

# تحلیل کمانش سازه‌های استوانه‌یی کرکره‌یی برای دست‌یابی به بالاترین «نسبت استحکام به وزن»

هاشم اعظمی (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

محمد فدایی\* (استادیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۵)  
دوره‌ی ۲ - ۳، شماره‌ی ۲، ص. ۸۳-۷۳

یکی از مشخصه‌های سازه‌های کرکره‌یی -- که در مقایسه با سازه‌های مشابه «نسبت استحکام به وزن بالایی» دارند -- استحکام کمانشی آنهاست و از این جهت در صنایع مختلف مورد توجه قرار گرفته‌اند. در مطالعه‌ی حاضر، کمانش سازه‌های کرکره‌یی استوانه‌یی با الگوی هندسی دوزنقه تحت بار محوری با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده - ساده مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تعادل سازه با استفاده از نظریه‌ی مرتبه اول برشی استخراج شده است. خواص مکانیکی استوانه‌ی کرکره‌یی به کمک استوانه‌ی مدور اورتوتروپیک معادل آن به دست آمده است. به منظور صحه‌گذاری نتایج تحلیلی، از یک مدل اجزاء محدود استفاده شده و نیز تأثیر پارامترهای مختلف شامل تعداد کرکره، ضخامت استوانه، طول استوانه، شعاع استوانه، زاویه‌ی کرکره و ضریب شکل بر رفتار کمانشی استوانه کرکره‌یی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاضر، دقت و کارایی طراحی اینگونه سازه‌ها را برای مهندسان بالاتر خواهد برد.

واژگان کلیدی: استوانه‌ی کرکره‌یی، استحکام کمانشی، مدل اجزاء محدود، کرکره‌ی دوزنقه‌یی.

## ۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های مهندسان و طراحان در صنایع عمران، مکانیک و به‌ویژه هوافضا دست‌یابی به سازه‌هایی با نسبت استحکام به وزن بالاست. همین امر از گذشته‌های دور مهندسان را به نوآوری در این زمینه ترغیب کرده است. روش‌های متفاوت موجود برای افزایش نسبت استحکام به وزن سازه معمولاً به دو دسته تقسیم می‌شود: ۱. روش‌هایی که در آن، تغییر جنس سازه به افزایش استحکام سازه منجر می‌شود، مانند آنچه که در سازه‌های کامپوزیتی مشاهده می‌شود؛ ۲. روش‌هایی که در آن تغییر هندسه‌ی سازه به افزایش «نسبت استحکام به وزن» سازه می‌انجامد، نظیر آنچه که در سازه‌های کرکره‌یی مشاهده می‌شود. سازه‌های کرکره‌یی سازه‌های جدیدی هستند که در صنعت برای افزایش استحکام کمانشی، برشی، خمشی و... کاربرد دارند. این نوع سازه‌ها در انواع مختلف -- مانند صفحه‌های کرکره‌یی<sup>[۱]</sup>، سیلندرهای کرکره‌یی، ستون‌های کرکره‌یی، تیرها با وب‌های کرکره‌یی و... -- و با کرکره‌هایی با اشکال هندسی مختلف، مانند دوزنقه‌یی، سینوسی و... وجود دارند.

مودهای کمانشی سازه‌های کرکره‌یی عموماً به دو دسته تقسیم می‌شوند: کمانش کلی و کمانش محلی. نوع کمانش رخ داده به میزان افت باری که بعد و قبل از کمانش رخ می‌دهد بستگی دارد، به طوری که اگر بعد از کمانش، قسمت عمده‌ی از باربری سازه از دست برود، کمانش عمومی رخ داده است و اگر بعد از کمانش درصد کمی

\* نویسنده مسئول

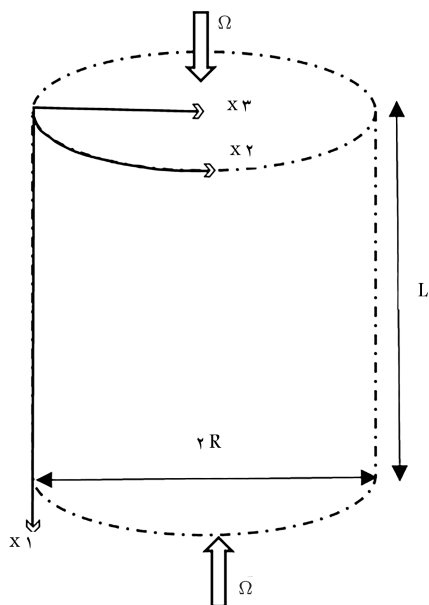
تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۱/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۴/۸/۳۰، پذیرش ۱۳۹۴/۹/۹.

hazami@mecheng.iust.ac.ir

fadai@qut.ac.ir

از باربری سازه از دست برود و همچنان سازه تحمل بار کند، کمانش محلی است. برای اولین بار در سال ۱۹۹۹، ورق کرکره‌یی دوزنقه‌یی مورد تحلیل هندسی غیرخطی قرار گرفت، و طی آن تحلیل سه‌بعدی مدل اورتوتروپیک معادل سازه‌ی کرکره‌یی -- شامل سفتی‌های خمشی و کششی -- انجام شد.<sup>[۱]</sup> در سال ۲۰۰۶ مقاومت خستگی و استاتیکی تیرهای فولادی با وب کرکره‌یی سینوسی، براساس آزمون و تحلیل نظری بررسی شد.<sup>[۲]</sup> در ادامه، محققین به بررسی رفتار تیر صفحه‌یی با وب کرکره‌یی دوزنقه‌یی تحت بارگذاری خستگی پرداختند.<sup>[۳]</sup> در سال ۲۰۰۷ صفحه‌های کرکره‌یی تقویت شده و تقویت نشده، با استفاده از روش مش آزاد گالرکین و براساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)<sup>[۴]</sup> مورد تحلیل هندسی غیرخطی قرار گرفت.<sup>[۴]</sup> سپس در سال ۲۰۰۹ در خصوص استحکام برشی و طراحی وب‌های فولادی کرکره‌یی با کرکره‌ی دوزنقه‌یی، مطالعاتی انجام شد.<sup>[۵]</sup> در همین سال، کمانش برشی عرضی اشکل با وب کرکره‌یی تحت خمش یکنواخت مورد بررسی قرار گرفت، و سپس نتایج نظری و نیز آنالیز اجزاء محدود کمانش برشی عرضی تیر اشکل با وب کرکره‌یی تحت خمش یکنواخت ارائه شد.<sup>[۶]</sup>

محققین با بررسی رفتار کمانش برشی متقابل وب‌های فولادی کرکره‌یی دوزنقه‌یی، در خصوص مطالعه‌ی اثرات پارامترهای هندسی استحکام و مودهای کمانش برشی متقابل مجموعه‌ی از آنالیزهای اجزاء محدود را ارائه دادند و نهایتاً براساس نتایج حاصل از این آنالیزها، رابطه‌یی برای استحکام کمانش برشی متقابل پیشنهاد شد.<sup>[۷]</sup>



شکل ۱. مشخصات استوانه‌ای مورد مطالعه.

معادله‌ی ۲ ارائه می‌شود که در آن  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6, \sigma_4, \sigma_5$  به ترتیب تنش نرمال در راستای طولی، تنش نرمال در جهت محیطی، تنش برشی در صفحه  $x_1x_2$ ، تنش برشی در صفحه  $x_2x_3$  و تنش برشی در صفحه  $x_1x_3$  است و  $\varepsilon$  ها نیز کرنش‌های معادل تنش‌ها هستند.  $k_{\sigma\sigma}$  و  $k_{\sigma\tau}$  ضریب تصحیح برشی هستند. [۱۲]

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\tau\tau}^y c_{\tau\tau} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\sigma\sigma}^y c_{\sigma\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{\varepsilon_6} \\ \gamma_{\varepsilon_4} \\ \gamma_{\varepsilon_5} \end{pmatrix} \quad (2)$$

کرنش‌های مورد نظر به وسیله‌ی رابطه‌ی ۳ برحسب جابه‌جایی‌های نظریه‌ی مرتبه اول محاسبه می‌شود که در آن  $\varepsilon^1, \varepsilon^2$  ها به ترتیب کرنش‌ها و انحنای صفحه‌ی میانی پوسته‌اند. سپس با استفاده از اصل همیلتون (رابطه‌ی ۴)، معادلات تعادل استوانه حاصل می‌شود.  $U, T, V$  به ترتیب معرف انرژی جنبشی، انرژی درونی و انرژی پتانسیل استوانه‌اند؛ از انرژی جنبشی جسم به‌عنوان استاتیکی بودن سازه صرف‌نظر می‌شود ولی انرژی درونی و انرژی پتانسیل مطابق رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود. [۱۲]

با جایگذاری روابط ۱، ۳ و ۵ در رابطه‌ی ۴ و ساده‌سازی آن با استفاده از رابطه‌ی ۶، معادلات تعادل برای کماتش استوانه‌ی مدور (رابطه‌ی ۷) نتیجه می‌شود. در رابطه‌ی ۷، اختصارات  $N$  و  $M$  معرف نیروها و ممان‌های داخل صفحه‌ی استوانه‌اند که با کرنش‌ها و انحنای صفحه‌ی میانی پوسته طبق رابطه‌ی ۸ در ارتباط‌اند. [۱۲]

برای حل معادلات رابطه‌ی ۷، مقادیر  $M$  و  $N$ ‌ها مستقیماً برحسب رابطه‌ی ۸ معادل‌گذاری می‌شود و مقادیر  $Q$  با استفاده از دو رابطه‌ی ۶ و ۲ حاصل می‌شود. [۱۲]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{r} (u_{i,j} + u_{j,i}) & \varepsilon_\phi^0 &= \frac{1}{r} (u_{,\tau} + v_{,\tau}) \\ \varepsilon_i &= \varepsilon_i^0 + x_\tau \varepsilon_i^1 & \varepsilon_\phi^1 &= \frac{1}{r} (\psi_{1,\tau} + \psi_{\tau,1}) \\ \varepsilon_1^0 &= u_{,\tau} & \varepsilon_\tau^0 &= \frac{1}{r} (\psi_\tau + w_{,\tau} - \frac{v}{R}) \end{aligned}$$

مطالعاتی دیگر، استحکام کماتش برشی و طراحی وب‌های فولادی کرکریه‌ی خم‌شده برای پل‌ها با در نظر گرفتن غیرکشسان بودن ماده بررسی شد. [۸] سپس نتایج نظری و آنالیز اجزاء محدود کماتش پیچشی جانبی برای تیر I شکل با وب‌های کرکریه‌ی و با مهار عرضی که تحت خمش بکنواخت قرار دارد توسط محققین ارائه شد. [۹]

در سال ۲۰۱۲، آنالیز غیرخطی تیر قوسی شکل ۴ با وب‌های فولادی کرکریه‌ی تحت پیچش خالص انجام شد. [۱۰] در همین سال، پانل‌های کرکریه‌ی با پانل‌های ساده‌ی که به هندسه‌ی پانل و خواص سفتی پانل غیر کرکریه‌ی وابسته بود معادل‌سازی شد، به‌طوری که حل تحلیلی آن‌ها برای هر شکل کرکریه‌ی قابل استفاده است. [۱۱]

چنان که از تاریخچه‌ی کارهای انجام‌شده برمی‌آید، در زمینه‌ی تحلیل کماتش پوسته‌های استوانه‌ی کرکریه‌ی فعالیتهای اندکی صورت گرفته، تا جایی که می‌توان به‌صراحت گفت هیچ تحقیقی درخصوص کماتش این‌گونه سازه‌ها با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول انجام نگرفته است. از این رو، در نوشتار حاضر کماتش سازه‌های کرکریه‌ی استوانه‌ی با الگوی هندسی دوزنقه‌ی تحت بار محوری، با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول پوسته‌ها بررسی شده است. برای اعتبارسنجی نتایج تحلیلی، از یک مدل اجزاء محدود استفاده شده است. تأثیر پارامترهای مختلف نظیر تعداد کرکره، ضخامت استوانه، طول استوانه، شعاع استوانه، زاویه‌ی کرکره و ضریب شکل بر رفتار کماتشی استوانه‌ی کرکریه‌ی بررسی شده است. نتایج حاصله حاکی از دقت و کارایی بالای شیوه‌ی حل تحلیلی حاضر دارد.

## ۲. حل تحلیلی

برای به دست آوردن بار کماتش، ابتدا با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول دائل و اصل همیلتون، معادلات حاکم بر کماتش استوانه استخراج می‌شود. سپس با استفاده از روش ارائه‌شده توسط سامانتا و سیمانیویک، سفتی‌های کششی، خمشی و برشی کرکریه‌ی دوزنقه‌ی محاسبه می‌شود؛ و در نهایت با اعمال شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، بار کماتش مود اول کماتش محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که حل تحلیلی و حل اجزاء محدود برای هر دو استوانه‌ی کرکریه‌ی و مدور صورت گرفته است.

### ۲.۱. استخراج معادلات تعادل

ابتدا استوانه‌ی با متغیرهای شعاع ( $R$ )، ضخامت ( $h$ ) و طول ( $L$ ) در نظر گرفته شده است (شکل ۱).  $x_1, x_2, x_3$  به ترتیب نشان‌گر محورهای طولی، محیطی و شعاعی هستند و  $\Omega$  نیز نماینده‌ی بار کماتش<sup>۵</sup> اعمالی بر استوانه (برحسب نیوتن بر متر) است.

حال بر اساس نظریه‌ی برشی مرتبه اول، جابه‌جایی‌های استوانه به‌صورت معادله‌ی ۱ در نظر گرفته می‌شود.  $u_1, u_2, u_3$  به ترتیب جابه‌جایی‌های استوانه در راستای طولی، محیطی و شعاعی را نشان می‌دهد، و  $u$  و  $v$  و  $w$  به ترتیب جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی استوانه در راستای طولی، محیطی و شعاعی هستند که فقط تابع متغیرهای طولی و محیطی‌اند.  $\psi_1$  و  $\psi_2$  نیز به ترتیب توابع چرخش حول محورهای  $x_1$  و  $x_2$  هستند. [۱۲]

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u(x_1, x_2) + x_\tau \psi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v(x_1, x_2) + x_\tau \psi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

در مواد ارتوئروپیک و حالت تنش صفحه‌ی رابطه‌ی تنش و کرنش به‌صورت

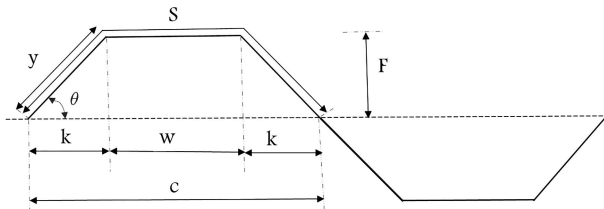
کاهش می‌یابد. پس به جای سفتی‌های معادل استوانه‌ی کرکره‌یی از سفتی‌های معادل صفحه‌ی کرکره‌یی استفاده شده است. محققین با استفاده از روش انرژی، و با برابر قرار دادن جابه‌جایی‌های صفحه کرکره‌یی با صفحه غیر کرکره‌ی ارتوتروپیک معادل صفحه کرکره‌یی، سفتی‌های کششی معادل را مطابق رابطه ۹ استخراج کرده‌اند. متغیرهای مختلف کرکره‌ی دوزنقه‌یی، صفحه‌ی کرکره‌یی و معادل در شکل‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده است، به طوری که  $l$  طول یال دوزنقه،  $W$  قاعده‌ی کوچک دوزنقه،  $c$  قاعده‌ی بزرگ دوزنقه،  $F$  ارتفاع دوزنقه،  $\theta$  زاویه‌ی کرکره،  $s$  طول گسترش یافته‌ی کرکره و  $h$  ضخامت صفحه است.<sup>[۱]</sup>

$$A_{11} = \frac{shE}{c}$$

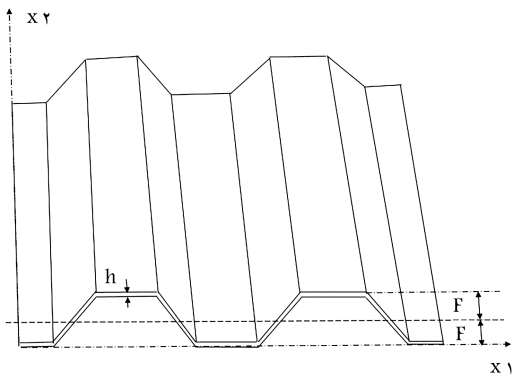
$$A_{22} = \frac{E(\frac{h}{F})^2 h}{\phi \left( \frac{1}{c} \left( \frac{c-s \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) + \frac{1}{rc} \frac{F}{\sin \theta} \right)}$$

$$A_{12} = A_{21} \nu$$

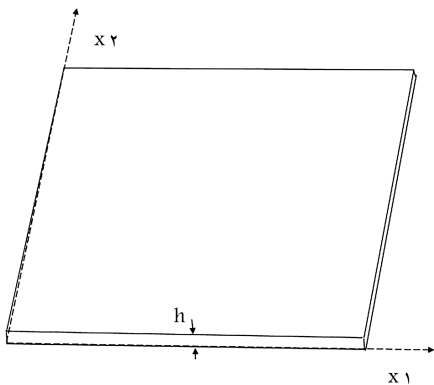
$$A_{\phi\phi} = G_{\phi\phi} h = \frac{c}{s} \frac{Eh}{2(1 + \nu)}$$



شکل ۲. مشخصات هندسی یک موج از کرکره دوزنقه‌یی.



شکل ۳. صفحه کرکره‌یی دوزنقه‌یی.



شکل ۴. صفحه‌ی غیرکرکره‌یی ارتوتروپیک معادل صفحه‌ی کرکره‌یی.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^0 &= \psi_{1,1} & \varepsilon_{\tau}^0 &= 0 \\ \varepsilon_{22}^0 &= v_{,2} + \frac{w}{R} & \varepsilon_{\delta}^0 &= \frac{1}{r}(\psi_{1,1} + w_{,1}) \\ \varepsilon_{12}^0 &= \psi_{2,2} & \varepsilon_{\phi}^0 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta(U + V)) dt &= 0 \\ t &= t_1, t_2 \\ \delta u &= \delta v = \delta w = \delta \psi_1 = \delta \psi_2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta U &= \int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \\ \delta V &= - \int \Omega \frac{\partial W}{\partial x_1} \delta \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA \end{aligned} \quad (5)$$

$$(N_i, M_i) = \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} \sigma_i(\lambda, x_r) dx_r$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} \sigma_{\delta} dx_r \\ Q_2 &= \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} \sigma_{\tau} dx_r \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_{1,1} + N_{\phi,2} &= 0 \\ N_{2,2} + N_{\phi,1} + \frac{Q_2}{R} &= 0 \\ M_{1,1} + M_{\phi,2} - Q_1 &= 0 \\ M_{2,2} + M_{\phi,1} - Q_2 &= 0 \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} - \frac{N_2}{R} - \Omega w_{,11} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{\phi} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\phi\phi} & 0 & 0 & B_{\phi\phi} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\phi\phi} & 0 & 0 & D_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ 2\varepsilon_{\phi}^0 \\ \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ 2\varepsilon_{\phi}^1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

## ۲.۲. سفتی معادل استوانه‌ی کرکره‌یی

کرکره‌یی کردن سازی ایزوتروپیک، باعث ناهمسانی سفتی‌ها و مدول برشی، در جهات مختلف می‌شود. پس می‌توان در حل تحلیلی از یک استوانه‌ی مدور ارتوتروپیک به جای استوانه‌ی کرکره‌یی استفاده کرد، به نحوی که خواص کرکره‌یی بودن در سفتی‌ها و مدول برشی استوانه‌ی مدور اعمال شود. این استوانه‌ی مدور را «استوانه‌ی مدور معادل» می‌نامند.

یک کرکره‌ی کامل در استوانه‌ی کرکره‌یی نسبت به صفحه‌ی کرکره‌یی اندکی انحنای دارد که با افزایش تعداد کرکره و با ثابت ماندن دیگر متغیرها، مقدار این انحنای نیز

همچنین در مطالعات انجام شده [۱۵-۱۳] سفتی‌های خمشی صفحه‌ی کرکره‌بی به صورت رابطه‌ی ۱۰ ارائه شده است.

$$\begin{aligned} D_{r\tau} &= \frac{c E h^{\tau}}{s \ 12} \\ D_{\nu\nu} &= \frac{E h}{\nu c} I_{\tau} \\ I_{\tau} &= \left( \frac{\nu F^{\tau}}{3 \sin(\theta)} \right) + \left( \nu F^{\tau} \left( c - \frac{\nu F}{\tan(\theta)} \right) \right) \\ D_{\nu\tau} &= 0 \\ D_{\phi\phi} &= \frac{s E h^{\tau}}{c \ 6(1 + \nu)} \end{aligned} \quad (10)$$

برای به دست آوردن مدول‌های برشی خارج صفحه  $G_{12}$  و  $G_{23}$  که به ترتیب معادل ضرایب  $c_{24}$  و  $c_{55}$  در معادله‌ی ۲ هستند از روابط داده شده در مطالعات دیگر [۱۷، ۱۶] استفاده می‌شود. در این مطالعه نشان داده شده که مدول‌های برشی از رابطه‌ی ۱۱ برای هر نوع شکل کرکره به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} G_{12} &= G K_1 \\ G_{23} &= \frac{G}{K_{\tau}} \end{aligned} \quad (11)$$

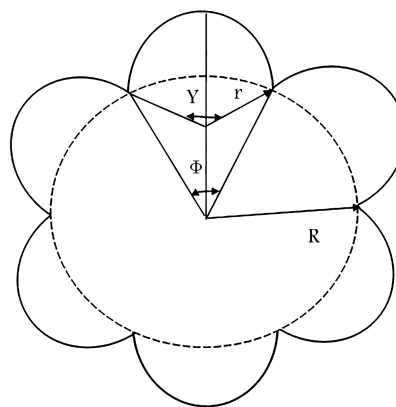
که در آن ضرایب  $k_1$  و  $k_2$  از رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود و پارامترهای مختلف آن در شکل ۵ نشان داده شده است.  $R$  نشان‌گر شعاع استوانه،  $r$  شعاع انحنا هر کرکره،  $\gamma$  زوایه‌ی کرکره با مرکز انحنا کرکره، و  $\phi$  بیان‌گر زوایه‌ی بی است که هر کرکره با مرکز استوانه می‌سازد.

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{r \ \gamma}{R \ \phi} \\ k_2 &= 6 k_1^{\nu} \left( \frac{r}{h} \right)^{\tau} \left( 1 + \frac{\sin \gamma}{\gamma} - 8 \frac{\sin^{\tau} \frac{\gamma}{\tau}}{\gamma^{\tau}} \right) + \frac{k_1}{\nu} \left( 1 + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

با افزایش تعداد کرکره، پارامتر  $\gamma$  به صفر نزدیک می‌شود و مقدار  $\frac{\sin \gamma}{\gamma}$  به ۱ میل می‌کند و در نتیجه مقدار ضریب  $k_2$  به  $k_1$  نزدیک می‌شود. پس:

$$k_2 \cong k_1 \quad (13)$$

از آنجا که عبارت  $k_1$  برای هر شکل کرکره‌بی بیان شده، باید برای کرکره‌ی دوزنقه‌بی



شکل ۵. سطح مقطع استوانه‌ی کرکره‌بی.

بازنویسی شود. در نتیجه پارامترهای ضریب  $k_1$  مطابق رابطه‌ی ۱۴ ساده می‌شود.

$$\begin{aligned} r \gamma &= 2s \\ \phi &= \frac{2\pi R}{n} \end{aligned} \quad (14)$$

در نتیجه ضریب  $k_1$  عبارت خواهد بود از:

$$k_1 = \frac{sn}{\pi R} \quad (15)$$

و در نهایت سفتی‌های داخل صفحه و مدول‌های برشی خارج صفحه به صورت جدول ۱ ارائه می‌شود.

### ۳.۲. شرایط مرزی و اعمال آن در معادلات

در این تحقیق شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده - ساده بررسی می‌شود. برای اعمال این نوع شرط مرزی، به جای جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی استوانه و توابع چرخشی، از روابط ۱۶ استفاده می‌شود. [۱۸]

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= U_{mn} \cos(\alpha_m x_1) \cos(\beta_n x_2) \\ v(x_1, x_2) &= V_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \\ \psi_1(x_1, x_2) &= \Psi_{1mn} \cos(\alpha_m x_1) \cos(\beta_n x_2) \\ \psi_2(x_1, x_2) &= \Psi_{2mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \\ w(x_1, x_2) &= W_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \cos(\beta_n x_2) \end{aligned} \quad (16)$$

سپس با جایگذاری رابطه‌ی ۱۶ و ۱۷ (همراه روابط ارائه شده در جدول ۱) در رابطه‌ی ۶، این رابطه به یک دستگاه ۵ معادله و ۵ مجهول همانند رابطه‌ی ۱۸ تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{m\pi}{L} \quad m = 1, 2, 3, \dots \\ \beta_n &= \frac{n}{R} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

$$[Z] \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ \Psi_{1mn} \\ \Psi_{2mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = f(\Omega, m, n) \quad (18)$$

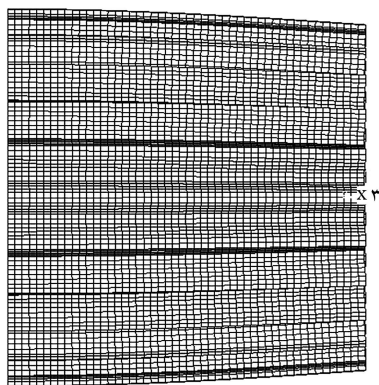
جدول ۱. سفتی‌های داخل صفحه و مدول‌های برشی خارج صفحه.

سفتی خمشی	سفتی کششی	مدول برشی خارج صفحه
$D_{\nu\nu} = \frac{Eh}{\nu c} I_{\tau}$	$A_{\nu\nu} = \frac{sh E}{c}$	$G_{12} = G K_1$
$D_{r\tau} = \frac{c E h^{\tau}}{s \ 12}$	$A_{r\tau} = \frac{E(\frac{h}{\tau})^{\nu} h}{\tau \left( \frac{c-s \cos \theta}{1-\cos \theta} \right) + \frac{\nu F}{\tau c \sin \theta}}$	$G_{23} = \frac{G}{K_{\tau}}$
$D_{\nu\tau} = 0$	$A_{\nu\tau} = A_{\tau\nu}$	
	$A_{\phi\phi} = \frac{c E h}{s \ \tau(1+\nu)}$	$D_{\phi\phi} = \frac{s E h^{\tau}}{c \ 6(1+\nu)}$

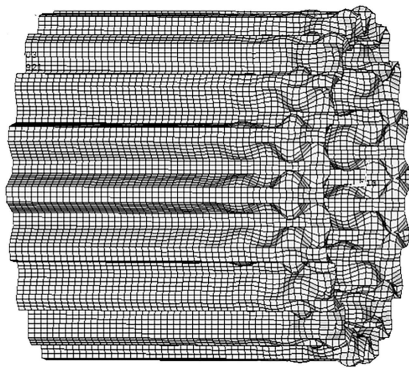
هر دو مورد استوانه‌ی کرکره‌یی و مدور، برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده - ساده در نرم‌افزار اجزاء محدود مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. در این نوع شرایط مرزی، جابه‌جایی ابتدا و انتهای استوانه در راستای محیطی و شعاعی محدود می‌شود و بار کمانش به صورت فشاری به دو سر استوانه وارد می‌شود. چون با این نوع مدل‌سازی هیچ قید حرکتی در راستای طولی (راستای اعمال بار) وجود ندارد، به جای این که کمانش در سازه رخ دهد سازه دچار کرنش طولی و حرکت در امتداد طول استوانه می‌شود و جواب به دست آمده قابل استناد نیست. برای اجتناب از این موضوع استوانه را به صورت متقارن مدل‌سازی می‌کنیم. در این نوع مدل‌سازی نصف استوانه مدل‌سازی می‌شود، طوری که شرایط تکیه‌گاه ساده - ساده و بار کمانش به ابتدای استوانه، و شرط متقارن بودن بر خطوط موجود در وسط استوانه اعمال می‌شود. بدین ترتیب نرم‌افزار نصف دیگر استوانه را به طور ضمنی در نظر می‌گیرد و مشکل عدم کمانش برطرف می‌شود.

برای تحلیل کمانش باید بارگذاری اولیه روی مدل اعمال شود؛ برای این کار می‌توان نیرویی یکنواخت روی گره‌های ابتدای استوانه گذاشت یا این که یک فشار یکنواخت بر آن قرار دارد. چنانچه گره‌های ابتدای استوانه تحت فشار یکنواخت قرار گیرد، توزیع نیرو وابسته به شکل بندی نخواهد بود و بارگذاری یکنواخت و متقارن خواهد بود؛ در این صورت نرم‌افزار خروجی بار کمانشی را برحسب نیوتن بر متر نشان می‌دهد. میزان فشار اعمالی بر استوانه یک نیوتن بر متر در نظر گرفته شده است.

در استوانه‌ی مدور فقط شاهد کمانش کلی هستیم، در صورتی که در استوانه‌ی کرکره‌یی دو نوع کمانش کلی و محلی رخ می‌دهد. در شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب کمانش کلی و محلی در استوانه‌ی کرکره‌یی نشان داده شده است.



شکل ۸. کمانش کلی در استوانه‌ی کرکره‌یی.



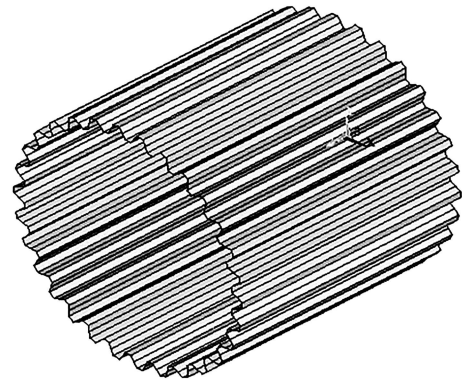
شکل ۹. کمانش محلی در استوانه‌ی کرکره‌یی.

ماتریس  $Z$  یک ماتریس  $5 \times 5$  است که به آن ماتریس ضرایب می‌گویند. این ماتریس تابعی از بار کمانش و مودهای کمانش ( $m$  و  $n$ ) است و برای این که دستگاه معادلات ما دارای جواب باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. با استفاده از این شرط جواب بار کمانش به دست می‌آید و باید یادآور شد که مسئله‌ی مورد نظر برای یافتن اولین بار کمانش بوده، پس به ازای  $m$  و  $n$  های مختلف، کم‌ترین مقدار بار کمانشی که حاصل می‌شود همان اولین بار کمانش است، و این امر با استفاده از نرم‌افزار Mathematica انجام شده است.

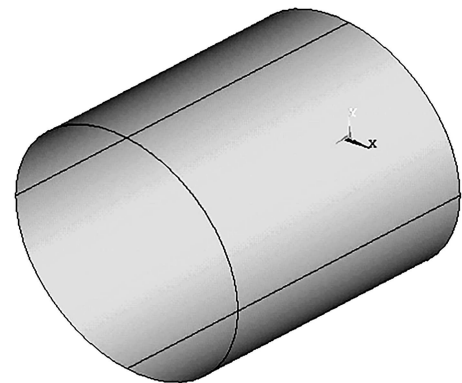
### ۳. تحلیل اجزاء محدود

برای بررسی بیشتر استوانه‌ی کرکره‌یی و صحت‌گذاری بر حل تحلیلی، از یک مدل اجزاء محدود سه‌بعدی کارآمد، یعنی شل ۱۸۱ در نرم‌افزار ANSYS استفاده شده است. این نوع المان برای تحلیل سه‌بعدی سازه‌های پوسته‌یی نازک و تا حدی ضخیم مناسب است.

شل ۱۸۱ دارای چهار گره و در هر گره دارای شش درجه آزادی است، و در هر سه جهت محور مختصات می‌تواند حرکت داشته و حول هر سه محور  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌تواند بچرخد. تحلیل اجزاء محدود بر هر دو استوانه‌ی کرکره‌یی و مدور صورت گرفته است. در شکل ۶ و ۷ به ترتیب مدل اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌یی و مدور نشان داده شده است. گفتنی است که در مدل اجزاء محدود از مدل مادی ایزوتروپیک برای مدل‌سازی سازه استفاده شده است.



شکل ۶. مدل اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌یی.



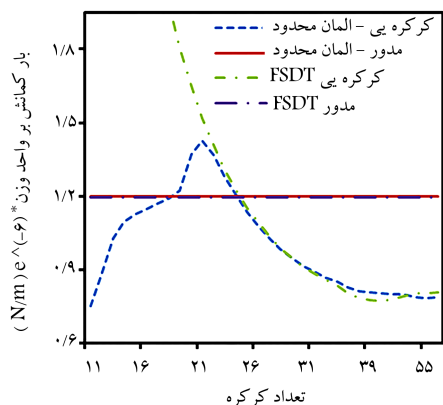
شکل ۷. مدل اجزاء محدود استوانه‌ی مدور.

#### ۴. نتایج عددی و بحث

برای بررسی نتایج حاصل از مدل‌سازی اجزاء محدود و مقایسه‌ی آن با نتایج حاصل از مطالعه‌ی تحلیلی، خواص شاخص نظیر رابطه‌ی ۱۹ در نظر گرفته شده است. در این بخش شکل ۲ نیز مشخصات کرکری مورد مطالعه نشان داده شده است. در این بخش تغییرات پارامترهای طول ( $L$ )، شعاع ( $R$ ) و ضخامت استوانه ( $h$ ) و همچنین تعداد کرکرها ( $n$ )، ضریب شکل ( $a$ ) و زاویه‌ی کرکری ( $\theta$ ) مورد بحث و بررسی قرار گرفته و سایر پارامترهای موجود، تابعی از متغیرهای مورد بررسی هستند. در هر تحلیل، استوانه‌ی مدور و کرکری با هندسه و خواص مشابه (طول و شعاع و مدول کشسانی ( $E$ ) و ضخامت و ضریب پواسون ( $\nu$ )) با هم مقایسه شده است.

$$\theta = 60^\circ, \quad a = \frac{W}{y} = 1, \quad R = 0.5 \text{ m}, \quad h = 0.001 \text{ m}$$

$$n = 22, \quad E = 1 \text{ Pa}, \quad \nu = 0.3, \quad L = 2 \text{ m} \quad (19)$$



شکل ۱۰. تأثیر تعداد کرکری روی بار کماتش بر واحد وزن.

جدول ۲. نسبت بار کماتش و بار کماتش بر واحد وزن استوانه کرکری به مدور برای تعداد کرکریهای مختلف.

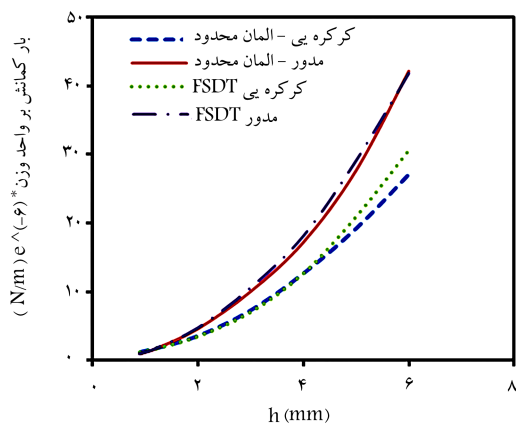
نسبت بار کماتش		
تعداد کرکری	بر واحد وزن استوانه کرکری به مدور	استوانه کرکری به مدور
۱۹	۱.۰۲	۱.۵۰
۲۰	۱.۱۴	۱.۶۸
۲۱	۱.۱۹۲	۱.۷۶
۲۲	۱.۱۴۳	۱.۶۹
۲۳	۱.۰۷	۱.۵۸
۲۴	۱.۰۰۳	۱.۴۹
۲۵	۰.۹۵	۱.۴۱

#### ۱.۴. بررسی تأثیر تعداد کرکریهای استوانه بر بار کماتش

در شکل ۱۰ حاوی چهار نمودار مختلف است که دو مورد از آن‌ها مربوط به حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه کرکری و دو نمودار دیگر حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه مدور را نشان می‌دهد که تأثیر افزایش تعداد کرکری بر روی بار بر واحد وزن سازه را نشان می‌دهد. نتایج اجزاء محدود استوانه کرکری، با نتایج حاصل از حل تحلیلی برای تعداد کرکری بیشتر از ۲۲ عدد مطابقت قابل قبولی دارد و مقدار خطا ناچیز است. این اختلاف ناشی از دو نکته است: ۱. در حل تحلیلی معادل‌سازی استوانه کرکری با استوانه مدور معادل انجام شده و همین امر موجب ایجاد خطا به دلیل شکل ناهمگون سطح مقطع استوانه کرکری در مقایسه با استوانه مدور معادل شده است (با افزایش تعداد کرکرها این ناهمگونی بین استوانه کرکری و استوانه مدور معادل کاهش می‌یابد)؛ ۲. استفاده از روش ارائه شده برای به دست آوردن سفتی معادل استوانه کرکری، که در این روش از روابط کرکری تخت مربوط به صفحه کرکری استفاده شده و این در حالی است که در استوانه کرکری، کرکری به صورت محذب است ولی افزایش تعداد کرکری موجب کاهش طول آن و در نتیجه باعث نزدیک شدن کرکری محذب به کرکری تخت می‌شود و با افزایش هرچه بیشتر تعداد کرکری، خطای به وجود آمده کم‌تر می‌شود.

برای تعداد کرکری کم‌تر از ۲۲ عدد، حل تحلیلی اختلاف بسیار زیادی با حل اجزاء محدود دارد. علت آن است که در حل تحلیلی فقط کماتش کلی محاسبه می‌شود و محاسبه دیگر انواع کماتش ممکن نیست؛ این در حالی است که برای تعداد کرکریهای کم‌تر از ۲۲ عدد، کماتش محلی و برای تعداد کرکریهای بیشتر کماتش کلی رخ می‌دهد. نمودارهای تحلیلی و اجزاء محدود استوانه مدور نیز تقریباً برهم منطبق‌اند که بیان‌گر دقت بالای حل تحلیلی است و چون با افزایش تعداد کرکرها پارامترهای استوانه مدور تغییر نمی‌کند، بار کماتش آن ثابت می‌ماند.

در نمودارهای شکل ۱۰ تعداد کرکری در محدوده ۱۹ تا ۲۵ عدد مورد توجه است، زیرا در این بازه مقدار بار کماتش بر واحد وزن استوانه کرکری از استوانه مدور بیشتر است و مقدار بیشینه آن در ۲۱ عدد کرکری اتفاق می‌افتد که تقریباً ۱.۲ برابر استوانه مدور است. این بدین معناست که استوانه کرکری ۱.۲ برابر استوانه مدور معادل هم‌وزن خود بار تحمل می‌کند که معادل افزایش ۲۰ درصدی بار کماتش بر وزن سازه بوده و بیان‌گر نسبت استحکام به وزن بالای سازه کرکری است. در

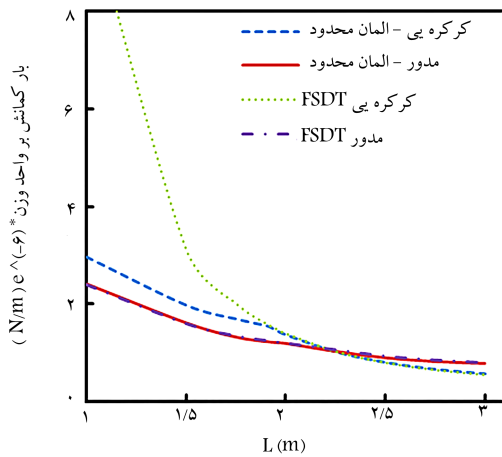


شکل ۱۱. تأثیر ضخامت بر بار کماتش بر واحد وزن.

جدول ۲ نسبت بار کماتش و بار کماتش بر وزن استوانه کرکری به مدور برای بازه کرکری ۱۹ تا ۲۵ عدد ارائه شده است.

#### ۲.۴. بررسی تأثیر ضخامت سازه بر بار کماتش

در شکل ۱۱ تأثیر ضخامت بر بار کماتش بر واحد وزن نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه کرکری اختلاف ناچیزی دارند که خود نشان‌گر دقت بالای حل تحلیلی است. همچنین برای استوانه مدور شاهد دقتی خاص هستیم. در هر دو استوانه مدور و استوانه کرکری کاهش



شکل ۱۲. تأثیر طول روی بار کمناش بر واحد وزن.

جدول ۴. نسبت بار کمناش و بار کمناش بر واحد وزن استوانه کرکره‌بی به مدور برای طول‌های مختلف.

طول استوانه (m)	نسبت بار کمناش	
	بر واحد وزن استوانه کرکره‌بی به مدور	استوانه کرکره‌بی
۱	۱٫۲۲۹	۱٫۸۱۹
۱٫۵	۱٫۲۲۲	۱٫۸۰۸
۱٫۷۵	۱٫۲۷۷	۱٫۸۹
۱٫۹۱	۱٫۲۵۴	۱٫۸۵۶
۱٫۹۴	۱٫۲۱۶	۱٫۷۹۹
۱٫۹۵	۱٫۲۰۴	۱٫۷۸۱
۲	۱٫۱۴۳	۱٫۶۹۱
۲٫۲۵	۰٫۹۸۴	۱٫۴۵۶

نمودارهای مذکور اختلاف قابل توجه حل تحلیلی و اجزاء محدود در طول‌های کم‌تر از ۱٫۹۴ متر است. علت این موضوع تغییر نوع کمناش از کمناش کلی به محلی برای طول‌های کم‌تر از ۱٫۹۴ متر است و حل تحلیلی فقط توانایی پیش‌بینی کمناش کلی را دارد پس خطای به وجود آمده یک امر کاملاً بدیهی است. در مورد استوانه‌ی مدور نیز می‌توان گفت که به‌ازای هر طولی، حل اجزاء محدود و حل تحلیلی دقت بالایی دارد.

در تمامی طول‌ها بار کمناش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌بی از مدور بیشتر نیست. برای طول استوانه‌ی کم‌تر از ۲٫۲ متر، بار کمناش بر واحد وزن سازه‌ی کرکره‌بی نسبت به مدور بیشتر می‌شود؛ به عبارت دیگر با کاهش طول استوانه تا ۱٫۹۴ متر، استحکام کمناشی استوانه‌ی کرکره‌بی افزایش می‌یابد ولی استحکام کمناشی استوانه‌ی مدور تقریباً ثابت می‌ماند. دلیل این امر تغییر نوع کمناش طولی و محیطی با تغییر طول استوانه در سازه‌ی کرکره‌بی است، به طوری که در طول‌های پایین‌تر بیشتر شاهد کمناش طولی هستیم اما در طول‌های بالاتر بیشتر کمناش محیطی رخ می‌دهد. چنان که پیش‌تر بیان شد استحکام کمناشی طولی از محیطی در این نوع سازه بیشتر است؛ پس هرچه طول افزایش یابد سازه از کمناش نوع طولی (مستحکم‌تر) به نوع محیطی (ضعیف‌تر) تغییر پیدا می‌کند.

در جدول ۴ نسبت بار کمناش و بار کمناش بر واحد وزن استوانه کرکره‌بی به مدور در طول‌های مختلف ارائه شده است. مشاهده می‌شود که ناحیه‌ی پر کاربرد

جدول ۳. نسبت بار کمناش، و بار کمناش بر واحد وزن استوانه کرکره‌بی به مدور برای ضخامت‌های مختلف.

نسبت بار کمناش	ضخامت استوانه (mm)	
	بر واحد وزن استوانه کرکره‌بی به مدور	استوانه کرکره‌بی
۰٫۹	۱٫۲۱۲	۱٫۷۹۳
۰٫۹۴	۱٫۲۱۸	۱٫۸۰۲
۰٫۹۵	۱٫۲۰۵	۱٫۷۸۳
۱	۱٫۱۴۳	۱٫۶۹۱
۱٫۲	۱٫۰۱	۱٫۴۹۴

ضخامت منجر به کاهش اختلاف حل تحلیلی و اجزاء محدود می‌شود، اما افزایش ضخامت به افزایش اختلاف حل تحلیلی و اجزاء محدود می‌انجامد. به عبارت دیگر، کاهش ضخامت باعث افزایش دقت حل تحلیلی می‌شود که با ذات نظریه‌ی برشی مرتبه اول به‌کار رفته در روش تحلیلی مطابقت دارد. نکته‌ی دیگر در مورد دقت حل تحلیلی استوانه‌ی کرکره‌بی این است که برای ضخامت‌های کم‌تر از ۰٫۹۴ میلی‌متر نوع کمناش از کمناش کلی به کمناش محلی تغییر می‌کند، و باعث افزایش خطای حل تحلیلی در قیاس با اجزاء محدود می‌شود. با مشاهده‌ی شکل ۱۱ می‌توان دریافت که کاهش هرچه بیشتر ضخامت بر استحکام استوانه‌ی کرکره‌بی در مقایسه با استوانه‌ی مدور می‌افزاید و بالعکس؛ و این امر بیانگر آن است که ناحیه‌ی پر کاربرد این نوع سازه‌ها، ضخامت پایین است. این نوع رفتار به‌موجب رفتار دوگانه‌ی سفتی خمشی راستای طولی در دو استوانه است. سفتی خمشی استوانه‌ی مدور در راستای طولی با توان سوم ضخامت، رابطه‌ی مستقیم دارد، این در حالی است که سفتی خمشی استوانه‌ی کرکره‌بی در راستای طولی فقط با توان اول ضخامت سازه رابطه‌ی مستقیم دارد. در نتیجه با کاهش ضخامت، بار کمناشی استوانه‌ی کرکره‌بی با شدت کم‌تری نسبت به استوانه‌ی مدور کاهش می‌یابد.

در ضخامت‌های کم‌تر از ۱٫۲ میلی‌متر بار کمناش بر واحد وزن سازه در استوانه‌ی کرکره‌بی از مدور بیشتر است و با کاهش ضخامت تا ۰٫۹۴ میلی‌متر میزان بار کمناش بر واحد وزن افزایش می‌یابد و برای مقادیر کم‌تر از ۰٫۹۴ به دلیل بروز پدیده‌ی کمناش محلی این روند معکوس می‌شود.

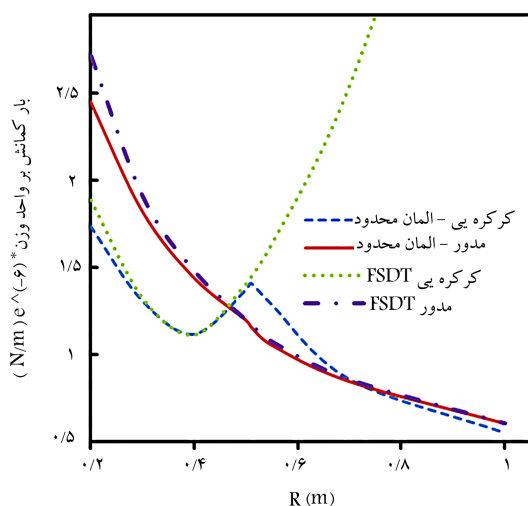
در جدول ۳ نسبت بار کمناش و بار کمناش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌بی به مدور ارائه شده است و نشان می‌دهد که ناحیه‌ی پر کاربرد در طراحی استوانه‌های کرکره‌بی، نواحی با ضخامت پایین است به طوری که برای متغیرهای مرجع به کار برده شده، بیش‌ترین مقدار نسبت بار کمناش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌بی به مدور در ضخامت ۰٫۹۴ میلی‌متر بوده و در حدود ۱٫۲۲ است، به عبارت دیگر استوانه‌ی کرکره‌بی در قیاس با استوانه هم‌وزن و معادلش، میزان ۲۲ درصد بار کمناشی بیشتری تحمل می‌کند.

### ۳.۴. بررسی تأثیر طول سازه بر بار کمناش

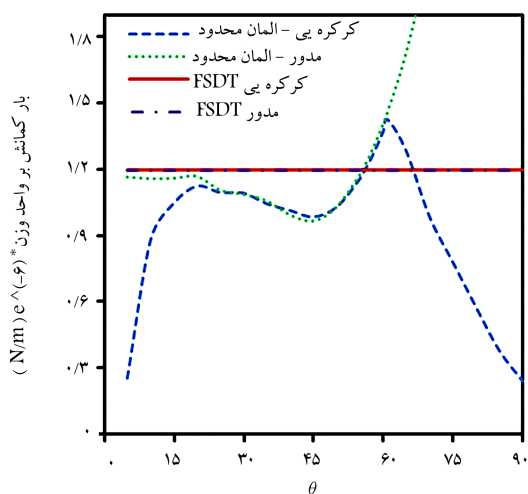
در شکل ۱۲ تأثیر طول استوانه‌های کرکره‌بی و مدور روی بار کمناش بر واحد وزن نشان داده شده است. دو نمودار تحلیلی و اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌بی برای طول‌های بیشتر از ۱٫۹۴ متر دقت بسیار خوبی دارد، به طوری که بیشینه خطای حل تحلیلی نسبت به حل اجزاء محدود حدود ۲٫۷ درصد است که این مقدار خطا با افزایش طول کاهش می‌یابد، به طوری که برای طول ۲٫۵ متر به ۰٫۱۶ درصد می‌رسد و این نشان‌گر دقت بالای روش مورد استفاده است. نکته‌ی قابل توجه دیگر در مورد

جدول ۵. نسبت بارکمانش و بارکمانش بر واحد وزن استوانه کرکریه‌ای به مدور برای شعاع‌های مختلف.

شعاع استوانه (m)	نسبت بارکمانش	
	بر واحد وزن استوانه کرکریه‌ای به مدور	استوانه کرکریه‌ای
۰٫۲	۰٫۷۰۸	۱٫۸۱۹
۰٫۳	۰٫۷۱۸	۱٫۸۰۸
۰٫۴	۰٫۷۷۶	۱٫۸۹
۰٫۵	۱٫۱۴۳	۱٫۸۵۶
۰٫۵۱	۱٫۲۱۵	۱٫۷۹۹
۰٫۵۵	۱٫۲۲۱	۱٫۷۸۱
۰٫۷	۱٫۰۱۶	۱٫۶۹۱
۱	۰٫۹۱۴	۱٫۴۵۶



شکل ۱۳. تأثیر شعاع روی بارکمانش بر واحد وزن.



شکل ۱۴. تأثیر زاویه روی بارکمانش بر واحد وزن.

در طراحی استوانه‌های کرکریه‌ای، نواحی با طول کم تر است. نکته‌ی جالب در جدول مذکور طول استوانه‌ی ۱٫۷۵ متر است که بیان می‌دارد تحمل بارکمانش بر واحد وزن استوانه کرکریه‌ای تقریباً ۱٫۲۸ برابر استوانه‌ی مدور است. این بدان معناست که استحکام کمانشی استوانه‌ی کرکریه ۲۸ درصد بیشتر از استوانه‌ی مدور هم‌وزنش است که استحکام کمانشی بالای استوانه‌ی کرکریه‌ای را نشان می‌دهد.

#### ۴.۴. بررسی تأثیر شعاع سازه بر بارکمانش

در شکل ۱۳ تأثیر شعاع استوانه روی بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکریه‌ای و مدور نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، حل تحلیلی استوانه‌ی کرکریه‌ای دقت بسیار بالایی در محدوده‌ی شعاعی کم‌تر از ۰٫۵۱ متر دارد، به طوری که دو نمودار تحلیلی و اجزاء محدود بر هم منطبق‌اند و فقط با کاهش شعاع مقداری اختلاف مشاهده می‌شود. در محدوده‌ی شعاعی بیشتر از ۰٫۵۱ متر به علت تغییر نوع کمانش از کمانش کلی به محلی، و این که حل تحلیلی توانایی تخمین کمانش محلی را ندارد، اختلاف مشاهده شده بین حل تحلیلی و اجزاء محدود پیش‌بینی شده و منطقی است. همچنین حل تحلیلی استوانه‌ی مدور برای هر شعاعی معتبر است و در شعاع‌های پایین‌تر نسبت به شعاع‌های بالاتر دقت کم‌تری دارد و با افزایش شعاع، دقت روش تحلیلی نسبت به اجزاء محدود افزایش می‌یابد.

در تمامی شعاع‌ها بارکمانش بر واحد وزن سازه‌ی کرکریه‌ای از مدور بیشتر نیست و تنها برای شعاع بیشتر از ۰٫۴۷ و کم‌تر از ۰٫۷۵ متر شاهد بهتر شدن استحکام کمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکریه‌ای نسبت به مدور هستیم. این محدوده‌ی جالبی برای طراحی است که با توجه به جدول ۵ بیشترین میزان بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکریه‌ای ۱٫۲۲۱ برابر استوانه‌ی مدور است که مربوط به شعاع ۰٫۵۵ متر است؛ به عبارت دیگر استحکام کمانشی استوانه‌ی کرکریه‌ای از استوانه‌ی مدور هم‌وزنش ۲۲ درصد بیشتر است. در محدوده‌ی شعاع بهینه، افزایش شعاع منجر به افزایش سفتی استوانه در راستای طولی و کاهش سفتی محیطی می‌شود؛ این در حالی است که نوع کمانش یخ داده از نوع طولی است. از طرف دیگر، پوسته‌ی کرکریه‌ای نسبت به استوانه‌ی ساده، سفتی خمشی طولی بیشتری دارد. در نتیجه استحکام کمانشی پوسته‌ی کرکریه‌ای از ساده بیشتر می‌شود و این افزایش استحکام تا جایی ادامه می‌یابد که استوانه‌ی کرکریه‌ای به علت وجود کرکریه‌ها، دچار کمانش محلی می‌شود. با کاهش باربری سازه شاهد کاهش استحکام خواهیم بود.

#### ۵.۴. بررسی تأثیر زاویه‌ی کرکریه بر بارکمانش

در شکل ۱۴ تأثیر زاویه‌ی کرکریه روی بارکمانش بر واحد وزن، در استوانه‌های کرکریه‌ای و مدور نشان داده شده است، که برای زوایای بیشتر از ۱۴ و کم‌تر از ۶۱ درجه شاهد دقت بالای حل تحلیلی در مقایسه با حل اجزاء محدود هستیم. در زوایای بیشتر از ۶۱ و در زوایای کم‌تر از ۱۴ درجه به علت بروز کمانش محلی و مبتنی بودن حل تحلیلی بر کمانش کلی، بین حل تحلیلی و اجزاء محدود خطا ایجاد می‌شود. همچنین حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه‌ی مدور در دو نمودار یادشده دارای دقت بالایی است و یادآور می‌شویم که با تغییر زاویه‌ی کرکریه، متغیرهای استوانه‌ی مدور تغییر نمی‌کنند و در نتیجه، مقدار بارکمانش آن ثابت می‌ماند.

در اکثر زاویه‌ها، بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکریه‌ای از مدور بیشتر نیست و در ناحیه‌ی ۵۷ تا ۶۷ درجه، بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکریه‌ای به مدور بیشتر است و بیشینه‌ی آن در زاویه‌ی ۶۱ درجه اتفاق می‌افتد. جدول ۶ نسبت بار



جدول ۷. نسبت بارکمانش و بارکمانش بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور برای ضرایب شکل مختلف.

نسبت بارکمانش		
ضریب شکل	بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور	استوانه کرکره‌یی به مدور
۰٫۵	۱٫۵۱۷	۰٫۹۲۳
۰٫۷۵	۱٫۶۳۰	۱٫۰۵۱
۰٫۹۱	۱٫۸۰۷	۱٫۲۰۲
۰٫۹۵	۱٫۷۵۳	۱٫۱۷۴
۱	۱٫۶۹۱	۱٫۱۴۳
۱٫۱	۱٫۵۷۹	۱٫۰۸۵
۱٫۲	۱٫۴۸۴	۱٫۰۳۴
۱٫۳	۱٫۴۰۲	۰٫۹۹۰
۱٫۴	۱٫۳۳۰	۰٫۹۵۲
۱٫۵	۱٫۲۶۸	۰٫۹۱۸
۱٫۶	۱٫۲۱۵	۰٫۸۹۰
۱٫۷	۱٫۱۷۱	۰٫۸۶۶

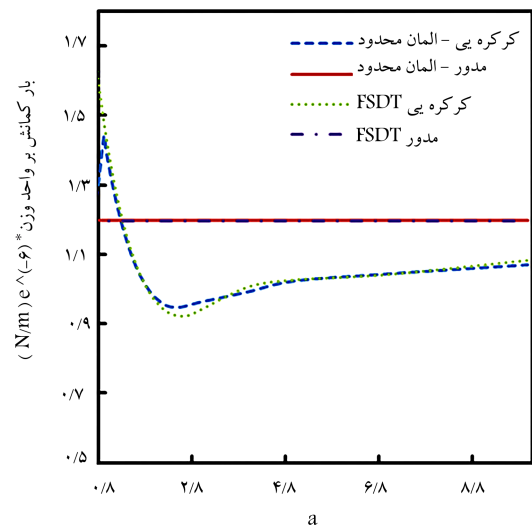
جدول ۶. نسبت بارکمانش و بارکمانش بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور برای زاویه‌های مختلف کرکره.

نسبت بارکمانش		زاویه‌ی کرکره (درجه)
استوانه کرکره‌یی به مدور	بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور	
۱٫۱۱۱	۰٫۸۵۸	۵۰
۱٫۳۳۰	۰٫۹۶۵	۵۵
۱٫۳۸۹	۰٫۹۵۵	۵۶
۱٫۴۵۵	۱٫۰۰۳	۵۷
۱٫۵۲۷	۱٫۰۰۶	۵۸
۱٫۶۰۵	۱٫۱۰۱	۵۹
۱٫۶۹۱	۱٫۱۴۳	۶۰
۱٫۷۸۴	۱٫۱۸۸	۶۱
۱٫۷۱۳	۱٫۰۶۸	۶۵
۱٫۴۴۲	۰٫۸۲۱	۷۰
۱٫۲۶۷	۰٫۶۵۰	۷۵

با افزایش ضریب شکل دقت حل تحلیلی افزایش می‌یابد. در ضریب شکل‌های بیشتر از ۰٫۹۱، کمانش کلی رخ می‌دهد، ولی در ضریب شکل‌های کم‌تر از ۰٫۹۱، نوع کمانش عوض شده و کمانش محلی رخ می‌دهد. به همین علت حل تحلیلی فقط برای محاسبه‌ی کمانش کلی انجام شده، و در نتیجه اختلاف به وجود آمده میان دو حل انجام شده کاملاً منطقی است. حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه‌ی مدور نیز در دو نمودار یادشده دقت بالایی دارند، و یادآور می‌شویم که با تغییر ضریب شکل، متغیرهای استوانه‌ی مدور تغییر نمی‌کنند، در نتیجه مقدار بارکمانش آن ثابت می‌ماند.

برای ضریب شکل کم‌تر از ۱٫۳، استوانه‌ی کرکره‌یی بارکمانش بر واحد وزن بیشتری از استوانه‌ی مدور تحمل می‌کند؛ بیشترین مقدار بارکمانش بر وزن سازه استوانه‌ی کرکره‌یی ۱٫۴۴ نیوتن بر متر است که برای ضریب شکل ۰٫۹۱، جایی که نوع کمانش از کلی به محلی تغییر می‌کند، اتفاق می‌افتد. برای مقادیر ضریب شکل کم‌تر از ۲٫۷۵، با کاهش ضریب شکل مقدار بارکمانش بر واحد وزن افزایش می‌یابد و این امر تا جایی ادامه می‌یابد که کمانش محلی رخ دهد. برای مقادیر ضریب شکل بیشتر از ۲٫۷۵ با افزایش ضریب شکل، بارکمانش بر وزن سازه افزایش می‌یابد ولی این افزایش به حدی نیست که به بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی مدور برسد. دلیل افزایش بارکمانش بر واحد وزن با کاهش ضریب شکل این است که با کاهش ضریب شکل سفتی خمشی و کششی راستای طولی افزایش و راستای محیطی کاهش می‌یابد. بدین ترتیب، سفتی راستای مستحکم‌تر در سازه‌ی کرکره‌یی افزایش و راستای ضعیف‌تر کاهش می‌یابد و این تا جایی ادامه می‌یابد که راستای طولی به شدت تضعیف می‌شود و کمانش محلی رخ می‌دهد. ولی برای ضریب شکل بزرگ‌تر از ۲٫۷۵ به دلیل این که وزن سازه به شدت کاهش می‌یابد مقدار بارکمانش به وزن سازه مقداری افزایش می‌یابد.

در جدول ۷ نسبت بارکمانش و بارکمانش بر وزن استوانه کرکره‌یی به مدور برای ضریب شکل‌های مختلف ارائه شده است. بیشینه‌ی این نسبت متعلق به ضریب شکل ۰٫۹۱ است که حدوداً ۱٫۲۰۲ است؛ این بدان معناست که استوانه‌ی کرکره‌یی نسبت به استوانه‌ی مدور هم‌وزنش ۱٫۲۰۲ برابر بیشتر بارکمانشی تحمل می‌کند؛



شکل ۱۵. تأثیر ضریب شکل بر روی بارکمانش بر واحد وزن.

کمانش و بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌یی به مدور را در ناحیه‌ی یادشده نشان می‌دهد و برای زاویه‌ی ۶۱ درجه استوانه‌ی کرکره‌یی تقریباً ۱٫۱۹ برابر استوانه‌ی هم‌وزنش بار تحمل می‌کند. به‌گفته‌ی دیگر استوانه‌ی کرکره‌یی ۱۹ درصد بیشتر از استوانه‌ی مدور هم‌وزنش بارکمانشی تحمل می‌کند.

دلیل این که با افزایش زاویه، استحکام کمانش سازه‌ی کرکره‌یی از مدور بیشتر است این است که سفتی خمشی در راستای طول استوانه با تابعی از زاویه، نسبت مستقیم دارد و سفتی کششی محیطی با این تابع نسبت عکس دارد و بدین ترتیب با افزایش و کاهش تابع مورد بحث، بارکمانش افزایش و کاهش می‌یابد.

#### ۶.۴. بررسی تأثیر ضریب شکل بر بارکمانش

در شکل ۱۵ تأثیر ضریب شکل روی بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌های کرکره‌یی و مدور نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، حل تحلیلی در مقایسه با حل اجزاء محدود برای ضریب شکل‌های بیشتر از ۰٫۹۱ دقت بیشتری دارد و

به عبارت دیگر با کرکره‌ی کردن استوانه استحکام کمانشی آن ۲۰/۲ درصد افزایش می‌یابد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر یک روش تحلیلی برای کمانش خطی استوانه‌ی کرکره‌ی تحت بارگذاری محوری، براساس روش معادل‌سازی و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه شد. نتایج به دست آمده با حل اجزاء محدود مقایسه شد. نتایج حاصل از بررسی تأثیر شش پارامتر مؤثر بر بارکمانش بر واحد وزن نشان می‌دهد که نتایج اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌ی، با نتایج حاصل از حل تحلیلی تا جایی که کمانش کلی رخ می‌دهد، مطابقت خیلی خوبی دارد اما هنگامی که کمانش محلی روی دهد حل تحلیلی اعتبار خود را از دست می‌دهد.

نتایج عددی نشان می‌دهد که با کاهش تعداد کرکره، افزایش زاویه‌ی کرکره، کاهش ضخامت، افزایش شعاع، کاهش طول و کاهش ضریب شکل تا جایی که کمانش محلی رخ ندهد، بارکمانش استوانه‌ی کرکره‌ی نسبت به استوانه‌ی مدور افزایش می‌یابد و بیشینه‌ی این بار مربوط به جایی است که نوع کمانش تغییر پیدا می‌کند. بیشینه‌ی بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌ی بیش از ۲۰ درصد از بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی مدور بیشتر است؛ این افزایش استحکام برای مقادیر مختلف از پارامترهای استوانه‌ی متغیر است. با توجه به دخالت شش پارامتر هندسی مستقل بر بارکمانش استوانه کرکره‌ی، دست طراح برای افزایش استحکام کمانشی باز است و می‌تواند در شرایط مختلف، بهترین حالت را برای سازه انتخاب کند.

## فهرست علائم

$a$ : ضریب شکل؛

$c$ : طول قاعده‌ی بزرگ دوزنقه (m)؛

$E$ : مدول کشسانی ( $\text{Nm}^{-2}$ )؛

$F$ : ارتفاع دوزنقه (m)؛

$h$ : ضخامت استوانه (m)؛

$k_{t2}$ : ضریب تصحیح برشی؛

$k_{t5}$ : ضریب تصحیح برشی؛

$L$ : طول استوانه (m)؛

$M_i$ : ممان‌های داخل صفحه‌ی؛

$N_i$ : نیروهای داخل صفحه‌ی؛

$n$ : تعداد کرکره؛

$r$ : شعاع انحنای هر کرکره (m)؛

$R$ : شعاع استوانه (m)؛

$s$ : طول گسترش یافته کرکره (m)؛

$T$ : انرژی جنبشی ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$ )؛

$U$ : انرژی درونی ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$ )؛

$u$ : جابه‌جایی طولی صفحه‌ی میانی استوانه (m)؛

$u_1$ : جابه‌جایی استوانه در راستای طولی (m)؛

$u_2$ : جابه‌جایی استوانه در راستای محیطی (m)؛

$u_3$ : جابه‌جایی استوانه در راستای شعاعی (m)؛

$V$ : انرژی پتانسیل ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$ )؛

$v$ : جابه‌جایی محیطی صفحه‌ی میانی استوانه (m)؛

$w$ : جابه‌جایی شعاعی صفحه‌ی میانی استوانه (m)؛

$W$ : طول قاعده‌ی کوچک دوزنقه (m)؛

$y$ : یال دوزنقه (m).

## علائم یونانی

$\Omega$ : بارکمانش ( $\text{Nm}^{-1}$ )؛

$\theta$ : زاویه دوزنقه (درجه)؛

$\sigma_1$ : تنش نرمال در جهت طولی؛

$\sigma_2$ : تنش نرمال در جهت محیطی؛

$\sigma_6$ : تنش برشی در صفحه  $x_1x_2$ ؛

$\sigma_4$ : تنش برشی در صفحه  $x_2x_3$ ؛

$\sigma_5$ : تنش برشی در صفحه  $x_1x_3$ ؛

$\phi$ : زاویه‌ی هر کرکره با مرکز استوانه (rad)؛

$\psi_1$ : تابع چرخش حول محور  $x_2$ ؛

$\psi_2$ : تابع چرخش حول محور  $x_1$ ؛

$\gamma$ : زاویه‌ی هر کرکره با مرکز انحنای کرکره (rad)؛

$\nu$ : ضریب پواسون.

## پانوشتها

- corrugated plates
- girder
- first shear deformation theory (FSDT)
- box-girder
- Buckling load
- Shell 181

## منابع (References)

- Samanta, A. and Mukhopadhyay, M. "Finite element static and dynamic analyses of folded plates", *Engineering Structures*, **21**,(3), pp. 277-287 (1999).
- Machacek, J. and Tuma, M. "Fatigue life of girders with undulating webs", *Journal of Constructional Steel Research*, **62**(1-2), pp. 168-177 (2006).
- Ibrahim, S.A., El-Dakhkhni, W.W. and Elgaaly, M.

- “Behavior of bridge girders with corrugated webs under monotonic and cyclic loading”, *Engineering Structures*, **28**(14), pp. 1941-1955 (2006).
4. Liew, K.M., Peng, L.X. and Kitipornchai, S. “Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a mesh-free method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **196**(21-24), pp. 2358-2376 (2007).
  5. Moon, J., Yi, J., Choi, B.H. and Lee, H.-E. “Shear strength and design of trapezoidally corrugated steel webs”, *Journal of Constructional Steel Research*, **65**(5), pp. 1198-1205 (2009).
  6. Moon, J., Yi, J.-W., Choi, B.H. and Lee, H.-E. “Lateral-torsional buckling of I-girder with corrugated webs under uniform bending”, *Thin-Walled Structures*, **47**(1), pp. 21-30 (2009).
  7. Yi, J., Gil, H., Youm, K. and Lee, H. “Interactive shear buckling behavior of trapezoidally corrugated steel webs”, *Engineering Structures*, **30**(6), pp. 1659-1666 (2008).
  8. Eldib, M.E.A.H. “Shear buckling strength and design of curved corrugated steel webs for bridges”, *Journal of Constructional Steel Research*, **65**(12), pp. 2129-2139 (2009).
  9. Kazeminia korrani, H.R. “Lateral bracing of I-girder with corrugated webs under uniform bending”, *Journal of Constructional Steel Research*, **66**(12), pp. 1502-1509 (2010).
  10. Ding, Y., Jiang, K. and Liu, Y. “Nonlinear analysis for PC box-girder with corrugated steel webs under pure torsion”, *Thin-Walled Structures*, **51**, pp. 167-173 (2012).
  11. Xia, Y., Friswell, M.I. and Flores, E.I.S. “Equivalent models of corrugated panels”, *International Journal of Solids and Structures*, **49**(13), pp. 1453-1462 (2012).
  12. Khdeir, A.A., Reddy, J.N. and Frederick, D. “A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories”, *International Journal of Engineering Science*, **27**(11), pp. 1337-1351 (1989).
  13. McFarland, E.D. “An investigation of the static stability of corrugated rectangular loaded in pure shear”, Ph.D. thesis, University of Kansas, Lawrence, Kan, USA (1967).
  14. Easley, T.J. “Buckling formulas for corrugated metal shear diaphragms”, *Journal of the Structural Division*, **101**, pp. 1403-1417 (1975).
  15. TJ, E. and ED, M. “Buckling of light gage corrugated metal shear diaphragms”, *Journal of the Structural Division*, **95**, pp. 1497-516 (1969).
  16. Semenyuk, N.P. and Neskhodovskaya, N.A. “On design models in stability problems for corrugated cylindrical shells”, *International Applied Mechanics*, **38**(10), pp. 1245-1252 (2002).
  17. Semenyuk, N.P. “Stability of axially compressed noncircular cylindrical shells consisting of panels of constant curvature”, *International Applied Mechanics*, **39**(6), pp. 726-735 (2003).
  18. Reddy, J.N. and Liu, C.F. “A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells”, *International Journal of Engineering Science*, **23**(3), pp. 319-330 (1985).