

حل تحلیلی برای تعیین ولتاژ ناپایداری کشیدگی، در میکروورق دایروی تحریک شده الکتریکی در حالت‌های یک طرفه و دو طرفه

علیرضا شوشتری* (دانسیار)

سید میلاد سعادت‌مند (کارشناس ارشد)
دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا همدان

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۳۹۵ (۱۳۹۵)
دوری ۳ - ۳۲، شماره ۱، ص. ۱۲۹-۱۳۵، (پادداشت ثنی)

پدیده «کشیدگی» یک حالت بحرانی است که در بسیاری از وسایل میکروالکترومکانیک مانند حسگرها، عملگرها و سوئیچ‌های میکروالکترونیک اتفاق می‌افتد. تعیین ولتاژی که این پدیده در آن رخ می‌دهد ظرفیت و محدوده بهره‌برداری این‌گونه وسایل را مشخص می‌کند. در تحقیقات گذشته، با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی جرم فشرده، گسسته‌سازی سیستم و نیز تحلیل‌های آزمایشگاهی، برای تعیین ولتاژ کشیدگی میکروورق دایروی کارهایی انجام شده است. در این مقاله، ابتدا معادله ولتاژ - جابه‌جایی عرضی یک میکروورق گیردار دایروی در حالت‌های یک‌صفحه پشتیبان و دوصفحه پشتیبان، و براساس نظریه غیرخطی ون کارمن و نظریه کلاسیک ورق به دست آمده است. سپس روابط تحلیلی برای ولتاژ کشیدگی استاتیکی که باعث ناپایداری و خرابی سیستم می‌شود استخراج شده است. ولتاژ کشیدگی به دست آمده از این روابط ۱/۳ برابر ولتاژ کشیدگی حاصل از کاربرد روش گسسته‌سازی و شبیه‌سازی جرم فشرده است. به منظور صحت‌گذاری نتایج به دست آمده، شبیه‌سازی اجزاء محدود برای حالت یک‌صفحه پشتیبان، با استفاده از نرم‌افزار ANSYS انجام شده که نشان می‌دهد انطباق بسیار خوبی با نتایج روابط تحلیلی دارند. همچنین مقایسه‌ی حل تحلیلی با نتایج آزمایشگاهی تحقیقات پیشین مشخص می‌سازد که تفاوت‌ها ناچیز و قابل چشم‌پوشی است. در انتها اثرات پارامترهای هندسی بر ولتاژ کشیدگی بررسی شده است.

واژگان کلیدی: ولتاژ کشیدگی، میکروورق، حل تحلیلی.

shooshta@basu.ac.ir
s.miladsaadatmand@gmail.com

۱. مقدمه

نسبت ضخامت به عرض آن از $1/20$ کوچک‌تر باشد، ورق را نازک و در غیر این صورت ورق را ضخیم می‌گویند^[۸] و به تبع، نظریه‌های حاکم بر رفتار ورق ضخیم از نظریه‌های ورق نازک تفکیک می‌شود.

در ادوات الکترومکانیکی میکروورق تحریک شده در نزدیکی سطح رسانای دیگری قرار دارد و خمش آن باعث تغییر حجم بین این دو سطح می‌شود؛ از این رو ظرفیت خازن ساخته شده بین این دو سطح تغییر می‌کند. بنابراین بین نیروی مکانیکی بازگرداننده‌ی میکروورق و نیروی الکترواستاتیکی بین ورق و صفحه‌ی الکتروتود تقابل وجود دارد. اما چنانچه ولتاژ اولیه‌ی وارده از حد ولتاژی به نام ولتاژ کشیدگی^۲ عبور کند نیروی الکترواستاتیکی بر نیروی فنریت غلبه می‌کند و میکروورق با صفحه‌ی پشتیبان برخورد خواهد کرد؛ این پدیده را «کشیدگی» می‌نامند.^[۹] با توجه به اهمیت پدیده‌ی کشیدگی در سیستم‌های میکروالکترومکانیکی، آگاهی از تأثیر پارامترهای هندسی طراحی در میزان ولتاژ کشیدگی از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. برای مثال، در طراحی یک حسگر تخمین مقدار زیاد آن باعث ایجاد ناپایداری و تخمین

افزایش روزافزون سیستم‌های میکروالکترومکانیکی (MEMS)، ضرورت بررسی پدیده‌های حاکم بر رفتار این سیستم‌ها را بیش از پیش آشکار می‌سازد. در یک تعریف عام، MEMS را می‌توان فناوری قراردادن اجزاء الکتریکی و مکانیکی بر پایه‌ی سیلیکونی در ابعاد میکرون، توسط فرایند ریزماشین‌کاری دانست، که دارای خصوصیت‌های مطلوب با حجم فوق‌العاده کوچک و قیمت بسیار اندک است.^[۱]

از طرفی در بسیاری از سیستم‌های الکترومکانیکی، حسگر^۱ها یا عملگرهایی را که در سیستم تعبیه شده می‌توان با ورق مدل کرد. دیافراگم میکروفون^[۲]، میکروآینه‌ها^[۳]، میکروپمپ‌ها^[۴]، فشارسنج‌ها^[۵] و میکروسوئیچ‌ها^[۶] از جمله‌ی این سیستم‌ها هستند. طبق تعریف ارائه شده در علم مکانیک، ورق یا صفحه به سازه‌ی گفته می‌شود که ضخامت آن نسبت به ابعاد داخل صفحه‌ی کوچک باشد. اگر

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۳/۸/۲۶، پذیرش ۱۳۹۳/۹/۲۳.

مقدار کم آن باعث کاهش حساسیت می‌شود. در عمل به دلیل وجود رفتار دینامیکی در اغلب حسگرها و عملگرها، پدیده کشیدگی در ولتاژ کم‌تری اتفاق می‌افتد که به آن ولتاژ کشیدگی دینامیکی^۲ می‌گویند.^[۱] پژوهش‌های گذشته مقدار ولتاژ کشیدگی دینامیکی را مرتبط با ولتاژ کشیدگی استاتیکی و در حدود ۹۲٪ آن تخمین می‌زنند.^[۱۱]

در دهه‌ی گذشته تحقیقات بسیاری در مورد رفتار ادوات MEMS و پدیده کشیدگی انجام شده که به برخی از مهم‌ترین دستاوردهای این تحقیقات در ادامه اشاره شده است.

برای یک ورق دایروی گیردار تحریک‌شده‌ی یک‌طرفه، حل چندمادی گارکین انجام شده.^[۱۲] و نتایج حاصله با داده‌های آزمایشات انجام‌شده روی قطعات میکروالکترومکانیکی پایه‌ی سیلیکونی^[۱۳] مقایسه و صحه‌گذاری شده است.

برای یک میکروفون دوطرفه‌ی خازنی (میکروورق تحریک‌شده‌ی دوطرفه) یک مدل جرم فشرده‌ی غیرخطی به دست آورده شد و پاسخ دینامیکی غیرخطی سیستم تحت تحریک موج نیم‌مربعی الکتریکی توسط روش مقیاس‌های چندگانه زمانی،^[۱۵] و نیز تحت تحریک یک‌طرفه‌ی سینوسی با روش هارمونیک بالانس^[۱۶] استخراج شد. میکروفون دوطرفه^[۱۷] نیز در آزمایشگاه بین‌المللی سن‌دیا^۴ و به‌وسیله‌ی فرایند SUMMIT V ساخته شد. مقدار ولتاژ کشیدگی برای این میکروفون با در نظر گرفتن تحلیل جرم فشرده برای آن، ۳۰٪ بیشتر از نوع یک‌طرفه با همان ابعاد گزارش شده است.^[۲۲]

هنگامی که در یک سیستم ابعاد در حد نانومتر کوچک شوند نیروهای کشیدگی حضور پیدا می‌کنند. محققین با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی ون کارمن و نیروی کشیدگی برای ورق‌های دایروی و مستطیلی گیردار^[۱۸] و نیز برای ورق بیضوی تحریک‌شده‌ی یک‌طرفه‌ی الکتریکی،^[۱۹] معادلات خیز را به دست آوردند. آنان برای کاهش معادلات از مودهای ارتعاشات عرضی ورق‌ها استفاده کردند و ارتعاشات خطی و پدیده کشیدگی استاتیکی را مورد مطالعه قرار دادند.

در بررسی تأثیر تنش‌های حرارتی بر پایداری و پاسخ فرکانسی یک میکروورق دایروی گیردار، که به‌عنوان دیافراگم یک میکروفون یک‌طرفه‌ی خازنی MEMS استفاده شده بود،^[۲۰] برای به دست آوردن معادلات، از نظریه‌ی کلاسیک ورق‌ها (CPT) استفاده شد. در این تحلیل با در نظر گرفتن تقریب چهارشکل مود اول ورق، ولتاژ کشیدگی استاتیکی ۷٫۶ ولت بیشتر از مقدار گزارش شده در تحلیل جرم فشرده روی همان میکروفون^[۱۷] تخمین زده شد. طبق نتایج به دست آمده، ولتاژ کشیدگی دینامیکی میکروورق دایروی تقریباً ۹۰٪ ولتاژ کشیدگی استاتیکی بود. تأثیر شوک مکانیکی بر میکروفون دایروی خازنی یک‌طرفه نیز با استفاده از نظریه‌ی کلاسیک ورق‌ها مورد مطالعه قرار گرفت.^[۲۱] آنان همچنین ورق مستطیلی تحت تغییرات دما را مورد مطالعه قرار دادند.^[۲۲]

در مطالعه‌ی دیگر، با تمرکز بر ناپایداری کشیدگی و ارتعاشات میکروورق دایروی تحریک‌شده‌ی الکتریکی یک‌طرفه‌ی دارای تنش پسماند در حضور نیروی کشیدگی، معادلات به دست آمده از نظریه‌ی غیرخطی ورق نازک ون کارمن، به دو معادله‌ی شرط مرزی کاهش شده.^[۲۳] برای تحلیل استاتیکی از روش شوتینگ استفاده شد و تأثیر مشخصات مختلف -- نظیر ضخامت گپ و اثر کشیدگی -- بر پدیده کشیدگی و فرکانس طبیعی مورد بررسی قرار گرفت.

اگرچه تحقیقات گذشته به لحاظ شناخت پدیده کشیدگی استاتیکی در مبدل‌های MEMS دارای اجزای ورق از اهمیت بسیار بالایی برخوردارند، در مورد میکروورق دایروی دوطرفه تنها تحلیل‌های جرم فشرده انجام شده است. تحلیل جرم فشرده و فرض صلبیت با این که تحلیل مسئله را آسان‌تر می‌کند، بی‌تردید

برای مدل کردن یک سیستم پیوسته با خطا همراه خواهد بود. در این تحقیق چون میکروورق دایروی یک‌طرفه و دوطرفه به‌صورت ورق دایروی ون کارمن در نظر گرفته شده، به معادلات جزئی غیرخطی انجامیده است؛ و از آنجا که روش حل دقیقی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ی غیرخطی در دست نیست، با استفاده از روش کاهش مرتبه‌ی گارکین ولتاژ کشیدگی به دست می‌آید. همچنین برای اولین بار یک رابطه‌ی صریح برای ولتاژ کشیدگی در سامانه‌ی یک‌طرفه و دوطرفه ارائه شده است. سپس به‌منظور صحه‌گذاری رابطه‌ی به دست آمده، ولتاژ کشیدگی برای میکروورق تحریک‌شده‌ی یک‌طرفه با نتایج مدل‌سازی و تحلیل اجزای محدود و همچنین با نتایج آزمایشگاهی موجود مقایسه شده است. در انتها تأثیر پارامترهای هندسی سیستم بر ولتاژ کشیدگی در هر دو سیستم مشخص شده، که می‌تواند در طراحی مناسب و کاربرد صحیح این‌گونه وسایل مشمر نمر واقع شود.

۲. معادلات حاکم بر میکروورق تحریک‌شده‌ی یک‌طرفه و دوطرفه

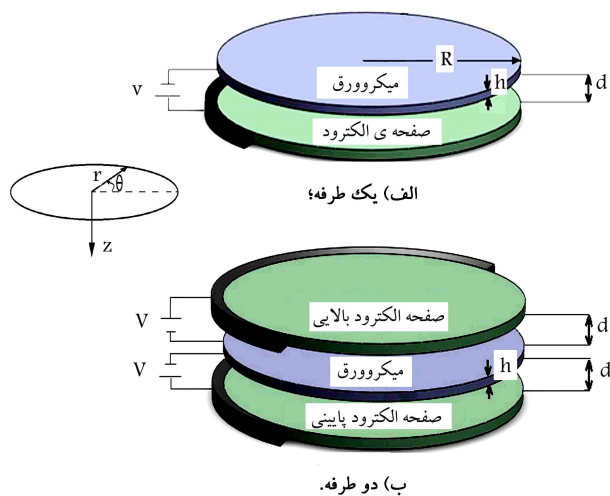
در شکل ۱ طرحی شماتیک از میکروورق تحریک‌شده‌ی الکتریکی یک‌طرفه و دوطرفه نشان داده شده است.

با برقرار کردن میدان کرنش براساس فرضیات ورق ون کارمن و به‌کارگیری اصل کار مجازی، و با استفاده از مطالعات پیشین،^[۲۴] معادله‌ی خیز ورق دایروی در حضور ترم‌های غیرخطی ناشی از تغییر شکل‌های بزرگ و حضور نیروی الکترواستاتیکی برای دیافراگم با داشتن یک صفحه‌ی پشتیبان خواهیم داشت:

$$D\nabla^4 w = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\epsilon V^2}{2(d-w)^2} \quad (۱)$$

این معادله برای میکروورق دایروی با داشتن دو صفحه پشتیبان عبارت خواهد بود از:

$$D\nabla^4 w = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\epsilon V^2}{2(d-w)^2} - \frac{\epsilon V^2}{2(d+w)^2} \quad (۲)$$



شکل ۱. طرح شماتیکی از میکروورق دایروی تحریک‌شده.

۴. روش کاهش مرتبه گلرکین

چنان که مشاهده می‌شود، جملات آخر در معادلات ۶ و ۷ نشان‌گر نیروی تحریک الکترواستاتیکی است و برای انتگرال‌گیری در روش گلرکین مناسب نیستند و نمی‌توان انتگرال آن را بر حسب توابع اولیه بیان کرد. بنابراین با ضرب مخرج این کسرها در تمامی جملات، معادلات ۶ و ۷ مطابق رابطه‌های ۱۰ و ۱۱ بازنویسی می‌شود:

$$L(w, F) = (1-w)^{\tau} \nabla^{\tau} w - \frac{\alpha_1 (1-w)^{\tau}}{r} \left(\frac{\partial^{\tau} w}{\partial r^{\tau}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^{\tau} F}{\partial r^{\tau}} \right) - \alpha_2 V^{\tau} = 0 \quad (10)$$

$$L(w, F) = (1-w)^{\tau} \nabla^{\tau} w - \frac{\alpha_1 (1-w)^{\tau}}{r} \left(\frac{\partial^{\tau} w}{\partial r^{\tau}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^{\tau} F}{\partial r^{\tau}} \right) - 4\alpha_2 V^{\tau} w = 0 \quad (11)$$

برای به‌کارگیری روش گلرکین از رابطه‌ی ۱۲، تابع حدس اولیه‌ی که شرایط مرزی ۹ را ارضاء می‌کند، استفاده شده است:

$$w(r) = \varphi (1-r^{\tau})^2 \quad (12)$$

که در آن ثابت نامعلوم φ معرف خیز بیشینه‌ی ورق در مرکز آن ($r=0$) است. با جایگذاری معادله‌ی ۱۲ در معادله‌ی سازگاری ۸، تابع تنش توسط حل معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن حاصله با توجه به شرایط مرزی به دست می‌آید:

$$F(r) = \left(-\frac{r^8}{48} + \frac{r^6}{9} - \frac{r^4}{4} + \frac{(5-3\nu)r^2}{12(1-\nu)} \right) \varphi^{\tau} \quad (13)$$

با قرار دادن معادلات ۱۲ و ۱۳ در معادلات خیز ۱۰ و ۱۱، و انتگرال‌گیری گلرکین (رابطه‌ی ۱۴)، معادلات کاهش یافته برای دو سیستم به دست می‌آید:

$$\int_0^1 L(w, F) w r dr = 0 \quad (14)$$

بنابراین رابطه‌ی ولتاژ و جابه‌جایی بیشینه‌ی میکروورق تحریک‌شده‌ی الکتریکی یک طرفه (که به‌طور مشخص در $r=0$ رخ می‌دهد) عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} & \frac{(21\nu-43)\alpha_1}{154(\nu-1)} \varphi^5 - \frac{\lambda(5\nu-11)\alpha_1}{135(\nu-1)} \varphi^4 \\ & + \frac{(18\nu\alpha_1 + 576\nu - 46\alpha_1 - 576)}{126(\nu-1)} \varphi^3 - \frac{64}{5} \varphi^2 + \frac{32}{3} \varphi \\ & = \frac{V^{\tau} \alpha_2}{\rho} \end{aligned} \quad (15)$$

همچنین رابطه‌ی ولتاژ - جابه‌جایی بیشینه‌ی میکروورق با دو صفحه‌ی پشتیبان عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} & \frac{(11\nu-21)\alpha_1}{99(\nu-1)} \varphi^5 - \frac{(546\nu\alpha_1 - 5824\nu - 1118\alpha_1 + 5824)}{2002(\nu-1)} \varphi^4 \\ & + \frac{(9\nu\alpha_1 - 576\nu - 23\alpha_1 + 576)}{63(\nu-1)} \varphi^3 \\ & + \frac{1}{30} (320 - 12V^{\tau} \alpha_2) \varphi = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

با اطلاع از مقادیر هندسی و خواص فیزیکی میکروورق و با استفاده از معادلات ۱۵ و ۱۶ می‌توان رابطه‌ی ولتاژ و جابه‌جایی را برای هر دو نوع سیستم یک طرفه و

تنها تفاوت معادلات بالا در نیروی الکترواستاتیکی است. در این معادلات w جابه‌جایی در راستای z (عمود بر صفحه)، d میزان گپ بین الکترودها و میکروورق، V اختلاف پتانسیل بین الکترودها و میکروورق، ε ضریب دی‌الکتریک، و D صلیبت ورق است که از رابطه‌ی ۳ محاسبه می‌شود:

$$D = \frac{Eh^{\tau}}{12(1-\nu^{\tau})} \quad (3)$$

که در آن، E مدول کشسانی، h ضخامت میکروورق و ν ضریب پواسون است. F تابع تنش ایری است که رابطه‌ی جابه‌جایی‌های درون‌صفحه‌ی (در راستای r و θ) را مشخص می‌کند. همچنین معادله‌ی سازگاری برای یک صفحه‌ی ایزوتروپ دایروی توسط تابع تنش ایری ارائه می‌شود:

$$\nabla^{\tau} F = -\frac{Eh}{r} \frac{\partial^{\tau} w}{\partial r^{\tau}} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (4)$$

۳. ساده‌کردن و بی‌بعدسازی معادلات و شرایط مرزی

حاکم

برای تعمیم جواب نهایی مسئله و همچنین برای سادگی، با تعریف پارامترهای زیر مسئله بی‌بعد می‌شود.

$$r = Rr^*, \quad w = dw^*, \quad F = Ehd^{\tau} F^* \quad (5)$$

با قرار دادن این روابط در دو معادله‌ی ۱ و ۲، و جانشین کردن دوباره‌ی مقادیر بدون ستاره به جای ستاره‌دار و ساده‌کردن، معادله‌ی بی‌بعدشده‌ی خیز میکروورق برای دو نوع سیستم تبدیل می‌شود به:

$$L(w, F) = \nabla^{\tau} w - \frac{\alpha_1}{r} \left(\frac{\partial^{\tau} w}{\partial r^{\tau}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^{\tau} F}{\partial r^{\tau}} \right) - \frac{\alpha_2 V^{\tau}}{(1-w)^{\tau}} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} L(w, F) = \nabla^{\tau} w - \frac{\alpha_1}{r} \left(\frac{\partial^{\tau} w}{\partial r^{\tau}} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^{\tau} F}{\partial r^{\tau}} \right) - \frac{\alpha_2 V^{\tau}}{(1-w)^{\tau}} \\ + \frac{\alpha_2 V^{\tau}}{(1+w)^{\tau}} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

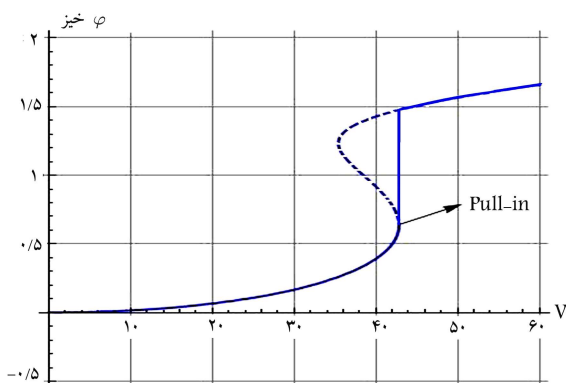
$$\alpha_2 = \frac{\varepsilon R^{\tau}}{12Dd^{\tau}} \quad \text{و} \quad \alpha_1 = \frac{12d^{\tau}(1-\nu^{\tau})}{h^{\tau}}$$

معادله‌ی سازگاری ۴ با استفاده از روابط ۵ به صورت بی‌بعد نوشته می‌شود:

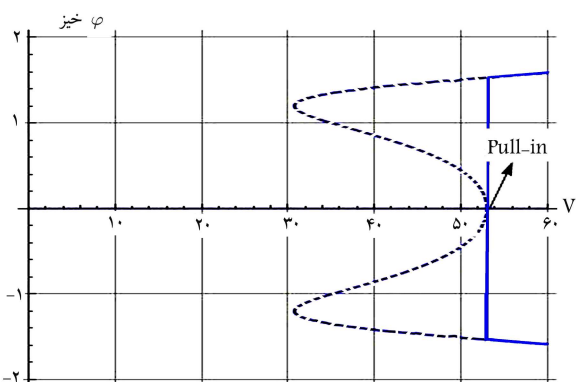
$$\nabla^{\tau} F = -\frac{1}{r} \frac{\partial^{\tau} w}{\partial r^{\tau}} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (8)$$

در ادامه برای ورق دایروی گیردار، بدون جابه‌جایی درون‌صفحه‌ی، شرایط مرزی بی‌بعدشده در شعاع خارجی مطابق رابطه‌ی ۹ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= 0 \\ w &= 0 \\ \frac{\partial^{\tau} F}{\partial r^{\tau}} - \nu \frac{\partial F}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$



شکل ۲. نمودار خیز مرکز دیافراگم برحسب ولتاژ برای میکروورق تحریک شده‌ی یک طرفه.



شکل ۳. نمودار خیز مرکز دیافراگم برحسب ولتاژ برای میکروورق تحریک شده‌ی دو طرفه.

کشیدگی میکروورق به یکی از صفحات الکتروود (پایینی یا بالایی) به سرعت متصل می‌شود. باید توجه داشت که در نبود تغییر مکان کوچک اولیه، همواره به دلیل تقارن در نیروی الکترواستاتیکی ناشی از سیستم صفحات پشتیبان دو طرفه، در $\varphi = 0$ تعادل استاتیکی برقرار است و نمودار فقط روی این خط پیش می‌رود. اما در عمل چنین اتفاقی نمی‌افتد و همواره پس از ولتاژ کشیدگی به دلیل عدم تقارن کامل یا کوچک‌ترین اختلال، از یک طرف نیروی بیشتری به ورق وارد می‌شود و پدیده‌ی کشیدگی اتفاق می‌افتد.

در میکروورق تحت بار دو طرفه، کشیدگی همواره در نقطه‌ی برخورد دو شاخه از رابطه‌ی ۱۶ روی محور ولتاژ اتفاق می‌افتد. یعنی برای به دست آوردن ولتاژ کشیدگی، کافی است عامل مشترک f از رابطه‌ی ۱۶ حذف شود و در رابطه‌ی ضمنی حاصل، f برابر صفر قرار داده شود، تا ولتاژ کشیدگی برحسب سایر پارامترها به دست آید. در این راستا، طبیعی است که برای ولتاژ کشیدگی مقدار مثبت در نظر گرفته شود. بنابراین با توجه به تحلیل‌های بالا روابط تحلیلی برای تعیین مقدار ولتاژ کشیدگی در حالت دو طرفه عبارت خواهد بود از:

$$V_{Pr} = \sqrt{\frac{\lambda^0}{3\alpha_r}} = \sqrt{\frac{\varphi_0 E h^3 d^3}{9\epsilon R^2 (1 - \nu^2)}} \quad (17)$$

مطالعات بیشتر نشان می‌دهد که ولتاژ کشیدگی به دست آمده با استفاده از نظریه‌های ورق، برابر ولتاژ کشیدگی به دست آمده با فرض جرم فشرده برای سیستم است. [۱۷، ۳۱]

دو طرفه به دست آورد. برای نمونه، منحنی ولتاژ جابه‌جایی برای سیستم یک طرفه و دو طرفه با مشخصات جدول ۱، در شکل‌های ۲ و ۳ نمایش داده شده است. مقادیر φ بیشتر از ۱ و کم‌تر از -۱ در نمودارها تعبیر فیزیکی ندارد، زیرا خیز ورق نهایتاً ممکن است به اندازه‌ی فضای خالی بین دیافراگم و صفحات الکتروود (d) باشد.

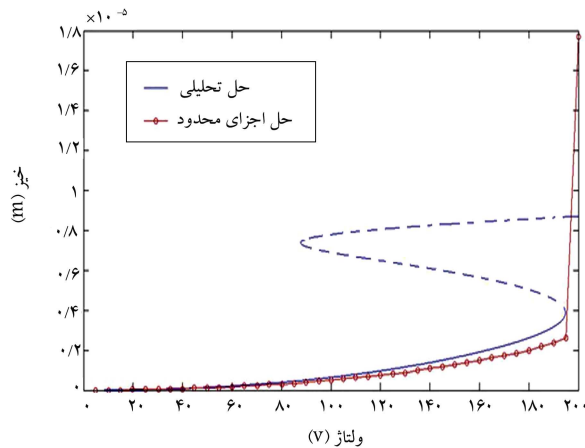
در شکل ۲ منحنی رابطه‌ی تحلیلی ۱۵ برای میکروورقی با مشخصات جدول ۱، در حالت یک طرفه، نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، با افزایش مقدار ولتاژ از صفر تا $42/82$ ولت، همواره به خیز بیشینه‌ی میکروورق اضافه می‌شود. این ناحیه قسمت پایدار منحنی است که به صورت خط ممتد نشان داده شده است. مقدار ولتاژ $42/82$ بیانگر ولتاژ کشیدگی است که نقطه‌ی آغاز ناپایداری میکروورق است و در آن چندشاخگی اتفاق می‌افتد. قسمت نقطه چین منحنی که در آن به ازای یک ولتاژ چندین خیز مشاهده می‌شود ناحیه‌ی ناپایدار است که در واقع هیچگاه در عمل اتفاق نمی‌افتد و با کوچک‌ترین افزایش در ولتاژ کشیدگی، مقدار خیز میکروورق به شاخه‌ی بالایی می‌پرد. مقدار متغیر φ عملاً بیشتر از ۱ شده که حاکی از برخورد میکروورق با الکتروود و خرابی آن است.

با توجه به این که برای حدود فیزیکی مسئله می‌توان ولتاژ را تابعی پیوسته و مشتق پذیر از جابه‌جایی مرکز ورق در نظر گرفت، می‌توان ولتاژ کشیدگی را در بیشینه‌ی نسبی حاصل از رابطه‌ی ۱۵ به دست آورد. با توجه به این رابطه، $\frac{\partial V}{\partial f} = 0$ برای مقادیر مثبت ولتاژ منجر به یک معادله‌ی درجه‌ی چهار می‌شود، که دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. ریشه‌ی که بین صفر و ۱ است (و معرف خیز در داخل گپ)، ریشه‌ی مورد نظر و ولتاژ مربوط به آن همان ولتاژ کشیدگی است. این مقدار با استفاده از مدل جرم فشرده ۳۱ ولت گزارش شده است. [۱۷]

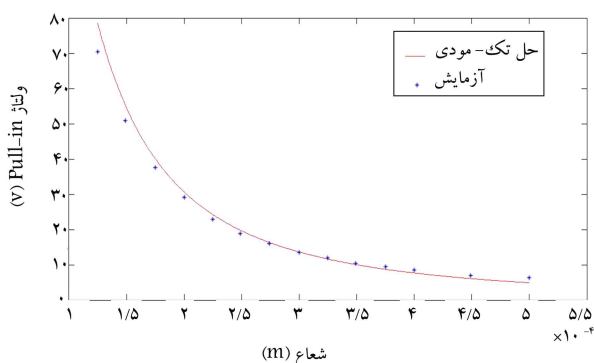
در شکل ۳، تغییرات خیز با ولتاژ برای یک سیستم دو طرفه نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود به ازای هر ولتاژی کم‌تر از $V_{Pr} = 52/43$ ولت، جابه‌جایی در ورق صفر است. اما در ولتاژ V_{Pr} به ازای کوچک‌ترین تغییر مکان در هر جهت، ورق به همان سمت خیز برمی‌دارد و نیروی مکانیکی فنریت توانایی نگه داشتن آن را ندارد. به عبارت دیگر این ولتاژ یک مقدار بحرانی و نقطه‌ی تعادل ناپایدار در این سیستم است. این تغییر رفتار نیز همانند حالت یک طرفه یک دوشاخگی است. [۱۷]

در شکل ۳ که براساس رابطه‌ی ضمنی ۱۶ ترسیم شده، خیز در نواحی خط چین هرگز در عمل به دست نمی‌آید و پس از رسیدن ولتاژ به مقدار نهایی در ولتاژ جدول ۱. مقادیر هندسی و خصوصیات نوع خاصی از میکروورق از جنس پلی‌سیلیکون. [۱۷]

مشخصات	مقادیر
شعاع دیافراگم (R)	$230 \mu\text{m}$
ضخامت دیافراگم (h)	$2,25 \mu\text{m}$
مدول یانگ (E)	169 GPa
ضریب پواسون (ν)	$0,22$
چگالی (ρ)	2330 Kg/m^3
مقدار گپ (d)	$2 \mu\text{m}$
ضریب گذردهی (ϵ)	$8,854418 \times 10^{-12} \text{ F/m}$



شکل ۵. مقایسه‌ی منحنی ولتاژ جابه‌جایی به دست آمده از دو روش تحلیلی و اجزای محدود.



شکل ۶. مقایسه‌ی منحنی ولتاژ جابه‌جایی در شعاع‌های مختلف میکروورق، به دست آمده از دو روش تحلیلی (خط قرمز)، و آزمایشی (نقاط آبی).

۶. صحنه‌گذاری و مقایسه با نتایج آزمایش

در سال ۱۹۹۵ ولتاژ کشیدگی برای شعاع‌های مختلف دیافراگم میکروورق دایروی سیلیکونی با شرایط تکیه‌گاهی گیردار محاسبه شد.^[۱۴] برای انجام این کار ادوات سیستم‌های میکروالکترومکانیکی با ضخامتی در حدود ۳ میکرون و گپ‌ی در حدود ۱ میکرون ساخته و آزمایش شد. در شکل ۷ مقایسه نتایج به دست آمده از آزمایش اوستنبرگ در شعاع‌های مختلف با نتایج حل تحلیلی نشان داده شده است. چنان‌که مشاهده می‌شود، حل تحلیلی به دست آمده نتایج قابل قبولی ارائه می‌کند.

۷. تأثیر پارامترهای هندسی بر ولتاژ کشیدگی

پس از تحلیل الکترواستاتیکی ورق ون کارمن و به دست آوردن مقادیر دقیق ولتاژ کشیدگی، به منظور بررسی پارامترهای هندسی بر ولتاژ کشیدگی با تغییر یک پارامتر و ثابت نگه داشتن بقیه‌ی پارامترها اثرات افزایش ضخامت، شعاع و گپ مورد بررسی قرار گرفته است.

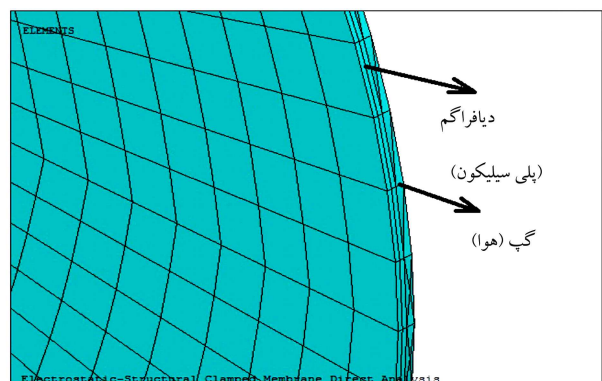
در شکل‌های ۸ تا ۱۰ تأثیر پارامترهای هندسی ضخامت و شعاع میکروورق و میزان گپ بر ولتاژ ناپایداری کشیدگی نشان می‌دهند. محدوده‌ی تغییرات پارامترها

۵. صحنه‌گذاری و مقایسه با نتایج حل ANSYS

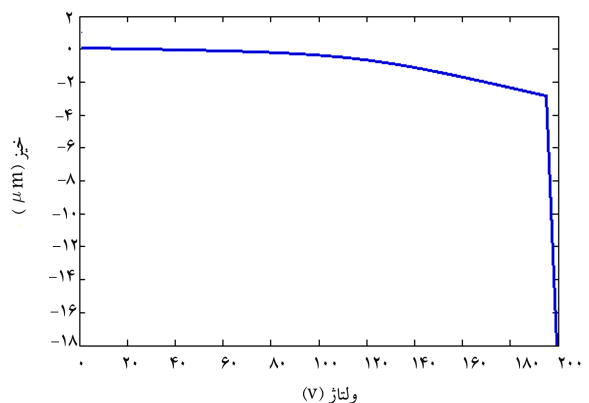
برای مقایسه‌ی نتایج تحلیلی با حل اجزای محدود (شکل ۴)، میکروورق و گپ هوا به صورت دو لایه‌ی متصل به هم در نظر گرفته شده است. پس از شبکه‌بندی دو لایه و انتخاب نوع المان‌ها، با استفاده از برنامه‌ی که در نرم‌افزار ANSYS به منظور ایجاد نیروی الکترواستاتیکی نوشته شد، تحت بارگذاری قرار گرفته است. میزان گپ هوا ۶ میکرون در نظر گرفته شده که بیشتر از حد معمول مورد استفاده در ادوات MEMS است؛ این کار به منظور اعتبارسنجی تحلیل در خیز زیاد است. سایر خصوصیات از جدول ۱ انتخاب شده است.

در نرم‌افزار برای ایجاد گپ هوا، مدول کشسانی مقدار بسیار کوچکی در نظر گرفته می‌شود. همچنین نیروی الکترواستاتیکی وارد به ورق با ایجاد اختلاف پتانسیل در دو طرف گپ به وجود آمده است. بنابراین با ایجاد هر ولتاژی ورودی وضعیت میکروورق و خیز ناشی از ولتاژ ورودی مشاهده می‌شود. در شکل ۵ مشاهده می‌شود که با وارد کردن ولتاژهای متوالی در گام‌های ۵ ولتی، میکروورق به طور متوالی خیز برمی‌دارد تا این که در یک ولتاژ مشخص که همان ولتاژ کشیدگی است، به یک وضعیت ناپایدار برسد و حل مسئله قطع شود.

در شکل ۶ نتایج تحلیلی (رابطه‌ی ۱۵) و حل عددی با یکدیگر مقایسه شده است. ولتاژ کشیدگی در دو روش با یکدیگر تفاوت چندانی ندارد (۱۵/۵ درصد خطا)، اما خیز میکروورق در روش اجزای محدود کم‌تر از روش تحلیلی است. این تفاوت می‌تواند ناشی از خطای حل عددی در خیز زیاد باشد.



شکل ۴. مدل کردن میکروورق و گپ هوا به صورت دو ورق متصل شده به هم در ANSYS.



شکل ۵. خیز میکروورق در هر گام و پدیده‌ی کشیدگی در $V_{Pi} = 195$.

در حدود ادوات میکروالکترومکانیکی و به‌گونه‌ی انتخاب شده که با فرض اساسی ورق‌های نازک تناقضی نداشته باشد.

چنان که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، همواره ولتاژ کشیدگی سیستم خازنی دوطرفه نسبت به نوع یک‌طرفه بیشتر و در نتیجه منطقه‌ی پایداری آن وسیع‌تر است. همچنین مشاهده می‌شود با افزایش ضخامت میکروورق مقدار ولتاژ کشیدگی نیز افزایش می‌یابد. این امر ناشی از افزایش مقاومت مکانیکی ورق در پی افزایش ضخامت است.

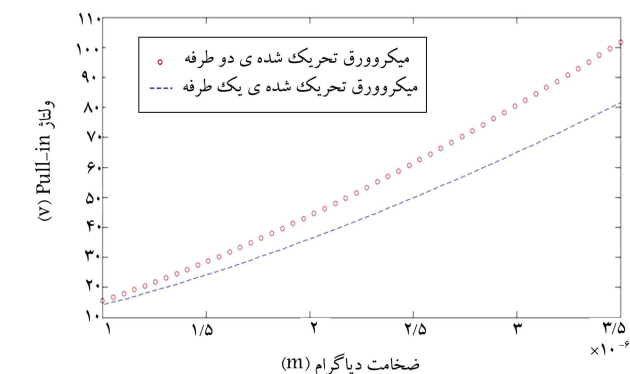
با توجه به شکل ۹ مشاهده می‌شود که با افزایش قطر میکروورق مقدار ولتاژ کشیدگی کاهش می‌یابد که علت آن کاهش مقاومت خمشی ورق با افزایش قطر میکروورق است.

همچنین مشاهده می‌شود که افزایش فاصله‌ی صفحات الکتروود و میکروورق چه در سیستم یک‌طرفه و چه در سیستم دوطرفه باعث افزایش مقدار ولتاژ کشیدگی و محدوده‌ی کارکرد آن می‌شود. در واقع افزایش میزان فاصله باعث کاهش اثر کشیدگی ولتاژ ورودی و نیروی خمشی به میکروورق می‌شود.

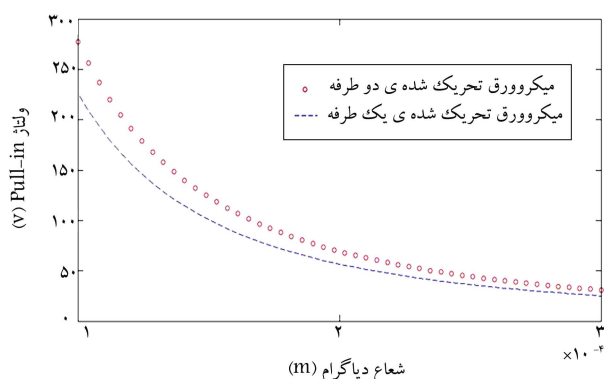
۸. نتیجه‌گیری

در این نوشتار مقدار ولتاژ کشیدگی یک سیستم الکترومکانیکی با میکروورق دایروی در حالت یک‌طرفه و دوطرفه بررسی شده است. میکروورق تحریک‌شده‌ی الکترواستاتیکی یک‌طرفه و دوطرفه، به صورت یک ورق همسانگرد دایروی گیردار نازک، تحت نیروی غیرخطی الکترواستاتیکی و با فرض وجود جمله‌ی غیرخطی هندسی ناشی از خیز زیاد در نظر گرفته شده است؛ روابط ولتاژ جابه‌جایی مربوطه نیز به صورت تحلیلی توسط روش گارکین تک‌مودی تعیین شده است. این تحلیل برای نوع پرکاربرد و مفیدتر دوطرفه، نخستین بار با استفاده از نظریه‌ی ورق ون کارمن صورت گرفت و به یک رابطه‌ی صریح برای ولتاژ کشیدگی منجر شد. مقدار ولتاژ کشیدگی به دست آمده از این روابط تحلیلی $1/3$ برابر ولتاژ کشیدگی به دست آمده با فرض جرم فشرده است که نشان می‌دهد نتایج تحقیقات گذشته ظرفیت کم‌تری برای این‌گونه وسایل پیش‌بینی کرده‌اند. این امر نشان‌گر مزیت استفاده از روش حل تحلیلی و نظریه‌ی ورق به جای استفاده از روش جرم فشرده است.

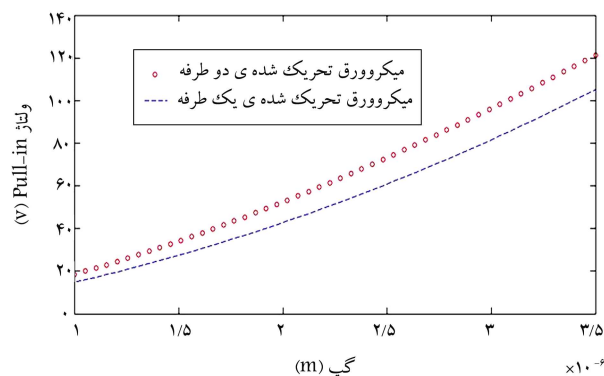
در انتها، تأثیر پارامترهای هندسی شعاع، ضخامت ورق و فاصله‌ی بین میکروورق و الکتروود بر ولتاژ کشیدگی در دو نوع سیستم خازنی یک‌طرفه و دوطرفه مورد مطالعه قرار گرفته است که نشان می‌دهد افزایش ضخامت و فاصله‌ی میکروورق باعث افزایش ولتاژ کشیدگی، و افزایش قطر میکروورق باعث کاهش ولتاژ کشیدگی می‌شود.



شکل ۸. تغییرات ولتاژ کشیدگی برحسب ضخامت میکروورق تحریک‌شده‌ی یک‌طرفه (خط چین آبی) و دوطرفه (نقاط قرمز).



شکل ۹. تغییرات ولتاژ کشیدگی برحسب شعاع میکروورق تحریک‌شده‌ی یک‌طرفه (خط چین آبی) و دوطرفه (نقاط قرمز).



شکل ۱۰. تغییرات ولتاژ کشیدگی برحسب میزان فاصله‌ی صفحات الکتروود و میکروورق تحریک‌شده‌ی یک‌طرفه (خط چین آبی) و دوطرفه (نقاط قرمز).

پانویس‌ها

1. sensor
2. pull-in voltage

3. dynamic pull-in voltage
4. Sandia national laboratory
5. Casimir force
6. Bifurcation

منابع (References)

1. Younis, M.I. "Microsystems: Mems linear and nonlinear statics and dynamics, *Springer*, **20**, (2010).
2. Martin, D.T., *Design, Fabrication, and Characterization of a MEMS Dual-Backplate Capacitive Microphone*, University of Florida (2007).
3. Liu, J., *Nonlinear Dynamics of a Dual-Backplate Capacitive MEMS Microphone*, University of Florida (2007).
4. Yu, H. and Chen, H. "Development of a novel micromirror based on surface micromachining technology", *Sensors and Actuators A: Physical*, **125**(2), pp. 458-462 (2006).
5. Fang, Y. and Tan, X. "A novel diaphragm micropump actuated by conjugated polymer petals: Fabrication, modeling, and experimental results", *Sensors and Actuators A: Physical*, **158**(1), pp. 121-131 (2010).
6. Nabian, A. and et al. "Mechanical behavior of a circular micro plate subjected to uniform hydrostatic and non-uniform electrostatic pressure", *Microsystem Technologies*, **14**(2), pp. 235-240 (2008).
7. Palasantzas, G. "Pull-in voltage of microswitch rough plates in the presence of electromagnetic and acoustic Casimir forces", *Journal of Applied Physics*, **101**(6), pp. 063548-063548-5 (2007).
8. Liew, K. and et al., *Vibration of Mindlin Plates: Programming the P-Version Ritz Method*, Access Online via Elsevier (1998).
9. Faris, W.F., *Nonlinear Dynamics of Annular and Circular Plates Under Thermal and Electrical Loadings*, Virginia Polytechnic Institute and State University (2003).
10. Elata, D. and Bamberger, H. "On the dynamic pull-in of electrostatic actuators with multiple degrees of freedom and multiple voltage sources", *Journal of Microelectromechanical Systems*, **15**(1), pp. 131-140 (2006).
11. Fargas-Marques, A. and Shkel, A. "On electrostatic actuation beyond snapping condition", In *Sensors*, IEEE, pp. 600-603 (2005).
12. Vogl, G.W. and Nayfeh, A.H. "A reduced-order model for electrically actuated clamped circular plates", *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **15**(4), pp. 684 (2005).
13. Vogl, G.W., *Nonlinear Dynamics of Circular Plates under Electrical Loadings for Capacitive Micromachined Ultrasonic Transducers (CMUTs)*, Virginia Polytechnic Institute and State University (2006).
14. Osterberg, P.M. and Senturia, S.D. "M-TEST: A test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures", *Journal of Microelectromechanical Systems*, **6**(2), pp. 107-118 (1997).
15. Liu, J. and et al. "Nonlinear model and system identification of a capacitive dual-backplate MEMS microphone", *Journal of Sound and Vibration*, **309**(1), pp. 276-292 (2008).
16. Liu, J. and et al. "Harmonic balance nonlinear identification of a capacitive dual-backplate MEMS microphone", *Journal of Microelectromechanical Systems*, **17**(3), pp. 698-708 (2008).
17. Martin, D.T. and et al. "A micromachined dual-backplate capacitive microphone for aeroacoustic measurements", *Journal of Microelectromechanical Systems*, **16**(6), pp. 1289-1302 (2007).
18. Batra, R., Porfiri, M. and Spinello, D. "Reduced-order models for microelectromechanical rectangular and circular plates incorporating the Casimir force", *International Journal of Solids and Structures*, **45**(11), pp. 3558-3583 (2008).
19. Batra, R., Porfiri, M. and Spinello, D. "Vibrations and pull-in instabilities of microelectromechanical von Kármán elliptic plates incorporating the Casimir force", *Journal of Sound and Vibration*, **315**(4), pp. 939-960 (2008).
20. Saedivahdat, A. and et al. "Effect of thermal stresses on stability and frequency response of a capacitive microphone", *Microelectronics Journal*, **41**(12), pp. 865-873 (2010).
21. Saedi Vahdat, A., Rezazadeh, G. and Afrang, S. "Improving response of a MEMS capacitive microphone filtering shock noise", *Microelectronics Journal*, **42**(5), pp. 614-621 (2011).
22. Talebian, S. and et al. "Effect of temperature on pull-in voltage and natural frequency of an electrostatically actuated microplate", *Mechatronics*, **20**(6), pp. 666-673 (2010).
23. Wang, Y.G. and et al. "Bending and vibration of an electrostatically actuated circular microplate in presence of Casimir force", *Applied Mathematical Modelling*, **35**(5), pp. 2348-2357 (2011).
24. Chia, C.Y., *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw-Hill New York (1980).