

حل عددی جریان ریزقطنی ضربانی خون در رگ ویسکوالاستیک و مقایسه‌ی آن با رگ صلب و الاستیک

مهدی محمودی (دانشجوی دکتری)

مفید گرجی* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

فرشید بوستانی (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۳۹۵ (۲۸-۲۱)
دوره‌ی ۳-۲، شماره‌ی ۱، ص. ۲۸-۲۱

در سال‌های اخیر، شبیه‌سازی عددی مدل‌های اندرکنش سیال و جامد بسیار مورد توجه قرار گرفته است. دینامیک سیالات با حرکت نوسانی اهمیت زیادی در زمینه‌ی سیستم‌های قلبی و عروقی انسان دارد. هدف این مطالعه استنتاج روشی عددی به منظور توصیف دقیق‌تر جریان خون به عنوان سیالی ریزقطنی در رگ ویسکوالاستیک با جابه‌جایی بزرگ دیواره و گرادیان فشار ضربانی است. شبیه‌سازی با اعمال شرایط مرزی مناسب به روش لاگرانژی - اویلری دلخواه برای دیواره‌ی صلب، الاستیک و ویسکوالاستیک در محیط پیوسته کسرات و کلاسیک انجام گرفته و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. برخی ضرایب مجهول در معادلات طی این مراحل به دست می‌آید. به کمک حل عددی، فشار و سرعت‌های جریان محاسبه شده است. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که انتخاب مدل سیال ریزقطنی خون و مدل ویسکوالاستیک رگ، با توجه به مزدوج بودن معادلات سیال و جامد موجب افزایش تطابق نتایج عددی بر داده‌های معتبر آزمایشگاهی می‌شود.

واژگان کلیدی: محیط پیوسته کسرات، سیال ریزقطنی، اندرکنش سیال و جامد، جریان ضربانی، رگ ویسکوالاستیک.

۱. مقدمه

نظریه‌ی ریزسیال‌ها، که در آن اثرات میکروسکوپی و حرکات ریزالمان‌های سیال بررسی می‌شود، اولین بار در سال ۱۹۶۴ میلادی توسط ارینگن معرفی شد.^[۱] این سیالات شامل تنش پایه‌ی اینرسی چرخشی و اندازه حرکت حجمی هستند. در سیالات ریزقطنی، برای هر جزء سیال که حول مرکز قفلش دوران دارد، مقادیر تنش کوپل، کوپل حجمی، ریزچرخش‌ها و اثرات‌شان در نظر گرفته می‌شود. معادلات حاکم در این شرایط، با معادلات اندازه حرکت زاویه‌ی و خطی متفاوت به دست می‌آید اما شکل کلاسیک معادلات ناویر - استوکس قادر به توصیف ریزچرخش‌های المانی سیال ریزقطنی نیست.

محققین جریان ضربانی و پایای خون را براساس پدیده‌ی ریزساختارها در یک لوله‌ی استوانه‌ی صلب بررسی کرده‌اند.^[۲] همچنین تحقیقاتی در مورد یک رگ دارای گرفتگی، با جریان دولایه‌ی سیال در حالت پایا -- شامل دو سیال مجزا با خواص متفاوت -- انجام شده است.^[۳] در مطالعه‌ی دیگر، جریان خون دولایه‌ی ناپایا با استفاده از حل عددی^[۴] بررسی شده است. همچنین فرمول‌بندی از نظریه‌ی کسرات

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۲۵/۱۳۹۲، اصلاحیه ۱۶/۱۳۹۳، پذیرش ۲۳/۱۳۹۳.

mehdymahmoody@gmail.com
gorji@nit.ac.ir
f.boustani@gmail.com

با تقریب اجزاء محدود و به صورت سه بعدی با اصول مکانیک محیط‌های پیوسته و با فرض تغییر شکل‌های کوچک بررسی شده است.^[۶] محققین توصیفی از جریان خون پایا در رگ صلب به روش مکانیک محیط پیوسته‌ی کسرات ارائه داده و حالی از جریان هاگن - پوازی سیال ریزقطنی در جریان به دست آورده‌اند.^[۷] معادلات دوبعدی سیال ریزقطنی را نیز با شرایط مرزی متناوب بررسی کرده‌اند.^[۸] در نهایت تحلیلی از جریان ناپایای دولایه‌ی خون در یک رگ قابل انعطاف در حالت گرفتگی انجام پذیرفته است.^[۹]

هدف این نوشتار، به دست آوردن مدلی عددی برای توصیف جریان ریزقطنی خون در رگ انعطاف‌پذیر با گرادیان فشار ضربانی به روش مارکر و یاخته (MAC) است^[۱۰] که در آن از متغیرهای اصلی فشار و سرعت استفاده می‌شود.^[۱۱]

۲. مدل سیال

در بخشی از رگ جریان دوبعدی توسعه‌یافته‌ی ناپایایی از خون ریزقطنی و غیرقابل تراکم شکل ۱ در نظر می‌گیریم. فرمول‌بندی اویلری معادلات بقای مومنتوم برای جریان

تماسی این مدل عبارت است از:

$$F_{\lambda} = \rho_s h \frac{\partial R(z, t)^{\dagger}}{\partial t^{\dagger}} + \frac{h E}{\lambda - \sigma^{\dagger}} \frac{R(z, t)}{R^{\dagger}} + C_v \frac{h}{R^{\dagger}} \left(\lambda + \frac{h^{\dagger}}{\lambda R^{\dagger}} \right) \frac{\partial R(z, t)}{\partial t} + p_{ref} \frac{R(z, t)}{R} \quad (5)$$

ضریب C_v تابع ثابت‌های ویسکوالاستیسیته است.^[۱۴] مؤلفه‌ی شعاعی نیروی تماسی سیال ریزقطبی در مختصات اویباری محاسبه می‌شود:^[۱۴]

$$F_r = [(p - p_{ref}) I - \nu \mu D(v)] n.e_r \quad (6)$$

از آنجا که نیروی تماسی سیال در مختصات اویباری و نیروی تماسی ساختاری در مختصات لاگرانژی داده شده، باید ژاکوبین این انتقال از اویباری به لاگرانژی را مطابق رابطه‌ی ۷ در نظر بگیریم:^[۱۵]

$$J_c = \sqrt{(R_0 + R(z, t))^{\dagger} \left(\lambda + (\partial_z R(z, t))^{\dagger} \right)} \quad (7)$$

بنابر شرط کولینگ دینامیکی، مقدار F_r و F_{λ} از معادلات ۵ و ۶ به‌کمک ژاکوبین تبدیل به صورت $F_{\lambda} = J_c \cdot F_r$ با هم مزدوج می‌شوند.

۴. روش حل

شرایط مرزی فشار عبارت است از:

$$p = p_0(t) + p_{ref} \quad z = 0 \quad (8)$$

$$p = p_L(t) + p_{ref} \quad z = L \quad (9)$$

برای مقادیر کمیت‌های p_0 ، p_L و p_{ref} از داده‌های آزمایشگاهی تانگ^[۱۶] استفاده شده است. فرض می‌کنیم گرادیان فشار روی محور تقارن مرکزی رگ z صفر باشد. روابط متناسب با شرایط مرزی مربوط به معادلات ۱ تا ۴ عبارت است از:

$$\partial p / \partial r = 0, \quad \partial u / \partial r = 0, \quad v = 0, \quad \omega = 0 \quad \text{در} \quad r = 0 \quad (10)$$

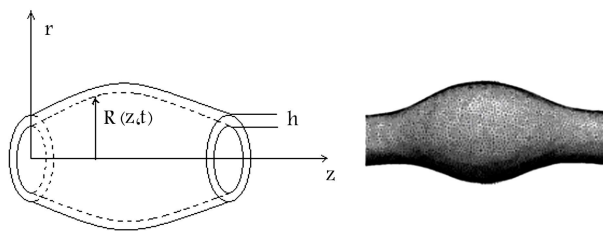
$$u = 0, \quad v = \partial R / \partial t \quad \text{در} \quad r = R \quad (11)$$

$$\omega = \Gamma (\partial u / \partial r) \quad 0 \leq \Gamma \leq 1 \quad (12)$$

Γ مقدار ثابتی است که اجازه می‌دهد سرعت زاویه‌ی در دیواره‌ی جامد دلخواه باشد و نشان می‌دهد که این روش به‌طور قابل ملاحظه‌ی با حل دیگر محققین از جمله ارینگن^[۱۷] و آریمان و ککمک^[۱۸] که سرعت زاویه‌ی را در مرز جامد صفر فرض کردند، متفاوت است. معنای فیزیکی شرط مرزی شماره‌ی ۱۲ به‌طور دقیق مشخص نیست اما به نظر می‌رسد که حل مسأله را به سمت ویژگی‌های جریان متلاطم در داخل کانال هدایت می‌کند. در اینجا یک شرط مرزی دیگر مشابه شرط مرزی ۱۲ ارائه می‌دهیم که از قیاس با مفهوم تنش رینولدز نظریه‌های پدیده متلاطم به دست آمده است. از پروفیل سرعت محوری برای شرط اولیه در جهت z استفاده کرده و خواهیم داشت:

$$u(r, z, 0) = 0 \quad (13)$$

$$v(r, z, 0) = \omega(r, z, 0) = 0 \quad (14)$$



شکل ۱. هندسه‌ی رگ با اثر جریان ضربانی در رگ انعطاف‌پذیر.

متقارن محوری در سیستم مختصات استوانه‌ی برمبنای پارامترهای بی‌بعد عبارت است از:^[۱۳]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\lambda}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^{\dagger} u}{\partial r^{\dagger}} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^{\dagger} u}{\partial z^{\dagger}} \right) + \frac{m}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\omega}{r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\lambda}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^{\dagger} v}{\partial r^{\dagger}} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^{\dagger} v}{\partial z^{\dagger}} - \frac{v}{r^{\dagger}} \right) - \frac{m}{\text{Re}} \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{JM}{\lambda - m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \frac{\partial \omega}{\partial r} + u \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = -\frac{\nu N}{\text{Re}} \omega + \frac{N}{\text{Re}} \left[\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\lambda}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^{\dagger} \omega}{\partial r^{\dagger}} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^{\dagger} \omega}{\partial z^{\dagger}} - \frac{\omega}{r^{\dagger}} \right) \quad (3)$$

و معادله‌ی بقای جرم عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (4)$$

همچنین پارامترهای بی‌بعد را چنین تعریف می‌کنند:

$$u_i = u_i^* / U, \quad v_i = v_i^* / U, \quad \omega = R_0 \omega^* / U$$

$$t = t^* U / R_0, \quad r = r^* / R_0, \quad z = z^* / R_0$$

$$\text{Re} = \rho U R_0 / (\mu + \kappa), \quad p = p^* / \rho_0 U^{\dagger}, \quad J = J^* / R_0^{\dagger}$$

$$M = \mu R_0 / \nu', \quad m = \kappa / (\mu + \kappa), \quad N = \kappa R_0 / \nu'$$

که در آن‌ها، * مشخص‌کننده‌ی پارامترهای دارای بعد است. با توجه به تغییرات شعاع رگ، مقادیر گرادیان فشار خطی نیست و فشار از مختصات شعاعی مستقل نخواهد بود و عبارت $-\partial p / \partial r$ در معادله‌ی ۲ حذف نمی‌شود. حل معادلات در این حالت دقیق‌تر است و جزئیات بیشتری از جریان خون در رگ الاستیک به دست می‌آید.

۳. مدل جامد

از دو ناحیه‌ی محاسباتی موجود (شکل ۱)، ناحیه‌ی که توسط سیال پر شده پیوندی از المان‌هاست که با بدنه‌ی جامد الاستیک محدود شده است. این دو ناحیه از هم جدایند ولی مرز مشترک دارند و در کنار هم محدوده‌ی محاسباتی را ایجاد می‌کنند. برای دیواره‌ی همگن و ایزوتروپیک رگ از روابط معادله غشای خطی ویسکوالاستیک ارائه شده در منابع استفاده می‌کنیم؛^[۱۴] معادله‌ی فرم لاگرانژی مؤلفه‌ی شعاعی نیروی

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} = & \frac{1}{R} \left[\xi \left(\frac{\partial R}{\partial z} u + \frac{\partial R}{\partial t} \right) - v \right] \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - u \frac{\partial \omega}{\partial z} \\ & + \frac{1-m}{M \text{Re} J} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{R^2 \xi^2} + N \left(-2\omega + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{R^2} \left(1 + \left(\xi \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\xi R^2} \left\{ 1 + 2 \left(\xi \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 - R \xi^2 \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right\} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \right] \quad (17) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{\xi R} + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \quad (18)$$

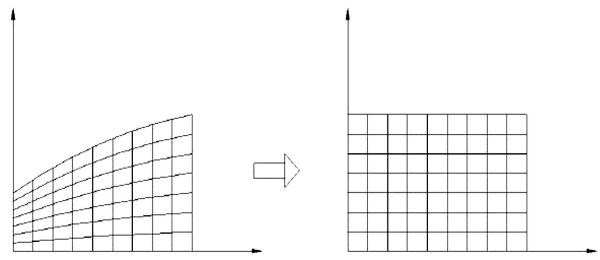
$$v(\xi, z, t) = \omega, \quad (\xi, z, t) = \partial(\xi, z, t) / u \partial \xi = 0 \quad \text{در} \quad \xi = 0 \quad (19)$$

$$u(\xi, z, t) = 0, \quad v(\xi, z, t) = \partial R / \partial t \quad \text{در} \quad \xi = 1 \quad (20)$$

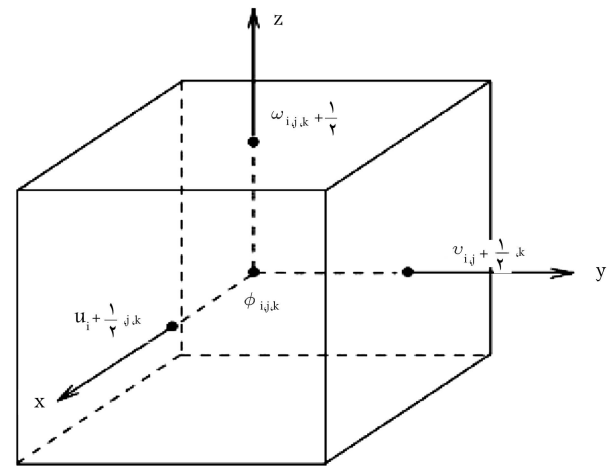
$$u(\xi, z, 0) = 0 \quad (21)$$

$$v(\xi, z, 0) = \omega(\xi, z, 0) = 0 \quad (22)$$

مقدار $\Phi_{i,j,k}$ نشانگر متغیرهای فشار، چگالی و گرانروی (ویسکوزیته) است. برای حل معادلات ۱۶ تا ۱۸ از تقریب تفاضل محدود براساس فرمول بندی تفاضل مرکزی استفاده می‌شود. اما مشتقات زمانی با تقریب تفاضل جلو رونده جداسازی می‌شوند. شرط مرزی ریز چرخش روی دیواره را به شکل $w|_w = \Gamma(\partial u / \partial r)|_w$ هم بیان می‌کنند که در آن Γ بین صفر تا ۱ است.^[۱۹]



شکل ۲. تبدیل مش محاسباتی.



شکل ۳. شمایک المان و جایگاه متغیرهای وابسته.

۵. نتایج عددی

برای اطمینان از صحت شبیه‌سازی، نتایج به دست آمده از حل عددی را با نتایج حل تحلیلی موجود^[۲۰] مقایسه و تأثیر شرایط مرزی متفاوت با گرادیان فشار را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{dp}{dt}(t) = -796 - 125 \sin(2\pi t) + 531 \cos(4\pi t) \quad (23)$$

در ادامه نمودارهای تغییرات سرعت، فشار و دبی برای جریان خون به عنوان سیال ریزقطبی و سیال نیوتنی کلاسیک در رگ صلب، الاستیک و ویسکوالاستیک ارائه و با برخی نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه شده است. در این شبیه‌سازی، خون سیالی ریزقطبی و دیواره‌ی رگ جامد ویسکوالاستیک و خطی در نظر گرفته شده (جدول ۱)، و دوره زمانی ۱ ثانیه است. با مقایسه‌ی سرعت جریان در مرکز لوله

جدول ۱. مشخصات ثابت خون و رگ.

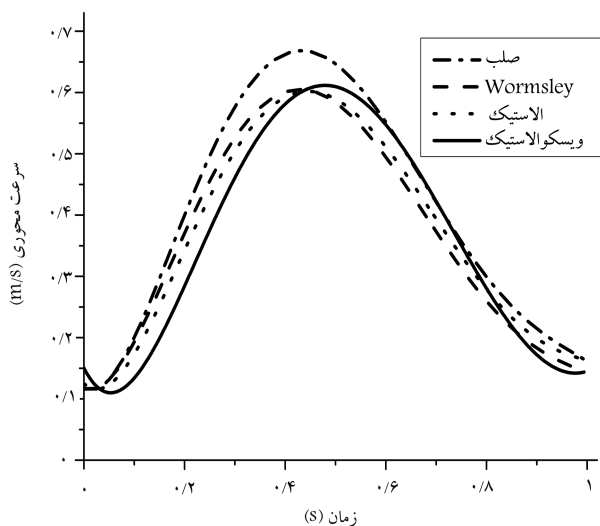
پارامتر	مقدار	ضرایب بدون بعد کسرات
شعاع اولیه رگ R_0	۱٫۸۵ mm	$J = 0.001$
طول L	۵۲ mm	$m = 0.85$
چگالی رگ ρ_s	۱۰۶۰ kg/m ^۳	$M = 1$
مدول‌های E و G	۵۰۰۰۰۰ Pa	$N = 1$
ضخامت دیواره رگ h	۰٫۷ mm	
گرانروی μ	۰٫۰۳۵ kg/m.s	
چگالی سیال ρ	۱۰۴۰ kg/m ^۳	

با به‌کارگیری تغییر متغیر $\xi = r/R(z, t)$ در مختصات شعاعی، شرایط جریان دوبعدی و با تقریب تفاضل محدود، نگاشتی خواهیم داشت که مش محاسباتی را تغییر داده (شکل ۲) و معادلات بقای اندازه حرکت و شرایط مرزی را به صورت معادلات ۱۵ تا ۲۲ درمی‌آورد.

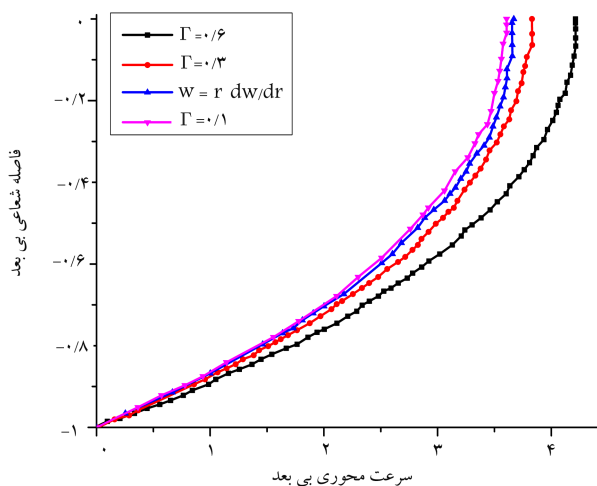
از روش مک که این روش از تقریب تفاضل محدود بر شبکه شطرنجی استفاده می‌کند. در شکل ۳ نمونه‌ی از المان شبکه‌ی شطرنجی و جایگاه متغیرها در المان نشان داده شده که در آن سرعت‌ها در مرکز وجوه و متغیرهای دیگر در مرکز المان هستند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \left[\frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \right] + \frac{1}{R} \left[\xi \left(\frac{\partial R}{\partial z} u + \frac{\partial R}{\partial t} \right) - v \right] \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ & - u \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{\xi R^2} \left\{ 1 + 2 \left(\xi \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 - R \xi^2 \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \left\{ 1 + \left(\xi \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right] \\ & + \frac{m}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\xi R} \right] \quad (15) \end{aligned}$$

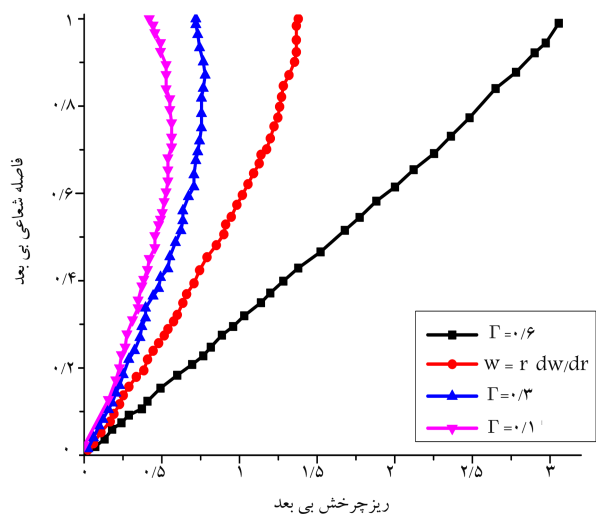
$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & -\frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \left[\xi \left(\frac{\partial R}{\partial z} u + \frac{\partial R}{\partial t} \right) - v \right] \frac{\partial v}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial z} \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{\xi^2 R^2} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{1}{R^2} \left\{ 1 + \left(\xi \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\xi R^2} \left\{ 1 + 2 \left(\xi \frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 - R \xi^2 \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right\} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] \quad (16) \end{aligned}$$



شکل ۴. مقایسه‌ی سرعت جریان برای دیواره‌های مختلف و حل تحلیلی موجود [۱۹].



شکل ۵. تغییرات سرعت محوری بی بعد بر حسب شعاع بی بعد.



شکل ۶. تغییرات ریزچرخش بی بعد بر حسب شعاع بی بعد.

یعنی شعاع $r = 0$ (سرعت بیشینه)، می‌توان صحت شبیه‌سازی را بررسی کرد. در شکل ۴ این حل برای سرعت جریان در حالت تقابل سیال و جامد (FSI) $\Gamma = 1$ و دیواره‌ی صلب در مقایسه با حل تحلیلی موجود [۱۹] نشان داده شده است.

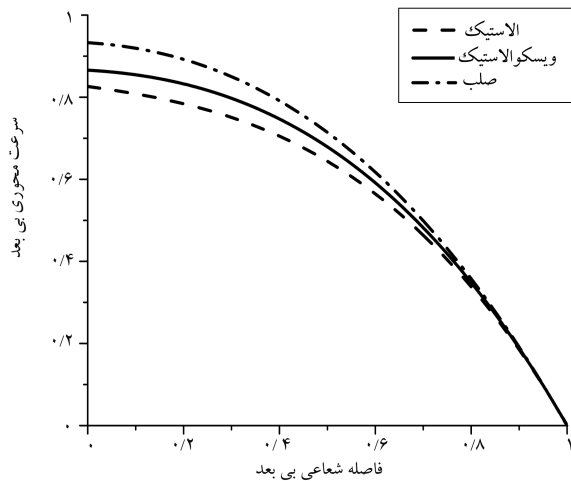
در دیواره‌ی الاستیک به علت انبساط رگ، سرعت جریان نسبت به حالت صلب کاهش می‌یابد و به افزایش فشار جریان می‌انجامد. مقایسه‌ی حل دیواره‌ی الاستیک با حل تحلیلی پیشین که با فرض الاستیک بودن دیواره انجام شده نشان‌گر تطابق مناسب است. تفاوت و اختلاف فاز سرعت جریان با دیواره‌ی ویسکوالاستیک در مقایسه با دیواره‌ی الاستیک قابل مشاهده است که علت این تأخیر زمانی به دلیل وجود عبارت ویسکوز یا میراگر در معادلات جامد است. بیشینه سرعت محوری خون در رگی با دیواره‌ی ویسکوالاستیک از حالتی که دیواره‌ی رگ الاستیک فرض شود، کمی بیشتر است. خاصیت گرانبوی (ویسکوزیته‌ی) رگ سبب میرایی نیروی حاصل از فشار جریان به دیواره می‌شود، بنابراین میزان جابه‌جایی رگ در حالت ویسکوالاستیک کم‌تر از حالت الاستیک است و در نتیجه، سرعت محوری خون در رگ ویسکوالاستیک از رگ الاستیک بیشتر، و فشار آن کم‌تر است. در زمان $t = 0$ با کمی اختلاف در سرعت برای دیواره‌های الاستیک و ویسکوالاستیک مواجهیم که به همان تأخیر در جابه‌جایی دیواره متأثر از میرایی فشار برمی‌گردد. وقتی فشار تغییر می‌کند، دیواره‌ی الاستیک بی‌درنگ جابه‌جا می‌شود ولی دیواره‌ی ویسکوالاستیک با کمی تأخیر جابه‌جا خواهد شد.

با توجه به معادلات، مقدار مناسب برای ضرایب مجهول در شرایط مرزی متفاوت از مقایسه با نتایج قابل قبول تحلیلی و آزمایشگاهی به دست می‌آید. محققین از ضرایب و اعداد بی بعد $Re = 240$, $m = 0.85$, $M = 1$, $N = 1$, $J = 0.01$ در محاسبات خود استفاده کرده‌اند. [۱۹] برای شرط مرزی فشار از معادله‌ی ۲۳ استفاده شده است. مشخصات خون و رگ در جدول ۱ ارائه شده است. [۲۱]

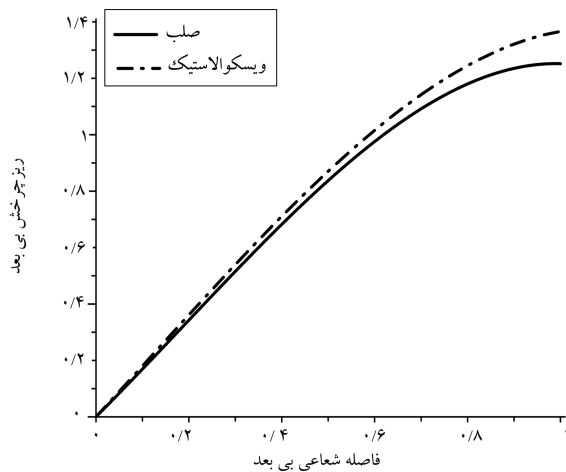
سرعت را در مرکز رگ با شرایط مرزی مختلف در $w|_w = (\partial u / \partial \xi)|_w (\Gamma / R_0)$ در حالتی که $\Gamma = 0.15, 0.35, 0.65$ و بار دیگر در حالت $w|_w = \xi (\partial w / \partial \xi)|_w$ بررسی می‌کنیم (شکل ۵). به منظور کسب مقدار دقیق‌تر برای Γ ، سرعت ریزچرخش‌ها تحت همین شرایط مقایسه شده است (شکل ۶).

نمودار شکل ۵ رفتاری شبه سهموی به نمایش گذارده که کمی پخ‌تر است و با افزایش Γ ، سرعت در کل دامنه‌ی حرکت افزایش می‌یابد. در Γ های کوچک‌تر، سرعت محوری در میانه‌ی رگ کمی یکنواخت‌تر است و تغییرات آرامی دارد؛ در نتیجه برای Γ های کوچک‌تر جواب‌های منطقی‌تری به دست می‌آید. در نهایت، مقایسه‌ی نتایج آزمایشگاهی موجود ما را به مقدار دقیق این ضرایب می‌رساند. سرعت محوری تا فاصله‌ی ۶۰ درصدی شعاع اولیه از مرکز رگ تقریباً یکنواخت است. با مقایسه‌ی ساده‌ی سرعت محوری در شرط مرزی $w|_w = \xi (\partial w / \partial \xi)|_w$ و سایر شرایط مرزی، به نظر می‌رسد که با Γ تقریبی ۰.۱۵ یا ۰.۲ تطابق دارد.

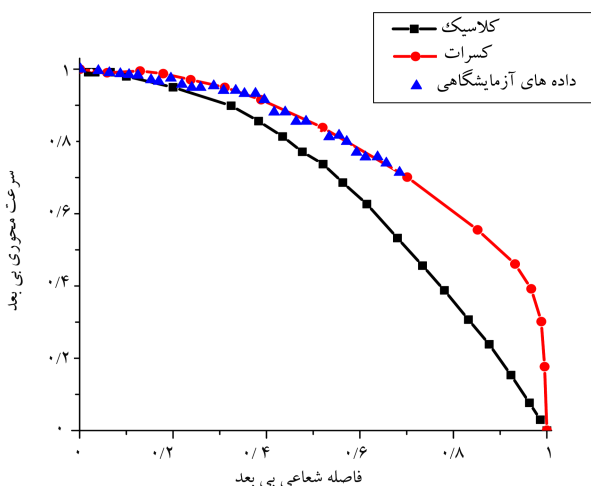
چنان که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، با افزایش Γ مقادیر ریزچرخش نیز افزایش می‌یابد. با زیاد شدن مقدار Γ نیز تغییرات ریزچرخش در راستای شعاعی خطی‌تر خواهد شد. با توجه به خصوصیات خون و تجمع گلبول‌های قرمز در میانه‌ی رگ و یکنواخت شدن سرعت محوری، به نظر می‌رسد که برای $\Gamma = 0.35$ نتایج مطلوب‌تری ارائه می‌دهد. در شکل ۷، سرعت محوری جریان خون در حالات دیواره‌های صلب، الاستیک و ویسکوالاستیک مقایسه شده است. سرعت محوری بیشینه با دیواره‌ی صلب بیشتر از دو نوع دیگر دیواره است؛ به لحاظ فیزیکی، و با توجه به تغییر شعاع رگ الاستیک و ویسکوالاستیک، این کاهش سرعت توجیه‌پذیر است. باید توجه داشت که در گام‌های زمانی متفاوت



شکل ۷. تغییرات سرعت محوری بی بعد بر حسب فاصله شعاعی بی بعد با دیواره‌ی صلب، الاستیک و ویسکوالاستیک.



شکل ۸. تغییرات ریزچرخش بی بعد بر حسب فاصله شعاعی بی بعد برای دیواره‌ی صلب و ویسکوالاستیک.



شکل ۹. تغییرات سرعت محوری بی بعد بر حسب شعاع بی بعد در دو محیط کلاسیک و کسرات و داده‌های آزمایشگاهی. [۲۲]

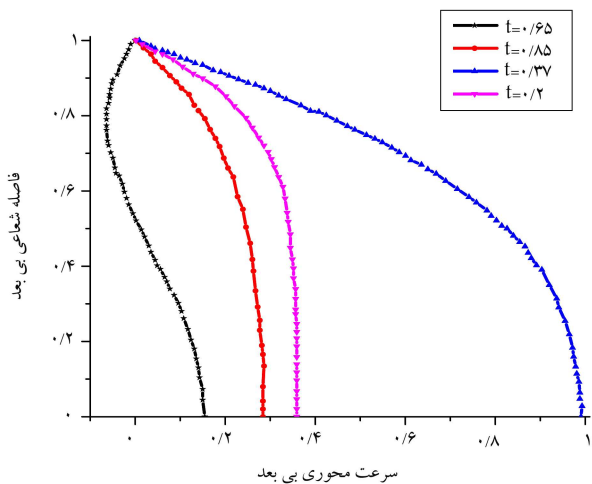
ممکن است سرعت در رگ الاستیک و ویسکوالاستیک بیشتر از رگ صلب باشد.

در شکل ۸ سرعت ریزچرخش در رگ صلب و ویسکوالاستیک نشان داده شده است. با جابه‌جایی رگ و افزایش فشار، سرعت محوری در نزدیکی دیواره کاهش می‌یابد و سرعت شعاعی ذرات و به تبع آن ریزچرخش‌ها در نزدیکی دیواره بیشتر می‌شود. این ریزچرخش‌ها در دیواره‌ی ویسکوالاستیک شدت بیشتری دارد. مقایسه‌ی صحیح بین دو محیط پیوسته‌ی کلاسیک و کسرات (سیال ریزقطبی) باید در اعداد رینولدز مساوی صورت پذیرد. علاوه بر تعریف متفاوت عدد رینولدز در محیط پیوسته‌ی کلاسیک و کسرات، مقدار گرانروی (ویسکوزیته‌ی) کلاسیک در سیال نیوتنی با مقدار گرانروی در سیال ریزقطبی -- که با نام گرانروی چرخشی تعریف می‌شود -- متفاوت خواهد بود. اما چون تمامی مشخصه‌های خون به‌عنوان سیال ریزقطبی موجود نیست، مقدار عددی رینولدز سیال ریزقطبی را برابر با عدد رینولدز سیال کلاسیک در نظر گرفتیم. در شکل ۹ تفاوت پروفیل سرعت در دو محیط کلاسیک و ریزقطبی قابل مشاهده است. پروفیل سرعت جریان در محیط پیوسته کسرات بجز دارتر از پروفیل سرعت در محیط کلاسیک به دست آمده است. با آرام در نظر گرفتن جریان، دست‌یابی به نتیجه‌ی مشابه محیط کلاسیک منطقی به نظر می‌رسد ولی نقطه‌ی قوت محیط کسرات به‌وضوح مشاهده می‌شود. در نظر گرفتن ریزچرخش سبب پخش شدن پروفیل شده و هرچه مقدار ریزچرخش‌ها بیشتر شود، پروفیل بچتر می‌شود و به پروفیل جریان متلاطم در کانال صلب نزدیک‌تر خواهد شد. با توجه به روند تغییرات پروفیل سرعت محوری در محیط پیوسته‌ی کسرات و داده‌های آزمایشگاهی، [۲۲] و اختلاف اندک بین آن‌ها می‌توان به صحت نتایج و ضرایب به دست آمده امیدوار بود. تا اینجا، مسئله در شرایط مرزی و ضرایب مختلف بررسی و تطابق خوبی بین نتایج تحلیلی و نتایج حاصله مشاهده شد. برای مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، از داده‌های موجود [۲۰] با گرادیان فشار تجربی آن استفاده کردیم؛ عدد رینولدز ۵۲۰ گزارش شده است. گرادیان فشار در شکل ۱۰ و تغییرات فشار و سرعت محوری که در مرکز رگ اندازه‌گیری شده، در شکل ۱۱ نشان داده شده است. با توجه به شکل، دوره زمانی نوسان ۰/۴۶۹ ثانیه است. اگر گرانروی سیال در محیط کسرات را با گرانروی آن در محیط کلاسیک برابر فرض کنیم، با توجه به مقدار ثابت $m = 0.85$ [۹] و دو کمیت مجهول دیگر J و N در جواب نهایی، مقدار عدد رینولدز جریان در محیط کسرات باید در مقدار $(1 - m)$ ضرب شود. اما نتایجی که بدین ترتیب به دست می‌آید تطابقی با داده‌های تجربی ندارد و این ناشی از متفاوت بودن مقدار گرانروی نیوتنی و کسرات است. طی چند مرحله شبیه‌سازی با اعداد رینولدز مختلف، به عدد رینولدز بهینه‌ی ۳۶۰ می‌رسیم (شکل ۱۲). از عدد رینولدز به دست آمده، با استفاده از روابط حاکم بر محیط کسرات می‌توانیم گرانروی دینامیکی و چرخشی را محاسبه کنیم:

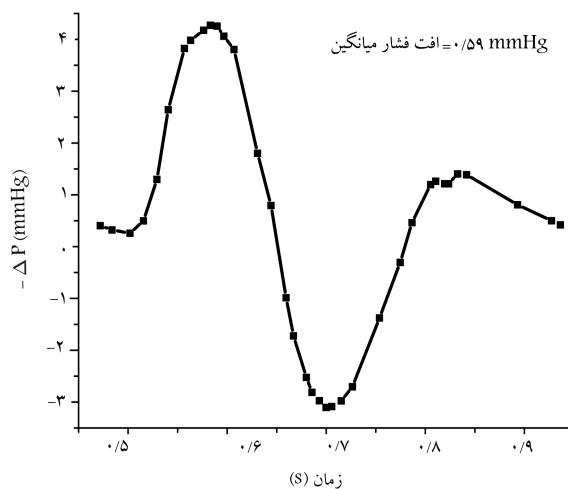
$$\text{Re} = \frac{\rho u R}{\mu + \kappa}, \quad m = \frac{\kappa}{\mu + \kappa} = 0.85$$

$$\rightarrow \mu = 0.1054 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}, \quad \kappa = 0.1087 \quad (24)$$

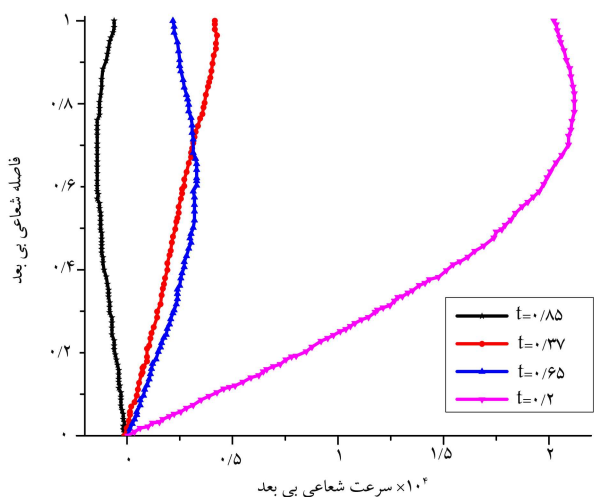
با توجه به شکل ۱۳ ملاحظه می‌شود که در زمان $t = 0.65$ بخشی از پروفیل سرعت منفی شده که نشان‌گر برگشت جریان به دلیل ایجاد گردیان فشار مثبت است که در نزدیکی دیواره رگ اتفاق می‌افتد. در شکل ۱۴ تغییرات سرعت شعاعی بی‌بعد بر حسب شعاع بی‌بعد نشان داده شده که در مقابل سرعت محوری کوچک است، اگرچه قابل چشم‌پوشی نیست و باید اثر آن را در نظر گرفت. در شکل ۱۵ تغییرات ریزچرخش بی‌بعد بر حسب شعاع بی‌بعد را مشاهده می‌کنیم که در میانه‌ی رگ



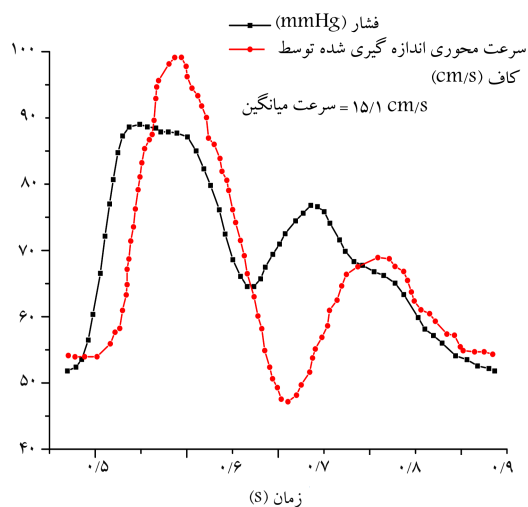
شکل ۱۳. تغییرات سرعت محوری بی بعد بر حسب فاصله شعاعی بی بعد در زمان‌های متفاوت از یک بازه زمانی.



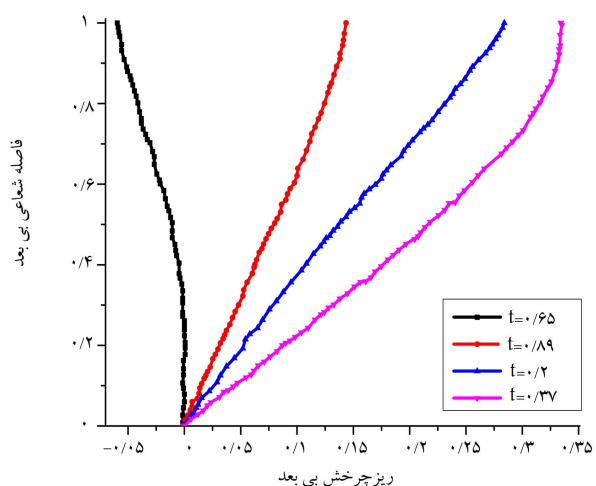
شکل ۱۰. افت فشار بر حسب زمان. [۲۰]



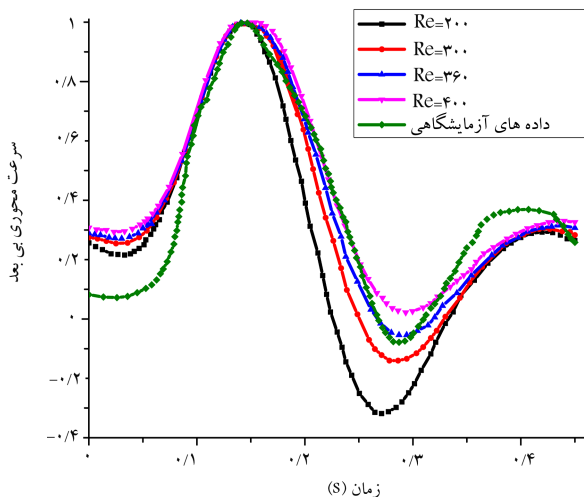
شکل ۱۴. تغییرات سرعت شعاعی بی بعد بر حسب تغییرات شعاع بی بعد در زمان‌های متفاوت از یک بازه زمانی.



شکل ۱۱. سرعت محوری و فشار اندازه‌گیری شده در مرکز رگ. [۲۲]



شکل ۱۵. تغییرات سرعت ریز چرخش بی بعد بر حسب شعاع بی بعد در یک بازه زمانی.



شکل ۱۲. مقایسه‌ی سرعت محوری بی بعد بر حسب رینولدزهای مختلف با داده‌های آزمایشگاهی. [۲۲]

- μ : گرانروی دینامیکی ($\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$)؛
- ρ : چگالی (kg.m^{-3})؛
- κ : گرانروی چرخشی ($\text{kg.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$)؛
- ω : سرعت ریزچرخش (rad.s^{-1})؛
- σ : تانسور تنش کوشی؛
- Γ : ضریب ثابت تصحیح؛
- D : تانسور نرخ تغییر شکل؛
- E : مدول یانگ؛
- F : نیروهای خارجی ($\text{kg.s}^{-2}.\text{m}$)؛
- G : مدول برشی ($\text{kg.s}^{-2}.\text{m}^{-1}$)؛
- h : ضخامت دیواره (m)؛
- J : ثابت میکرواینرسی؛
- Jc : ژاکوبین اویلری لاگرانژی؛
- L : طول رگ (m)؛
- M : ضریب کسرات؛
- m : پارامتر کوپلینگ؛
- N : ضریب کسرات؛
- P : فشار ($\text{kg.s}^{-2}.\text{m}^{-1}$)؛
- r : جهت شعاعی (m)؛
- R : شعاع داخلی رگ (m)؛
- R_0 : شعاع داخلی اولیه رگ (m)؛
- Re : عدد رینولدز؛
- t : زمان (S)؛
- U : سرعت محوری معیار (m.s^{-1})؛
- u : سرعت محوری (m.s^{-1})؛
- v : سرعت شعاعی (m.s^{-1})؛
- v' : ثابت ماده (kg.m.s^{-1})؛
- z : جهت محوری رگ (m)؛

زیرنویس

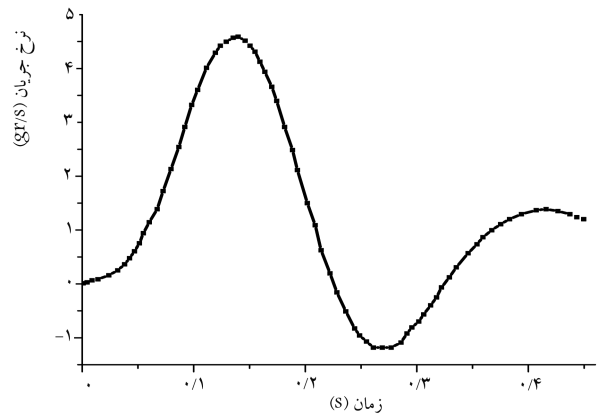
- s : مربوط به رگ؛
- ref : مینا؛
- $^{\circ}$: مربوط به ورودی رگ؛
- L : مربوط به خروجی رگ؛
- w : روی دیواره رگ.

پانویس

1. fluid solid interaction

منابع (References)

1. Eringen, A.C. "Simple microfluids", *Int. J. Eng. Sci.*, **2**, pp. 205-217 (1964).



شکل ۱۶. تغییرات دبی عبوری از مقطع رگ در یک بازه.

دارای مقدار صفر و در نزدیکی دیواره‌ی رگ دارای مقدار بیشینه است. مقدار منفی ریزچرخش ناشی از تغییر جهت چرخش هاست. و در نهایت نمودار تغییرات دبی در شکل ۱۶ نشان داده شده است.

۶. نتیجه‌گیری

در این نوشتار با معلوم شدن ضرایب مجهول معادله‌های به دست آمده برای جریان ریزقطبی ضربانی خون در رگ ویسکوالاستیک، به شبیه‌سازی واقعی‌ترین پدیده‌ی زیست‌شناختی مهم پرداختیم که تطابق بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی معتبر داشت.

با در نظر گرفتن خون به عنوان محیط پیوسته‌ی کسرات، ضعف‌های محیط پیوسته‌ی کلاسیک کوشی و سیال نیوتنی را در مدل کردن این پدیده پوشانیدیم.^[۲۳] این محیط علاوه بر حرکت انتقالی خون، رفتار چرخشی المان‌های تشکیل دهنده‌ی سیال (گلبول‌های سفید و قرمز) را مدل می‌کند. نسبت به مدل صلب یا الاستیک، مدل ویسکوالاستیک پاسخ رگ را در برابر جریان ضربانی و ریزچرخش‌های اجزای سازنده خون بسیار دقیق‌تر توصیف می‌کند. در نتیجه، با توجه به اندرکنش معادلات سیال و جامد، شاهد بهبود کلی نتایج حل عددی هستیم.

فهرست علائم

- T : تنش برشی ($\text{kg.s}^{-2}.\text{m}^{-1}$)؛
- v : ضریب پواسون؛

2. Eringen, A.C. "Theory of microfluids", *J. Math. Mech.*, **16**, pp. 1-18 (1966).
3. Ariman, T., Turk, M.A. and Sylvester, N.D. "On steady and pulsatile flow of blood", *J. Appl. Mech.*, **41**, pp. 1-7 (1974).
4. Philip, D. and Chandra, P. "Flow of eringen fluid (simple microfluid) through an artery with mild stenosis", *Int. J. Eng. Sci.*, **34**, pp. 87-99 (1996).
5. Akay, G. and Kaye, A. "Numerical solution of time de-

- pendent stratified two-phase flow of micropolar fluids and its application to flow of blood through fine capillaries”, *Int. J. Eng. Sci.*, **23**, pp. 265-276 (1985).
6. Riahi, A. and Curran, H. “Full 3D finite element Cosserat formulation with application in layered structures”, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, pp. 3450-3464 (2009).
 7. Moosaie, A. and Atefi, Gh. “A cosserat continuum mechanical approach to steady flow of blood through artery”, *Journal of Dispersion Science and Technology*, **28**, pp. 765-768 (2007).
 8. Szopa, P. “Gevrey class regularity for solutions of micropolar fluid equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **351**, pp. 340-349 (2009).
 9. Ikbali, M.A., Chakravarty, S., and Mandal, P.K. “Two-layered micropolar fluid flow through stenosed artery: Effect of peripheral layer thickness”, *Computers and Mathematics with Applications*, **58**, pp. 1328-1339 (2009).
 10. Harlow, F. and Welch, J.E. “Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface”, *Phys. Fluids*, **8**, pp. 2182-2189 (1965).
 11. Welch, J.E., Harlow, F., Shannon, J.P. and Daly, B.J. “The MAC method”, Technical Report LA-3425, Los Alamos National Laboratory (1965).
 12. McKee, S., Tome, M.F., Ferreira, V.G., Cuminato, J.A., Castelo, A., Sousa, F.S. and Mangiacavchi, N. “The MAC method”, *Computers & Fluids*, **37**, pp. 907-930 (2008).
 13. Vardoulakis, I., *Lecture Notes on Cosserat Continuum Mechanics*, 3rd National Meeting on ‘Generalized Continuum Theories and Applications’, N.T.U.A. (2009).
 14. Suncica, C., Josip, T., Giovanna, G., Andro, M., Craig, J. and Drooen, R. “Modeling viscoelastic behavior of arterial walls and their interaction with pulsatile blood flow”, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **67**, pp. 164-193 (2006).
 15. Sedaghatizadeh, N., Atefi, Gh., Fardad, A., Barari, A., Soleimani, S. and Khani, S. “Analysis of blood flow through a viscoelastic artery using the cosserat continuum with the large-amplitude oscillatory shear deformation model”, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, **4**(7), pp. 1123-1131 (2011).
 16. Tang, D., Yang, C., Kobayashi, S., Zheng, J., Woodard, P.K., Teng, Z., Billiar, R. and Bach, R. “3D MRI-based anisotropic FSI models with cyclic bending for human coronary atherosclerotic plaque mechanical analysis”, *Journal of Biomechanical Engineering*, **6**, pp. 131 (2009).
 17. Eringen, A.C. “Microcontinuum field theories: Fluent media”, *Springer*, **2**, pp. 96-139 (2001).
 18. Ariman, T. and Cakmak, A.S. “Couple stresses in fluids”, *Physics of Fluids*, **10**, pp. 2497-2430 (1967).
 19. Anic, S., Mikelic, A. and Tamba, J. “A two-dimensional effective model describing fluid-structure interaction in blood flow: Analysis, simulation and experimental validation”, *C. R. Mecanique*, **33**, pp. 867-883 (2005).
 20. Womersley, J. “Oscillatory flow in arteries: The constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission”, *Physics in Medicine and Biology*, **2**, pp. 178 (1957).
 21. Maisheng, L., Hongzhi, X., Le, X., Ping, C., Lixu, G. “A robust and real-time vascular intervention simulation based on Kirchhoff elastic rod”, *Computerized Medical Imaging and Graphics*, **38**(8), pp. 735-743 (2014).
 22. Banerjee, R., Back, L. and Cho, Y. “Flow-pressure drop measurement and calculation in a tapered femoral artery of a dog”, *Biorheology*, **32**(6), pp. 655-684 (1995).
 23. Madah, S. “Blood flow in flexible vessel with progressive wave pressure domain base on Cosserat continuum”, Ph.D. Thesis, Iran University of Science and Technology (2014). (in Persian)