۲ = \sqrt{\frac{۱}{N^۲}\sum_{k=۱}^{N^۲}\left\|\frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}_k)-\mathbf{u}_{analytic}(\mathbf{x}_k)}{u_{\max}}\right\|^۲} \qquad (۲۳)$$

برای محک زدن شرط مرزی ارائه شده در شرایط سخت‌تر، جریان در یک کانال دوبعدی که خط مرکزی آن با افق زاویه‌ی $\theta$ تشکیل می‌دهد بررسی شده است (شکل ۵). حل تحلیلی این مسئله با استفاده از معادله‌ی ۲۴ انجام می‌شود:

$$u(x,y) = ۴\bar{y}(۱-\bar{y})u_{\max}\cos(\theta)$$

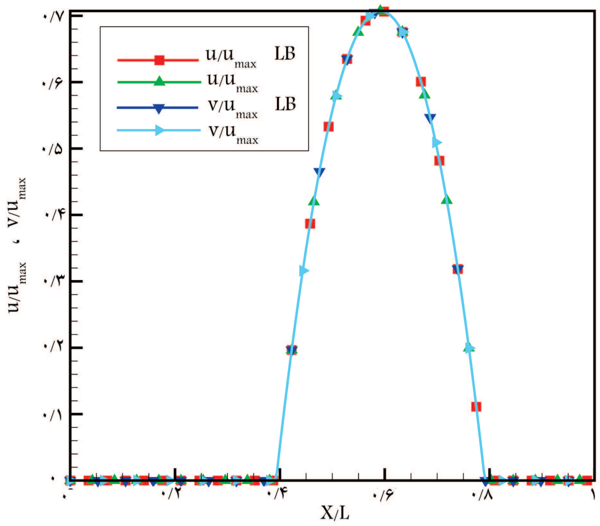
$$v(x,y) = ۴\bar{y}(۱-\bar{y})u_{\max}\sin(\theta)$$

$$P(x,y) = P_{in} - \frac{(P_{in}-P_{out})}{L}\bar{x} \qquad (۲۴)$$

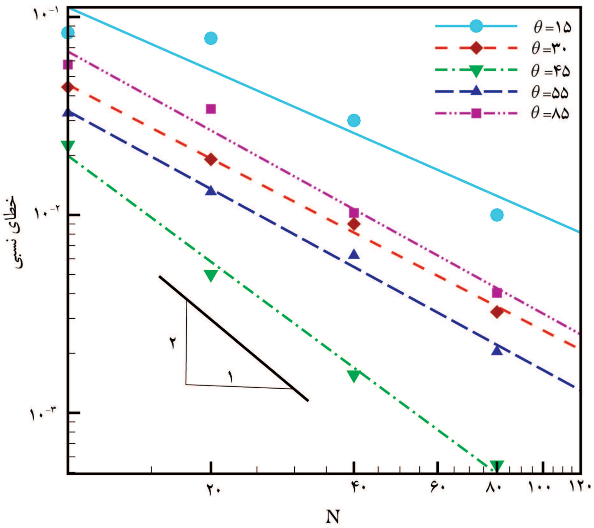
که در آن:

$$\bar{y} = \left[(y-y_\circ)\cos(\theta)-(x-x_\circ)\sin(\theta)\right]/h$$

$$\bar{x} = (x-x_\circ)\cos(\theta)+(y-y_\circ)\sin(\theta) \qquad (۲۵)$$




شکل ۷. تغییرات مولفه‌های سرعت در مقایسه با حل تحلیلی.




شکل ۸. نمودار تغییرات خطا برای کانال کج شده در زوایای مختلف.

برای نمونه کانتورهای فشار و چگونگی تغییرات مؤلفه‌های سرعت در مقایسه با حل تحلیلی در شکل‌های ۶ و ۷ برای زاویه ۴۵ درجه نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در این حالت نیز نتایج از دقت بالایی برخوردارند. یادآور می‌شود کانتورهای فشار، تنها برای نشان دادن تغییرات خطی فشار در راستای طول کانال نمایش داده شده است.

در شکل ۸ نمودار تغییرات خطا برحسب اندازه شبکه در زوایای مختلف رسم شده است. شیب متفاوت نمودار در زوایای مختلف به‌خاطر خطای ناشی از برون‌یابی است. در زاویه‌ی ۴۵ درجه جهت عمود بر مرز در راستای یکی از بردارهای سرعت شبکه است و لذا در این حالت دقت محاسبات بالاتر و شیب نمودار به ۲- نزدیک‌تر است.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این تحقیق روشی برای اعمال شرط مرزی فشار، بر روی مرزهای منحنی شکل، در روش شبکه‌ی بولتزمن ارائه شده است. این روش براساس اصل برهم‌نهی و برون‌یابی

استوار است. برای بررسی دقت این روش، جریان ناشی از اختلاف فشار ورودی و خروجی، در یک کانال دوبعدی که حل تحلیلی آن موجود است، در دو حالت مورد بررسی قرارگرفته است. در حالت اول مرزهای ورودی و خروجی کانال روی نقاط شبکه قرار ندارند و در حالت دوم که شبیه‌سازی عددی آن با استفاده از روش شبکه‌ی بولتزمن کاملاً پیچیده است و به‌راحتی قابل شبیه‌سازی نیست، کانال مورد نظر در داخل شبکه‌ی مورد استفاده به‌اندازه $\theta$ چرخانده شده است. شبیه‌سازی‌ها در اعداد رینولدز مختلف و همچنین در زوایای مختلف انجام شده است. نتایج حاصل از این بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش ارائه شده‌از دقت بالایی برخوردار است. در این تحقیق چگونگی اعمال این روش برای حالت دوبعدی بررسی شده است، ولی به‌راحتی می‌توان آن را به حالت سه‌بعدی تعمیم داد. یکی ازکاربردهای این روش، شبیه‌سازی فرایند جذب در بسترهای فشرده است که در تحقیقات بعدی ارائه می‌شود.

## پانوشت‌ها

1. super position
۲. Dirichlet boundary condition
3. Bhatnagar-Groos-Krook
4. relaxation time
5. collision
6. streaming
7. Chapman-Enskog

## منابع (References)


1. Chen, S. and Doolen, G. "Lattice Boltzmann method for fluid flows", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, pp. 329-364 (1998).
2. Cornubert, R., d'Humiéres, D. and Levermore, D. "A Knudsen layer theory for lattice gases", *Physica D: Nonlinear Phenomena,* **47**, pp. 241-259 (1991).
3. Noble, D.R., Chen, S., Georgiadis, J.G. and Buckius, R.O. "A consistent hydrodynamics boundary condition for the lattice Boltzmann method", *Phys. Fluids*, **7**(1), pp. 203-209 (1995).
4. Ziegler, D.P. "Boundary conditions for lattice Boltzmann simulations", *J. Stat. Phys.*, **71**, pp. 1171-1177 (1993).
5. Maier, R.S., Bernard, R.S. and Grunau, D.W. "Boundary conditions for the lattice Boltzmann method", *Phys. Fluids,* **8**(7), pp. 1788-1801 (1996).
6. Filippova, O. and Hanel, D. "Grid refinement for lattice-BGK models", *J. Comput. Phys.*, **147**, pp. 219-228 (1998).
7. Mei, R., Luo, L.-S. and Shyy, W. "An accurate curved boundary treatment in the lattice Boltzmann method", *J. Comput. Phys.*, **15**5(2) pp. 307-330 (1999).
8. Mei, R., Shyy, W., Yu, D. and Luo, L.-S. "Lattice Boltzmann method for 3-D flows with curved Boundary", *J. Comput. Phys.*, **16**1(2), pp. 680-699 (2000).
9. Yu, D., Mei, R., Luo, L.-S. and Shyy, W. "Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation", *Progress in Aerospace Sciences*, **39**, pp. 329-367 (2003).
10. Guo, Z. and Zheng, C. "An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method", *Physics of Fluids,* **14**(6), pp. 2007-2010 (2002).
11. Skordos, P.A. "Initialand boundary conditions for the lattice Boltzmann method", *Phys. Rev. E*, **48**, pp. 4823-4842 (1992).
12. Inamuro, T., Yoshino, M. and Ogino, F. "A non-slip boundary condition for lattice Boltzmann simulations", *Phys. Fluids*, **7**, pp. 2928-2943 (1996).
13. Chen, S., Martinez, D. and Mei, R. "On boundary conditions in lattice Boltzmann method", *Phys. Fluids*, **8**, pp. 2527-2536 (1996).
14. Zou, Q. and He, X. "On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model", *Phys. Fluids*, **9**, pp. 1591-1598 (1997).
15. Yu, D. "Viscous flow computations with the lattice Boltzmann equation method", Ph.D. Dissertation, University of Florida (2002).
16. Latt, J. and Chopard, B. "Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method", *Physical Review E*, **77**, pp. 1-29 (2008).
17. Junk, M. and Yang, Z. "Pressure boundary condition for the lattice Boltzmann method", *Computers and Mathematics with Applications,* **58**, pp. 922-929 (2009).
18. Yang, Z. "Pressure condition for the lattice Boltzmann methods on domains with curved boundaries", *Computers and Mathematics with Applications,* **59**, pp. 2168-2177 (2010).
19. Yin, X. and Zhang, J. "An improved bounce-back scheme for complex boundary conditions in lattice Boltzmann method", *Journal of Computational Physics*, **231**(11), pp. 4295-4303 (2012).
20. Zhou, H., Mo, G., Wu, F., Zhao, J. and Rui, M. "GPU implementation of lattice Boltzmann method for flows with curved boundaries", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **225-228**, pp. 65-73 (2012).
21. Succi, S., *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*, Oxford University Press Inc., New York, 1st. edition (2001).
22. Sukop, M.C. and Thorne, D.T., *Lattice Boltzmann Modeling An Introduction for Geoscientists and Engineers*, Springer, Verlag Berlin Heidelberg (2007).
23. Wolf-Gradrow, D.A., *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*, An Introduction, Springer, New York (2000).
24. Guo, Z., Shi, B. and Wangy, N. "Lattice BGK model for incompressible navier–stokes equation", *Journal of Computational Physics*, **165**, pp. 288-306 (2000).