

بررسی پایداری و رفتارهای دینامیکی غیرخطی لوله‌ی حامل سیال در حالت سه‌بعدی

سعید همایونی بورا (کارشناس ارشد)

مرتضی دردل* (دانشیار)

محمدهادی پاشایی (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۵)
دربی ۲ - ۳، شماره‌ی ۲، ص. ۱۱-۳

در این نوشتار به مدل‌سازی و بررسی فلاتر (اهتزاز) و رفتارهای غیرخطی در لوله‌ی حامل سیال در حالت سه‌بعدی پرداخته خواهد شد. معادلات حاکم بر سیستم، با فرض یک میدان جابه‌جایی مناسب به صورت غیرخطی و با استفاده از اصل لاگرانژ استخراج شده است. این امر نیاز به مدل‌سازی پیچیده را، با توجه به مطالب ذکر شده در مطالعات پیشین، از بین می‌برد. با توجه به حرکت سه‌بعدی لوله، جابه‌جایی‌ها به صورت دو خمش و یک حرکت درون‌صفحه‌یی مدل‌سازی شده‌اند. معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی حاکم با استفاده از روش رابلی - ریتز به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل، و با استفاده از پارامترهای مناسب بی‌بعدسازی شده است. سپس معادلات غیرخطی به روش عددی حل شده و رفتارهای ارتعاشی آن مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده، و مقایسه‌ی آن با نتایج ارائه شده در منابع، حاکی از دقت روش مدل‌سازی ارائه شده با توجه به میدان جابه‌جایی مفروض است.

واژگان کلیدی: مدل‌سازی لوله، فلاتر (اهتزاز)، لوله‌ی حامل سیال، تحلیل سه‌بعدی، ارتعاشات غیرخطی.

saeed.homayoni@gmail.com
dardel@nit.ac.ir
mhpashaei@nit.ac.ir

۱. مقدمه

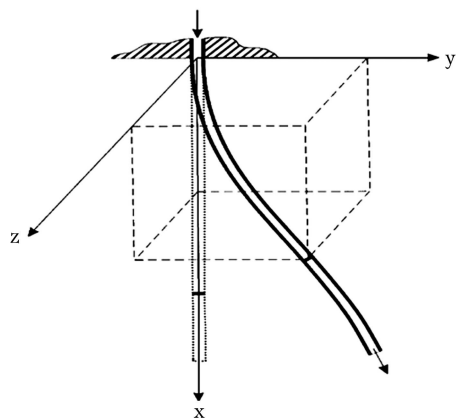
سازه رخ می‌دهد. بدین صورت که در سرعت‌های پایین، نیروهای سیال باعث کاهش دامنه‌ی ارتعاشات سازه‌یی می‌شوند. اما در سرعت‌های بالاتر از یک حد مشخص، نیروهای سیال موجب تقویت ارتعاش می‌شوند؛ به عبارت دیگر، با افزایش سرعت، مشخصه‌ی میرایی سیستم تغییر می‌کند و ایجاد نوعی میرایی منفی در سیستم موجب ناپایداری آن می‌شود. در این حالت دامنه‌ی ارتعاش افزایش می‌یابد و چنانچه در سیستم به اندازه کافی میرایی وجود نداشته باشد، سیستم تا مرز تخریب پیش می‌رود. مسئله‌ی بررسی ناپایداری لوله‌های حامل جریان مبعثی مفصل است و بسیاری از محققین به مطالعه و بررسی‌های مختلف در این حوزه پرداخته‌اند. در مطالعات اولیه در خصوص لوله‌ی حامل سیال^[۲-۳] معادلات حاکم بر حرکت عرضی لوله‌ی حامل سیال با روش‌های مختلف استخراج، و با استفاده از روش‌های حالت مفروض و المان محدود حل شد. نتایج حاصل از این مطالعات عبارت‌اند از: از دست دادن پایداری سیستم در ازای سرعت به اندازه‌ی کافی بالا، دوشاخگی هاپف^۴، ایجاد پدیده‌ی فلاتر (اهتزاز) در سرعت‌های مختلف. البته در آزمایش‌های اولیه، فلاتر در یک صفحه محدود شد و از این رو مدل‌های نظری خطی توسعه یافت. در مطالعات اخیر، معادلات حرکت لوله‌ی یکسرگیردار حامل سیال با جرم پشتیبان استخراج شد^[۸] و طی آن، با فرض کشش‌ناپذیری لوله، معادلات دیفرانسیل برای حرکت عرضی که شامل شش اینرسی غیرخطی بود مطرح شد.^[۸] در ادامه، اثر فنر پشتیبان برای چندین مکان مختلف مورد بررسی قرار گرفت

با گسترش تحقیقات و تکنولوژی‌های نوین، شناخت و به‌کارگیری لوله‌های حامل سیال در صنایع، روز به روز از اهمیت بیشتری برخوردار می‌شود. در تأسیسات نفت و گاز، چه در ساحل و چه خارج از ساحل، از لوله‌ها معمولاً برای انتقال سیال و نفت خام و دیگر محصولات استفاده می‌شود.^[۱] همچنین از لوله‌ها برای انتقال سیال‌های مایع و گاز نیز استفاده می‌شود. لوله‌ها تحت تأثیر شرایط محیطی مختلف -- نظیر نوسانات درجه حرارت داخلی و خارجی، زلزله، حرکت زمین و حرکت جریان سیال -- قرار می‌گیرند. در این سیستم‌ها ضمن عبور سیال، نیروهای گریز از مرکز و کربولسی از طرف سیال بر دیواره وارد می‌شود و پدیده‌های مختلف ناپایداری استاتیکی و دینامیکی، نظیر انواع مختلف واگرایی و فلاتر^۱، ایجاد می‌شود.^[۲] با دخالت دادن هر نوع غیرخطی، نظیر غیرخطی‌های سازه‌یی و اصطکاک در این سیستم‌ها، رفتارهای ساده و پیچیده‌ی غیرخطی -- نظیر سیکل حدی، آشوب و پرورد دوبل -- ایجاد می‌شود.

فلاتر (اهتزاز) پدیده‌یی خطرناک است که در ساختارهای انعطاف‌پذیر تحت تأثیر نیروهای سیال اتفاق می‌افتد و در آن، علاوه بر این که سیستم ناپایدار است، بسامد آن (قسمت موهومی مقدار ویژه) نیز صفر نیست. این ساختارها شامل لوله‌ی یکسرگیردار حامل سیال، هواپیما، ساختمان‌ها، سیم‌های تلگراف، تابلوهای راهنمایی و رانندگی و پل‌ها می‌شود. پدیده‌ی فلاتر به دلیل تراکنش بین نیروهای سیال، کشسان و اینرسی در

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۶/۴، اصلاحیه ۱۳۹۴/۲/۲۲، پذیرش ۱۳۹۴/۳/۲.



شکل ۱. شماتیک لوله‌ی حامل سیال. [۱۶]

و نشان داده شد که با توجه به سختی و مکان فنر پشتیبان، سیستم می‌تواند در اثر دوشاخگی پیچفورک دچار واگرایی استاتیکی شود یا در اثر دوشاخگی هاپف تک‌حالته دچار فلاتر شود. [۹]

برای سیستم‌های با جرم انتهایی نیز رفتار مشابهی مورد مطالعه قرار گرفت [۱۰] و نشان داده شد که سیستم در سرعت‌های جریان بحرانی پایداری خود را بر اثر دوشاخگی هاپف از دست می‌دهد و پدیده‌ی فلاتر رخ می‌دهد. با افزایش سرعت بحرانی، دوشاخگی دوم رخ می‌دهد که با کاهش دامنه و افزایش قابل توجه بسامد همراه خواهد بود. در این سرعت‌ها، اولین نشانه‌ها از حرکت‌های پیچیده (آشوبناک) مشاهده می‌شود که سبب بروز تغییر شکل‌های بزرگ خواهد شد. رفتارهای غیرخطی دوبعدی و سه‌بعدی لوله‌های حامل سیال با توسعه‌ی مطالعات انجام‌شده پیگیری شد. [۱۱] نتایج حاصله نشان داد که رفتار سیستم به صورت سیکل حدی است، و این حرکت‌های دوبعدی و سه‌بعدی عمدتاً به پارامتر β وابسته است. همچنین نمودار دوشاخگی برای مقادیر مختلف مشخص، و نشان داده شد که در β های بالاتر، حرکات سه‌بعدی رخ می‌دهد. [۱۲]

بررسی نظری - تجربی مسئله‌ی لوله‌ی یکسرگردار حامل سیال در حالت سه‌بعدی، [۱۳] با استفاده از معادلات مطرح‌شده، و طراحی و پیاده‌سازی دستگاه آزمایش، رفتارهای غیرخطی سیستم برای سرعت‌های متفاوت مورد بررسی قرار گرفت و جابه‌جایی عرضی و رفتار سیکلی نشان داده شد. همچنین بسامدهای غالب سیستم در حالت نظری - تجربی مورد بررسی قرار گرفت.

محققین نتایج حاصل از بررسی المان محدود این معادلات را با نتایج تجربی حاصل از دیگر مطالعات بررسی کردند. [۱۴] آنها رفتارهای دوبعدی، سه‌بعدی، شبه‌تناوبی و آشوبی را برای سرعت‌های مختلف جریان مورد بررسی قرار دادند، و نیز به مطالعه‌ی اثرات عیوب سختی ریز و نیروی تحریک نقطه‌یی پرداختند. [۱۴] در بررسی ارتعاشات آشوب در لوله‌ی یکسرگردار حامل سیال با جرم انتهایی، برای سرعت‌های مختلف سیال عبوری از لوله، رفتارهای سیستم مورد مطالعه قرار گرفت [۱۵] و پارامترهای دوشاخگی، رفتارهای سیکل حدی و تحلیل آشوب بررسی شد. در بررسی‌های انجام‌شده توسط قایش [۱۶] روند دست‌یابی به معادلات برای لوله‌ی یکسرگردار حامل سیال بسیار پیچیده است. بدین منظور، دست‌یابی به معادلاتی که قابلیت تعمیم به تمامی شرایط مرزی را داشته باشند بسیار ضروری به نظر می‌رسد.

۲. مدل‌سازی و استخراج معادلات حرکت

در این نوشتار، لوله‌ی یکسرگردار به طول L ، جرم واحد طول m ، صلبیت خمشی EI ، و سیال عبوری از لوله با جرم واحد طول M و سرعت محوری U در نظر گرفته خواهد شد (شکل ۱). سیال پیوسته و با چگالی حجمی ρ_f با سطح مقطع جریان A_f و ممان اینرسی سطحی است. همچنین چگالی حجمی لوله ρ_p با سطح مقطع A_p است. اگرچه در مدل انتخاب شده، سیال با سرعت یکنواخت از لوله عبور می‌کند اما به علت وجود نیروهای کریولیس و گریز از مرکز، جابه‌جایی لوله بسیار بزرگ است. بنابراین معقول به نظر می‌رسد که برای مدل‌سازی و تحلیل رفتار آن از میدان کرنش بزرگ و غیرخطی استفاده شود. پیش‌فرض‌های رعایت‌شده در این نوشتار به‌منظور استخراج معادله عبارت است از:

۱. سیال عبوری از لوله تراکم‌ناپذیر است، اما غیرلزج نیست.

۲. سرعت سیال ثابت، و جدا از هرگونه اغتشاش است.

۳. فشار در لوله کوچک فرض می‌شود، اگرچه تغییر شکل ممکن است بزرگ باشد.

۴. جابه‌جایی به‌صورت دوخمش^۳ در نظر گرفته شده و جابه‌جایی درون‌صفحه‌یی اعمال شده است.

۵. لوله نازک است و نیروی سیال به‌صورت فیزیکی مدل می‌شود؛ بنابراین مدل‌سازی سیال داخل لوله بررسی نمی‌شود.

با توجه به مدل‌سازی در حالت سه‌بعدی، برای محاسبه‌ی توابع انرژی پتانسیل و جنبشی باید توابع تغییر مکان لوله را در سه راستا داشته باشیم؛ و سپس با استفاده از روابط کرنش - جابه‌جایی و تنش - کرنش، باید توابع انرژی پتانسیل، جنبشی و کار برحسب تابع تغییر مکان نوشته شود. بدین منظور جابه‌جایی محوری و جابه‌جایی‌های عرضی نقاط مختلف لوله به‌ترتیب برابر است با:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - y \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن، $u_0(x, t)$ مؤلفه‌ی جابه‌جایی درون‌صفحه‌یی است؛ یعنی طول صفحه‌ی میانی قبل و بعد از تغییر شکل لوله برابر نیست. $v_0(x, t)$ ، $w_0(x, t)$ عبارت‌اند از جابه‌جایی‌های عرضی روی یک نقطه روی تار خنثی در جهات y و z در لحظه‌ی t که به‌صورت دو خمش انتخاب شده است. با استفاده از روابط کرنش - جابه‌جایی غیرخطی، کرنش‌ها عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} E_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ E_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ E_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ E_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ E_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ E_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

به منظور محاسبه انرژی کرنشی سیستم، محاسبه کرنش های سیستم الزامی است. روابط تنش - کرنش عبارت است از: [۱۷]

$$\begin{Bmatrix} u_x(x,t) \\ v_x(x,t) \\ w_x(x,t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^N \begin{Bmatrix} a_j(t) u_j(x) \\ p_j(t) v_j(x) \\ q_j(t) w_j(x) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda [(\lambda - \nu) \varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{zz}] \\ \lambda [\nu \varepsilon_{xx} + (\lambda - \nu) \varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{zz}] \\ \lambda [\nu \varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} + (\lambda - \nu) \varepsilon_{zz}] \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{xy} \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{yz} \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

که در آن E مدول یانگ و ν ضریب پواسون است.

با توجه به این که لوله تحت تنش های اولیه قرار گرفته است، انرژی کرنشی آن برابر است با انرژی کرنشی ناشی از تنش های ارتعاشی سیستم (u) ، که مطابق رابطه ۴ محاسبه می شود: [۱۳]

$$U = \frac{1}{2} \int_V \int \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad i, j = x, y, z \quad (4)$$

با جایگزینی رابطه ۱ در رابطه ۲، و به کارگیری رابطه ۴ و انتگرال گیری روی سطح مقطع، رابطه پیوست ۱ برای انرژی کرنشی لوله حاصل می شود. همچنین انرژی جنبشی سیستم - متشکل از انرژی جنبشی لوله و سیال - مطابق رابطه ۵ مطرح می شود: [۱۸]

$$T = \frac{1}{2} \rho_P A_P \int_0^L v_p^2 ds + \frac{1}{2} \rho_F A_F \int_0^L v_f^2 ds \quad (5)$$

که در آن ρ_P و ρ_F به ترتیب چگالی حجمی لوله و سیال عبوری، A_P و A_F به ترتیب سطح مقطع لوله و سطح مقطع جریان عبوری از لوله اند. با انجام محاسبات ریاضی و انتگرال گیری روی سطح، رابطه انرژی جنبشی به صورت پیوست ۱ استخراج می شود. به علت آزاد بودن انتهای دیگر لوله، اندازه حرکت به انتهای آن اعمال می شود که کار نیروی غیر پایستار ناشی از آن مطابق معادله ۶ مطرح می شود: [۱۸]

$$W = - \int_0^L \frac{\rho_F A_F U}{L} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + U \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) u(x-L) \\ & + \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + U \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) v(x-L) \\ & + \left(\frac{\partial w_x}{\partial t} + U \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) w(x-L) \end{aligned} \right] dx \quad (6)$$

که در آن U سرعت سیال و L طول لوله است.

۳. اعمال روش حل

در این قسمت، از روش رایلی - ریتز^۴ برای گسسته سازی معادلات حرکت سیستم، که معادلاتی با مشتقات جزئی نسبت به زمان و مکان خواهد بود، استفاده خواهد شد. با توجه به سه بعدی بودن معادلات، مختصه های تعمیم یافته سیستم در سه بعد به صورت (t) ، $p_j(t)$ و $q_j(t)$ مطرح خواهد شد و حل آن نیز مطابق معادله ۷ لحاظ می شود. در این روش از توابع پایه ای استفاده خواهد شد که شرایط مرزی

۴. بحث و ارائه نتایج

نتایج این کار در دو بخش ارائه می شود: بخش اول شامل نتایج مربوط به تحلیل پایداری خطی سیستم است و در آن نوع دوشاخگی و بسامد سیستم بررسی می شود؛ بخش دوم به تحلیل ناپایداری های با لحاظ کردن عوامل غیرخطی سازی اختصاص دارد و در آن رفتار دینامیکی سیستم در مجاورت ناپایداری های خطی بررسی می شود.

حالت های مفروض (توابع پایه و توابع وزنی) در روش رایلی - ریتز به صورت معادله های ۸ و ۹ انتخاب می شود. حالت مفروض جابه جایی عرضی به صورت تیر اویلر برنولی انتخاب شد و نتایج حاصله برای چهار حالت اول سیستم عبارت است از:

$$u_j(x) = \sin\left(\frac{m-1}{2}\pi x\right) \quad (8)$$

$$v_j(x) = w_j(x) = \cos(\lambda_j x) - \cosh(\lambda_j x) - \frac{\cos \lambda_j l + \cosh \lambda_j l}{\sin \lambda_j l + \sinh \lambda_j l} (\cos(\lambda_j x) - \cosh(\lambda_j x)) \quad (9)$$

مقادیر مشخصه مربوط به بسامدهای طبیعی تیر یک سرگیردار اویلر برنولی ساده است.

با جایگذاری معادلات انرژی جنبشی، پتانسیل و کار در معادلات لاگرانژ و با در نظر گرفتن حل به صورت معادله ۷ معادلات حرکت را محاسبه می کنیم. با معرفی پارامترهای بی بعد زیر، معادله حرکت بی بعد سیستم محاسبه می شود:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \bar{q} = \frac{q}{L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{L}, \quad \beta = \frac{\rho_F A_F}{(\rho_P A_P + \rho_F A_F)}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{(\lambda - \nu) E I_{z_P}^*}{(\lambda + \nu)(\lambda - 2\nu)(\rho_P A_P + \rho_F A_F) L^3}}$$

$$\bar{U}^* = \rho_F A_F U^* \frac{(\lambda + \nu)(\lambda - 2\nu) L^3}{(\lambda - \nu) E I_{z_P}^*}$$

$$I_{z_P}^* = A_P r_P^2, \quad s_P^* = \frac{A_P L^3}{I_{z_P}^*} = \frac{L^3}{r_P^2},$$

$$s_f^* = \frac{A_F L^3}{I_{z_f}^*} = \frac{L^3}{r_f^2}, \quad \bar{I}_{yz} = \frac{I_{yz}^*}{I_{z_P}^*}, \quad y_f^* = \frac{A_F L^3}{I_{y_f}^*}$$

$$\theta = \frac{\rho_P I_{z_P}^* + \rho_F I_{z_f}^*}{(\rho_P A_P + \rho_F A_F) L^3}, \quad y_f^* = \frac{A_F L^3}{I_{y_f}^*} \quad (10)$$

معادلات نهایی حرکت در سه بعد، شامل سفتی سازی، میرایی، اینرسی و غیرخطی های سازی، در پیوست ۲ آورده شده است. از این معادلات به منظور بررسی ناپایداری های خطی و غیرخطی نظیر دوشاخگی ها، سیکل حدی و آشوب بهره خواهیم برد.

۱.۴. تحلیل خطی

بخش خطی هریک از معادلات در پیوست ۲ به صورت معادله‌ی زیر است.

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = 0 \quad (11)$$

برای ارتعاشات بدون نیروی تحریک، یک حل هارمونیک برای معادله‌ی ۱۱ می‌توان در نظر گرفت:

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{i\omega t} \quad (12)$$

که در آن ۹ تابعی مجهول از دامنه ارتعاشات است و نیز در حالت کلی یک عدد مختلط است، که بخش موهومی آن بسامد طبیعی سیستم است. با جایگذاری رابطه‌ی ۱۲ در رابطه‌ی ۱۱ معادله‌ی همگن ۱۳ به دست می‌آید.

$$\left(\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K] \right) \{\bar{q}\} = 0 \quad (13)$$

با حل غیربدیهی معادله‌ی ۱۳، بسامد طبیعی سیستم به صورت عددی به دست می‌آید:

$$\det \left(\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K] \right) = 0 \quad (14)$$

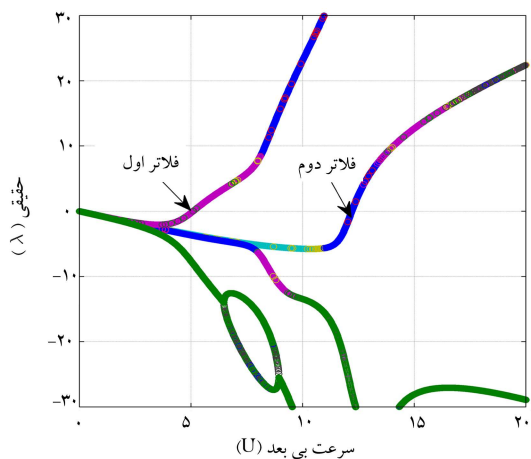
به منظور بررسی رفتار سیستم، مشخصات هندسی و فیزیکی لوله و سیال در جدول ۱ داده شده است.

به منظور درک رفتار سیستم، مقادیر ویژه‌ی سیستم به ازای پارامترهای مختلف سرعت سیال محاسبه خواهد شد. معادله‌ی حرکت در سه بعد محاسبه شده است، که با توجه به انتخاب شرایط یکسان در جابه‌جایی‌های عرضی فقط پاسخ یک بخش از جابه‌جایی‌های عرضی را ذکر خواهیم کرد. برای مشخصات جدول ۱، بخش‌های حقیقی و موهومی مقادیر ویژه‌ی سیستم، به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است.

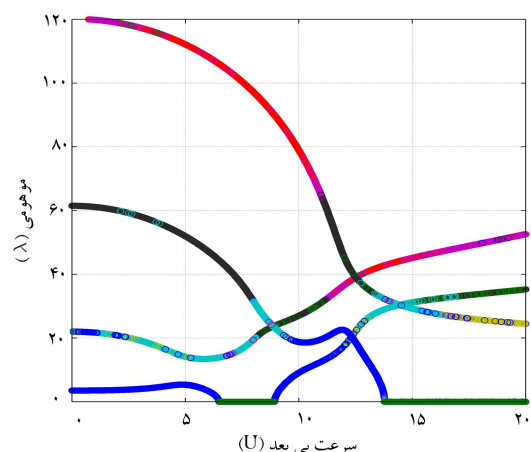
چنان که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، بخش حقیقی مقادیر ویژه تحت تأثیر سرعت عبوری سیال است. برای چهار حالت اول در نظر گرفته شده، حالت‌های دوم و چهارم سیستم به ترتیب در ازای سرعت‌های ۵/۰۹۱ و ۱۲/۲۱ به سمت مقادیر مثبت حرکت می‌کنند و دوشاخگی هاپف تک‌حالت رخ می‌دهد. در این سرعت‌ها میرایی سیستم منفی شده و فلاتر رخ می‌دهد. دو شاخه‌ی دیگر که در شکل ۲ نشان داده شده، مربوط به دو حالت دیگر سیستم است که ناپایدار نمی‌شوند، اگرچه متأثر از تغییرات سرعت سیال اند. در شکل ۳ بخش موهومی مقادیر ویژه که نشان‌گر بسامد

جدول ۱. مشخصات هندسی و خصوصیات لوله و سیال.

۱	طول لوله	۰٫۴۴۳
۲	قطر داخلی	۶٫۴ (m)
	قطر خارجی	۱۵٫۷ (m)
۳	چگالی لوله	۱۱۶۷ (kg/m ^۳)
	چگالی سیال	۹۹۹ (kg/m ^۳)
۴	جرم واحد طول لوله	۰٫۱۸۹ (kg/m)
	جرم واحد طول سیال	۰٫۰۳۲ (kg/m)
۵	صلابت خمشی	۰٫۰۰۷۴ (N.m ^۲)



شکل ۲. مقادیر حقیقی بسامد طبیعی بی بعد به ازای مقادیر مختلف سرعت U .



شکل ۳. مقادیر موهومی بسامد طبیعی بی بعد (بسامد سیستم) به ازای مقادیر مختلف سرعت U و برای $\beta = 0,145$.

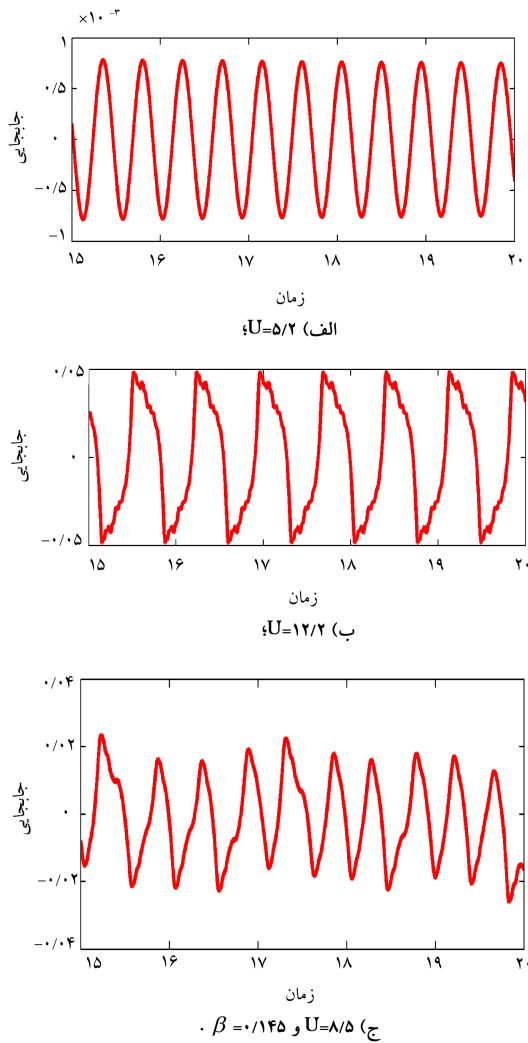
جدول ۲. سرعت بی بعد فلاتر به ازای پارامترهای مختلف β .

β	فلاتر اول	فلاتر دوم
۰٫۱۴۵	۵٫۰۸۲	۱۲٫۲
۰٫۲	۵٫۵۹۸	۱۲٫۷۱
۰٫۲۵	۶٫۲۳۱	۱۳٫۲
۰٫۳	۸٫۲۹۳	۱۳٫۷۴
۰٫۳۵	۸٫۹۱۸	۱۴٫۳۲
۰٫۴	۸٫۸۶۲	۱۴٫۹۱

سیستم است، به ازای سرعت‌های مختلف نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که بسامد طبیعی تحت تأثیر سرعت سیال بوده و برای حالت‌های مختلف کاهش و افزایش می‌یابد.

فلاترهای اول و دوم، که ناشی از دوشاخگی هاپف تک‌حالت‌اند، به ازای تغییر پارامتر β تغییر می‌کند. در جدول ۲ مقادیر سرعت فلاترهای اول و دوم به ازای چندین β ارائه شده است.

به منظور اعتبارسنجی نتایج مطالعه‌ی حاضر، سرعت فلاتر اول در مطالعات محققین [۱۲ و ۱۳] با نتایج حاصل از این بررسی در جدول ۳ مقایسه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، مطابقت خوبی بین نتایج این مطالعات وجود دارد. نکته‌ی قابل



شکل ۵. پاسخ زمانی سیستم برای سرعت‌های بی بعد.

۲.۴. تحلیل غیرخطی

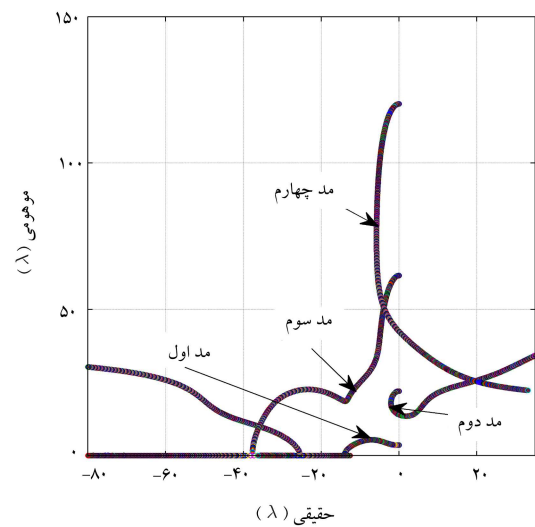
در بخش قبل تحلیل خطی انجام شد، اما مدل‌های خطی قادرند پایداری سیستم را در نزدیکی سرعت بحرانی که دوشاخگی در آن رخ می‌دهد توصیف کنند. بنابراین، به منظور بررسی کامل‌تر و جامع‌تر سیستم، بررسی رفتار در حوزه‌ی غیرخطی ضروری است.

در بررسی غیرخطی تمامی ماتریس‌های غیرخطی مد نظر قرار می‌گیرد و پاسخ زمانی و نمودار صفحه فاز رسم می‌شود و پاسخ‌ها در نزدیکی فلاترهای اول و دوم و بین آنها بررسی خواهد شد. این بررسی‌ها در مجاورت ناپایداری‌های (دوشاخگی‌های) تعیین شده در بخش خطی انجام خواهد شد تا اثر پارامترهای غیرخطی سازه‌یی بررسی شود. در این بخش تمامی بخش‌های غیرخطی را لحاظ کرده و پاسخ زمانی و نمودار صفحه فاز را آورده و پاسخ‌ها را در نزدیکی فلاترهای اول و دوم و بین آنها بررسی خواهیم کرد.

در شکل ۵ پاسخ زمانی سیستم برای سرعت‌های نزدیک فلاترهای اول و دوم و بین آنها نشان داده شده است. در شکل ۵ الف و ۵ ب مشاهده می‌شود که سیستم در نزدیکی فلاتر رفتارهای سیکلی انجام می‌دهد. از طرفی دامنه‌ی جابه‌جایی سیستم در سرعت‌های بالاتر افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که در اثر ناپایداری

جدول ۳. مقایسه‌ی سرعت بی بعد فلاتر به ازای پارامترهای مختلف β کار حاضر با مطالعات قبلی [۱۳ و ۱۲]

β	سرعت فلاتر اول (ناپایداری اول)	
	مرجع [۱۲]	مرجع [۱۳] کار حاضر
۰٫۱۴۵	۵٫۱	۵٫۰۸۲
۰٫۲	۵٫۶	۵٫۵۹۸
۰٫۳	۷٫۵	۸٫۲۹۳
۰٫۴	۸٫۸	۸٫۸۶۲
۰٫۵	۹٫۴	۹٫۴۴۵
۰٫۶	۱۰٫۰	۱۰٫۰۲



شکل ۴. اثر سرعت سیال عبوری بر چهار حالت اول با تکیه‌گاه گیردار - آزاد و $\beta=0.145$.

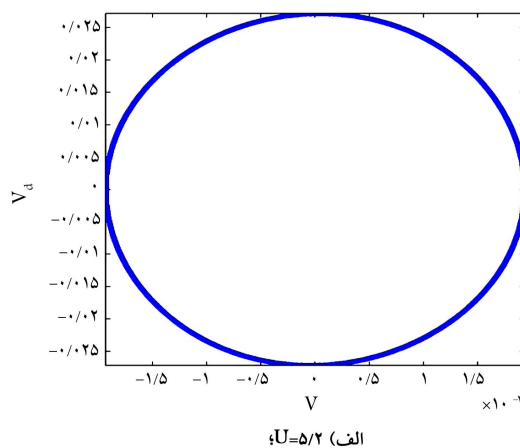
ملاحظه در نتایج نظری به کار رفته در نوشتار حاضر این است که سرعت فلاتر اول در β های بالاتر، اندکی از مقادیر محاسبه شده در دو مرجع دیگر بالاتر است و آن ناشی از اعمال حرکت درون صفحه‌یی در رفتار سیستم است. به بیان دیگر بخشی از انرژی که در سیستم در حال افزایش است صرف جابه‌جایی درون صفحه‌یی می‌شود. ناپایداری‌های فلاتر اول و دوم، ناشی از دوشاخگی هاپف تک حالتی، به‌ازای تغییر پارامتر β تغییر می‌کند. در جدول ۲ مقادیر سرعت فلاترهای اول و دوم به‌ازای مقادیر مختلف β ذکر شده است.

در شکل ۴ نمودار آرگاند^۵ برای سرعت‌های متفاوت سیال رسم شده است. در این نمودار بخش موهومی مقادیر ویژه سیستم نسبت به بخش حقیقی آن رسم شده است. شاخه‌های دوم و چهارم که به ترتیب به حالت‌های دوم و چهارم اشاره دارد، شاخه‌های ناپایدار این سیستم‌اند که مقادیر حقیقی‌شان، با افزایش سرعت به سمت مقادیر مثبت حرکت می‌کنند.

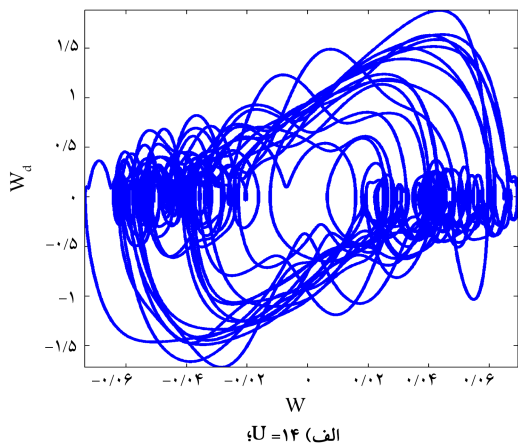
به منظور اعتبارسنجی نتایج کار حاضر، سرعت فلاتر اول در مطالعات پیشین [۱۳ و ۱۲] مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج مطالعه‌ی حاضر مقایسه شده است (جدول ۳)، که شاهد تطابق خوب نتایج مطالعات هستیم.

جدول ۴. بررسی کیفیت رفتار سیستم در سرعت‌های مختلف سیال.

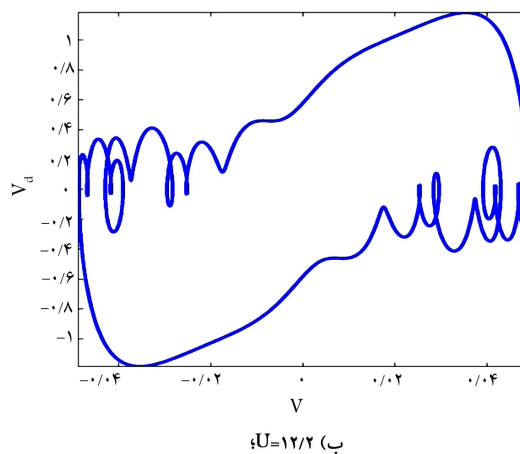
سرعت سیال \bar{U}	کیفیت و نوع رفتار سیستم
$\bar{U} \leq 5,082$	قبل از فلاتر اول سیستم پایدار و کاهش دامنه لوله به واسطه‌ی فلاتر صفحه‌ی پایداری خود را از دست می‌دهد
$\bar{U} = 5,1$	حرکت سه‌بعدی با افزایش پررود
$\bar{U} = 5,2$	حرکت صفحه‌ی با سیکل حدى و کاهش پررود
$\bar{U} = 11$	لوله به واسطه‌ی فلاتر صفحه‌ی پایداری خود را از دست می‌دهد
$\bar{U} = 12,2$	حرکت سه‌بعدی با افزایش پررود
$\bar{U} = 13,2$	حرکت آشوبناک سه‌بعدی



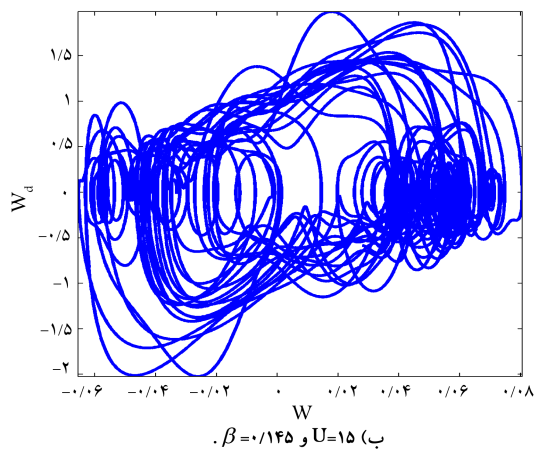
الف) $\bar{U}=5,2$



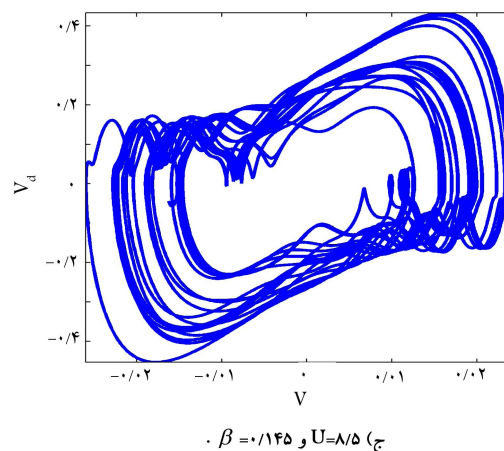
الف) $\bar{U}=14$



ب) $\bar{U}=12,2$



ب) $\bar{U}=15$ و $\beta=0,1145$



ج) $\bar{U}=8,5$ و $\beta=0,1145$

شکل ۷. نمودار صفحه فاز سیستم برای سرعت‌های بی بعد.

شکل ۶. نمودار صفحه فاز سیستم برای سرعت‌های بی بعد.

از خود نشان می‌دهد. پدیده‌ی غالب در رفتار لوله‌ی حامل سیال در نزدیکی سرعت، پدیده‌ی «فلاتر» است. با توجه به ایجاد فلاتر که میرایی منفی است، شاهد افزایش انرژی سیستم هستیم که موجب قفل شدن رفتار ارتعاشی و کاهش پایداری سیستم خواهد شد. رفتارهای مختلف سیستم در ازای شرایط متفاوت سیال عبوری در جدول ۴ ذکر شده است.

در سرعت‌های پایین، عوامل ناپایدارکننده (سرعت سیال و آزاد بودن انتهای دیگر لوله) از یک طرف و عوامل پایدارکننده (غیرخطی‌های سازی) از طرف دیگر در تعامل اند و شاهد رفتار قابل پیش‌بینی هستیم. اما با افزایش سرعت سیال نظم رفتاری سیستم کاهش می‌یابد و علاوه بر افزایش دامنه‌ی جابه‌جایی شاهد حرکت‌های

فلاتر ارتعاش سیستم در یک صفحه قفل می‌شود؛ این نوع حرکت که میرایی منفی است نباید برای مدت زیاد ادامه داشته باشد، زیرا موجب تخریب سیستم خواهد شد.

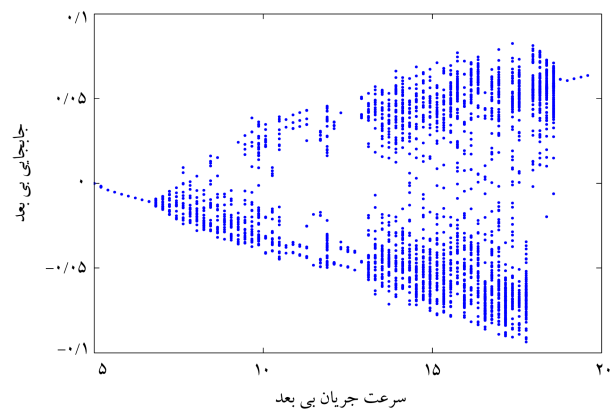
در شکل ۶ نمودار صفحه‌فاز برای سرعت‌های نزدیک فلاتر و بین آنها قابل رویت است. چنان‌که مشاهده می‌شود، نظم رفتاری در سرعت‌های مختلف متفاوت است و رفتارهایی نظیر سیکل حدى و آشوب مشاهده می‌شود. در سرعت بی بعد ۸٫۵ رفتار سیستم آشوبناک است و رفتار غیرقابل پیش‌بینی بروز می‌دهد. به‌طور کلی سیستم در سرعت‌های کم‌تر، بیشتر و نزدیک فلاتر رفتارهای خاصی

غیرقابل پیش‌بینی است، در صورتی که بین فلاتر اول و دوم رفتار در پروده‌های پایین نوسان می‌کند.

در شکل ۸ نمودار دوشاخگی سیستم برای سرعت‌های بی‌بعد سیال رسم شده است. چنان که مشاهده می‌شود در سرعت‌های کم‌تر از $6/8$ سیستم دارای یک مقدار در مقطع پوانکاره است و رفتار سیستم در پرود ۱ است. در سرعت‌های بالاتر از 13 نیز رفتار سیستم در پروده‌های بسیار بالایی است و شاهد بی‌نظمی در سیستم هستیم.

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار روشی ساده و مناسب برای مدل‌سازی لوله‌ی حامل سیال در حالت سه‌بعدی ارائه شد. برای مدل‌سازی از میدان جابه‌جایی سه‌بعدی و روابط کرنش جابه‌جایی غیرخطی استفاده شده که قادر است بسیاری از پدیده‌های دینامیکی و ارتعاشی غیرخطی را تشریح کند. نتایج حاصله نشان می‌دهد که در لوله‌ی یک‌سر گیردار حامل سیال، پایداری سیستم بر اثر افزایش سرعت سیال عبوری، کاهش می‌یابد و نیز در سرعت‌های مشخص پدیده‌ی فلاتر ایجاد می‌شود. همچنین تغییرات سرعت سیال موجب تغییرات (افزایش و کاهش) بسامد سیستم می‌شود. نتایج این نظریه تطابق زیادی با نتایج دیگر تحقیقات دارد. در این مقاله از تحلیل سه‌بعدی استفاده شده است، که در مقایسه با کارهای انجام شده در یک و دو بعد دقت قابل قبولی دارد و شرایط بررسی را برای سه بعد امکان‌پذیر می‌کند. اعمال جابه‌جایی درون‌صفحه‌یی موجب افزایش دقت پاسخ‌ها، و محاسبه‌ی دقیق‌تر سرعت‌های فلاتر می‌شود. نتایج حاصله نشان‌گر آن است که در سرعت‌های کم‌تر از فلاتر دوم رفتار سیستم به صورت سیکل حدی با پروده‌های مختلف است، اما در سرعت‌های بیشتر از فلاتر دوم رفتار سیستم بی‌نظم و کاملاً غیرقابل پیش‌بینی است. همچنین نظریه‌ی مطرح شده که به‌طور خاص برای لوله‌ی یک‌سرگیردار حامل سیال مطرح شده، با استفاده از حالت‌های مفروض، قابلیت تعمیم به دیگر شرایط مرزی نظیر دوسر ساده، دوسر گیردار و یک‌سرگیردار - یک‌سر ساده را دارد.



شکل ۸. نمودار دوشاخگی سیستم برای سرعت‌های مختلف بی‌بعد جریان سیال.

غیر قابل پیش‌بینی هستیم و اصطلاحاً سیستم وارد منطقه‌ی آشوب‌ناک می‌شود. در شکل ۷ نمودار صفحه‌فاز برای سرعت‌های بی‌بعد 14 و 15 نشان داده شده است؛ چنان که مشاهده می‌شود برای سرعت 14 و بالاتر، رفتار سیستم به صورت آشوب است. البته جابه‌جایی عرضی با افزایش سرعت افزایش می‌یابد و سیستم انعطاف‌پذیری بیشتری دارد. تمامی این سرعت‌ها بالاتر از سرعت بحرانی و دوشاخگی هاپف است، در حالی که در سرعت‌های کم‌تر، سیستم قبل از دوشاخگی هاپف پایدار بوده و با تغییر سرعت از حالت پایدار اولیه به حالت نوسان دائمی می‌رسد، که به آن سیکل حدی گفته می‌شود.

به طور کلی سیستم در سرعت‌های نزدیک فلاتر رفتارهای خاصی از خود نشان می‌دهد. پدیده غالب در رفتار لوله حامل سیال در نزدیکی سرعت فلاتر است، با توجه به ایجاد فلاتر شاهد افزوده شدن انرژی به سیستم هستیم که موجب قفل شدن رفتار ارتعاشی و کاهش پایداری سیستم خواهد شد. رفتارهای مختلف سیستم در ازای شرایط متفاوت سیال عبوری در جدول ۴ آمده است. چنان که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، برای سرعت‌های بالاتر از فلاتر دوم، رفتار سیستم بی‌نظم تر و

پانویس‌ها

1. Flutter
2. Hopf bifurcation
3. double bending
4. Rayleigh - Ritz
5. Argand diagram

منابع (References)

1. Ibrahim, R.A. "Overview of mechanics of pipes conveying fluids, part I: Fundamental studies", *J. Pressure Vessel Technol*, **132**(3), pp. 1-32 (18 May 2010).

2. Paidoussis, M.P., *Fluid-Structure Interactions, Slender Structures and Axial Flow*, Academic Press, **1** (1998).
3. Benjamin, T.B. "Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid, I. Theory", *Proceedings of the Royal Society A*, **261**, pp. 457-486 (1961).
4. Gregory, R.W. and Paidoussis, M.P. "Unstable oscillations of tubular cantilevers conveying fluid-I. theory", *Proceedings of the Royal Society A*, **293**, pp. 512-527 (1966).
5. Gregory, R.W. and Paidoussis, M.P. "Unstable oscillations of tubular cantilevers conveying fluid—II. experiments", *Proceedings of the Royal Society A*, **293** pp. 528-542 (1966).
6. Herrmann, G. and Nemat-Nasser, S. "Instability modes of cantilevered bars induced by fluid flow through at-

- tached pipes”, *International Journal of Solids and Structures*, **3**, pp. 39-52 (1967).
7. Païdoussis, M.P. “Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, **12**, pp. 85-103 (1970).
 8. Wadham-Gagnon, M., Païdoussis, M.P. and Semler, C. “Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. part 1: Nonlinear equations of three dimensional motion”, *Journal of Fluids and Structures*, **23**, pp. 545-567 (2007).
 9. Païdoussis, M.P., Semler, C., Wadham-Gagnon, M. and Saaid, S. “Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 2: Dynamics of the system with intermediate spring support”, *Journal of Fluids and Structures*, **23**, pp. 569-587 (2007).
 10. Modarres-Sadeghi, Y., Semler, C., Wadham-Gagnon, M. and Païdoussis, M.P. “Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 3: Three-dimensional dynamics in the presence of an end-mass”, *Journal of Fluids and Structures*, **23**, pp. 589-603 (2007).
 11. Bajaj, A.K. and Sethna, P.R. “Flow induced bifurcations to three-dimensional oscillatory motions in continuous tubes”, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **44**, pp. 270-286 (1984).
 12. Modarres-Sadeghi, Y., Païdoussis, M.P. and Semler, C. “Three-dimensional oscillations of a cantilever pipe conveying fluid”, *International Journal of NonLinear Mechanics*, **43**, pp. 18-25 (2008).
 13. Ghayesh, M. and Païdoussis, M. “Three-dimensional dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid, additionally supported by an intermediate spring array”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **45**, pp. 507-524 (2010).
 14. Ghayesh, M.H., Païdoussis, M.P. and Modarres-Sadeghi, Y. “Three-dimensional dynamics of a fluid-conveying cantilevered pipe fitted with an additional spring-support and an end-mass”, *Journal of Sound and Vibration*, **330**, pp. 2869-2899 (2011).
 15. Modarres-Sadeghi, Y. and Païdoussis, M.P. “Chaotic oscillations of long pipes conveying fluid in the presence of a large end-mass”, *Computers and Structures*, **122**, pp. 192-201 (2013).
 16. Wadham-Gagnon, M., Païdoussis, M.P. and Semler, C. “Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 1: Nonlinear equations of three-dimensional motion”, *Journal of Fluids and Structures*, **23** pp. 545-567 (2007).
 17. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, Second Edition, 2nd Ed., Boca Raton; CRC Press (2003).
 18. Hagedorn, P., *Vibrations and Waves in Continuous Mechanical Systems*, ISBN: 978-0470-051738-3, JohnWiley (2007).

پیوست

۱. انرژی کرنشی لوله و انرژی جنبشی سیال

انرژی کرنشی لوله:

$$+ \frac{1}{\nu} \int_0^L \rho_F U^T \begin{bmatrix} A_F \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^T + A_F \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^T \\ + A_F \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)^T + I_{z_f} \left(\frac{\partial^T w_x}{\partial x^T} \right)^T \\ + I_{y_f} \left(\frac{\partial^T v_x}{\partial x^T} \right)^T \end{bmatrix} dx$$

$$+ \frac{1}{\nu} \int_0^L \rho_F \Upsilon U \begin{bmatrix} A_F \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_F \frac{\partial v_x}{\partial t} \frac{\partial v_x}{\partial x} + A_F \frac{\partial w_x}{\partial t} \frac{\partial w_x}{\partial x} \\ + I_{z_f} \frac{\partial^T w_x}{\partial t \partial x} \frac{\partial^T w_x}{\partial x^T} + I_{y_f} \frac{\partial^T v_x}{\partial t \partial x} \frac{\partial^T v_x}{\partial x^T} \end{bmatrix} dx$$

۲. معادلات نهایی حرکت در سه بعد z, y, x معادله‌ی حرکت درون صفحه‌ی:

$$\sum_{j=1}^N \ddot{a}_j \int_0^1 u_i u_j d\xi$$

$$+ \bar{U} \sqrt{\beta} \sum_{j=1}^N \ddot{a}_j \int_0^1 [u_i u_j - u_i' u_j' + u_i (\xi - 1) u_j] d\xi$$

$$+ \sum_{j=1}^N \ddot{a}_j \left[s_p \int_0^1 u_i' u_j' d\xi - \bar{U} \int_0^1 u_i' u_j' d\xi + \bar{U} \int_0^1 u_i (\xi - 1) u_j' d\xi \right]$$

$$+ \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \ddot{a}_j \bar{q}_r \bar{q}_s \frac{s_p}{\nu} \left[\int_0^1 u_i' u_j' w_r' w_s' d\xi \right]$$

$$+ \frac{1-\nu}{\nu} (\nu - 1) \int_0^1 u_i' u_j' w_r' w_s' d\xi$$

$$U = \frac{1}{\nu} \Upsilon \int_0^L \left\{ \begin{array}{l} (\nu - 1) \xi \begin{bmatrix} u_x' + \frac{1}{\nu} v_x' + \frac{1}{\nu} w_x' + u_x' v_x'^T \\ + u_x' w_x'^T + \frac{1}{\nu} v_x' v_x'^T \end{bmatrix} \\ + \nu \xi \begin{bmatrix} u_x' v_x'^T + u_x' w_x'^T + \frac{1}{\nu} v_x' v_x'^T + \frac{1}{\nu} w_x' w_x'^T \\ + u_x' v_x'^T + \frac{1}{\nu} v_x' v_x'^T \end{bmatrix} \\ + \frac{(\nu-1)EI_{z_p}}{(\nu+\nu)} w_x'' + \frac{(\nu-1)EI_{y_p}}{(\nu+\nu)} v_x'' \\ + \frac{EA_p}{\nu(\nu+1)} \left[\frac{1}{\nu} u_x' v_x'^T + \frac{1}{\nu} u_x' w_x'^T + \frac{1}{\nu} v_x' v_x'^T \right] \\ + \frac{1}{\nu} \frac{E}{\nu(\nu+1)} I_{z_p} \left[v_x' w_x'' + w_x' v_x'' \right] \\ + \frac{1}{\nu} \frac{E}{\nu(\nu+1)} I_{y_p} \left[v_x' v_x'' + w_x' v_x'' \right] \end{array} \right\} dx$$

انرژی جنبشی سیال:

$$TFlow = \frac{1}{\nu} \int_0^L \rho_F A_F \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^T + \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right)^T + \left(\frac{\partial w_x}{\partial t} \right)^T \right] dx$$

$$+ \frac{1}{\nu} \int_0^L \rho_F \left[I_{z_f} \left(\frac{\partial^T w_x}{\partial t \partial x} \right)^T + I_{y_f} \left(\frac{\partial^T v_x}{\partial t \partial x} \right)^T \right] dx$$

$$+ \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{p}_j \bar{p}_r \bar{p}_s \begin{bmatrix} s_p^\nu \int v_i' v_j' v_r' v_s' d\xi \\ + \frac{\nu}{(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int v_i' v_j' v_r' v_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int v_i' v_j' v_r'' v_s'' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int v_i'' v_j'' v_r' v_s' d\xi \end{bmatrix} = 0$$

معادله‌ی حرکت در خمش دوم:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \bar{q}_j \int w_i w_j d\xi + \theta \sum_{j=1}^N \bar{q}_j \int w_i' w_j' d\xi \\ & + \bar{U} \sqrt{\beta} \sum_{j=1}^N \bar{q}_j \int [w_i w_j' - w_i' w_j + w_i (\xi - \lambda) w_j] d\xi \\ & + \bar{U} \frac{\sqrt{\beta}}{y_f} \sum_{j=1}^N \bar{q}_j \left[\int w_i' w_j'' d\xi - \int w_i'' w_j' d\xi \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \bar{q}_j \left[\int w_i'' w_j'' d\xi - \bar{U} \int w_i' w_j' d\xi \right. \\ & \quad \left. - \frac{\bar{U}^\nu}{y_f} \int w_i'' w_j'' d\xi + \bar{U}^\nu \int w_i (\xi - \lambda) w_j' d\xi \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \bar{q}_j \bar{a}_r \left[\frac{\nu}{(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int w_i' w_j' u_r' d\xi \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{q}_j \bar{a}_r \bar{a}_s \begin{bmatrix} \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int w_i' w_j' u_r' u_s' d\xi \\ + s_p^\nu \int w_i' w_r' u_r' u_s' d\xi \end{bmatrix} \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{q}_j \bar{p}_r \bar{p}_s \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu} s_p^\nu \int w_i' w_j' v_r' v_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int w_i'' w_j'' v_r' v_s' d\xi \\ + \frac{\nu}{\nu} \frac{\nu}{(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int w_i' w_j' v_r' v_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int w_i' w_j' v_r' v_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int w_i'' w_j'' v_r'' v_s'' d\xi \end{bmatrix} \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{q}_j \bar{q}_r \bar{q}_s \begin{bmatrix} s_p^\nu \int w_i' w_j' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\nu}{(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int w_i' w_j' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int w_i' w_j' w_r'' w_s'' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int w_i'' w_j'' w_r' w_s' d\xi \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \bar{q}_j \bar{q}_r \frac{\nu}{\nu(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int u_i' w_j' w_r' d\xi \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{a}_j \bar{p}_r \bar{p}_s \frac{s_p^\nu}{\nu} \left[\int u_i' u_j' v_r' v_s' d\xi \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda-\nu}{\nu(\lambda-\nu)} \int u_i' u_j' v_r' v_s' d\xi \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \bar{p}_r \bar{p}_s \frac{\nu}{\nu(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int u_i' v_j' v_r' d\xi = 0 \end{aligned}$$

معادله‌ی حرکت در خمش اول:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \bar{p}_j \int v_i v_j d\xi + \theta \sum_{j=1}^N \bar{p}_j \int v_i' v_j' d\xi \\ & + \bar{U} \sqrt{\beta} \sum_{j=1}^N \bar{p}_j \int [v_i v_j' - v_i' v_j + v_i (\xi - \lambda) v_j] d\xi \\ & + \bar{U} \frac{\sqrt{\beta}}{y_f} \sum_{j=1}^N \bar{p}_j \left[\int v_i' v_j'' d\xi - \int v_i'' v_j' d\xi \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \bar{p}_j \left[\int v_i'' v_j'' d\xi - \bar{U} \int v_i' v_j' d\xi \right. \\ & \quad \left. - \frac{\bar{U}^\nu}{y_f} \int v_i'' v_j'' d\xi + \bar{U}^\nu \int v_i (\xi - \lambda) v_j' d\xi \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \bar{p}_j \bar{a}_r \left[\frac{\nu}{(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int v_i' v_j' u_r' d\xi \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{p}_j \bar{a}_r \bar{a}_s \left[\frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int v_i' v_j' u_r' u_s' d\xi \right. \\ & \quad \left. + s_p^\nu \int v_i' v_r' u_r' u_s' d\xi \right] \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{p}_j \bar{p}_r \bar{p}_s \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu} s_p^\nu \int v_i' v_j' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int v_i'' v_j'' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\nu}{\nu} \frac{\nu}{(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int v_i' v_j' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int v_i' v_j' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int v_i'' v_j'' w_r'' w_s'' d\xi \end{bmatrix} \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \bar{p}_j \bar{q}_r \bar{q}_s \begin{bmatrix} \frac{1}{\nu} s_p^\nu \int v_i' v_j' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int v_i'' v_j'' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\nu}{\nu} \frac{\nu}{(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int v_i' v_j' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} s_p^\nu \int v_i' v_j' w_r' w_s' d\xi \\ + \frac{\lambda-\nu}{\lambda(\lambda-\nu)} \int v_i'' v_j'' w_r'' w_s'' d\xi \end{bmatrix} \end{aligned}$$