

# بررسی تحلیلی قفل‌شدگی تشدید در سیستم‌های نامیزان دوار و اثر یک نامیزانی دوار آزاد بر رفتار سیستم

سروان فرهادی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه کردستان، سنندج

مهندسی مکانیک شریف، (پار ۱۳۹۶)  
دوری ۲ - ۳، شهری ۱، ص. ۱۵۳

در سیستم‌های دوار با پایه‌ی کشسان، نامیزانی سیستم باعث ارتعاشات پایه می‌شود. این ارتعاشات نیز موجب اعمال یک گشتاور نوسانی به روتور و نوسانی شدن سرعت دوران می‌شود. بنابراین یک سازوکار انعکاسی شکل می‌گیرد که می‌تواند رفتاری غیرخطی با طیف متفاوتی از پاسخ‌ها را به نمایش بگذارد. در مجاورت بسامد طبیعی، ارتعاشات بزرگ پایه موجب افزایش چشمگیر توان مصرفی می‌شود و از افزایش سرعت روتور جلوگیری می‌کند. در این حالت ممکن است سیستم توان کافی برای گذر از تشدید را نداشته و دچار قفل‌شدگی تشدید شود. در این نوشتار پیشنهاد شده است به منظور ایجاد اغتشاش در شکل‌گیری سازوکار قفل‌شدگی، یک نامیزانی آزاد به سیستم اضافه شود. برای بررسی کارایی این روش، معادلات دینامیکی سیستم استخراج شده و به روش هارمونیک بالاس و روش عددی حل شده‌است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد با افزودن یک نامیزانی آزاد، می‌توان محدوده‌ی قفل‌شدگی و امکان گذر از آن را بهبود داد.

واژگان کلیدی: نامیزانی دوار، قفل‌شدگی تشدید، دیسک الحاقی نامیزان.

s.farhadi@uok.ac.ir

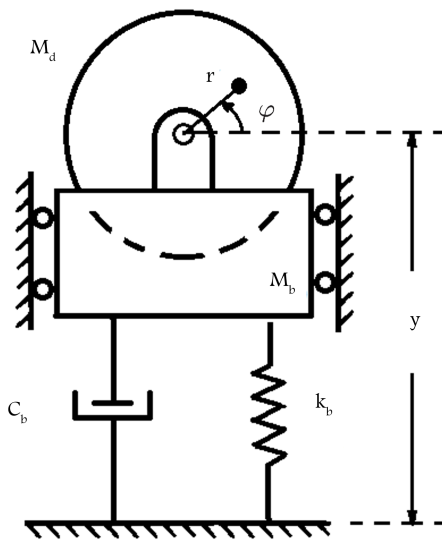
## ۱. مقدمه

نامیزانی سیستم‌های دوار می‌تواند باعث ایجاد نیروهای نوسانی و در نتیجه ارتعاش در سیستم شود. معادلات خطی مربوط به این پدیده در تمام کتاب‌های کلاسیک نظریه‌ی ارتعاشات ارائه شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. هنگامی که سرعت دوران روتور با بسامدهای طبیعی آن برابر می‌شود، پدیده‌ی تشدید (رزونانس) روی می‌دهد و دامنه‌ی ارتعاشات سیستم وارد محدوده‌ی خطرناکی می‌شود که ممکن است به شکست و تخریب ماشین منجر شود. برای جلوگیری از این موضوع معمولاً سرعت دوران سیستم در مقادیری بالاتر از بسامد طبیعی تنظیم می‌شود. اما در ماشین‌هایی که توان محدودی دارند، افزایش سریع سرعت ماشین ممکن نیست و حرکت زاویه‌ی دارای شتاب کوچکی است. در این حالت ممکن است سیستم مدتی طولانی در محدوده‌ی نزدیک به سرعت بحرانی قرار گیرد و دچار تشدید شود و دامنه‌ی ارتعاشات آن به مقادیر بزرگی برسد. در این زمان ارتعاشات محور دوران سیستم حول مرکز جرم آن که خارج از محور دوران قرار دارد، یک گشتاور میراگر ایجاد می‌کند که مانع سرعت‌گیری سیستم می‌شود و آن را در محدوده‌ی تشدید نگه می‌دارد؛ این پدیده را «قفل‌شدگی تشدید» می‌نامند. در این حالت انرژی موتور که باید صرف افزایش سرعت دوران آن شود، توسط ارتعاشات سیستم مستهلک می‌شود. این پدیده سال‌ها پیش و نخستین بار توسط سامرفلد<sup>[۱]</sup> مشاهده شد و در سال‌های بعد معادلات ریاضی آن توسط کونکو<sup>[۲]</sup> حل و توصیف شد.

پدیده‌ی قفل‌شدگی تشدید توسط پژوهش‌گران مختلفی مورد مطالعه قرار گرفت و از جنبه‌های مختلف، دینامیک سیستم و روش پایداری آن بررسی شده است. راند و همکاران<sup>[۳]</sup> معادلات دینامیکی یک سیستم دوار نامیزان را که روی پایه‌ی کشسان قرار دارد و با یک گشتاور محدود و معین رانده می‌شود، استخراج کردند و با استفاده از روش‌های نظریه‌ی اغتشاش، دینامیک سیستم را مورد مطالعه قرار دادند. دایمستبرگ و همکاران<sup>[۴]</sup> یک روش عددی برای حل معادلات غیرخطی مربوط به سیستم‌های دوار نامیزان با گشتاور محدود ارائه دادند و رفتار گذرای مربوطه را مطالعه کردند. هابرمان و همکاران<sup>[۵]</sup> معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم‌های دوچرخه‌ی<sup>۱</sup> (سیستم‌های شامل دو جسم دوار با سرعت‌های دوران متفاوت روی یک محور مشترک) را ارائه کردند و با روش میانگین‌گیری آن را مورد مطالعه قرار دادند. زینبر و کوین<sup>[۶]</sup> قفل‌شدگی تشدید در سیستم‌های سه درجه آزادی میرا را با روش‌های تجربی و تحلیلی بررسی کردند. کوین<sup>[۷]</sup> اثرات عدم تقارن محور دوران، گشتاور اعمالی و میرایی سیستم را بر روند قفل‌شدگی تشدید در محورهای دوار نامیزان، و نیز شرایط اولیه مناسب برای شکل‌گیری قفل‌شدگی را بررسی کرد. گوزن و همکاران<sup>[۸]</sup> از جاذب‌های ارتعاشی برای سرکوب تشدید در سیستم‌های دوار چند درجه آزادی استفاده کردند. فلیکس و همکاران<sup>[۹]</sup> نیز با استفاده از مواد ویسکوالاستیک غیرخطی با خصوصیات متغیر زمانی یک جاذب ارتعاشی برای سیستم‌های ارتعاشی غیرایده‌آل با اثرات سامرفلد، قفل‌شدگی فرکانسی و پدیده‌ی جهش طراحی کردند.

در میان محققین داخلی نیز تحقیقات زیادی در زمینه‌ی رفتار دینامیکی

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۱/۲۲، اصلاحیه ۱۳۹۴/۱/۵، پذیرش ۱۳۹۴/۱۰/۲۶.



شکل ۱. دیسک دوار نامیزان روی پایه‌ی صلب با تکیه‌گاه کشسان.

است. روی این بلوک یک موتور قرار گرفته و یک دیسک نامیزان نیز به موتور وصل شده است. دیسک دارای جرم  $M_d$  است و مرکز جرم آن به فاصله‌ی  $r$  از محور دوران قرار دارد و گشتاور ثابت  $T$  از طرف موتور به آن اعمال می‌شود تا شروع به دوران کند. فرض می‌شود که موتور دارای ضریب میرایی ویسکوز  $c_m$  در یاتاقان‌های خود باشد. به دلیل نامیزانی دیسک، دوران موتور موجب ارتعاشات پایه شده و این ارتعاشات باعث اعمال یک گشتاور مخالف به دیسک می‌شود. در غیاب بار خارجی انتظار می‌رود که با اعمال گشتاور ثابت  $T$  به دلیل وجود میرایی ویسکوز در یاتاقان‌ها، سرعت دوران موتور به یک مقدار ثابت میل کند و در آن سرعت ثابت بماند. اما در این مسئله به دلیل حضور گشتاور خارجی ناشی از ارتعاشات پایه، به‌ازای یک گشتاور اعمالی، ممکن است سرعت‌های متفاوتی وجود داشته باشد که وابسته به دامنه و سرعت ارتعاشات پایه‌اند. از طرف دیگر، ارتعاشات پایه نیز وابسته به سرعت دوران موتور است. برای درک رفتار دینامیکی این سیستم، مدل ریاضی آن را استخراج کرده و مورد تحلیل قرار می‌دهیم. در این مدل‌سازی فرض بر آن است که جرم بخش دوار موتور روی دیسک و جرم بخش غیر دوار آن روی پایه توزیع شده باشد. برای نوشتن معادلات تعادل دینامیکی سیستم، لازم است ابتدا شتاب مرکز جرم دیسک و نیز مرکز جرم پایه محاسبه شود. با توجه به شکل ۱، شتاب مرکز جرم پایه و دیسک به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned}\ddot{a}_b &= \ddot{y} j \\ \ddot{a}_d &= \left( -r\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \right) i \\ &+ \left( \ddot{y} + r\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \right) j\end{aligned}\quad (1)$$

که در آن  $\varphi$  زاویه‌ی دوران دیسک و  $i$  و  $j$  به ترتیب بردارهای یک‌ه در راستای افقی و قائم هستند. در نتیجه با استفاده از قانون دوم نیوتن و با توجه به نیروهای تکیه‌گاهی، معادله‌ی حرکت در راستای قائم را می‌توان چنین نوشت:

$$m_b \ddot{y} + c_b \dot{y} + k_b y + m_d \left( \ddot{y} + r\ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \right) = 0 \quad (2)$$

از طرفی براساس مفاهیم پایه‌ی دینامیک اجسام صلب، برآیند گشتاورهای وارد بر مرکز دیسک برابر است با:

$$\sum \vec{M}_C = \vec{J} \ddot{\varphi} + \vec{r} \times m_d \ddot{a}_d \quad (3)$$

سیستم‌های دوار و پایداری آنها<sup>[۱۰،۱۱]</sup> صورت گرفته است، اما به نظر می‌رسد در زمینه‌ی قفل‌شدگی تشدید و کنترل آن در سیستم‌های دوار نامیزان، تاکنون کاری در داخل کشور انجام نشده است.

در این تحقیق یک سیستم ارتعاشی با توان محدود در نظر گرفته می‌شود که روی یک پایه‌ی کشسان قرار دارد و توسط یک گشتاور معین راه‌اندازی می‌شود. فرض می‌شود که سیستم نامیزانی دارد و به‌هنگام راه‌اندازی سیستم ممکن است پدیده‌ی قفل‌شدگی تشدید رخ بدهد. در ادامه، معادلات غیر خطی دیفرانسیل حرکت استخراج می‌شود. سپس با استفاده از حل متناوب (به‌روش هارمونیک بالانس)، و با کمک پاره‌ی از فرضیات ساده‌کننده، دینامیک مسئله مورد بررسی قرار می‌گیرد و محدوده‌ی که در آن امکان قفل‌شدگی وجود دارد، تعیین می‌شود. خاطرنشان می‌سازد از روش هارمونیک بالانس برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های متناوب استفاده می‌شود؛ در این مسئله به دلیل ماهیت تناوبی سازوکار قفل‌شدگی، توصیف مناسبی از دینامیک مسئله ارائه می‌شود.

اگرچه می‌توان با بالانس کردن سیستم‌های دوار احتمال قفل‌شدگی تشدید و دیگر آسیب‌های جانبی را حذف کرد، اما این تدبیر همیشه کارساز نیست. زیرا در پاره‌ی از سیستم‌ها، نابالانسی مقداری مشخص و ثابت نیست و با تغییر شرایط کاری تغییر می‌کند یا در طول زمان و به دلیل عواملی مانند گرد و خاک و رسوب‌گذاری شکل گرفته و توسعه می‌یابد. در نتیجه استفاده از روش‌های جایگزین نیز باید مورد مطالعه قرار گیرد.

برای برهم زدن پدیده‌ی قفل‌شدگی می‌توان از اعمال ضربه یا نیروهای ناهم‌ساز با آهنگ حرکت، استفاده کرد. این کار باعث جهش سیستم به سمت پاسخ با دامنه‌ی کم‌تر می‌شود. در این صورت با کاهش دامنه‌ی ارتعاش، انرژی مصرف‌شده توسط سازوکارهای ارتعاشی شدیداً کاهش می‌یابد و این فرصت فراهم می‌شود که توان موتور صرف افزایش سرعت روتور و دور شدن از محدوده‌ی قفل‌شدگی تشدید شود.

در این تحقیق، پیشنهاد می‌شود برای تأثیرگذاری بر دینامیک سیستم، یک دیسک نامیزان دیگر، که روی یک محور آزاد قرار دارد و می‌تواند آزادانه بچرخد، به مجموعه افزوده شود. هنگامی که دیسک نامیزان اصلی شروع به دوران می‌کند، موجب تحریک پایه و ارتعاش آن می‌شود. ارتعاش پایه نیز به نوبه‌ی خود موجب تحریک دیسک نامیزان آزاد شده و آن را به حرکت درمی‌آورد. در این صورت حرکات دیسک الحاقی نیز بر حرکات پایه تأثیر می‌گذارد و دینامیک مجموعه را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بسته به شرایط اولیه و دامنه‌ی جابه‌جایی پایه، دیسک الحاقی ممکن است تنها حول محور خود نوسان کند یا آن که با سرعت ثابت یا متغیر شروع به دوران کند. در این تحقیق چگونگی تأثیرگذاری دیسک الحاقی بر دینامیک سیستم به صورت تحلیلی و عددی مورد بحث قرار گرفته است. نتایج به دست آمده با استفاده از حل عددی معادلات دیفرانسیل صحنه‌گذاری می‌شود.

نتایج این تحقیق را می‌توان برای کمپرسورها و دیگر ماشین‌های دوار که روی یک فونداسیون با پایه‌های کشسان قرار گرفته‌اند، به کار گرفت. بدیهی است برای ارزیابی کارایی روش پیشنهادی روی سیستم‌های پیچیده‌تر، تحقیقات بیشتری باید انجام شود.

## ۲. فیزیک مسئله و معادلات حاکم

در شکل ۱، یک بلوک صلب به جرم  $M_b$  نشان داده شده که حرکات آن به وسیله‌ی یک فنر با ضریب سختی  $k_b$  و یک میراگر با ضریب ویسکوزیته  $c_b$  مقید شده

تقریباً ثابتی بچرخد و دامنه‌ی نوسان‌های آن ناچیز باشد:

$$\cos(\varphi) \approx \cos(\omega t), \quad \sin(\varphi) \approx \sin(\omega t) \quad (6)$$

در نهایت، با استفاده از روش‌هایی همچون اویلر مرتبه اول و با کمک روش تعقیب، دستگاه معادلات جبری به دست آمده به‌ازای مقادیر مختلف گشتاور ورودی  $T$  حل می‌شود. در ابتدا برای صحه‌گذاری مدل‌سازی انجام گرفته و کدهای نرم‌افزاری تهیه شده، مقایسه‌ی با مطالعات پیشین<sup>[۱۲]</sup> صورت گرفته است. مقایسه‌ی صورت گرفته به‌ازای مقادیر عددی زیر است:

$$\begin{aligned} M_b &= 0.064 \text{ kg}, & M_d &= 0.0021 \text{ kg}, \\ k_b &= 142.27 \text{ N/m}, & c_b &= 0.001 \text{ N.s/m}, \\ r &= 0.003 \text{ m}, & T &= 10^{-5} \text{ N.m}, \\ J_C &= J_0 + M_d r^2, & J_0 &= 10^{-7} \text{ N.m}^2 \end{aligned}$$

در مطالعه‌ی مذکور<sup>[۱۲]</sup> ضریب میرایی دورانی دیسک برابر  $c_m = T/\Omega$  قرار داده شده که در آن  $\Omega$  سرعت مورد انتظار برای دوران دیسک در صورت عدم رخداد ارتعاش است و به‌عنوان پارامتر مورد مطالعه انتخاب شده است. در این مرجع روابط دینامیکی حاکم بر مسئله با فرض شرایط اولیه‌ی صفر به‌صورت عددی حل شده، و سرعت نهایی دوران ( $\omega$ ) به‌ازای مقادیر مختلف  $\Omega$  تعیین شده است. بدیهی است با افزایش مقدار  $\Omega$ ، ضریب میرایی  $c_m = T/\Omega$  کاهش می‌یابد و به‌دلیل افزایش شتاب زاویه‌ی دیسک، احتمال گریز از سازوکار قفل‌شدگی افزایش می‌یابد.

در شکل ۲ نتایج حاصل از مطالعه‌ی حاضر را در مقایسه با نتایج مطالعه‌ی پیشین<sup>[۱۲]</sup> نمایش داده شده است. در این شکل  $\omega_0 = \sqrt{k_b/(M_b + M_d)}$  برابر با بسامد طبیعی نوسان است. چنان‌که مشاهده می‌شود با افزایش  $\Omega$  (کاهش  $c_m$ ) در حد فاصل نقاط  $C$  و  $D$  سیستم از حالت قفل‌شدگی فرکانسی عبور کرده و به سرعت بالاتری جهیده است. شکل ۲ نشان می‌دهد پاسخ‌های به دست آمده از روش هارمونیک بالانس بسیار کمی با نتایج آن مطالعات<sup>[۱۲]</sup> دارد. قابل ذکر است در مرجع مذکور نتایج عددی تنها برای حالت گشتاور ثابت و شرایط اولیه‌ی صفر تعیین شده است، حال آن‌که با تغییر این شرایط احتمال رخداد قفل‌شدگی در مقادیر دیگر  $\Omega$  نیز متغی نیست.

در ادامه برای بررسی سازوکار قفل‌شدگی فرکانسی حل‌های عددی مختلفی انجام شده است. در حل‌های عددی که در پی می‌آید، جرم موتور ناچیز فرض شده، و در تعریف نامیرانی دیسک نیز فرض بر آن است که خود دیسک دارای جرم  $m_1$

که در آن  $\bar{J}$ ، گشتاور قطبی جرم حول مرکز دیسک و  $\vec{r}$  بردار موقعیت مرکز جرم دیسک نسبت به مرکز هندسی آن است. رابطه‌ی ۳ پس از پاره‌ی عملیات جبری ساده می‌شود به:

$$J_C \ddot{\varphi} + c_m \dot{\varphi} + m_d \ddot{r} \cos(\varphi) - T = 0 \quad (4)$$

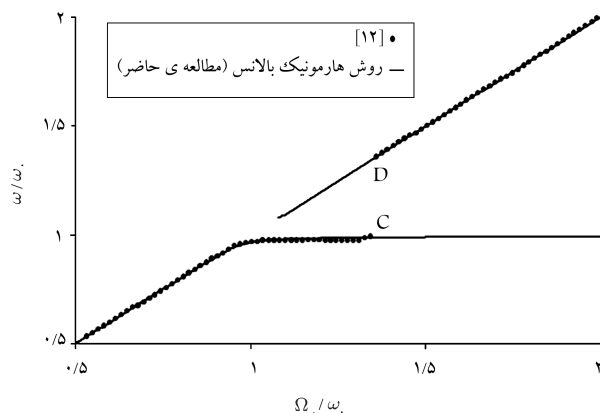
که در آن  $J_C = \bar{J} + M_d r^2$ ، گشتاور قطبی جرم حول مرکز جرم دیسک است. رابطه‌های ۲ و ۴ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی را تشکیل می‌دهند که حل دقیق آن عملاً غیرممکن است و برای به دست آوردن حل تقریبی آن از فرضیات ساده‌کننده‌ی استفاده خواهد شد.

### ۳. حل هارمونیک

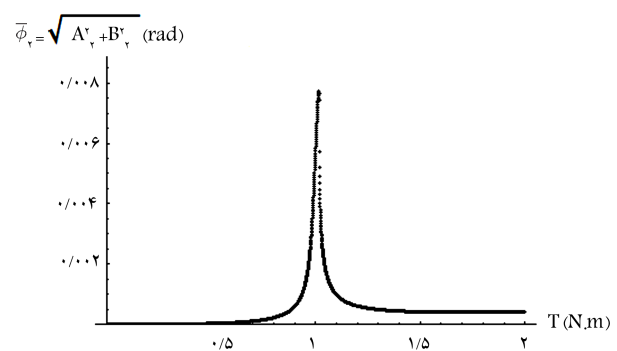
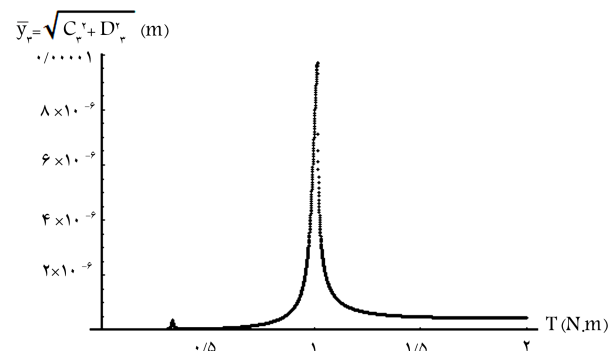
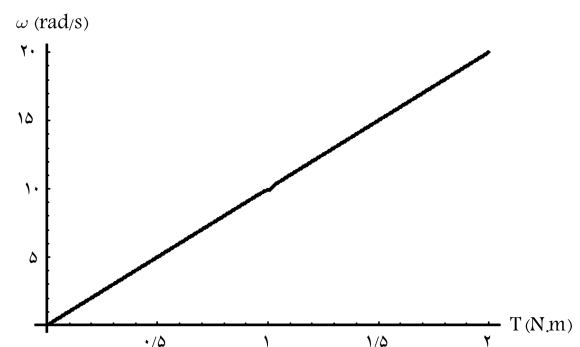
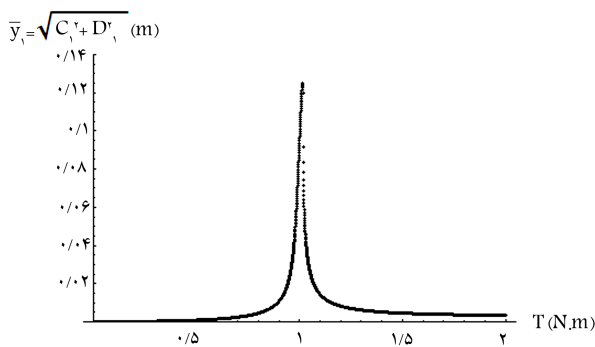
نتایج عددی نشان‌گر آن است که با اعمال یک گشتاور مشخص، به مرور زمان ارتعاشات سیستم به یک حالت پایدار با دوره‌ی تناوب و دامنه‌ی ثابت می‌رسد، اما لزوماً نمی‌توان شکل جواب‌ها را هارمونیک در نظر گرفت. برای بررسی رفتار سیستم در حالت پایدار، می‌توان از روش هارمونیک بالانس استفاده کرد که یکی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی زمانی برای یافتن جواب‌های متناوب سیستم است. در این روش با فرض پایداری و متناوب بودن پاسخ سیستم، ابتدا آن را با یک سری فوریه تقریب می‌زنند. سپس تابع تقریب را در معادله‌ی دیفرانسیل حرکت جایگذاری می‌کنند و پس از تغییر فرم جملات مرتبه بالای توابع مثلثاتی به عبارات‌های با توان مرتبه ۱، دو طرف معادله‌ی دیفرانسیل را برحسب ضرایب توابع مثلثاتی مرتب می‌کنند. در نهایت با مساوی هم قرار دادن ضرایب توابع مثلثاتی متناظر در دو سوی معادله، دسته‌ی از معادلات جبری به دست می‌آید که با حل آنها، ضرایب مجهول سری فوریه محاسبه می‌شود. از آنجا که سری فوریه‌ی کامل دارای بی‌نهایت عبارت است، اعمال روش هارمونیک بالانس منجر به ایجاد بی‌نهایت معادله‌ی جبری وابسته می‌شود که عملاً حل آنها ممکن نیست. از این رو برای حل عددی مسئله، تابع تقریب به‌صورت یک سری فوریه محدود در نظر گرفته می‌شود، تا تعداد معادلات جبری به دست آمده در حد معقولی باقی بماند. برای حل تحلیلی معادله‌های ۲ و ۴ ابتدا پاسخ دستگاه مطابق روابط ۵ در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega t + A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) \\ &\quad + A_3 \sin(3\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + \dots \\ y &= y_0 + C_1 \sin(\omega t) + D_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(2\omega t) + D_2 \cos(2\omega t) \\ &\quad + C_3 \sin(3\omega t) + D_3 \cos(3\omega t) + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن  $\omega$  سرعت متوسط دوران دیسک و  $y_0$  جابه‌جایی متوسط پایه است. در این پاسخ فرض بر آن است که با دوران دیسک و به‌دلیل نامیرانی آن، پایه نیز به ارتعاش درمی‌آید و ارتعاش پایه نیز به‌نوبه‌ی خود سرعت دوران را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در نتیجه می‌توان گفت کل پاسخ مجموعه تحت تأثیر سرعت متوسط دوران دیسک یعنی  $\omega$  است و با فرض متناوب بودن پاسخ، می‌توان دوره‌ی تناوب نوسان‌ها را برابر  $2\pi/\omega$  در نظر گرفت. سپس با استفاده از روش هارمونیک بالانس دستگاه معادلات دیفرانسیل ۲ و ۴ تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری شده است. در این بخش برای اجرای روش هارمونیک بالانس، و با فرض این که دیسک با سرعت



شکل ۲. سرعت دورانی واقعی در مقایسه با سرعت دورانی مورد انتظار.



شکل ۳. سرعت دوران دیسک و دامنه‌ی نوسان سرعت برحسب گشتاور موتور ( $m_2 = 0.05$ ).

شکل ۴. دامنه‌ی ارتعاشات پایه برحسب گشتاور موتور ( $m_2 = 0.05$ ).

که مشاهده می‌شود، پایه می‌تواند در بسامد طبیعی سیستم و نیز یک‌سوم بسامد طبیعی که یکی از زیرهارمونی‌های سیستم است، دچار تشدید شود. اما دامنه‌ی نوسان  $\bar{y}_2$  در زیرهارمونی  $\omega = 3.33 \text{ rad/s}$  ناچیز است. این بدان معناست که می‌توان رفتار سیستم را تا حدود زیادی مشابه ارتعاشات خطی سیستم‌های یک درجه آزادی با تحریک هارمونیک توصیف کرد.

توان مصرفی متوسط موتور ( $T_\omega$ ) و دامنه‌ی نوسان توان مصرفی ( $\bar{\varphi}_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$ ) برحسب سرعت دوران موتور در شکل ۵ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در بسامد طبیعی سیستم، این دو مقدار ناگهان افزایش یافته و پس از آن دوباره کاهش می‌یابند؛ اگرچه در این مورد، به دلیل نامیزانی کوچک روتور، این تغییرات چندان محسوس نیست. این امر نشان‌گر آن است که افزایش ارتعاشات سیستم موجب مصرف توان بیشتری نیز می‌شود. شکل ۵ همچنین نشان می‌دهد که در دوره‌های بالا، با افزایش سرعت دوران و در نتیجه بسامد ارتعاشات سیستم، توان مصرفی سیستم تدریجاً افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر اگرچه در بسامدهای بالا دامنه‌ی نوسان کوچک است، اما توان مستهلک شده توسط میراگر ویسکوز قابل توجه است.

در ادامه، با ثابت نگه داشتن جرم کلی دیسک ( $M_d = 0.5$ )، جرم نامیزران متصل به آن به  $m_2 = 0.2$  افزایش داده شده و دستگاه معادلات دیفرانسیل سیستم با روش هارمونیک بالانس و با مفروضات پیش‌گفته مجدداً حل شد. بدیهی است در این حالت جرم کلی سیستم و در نتیجه بسامد طبیعی آن ثابت می‌ماند. در شکل ۶ تغییرات بسامد نوسان سیستم برحسب گشتاور موتور نشان داده شده است. در این شکل خط توپر نشان‌گر بخش پایدار و خط چین نشان‌گر بخش ناپایدار پاسخ است. چنان که مشاهده می‌شود با افزایش سرعت دوران موتور و در نزدیکی‌های بسامد طبیعی سیستم، رابطه‌ی گشتاور - سرعت از حالت خطی خارج می‌شود و با وجود افزایش قابل توجه گشتاور، سرعت دوران و در نتیجه بسامد

و شعاع  $R$  بوده و کاملاً بالانس است، اما جرم متمرکز  $m_2$  در فاصله‌ی  $d$  از مرکز دیسک به آن وصل شده است. در این صورت:

$$\begin{aligned} M_d &= m_1 + m_2, & r &= m_2 d / (m_1 + m_2), \\ J_C &= m_1 R^2 / 2 + m_2 d^2. \end{aligned} \quad (7)$$

در تمام حل‌های عددی ارائه شده، مقادیر فیزیکی و هندسی داده شده عبارت است از:

$$\begin{aligned} M_b &= M_d = 0.5, & k_b &= 10^6, & c_b &= 0.2, \\ c_m &= 0.1, & R &= d = 0.5 \end{aligned} \quad (8)$$

در ابتدا دیسک دارای نامیزانی کوچک  $m_2 = 0.05$  فرض شده است. در شکل ۳ بسامد زاویه‌ی دوران دیسک (که بسامد اصلی ارتعاشات سیستم است) و دامنه‌ی نوسان آن برحسب گشتاور موتور در هارمونی دوم ( $\bar{\varphi}_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$ ) نشان داده شده است (در دیگر هارمونی‌ها دامنه برابر صفر بوده است). چنان که مشاهده می‌شود با افزایش ولتاژ، سرعت دوران دیسک به صورت خطی افزایش می‌یابد و تنها در نزدیکی  $\omega_n = \sqrt{k_b / (m_b + m_d)} = 10 \text{ rad/s}$  (که برابر بسامد طبیعی سیستم است) اندکی انحراف از حالت خطی دیده می‌شود.

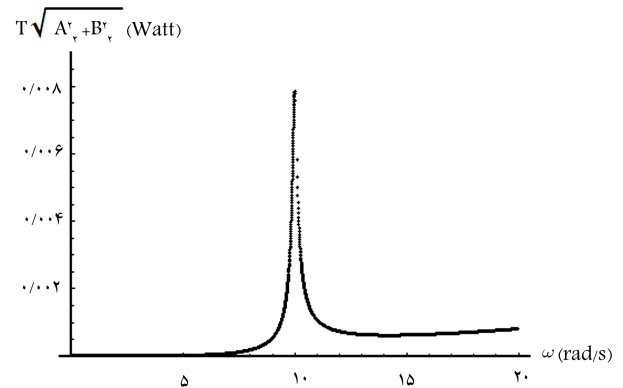
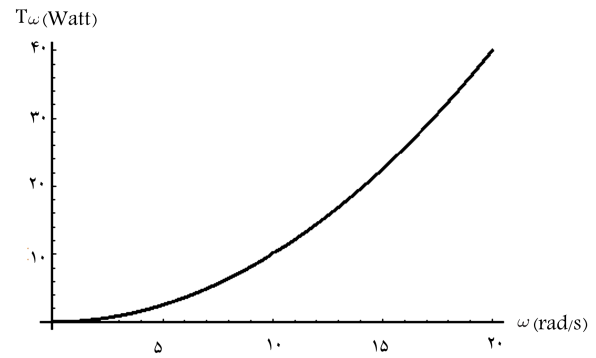
باید توجه داشت چون نتایج ارائه شده برای حالت پاسخ پایدار سیستم به دست آمده، این نتایج تنها زمانی می‌تواند معتبر باشد که افزایش ولتاژ سیستم به صورت تدریجی و شبه استاتیک انجام شده باشد. در این صورت زمان کافی برای رسیدن به حالت پایدار در اختیار سیستم قرار می‌گیرد.

در شکل ۴ دامنه‌ی ارتعاشات پایه برحسب گشتاور موتور در هارمونی‌های اول و سوم ( $\bar{y}_1 = \sqrt{C_1^2 + D_1^2}$  و  $\bar{y}_3 = \sqrt{C_3^2 + D_3^2}$ ) نشان داده شده است؛ چنان

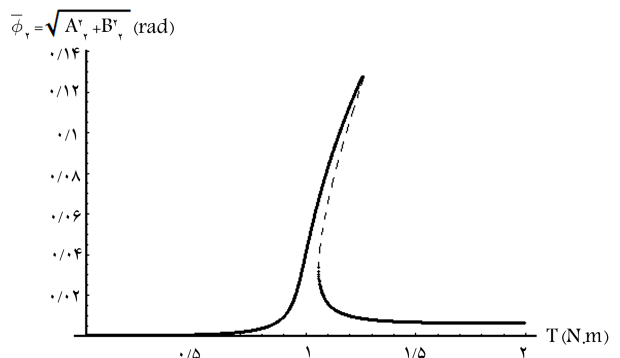
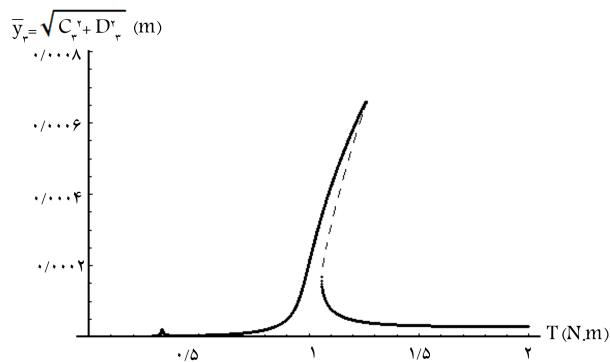
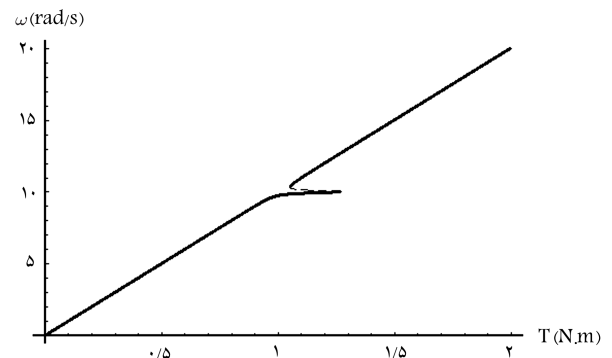
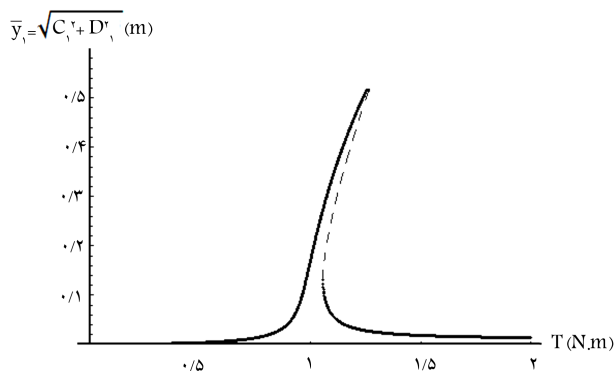
ارتعاش افزایش زیادی نمی‌یابد. در این حالت می‌توان گفت که بسامد ارتعاشات سیستم روی بسامد تشدید قفل شده است؛ به عبارت دیگر پدیده‌ی قفل‌شدگی تشدید رخ داده است. یادآور می‌شود که از روش هارمونیک بالانس برای به دست آوردن پاسخ پایدار سیستم استفاده می‌شود؛ در هنگام استفاده از روش تعقیب، به صورت ضمنی فرض شده است که تغییرات گشتاور سیستم به صورت شبه استاتیکی صورت می‌گیرد. چنان که در شکل ۶ نیز مشاهده می‌شود در بعضی از گشتاورهای اعمالی، سیستم دارای پاسخ‌های چندگانه است. در نتیجه با اعمال ضربه یا شرایط ناگهانی، رفتار سیستم می‌تواند بین دو شاخه‌ی متفاوت از جواب‌ها جهش کند. مثلاً در مورد این سیستم، یک ضربه‌ی ناگهانی می‌تواند سیستم را از حالت قفل‌شدگی تشدید خارج کند و سرعت دوران سیستم به مقدار پایدار بعدی افزایش یابد.

در شکل ۷ تغییرات دامنه ارتعاش پایه برحسب گشتاور موتور برای حالت نامیزانی بزرگ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، رفتار غیرخطی ارتعاشی سیستم در نزدیکی گشتاور متناظر با بسامد طبیعی سیستم کاملاً واضح بوده و در بعضی از گشتاورها، سیستم دارای جواب‌های چندگانه است و می‌تواند بین آنها جهش کند.

توان مصرفی موتور برحسب سرعت دوران آن در شکل ۸ نشان داده شده است. مقایسه‌ی این شکل با شکل ۵ نشان می‌دهد که با افزایش مقدار نامیزانی، توان مصرفی موتور به صورت محلی و در محدوده‌ی قفل‌شدگی، نسبت به حالت قبل افزایش چشمگیری یافته است. به همین دلیل، گذراز پدیده‌ی قفل‌شدگی تشدید نیازمند توان زیادی است که در صورت تأمین نشدن آن، سیستم در حالت تشدید باقی می‌ماند یا آن که باید در سرعت پایین‌تری کار کند. البته راه دیگر آن است

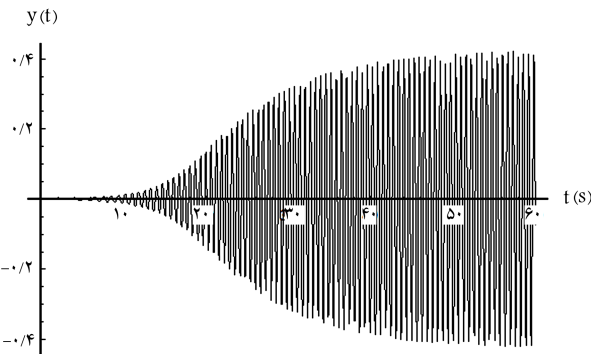
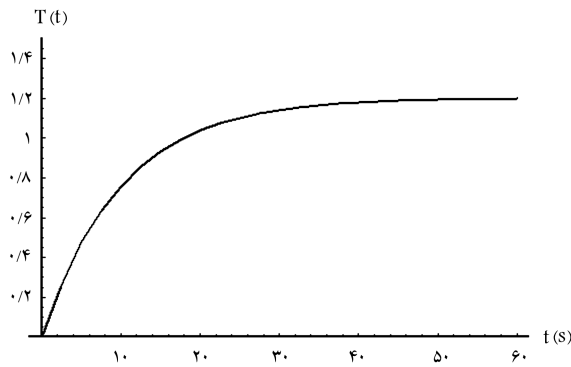


شکل ۵. توان مصرفی متوسط و دامنه‌ی تغییرات توان مصرفی برحسب گشتاور موتور ( $m_2 = 0.05$ ).

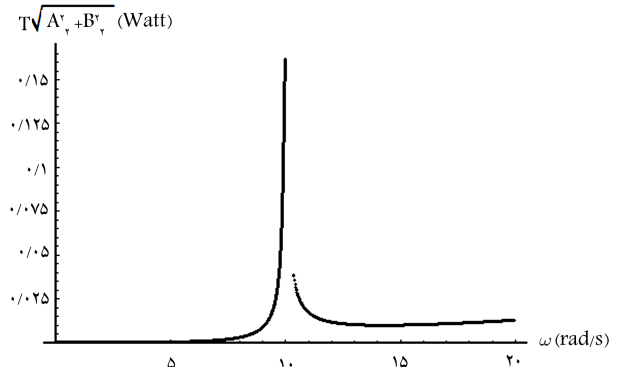
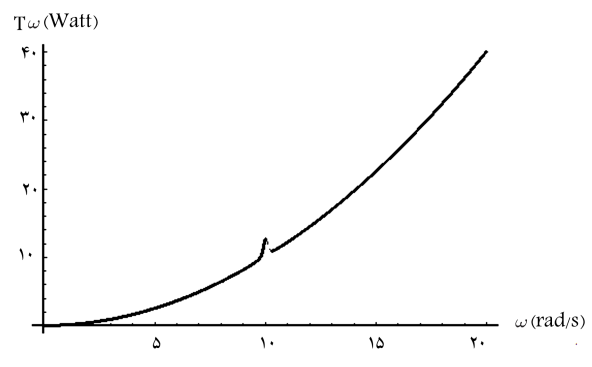


شکل ۷. دامنه ارتعاشات پایه بر حسب گشتاور موتور ( $m_2 = 0.2$ ).

شکل ۶. سرعت دوران دیسک و دامنه‌ی نوسان سرعت برحسب گشتاور موتور ( $m_2 = 0.2$ ).



شکل ۹. گشتاور اعمال شده به موتور و ارتعاشات پایه برحسب زمان ( $s = 0.1$ ،  $m_2 = 0.2$  و  $c_b = 0.2$ ).



شکل ۸. توان مصرفی متوسط و دامنه تغییرات توان مصرفی بر حسب سرعت موتور ( $m_2 = 0.2$ ).

و  $\bar{y} \approx 0.05$  باشد تا با مقایسه‌ی حل زمانی و حل پرلودیک، بتوان درستی دامنه‌های پیش‌بینی شده توسط روش هارمونیک بالانس و امکان پدیده‌ی جهش در ولتاژ پیش‌بینی شده را مورد ارزیابی قرار داد. برای افزایش تدریجی ولتاژ ابتدا در ولتاژ پیش‌بینی شده را مورد ارزیابی قرار داد. شکل ۹ نحوه‌ی تغییر گشتاور و دامنه‌ی ارتعاشات پایه را در طول زمان نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که دامنه‌ی نوسان پایه به تدریج افزایش می‌یابد تا به یک مقدار ثابت و بزرگ برسد. در ادامه برای افزایش سریع ولتاژ  $s = 0.5$  قرار داده شد. نتایج مربوط به این حالت در شکل ۱۰ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود در این حالت دامنه‌ی نوسان تیر ابتدا به سرعت افزایش می‌یابد، اما پس از مدت کوتاهی رو به کاهش نهاده و مقدار نهایی دامنه ارتعاش در مقدار کوچکی ثابت می‌شود. به عبارت دیگر ابتدا پاسخ پایدار سیستم به سمت جواب با دامنه‌ی بزرگ‌تر میل کرده است، اما در میانه‌ی راه جهش بین پاسخ‌های پایدار روی داده و پاسخ سیستم به سمت جواب با دامنه‌ی کم‌تر میل کرده است.

مقایسه‌ی شکل ۷ با شکل ۹ نشان می‌دهد که مقادیر پیش‌بینی شده توسط روش هارمونیک بالانس، با مقادیر نهایی دامنه‌ی ارتعاش در حل زمانی بسیار نزدیک هم هستند. به عنوان مثال، در شکل ۷ (روش هارمونیک بالانس) دامنه‌ی ارتعاشات در هارمونی اول و در گشتاور  $T = 1.2 \text{ N.m}$  برابر  $0.452 \text{ m}$  است، حال آن که در شکل ۹ (روش عددی) دامنه‌ی پیش‌بینی شده برای ارتعاشات برابر  $0.428 \text{ m}$  است. به عبارت دیگر، روش هارمونیک بالانس توانسته است رفتار سیستم را در حالت پایدار با دقت بسیار خوبی پیش‌بینی کند. از این رو می‌توان این روش را در مطالعه‌ی پارامترها یا سازوکارهای پیشنهادی دیگر برای گذر از قفل‌شدگی تشدید مورد استفاده قرار داد.

که گشتاور موتور به صورت تدریجی افزایش نیابد، بلکه در همان ابتدا در بیشترین مقدارش اعمال شود یا آن که به سرعت بیشینه شود تا با اعمال حالتی شبیه به ضربه، امکان جهش از حالت با ارتعاشات بزرگ به حالت پایدار دیگر که دارای ارتعاشات کوچک‌تری است، فراهم شود (شکل ۷). در ادامه برای صحه‌گذاری بر نتایج به دست آمده، معادلات دیفرانسیل حرکت به روش عددی نیز برای حالت دوم از سه حالت فوق حل می‌شود.

#### ۴. شبیه‌سازی عددی

برای تأیید نتایج به دست آمده از روش هارمونیک بالانس، معادلات دیفرانسیل ۲ و ۴ ابتدا به فضای حالت منتقل شده است. سپس با اعمال گشتاور خارجی، تغییرات زمانی موقعیت پایه و زاویه‌ی دوران دیسک به دست آمده است. در این شبیه‌سازی از مقادیر عددی ارائه شده در رابطه‌ی ۸ استفاده شده و جرم نامیزان و ضریب میرایی ویسکوز پایه نیز به ترتیب برابر  $m_2 = 0.2$  و  $c_b = 0.2$  قرار داده شده است. همچنین فرض بر آن است که گشتاور موتور تدریجاً و به صورت نمایی بیشینه می‌شود، به گونه‌ی که از رابطه‌ی ۹ تبعیت کند:

$$T_v = T_f(1 - e^{-st}) \quad (9)$$

که در آن  $T_f$  و  $s$  به ترتیب گشتاور نهایی و نرخ افزایش گشتاور است. در این شبیه‌سازی فرض بر آن است که  $T_f = 1.2$  و سیستم در ابتدای شبیه‌سازی در حالت سکون باشد. مقدار گشتاور نهایی با توجه به شکل ۷ و به گونه‌ی انتخاب شده که سیستم دارای دو پاسخ پایدار و متفاوت  $\bar{y} \approx 0.46$

سیستم قرار داده شده است که می‌تواند آزادانه دوران کند. استفاده از این دیسک بدان منظور است که بتواند با ارتعاشات خود، نظم ارتعاش پایه را به هم بزند. در حقیقت با ارتعاش پایه، این دیسک نیز به حرکت درمی‌آید و شروع به جذب انرژی می‌کند. اگر حرکت‌های دیسک نامنظم باشد، نظم ارتعاش پایه را برهم خواهد زد. اگر حرکت دیسک الحاقی منظم اما در فاز مخالف دیسک اصلی باشد، همانند یک جرم الحاقی، بالانس سیستم و در نتیجه کاهش دامنه‌ی ارتعاش را به عهده خواهد گرفت. اما اگر حرکات آن منظم و هم‌فاز با جرم نامیزان اصلی باشد، باعث افزایش دامنه‌ی ارتعاش و دشواری گذر از بسامد بحرانی خواهد شد. در این حالت نیز می‌توان با استفاده از روش‌های هوشمند تنها در زمان قفل‌شدگی تشدید به دیسک اجازه‌ی حرکت داد و در دیگر زمان‌ها با بستن دیسک، از حرکت آن جلوگیری کرد. با اضافه شدن یک دیسک نامیزان، معادلات حرکت سیستم (روابط ۲ و ۴) را می‌توان چنین بازنویسی کرد:

$$m_b \ddot{y} + c_b \dot{y} + k_b y + m_{d1} (\ddot{y} + r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1) - r_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1)) + m_{d2} (\ddot{y} + r_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2) - r_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2)) = 0 \quad (10)$$

$$J_{C1} \ddot{\varphi}_1 + c_{m1} \dot{\varphi}_1 + m_{d1} \ddot{y} r_1 \cos(\varphi_1) - T = 0 \quad (11)$$

$$J_{C2} \ddot{\varphi}_2 + c_{m2} \dot{\varphi}_2 + m_{d2} \ddot{y} r_2 \cos(\varphi_2) = 0 \quad (12)$$

که در آن  $\varphi_1$  و  $J_{C2}$  به ترتیب زاویه‌ی دوران دیسک الحاقی و گشتاور قطبی جرم حول مرکز دیسک هستند  $J_{C1} = J_{G1} + M_{d1} r_1^2$  و  $J_{C2} = J_{G2} + M_{d2} r_2^2$  دیسک آزاد حل‌های زمانی نشان می‌دهند بسته به شرایط اولیه و مقدار نامیزانی، دیسک آزاد ممکن است بچرخد و نوسان کند و یا بدون چرخش نوسان کند. در ادامه برای بررسی اثر نامیزانی دیسک آزاد بر ارتعاشات سیستم، ابتدا یک حل کلی برای مسئله در نظر گرفته شده است:

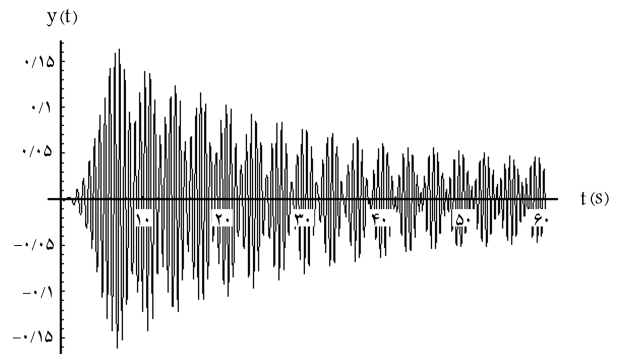
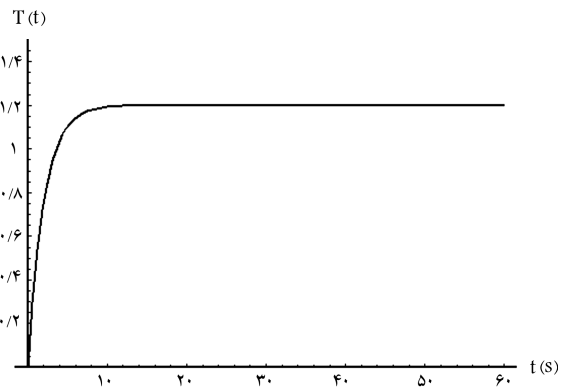
$$\varphi_1 = \omega t + A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t) + B_2 \cos(2\omega t) + A_3 \sin(3\omega t) + B_3 \cos(3\omega t) + \dots$$

$$y = y_0 + C_1 \sin(\omega t) + D_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(2\omega t) + D_2 \cos(2\omega t) + C_3 \sin(3\omega t) + D_3 \cos(3\omega t) + \dots$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \omega t + P_1 \sin(\omega t) + Q_1 \cos(\omega t) + P_2 \sin(2\omega t) + Q_2 \cos(2\omega t) + P_3 \sin(3\omega t) + Q_3 \cos(3\omega t) + \dots \quad (13)$$

که در آن فرض شده است که دیسک آزاد به دلیل ارتعاشات پایه، شروع به دوران می‌کند و سرعت دوران آن برابر  $\omega$  است، اما نسبت به دیسک اصلی دارای اختلاف فاز  $\varphi_0$  است. امکان وجود چنین پاسخی با استفاده از حل‌های عددی در فضای زمان تأیید شده است. حل‌های عددی نشان می‌دهند در نامیزانی‌های کوچک برای به چرخش درآوردن دیسک الحاقی باید شرایط اولیه‌ی مناسب وجود داشته باشد. اما در نامیزانی‌های بزرگ به دلیل ارتعاشات بزرگ پایه، دیسک الحاقی به سادگی می‌تواند به چرخش درآید. در این بخش برای اجرای روش هارمونیک بالانس، فرض شده است که دیسک‌ها با سرعت تقریباً ثابت بچرخند و دامنه‌ی نوسان آنها ناچیز باشد:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1) &\approx \cos(\omega t), & \sin(\varphi_1) &\approx \sin(\omega t), \\ \cos(\varphi_2) &\approx \cos(\omega t + \varphi_0), & \sin(\varphi_2) &\approx \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (14)$$

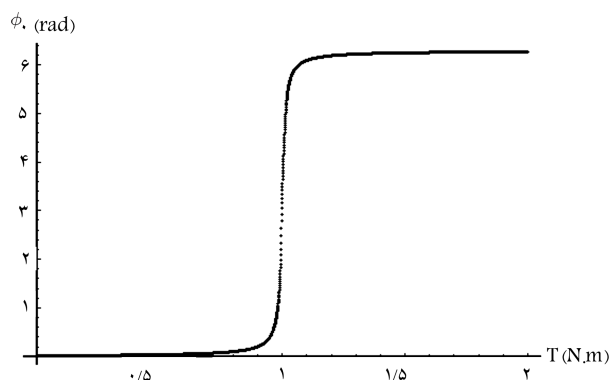


شکل ۱۰. گشتاور اعمال شده به موتور و ارتعاشات پایه برحسب زمان ( $\delta = 0.5^\circ$ ،  $m_2 = 0.2$  و  $c_b = 0.2$ ).

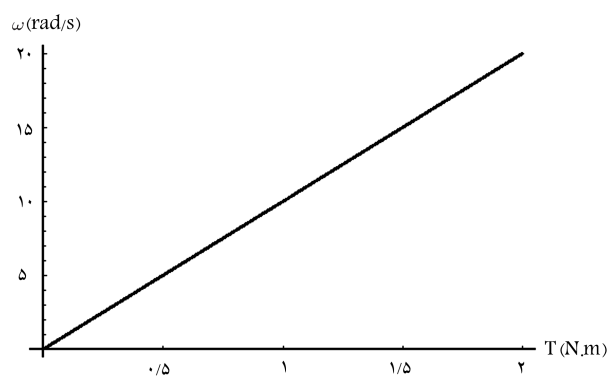
## ۵. کنترل ارتعاشات با افزودن یک دیسک نامیزان آزاد

چنان‌که در بخش قبل دیده شد در نزدیکی بسامد طبیعی، سیستم دارای پاسخ‌های چندگانه با دامنه‌های ارتعاشی متفاوت است. در هنگام راه‌اندازی سیستم، اگر توان موتور کم باشد سرعت دوران دیسک تدریجاً و به‌کندی افزایش می‌یابد و با نزدیک شدن به محدوده‌ی بسامد طبیعی (دور بحرانی)، دامنه‌ی ارتعاشی سیستم به شدت افزایش می‌یابد و با مصرف کردن توان موتور، امکان افزایش سرعت را از آن می‌گیرد. در واقع در این حالت سیستم با وجود امکان پاسخ‌های متفاوت، در حالت پاسخ با دامنه‌ی بزرگ قرار می‌گیرد. برای گذر از این حالت یا باید موتور توان زیادی داشته باشد یا با اعمال ضربه یا هر سازوکار تخریبی دیگر، دامنه و آهنگ ارتعاش -- حتی برای مدتی محدود -- برهم زده شود تا با کاهش دامنه‌ی ارتعاش، توان موتور صرف افزایش دور و گذر از حالت بحرانی شود.

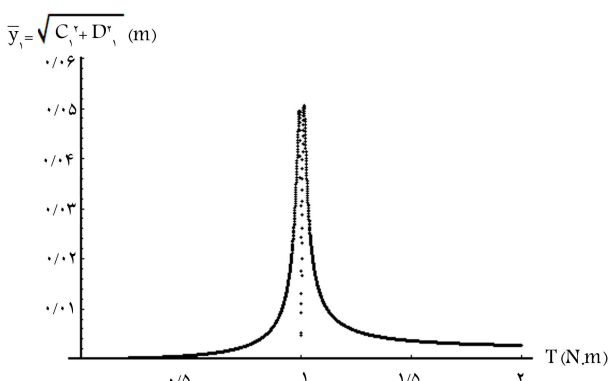
به‌عنوان یک ایده، می‌توان از یک جرم و فنر متصل شده به پایه به‌عنوان جاذب ارتعاشی استفاده کرد. جرم و سختی سیستم الحاقی را می‌توان به‌گونه‌ی انتخاب کرد که در بسامد بحرانی قبلی سیستم، سیستم الحاقی به‌صورت کامل ارتعاشات پایه را جذب کند و در نتیجه موتور بتواند به سادگی از این دور بگذرد. اما افزودن چنین سیستمی باعث ایجاد دو بسامد طبیعی جدید برای سیستم، پیرامون بسامد طبیعی قبلی می‌شود و این امکان به وجود می‌آید که در هریک از این بسامدهای جدید سیستم دچار قفل‌شدگی تشدید شود. در چنین حالتی می‌توان از سازوکارهای هوشمند استفاده کرد و حرکت سیستم الحاقی را در نزدیکی بسامد مورد نظر آزاد گذارد و در دیگر بسامدها آن را در حالت قفل یا بسته نگه داشت. در این بخش برای ایجاد یک سازوکار تخریبی، یک دیسک نامیزان دیگر روی



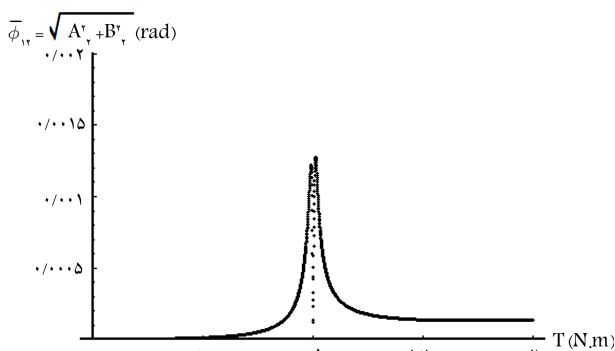
شکل ۱۲. اختلاف فاز بین دیسک اصلی و دیسک الحاقی ( $m_{12} = m_{22} = 0.2^\circ$ )



شکل ۱۱. سرعت دوران دیسک و دامنه‌ی نوسان سرعت برحسب گشتاور موتور ( $m_{12} = m_{22} = 0.2^\circ$ )



شکل ۱۳. دامنه‌ی نوسان پایه ( $m_{12} = m_{22} = 0.2^\circ$ )



نمی‌شود. همچنین در نزدیکی گشتاور مربوط به دور بحرانی ( $T = 1 \text{ N.m}$ )، دو دیسک در فاز مقابل هم قرار گرفته‌اند ( $\phi_0 = \pi$ ) و دامنه‌ی نوسان دچار آنتی تشدید شده و به شدت کاهش یافته است. به عبارت دیگر، در این گشتاور دو دیسک در فاز مخالف هم قرار گرفته و ضمن میزان کردن مجموعه، بدون نوسان و با سرعت ثابتی می‌چرخند. با افزایش گشتاور اعمالی به مقادیر بزرگ‌تر، اختلاف فاز دو دیسک به  $\phi_0 = 2\pi$  افزایش می‌یابد و نامیزانی دو دیسک با هم جمع می‌شود. شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که در صورت وجود شرایط اولیه مناسب، امکان چنین جوابی وجود دارد.

در شبیه‌سازی دوم، دو دیسک با نامیزانی کوچک و متفاوت  $m_{12} = 0.4^\circ \text{ kg}$  و  $m_{22} = 0.2^\circ \text{ kg}$  در نظر گرفته شده است. در این شبیه‌سازی فرض بر آن است که شرایط اولیه مناسب برای چرخش دیسک الحاقی نیز وجود دارد و در حالت پایدار این دیسک نیز با سرعت دیسک اصلی دوران می‌کند. بنابراین پاسخ سیستم مطابق رابطه‌ی ۱۳ در نظر گرفته شده است. در شکل ۱۴ سرعت دوران و دامنه‌ی نوسان دیسک اصلی برحسب گشتاور اعمالی در حالت پایدار نشان داده شده است. در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نیز اختلاف فاز بین دو دیسک و دامنه‌ی جابه‌جایی پایه نشان داده شده است. مطابق شکل ۱۴، در نزدیکی بسامد طبیعی (دور بحرانی) اندکی انحراف از حالت خطی در منحنی گشتاور - سرعت زاویه‌ای دیده می‌شود. همچنین با توجه به این شکل در گشتاور مربوط به این سرعت زاویه‌ای، دامنه‌ی نوسان سرعت دچار تشدید شده و به بیشترین مقدار خود می‌رسد و دیگر مانند حالت قبل دیسک‌ها با سرعت ثابت نمی‌چرخند.

با توجه به شکل ۱۶، در نزدیکی دور بحرانی دامنه‌ی نوسان دچار تشدید شده

برای شبیه‌سازی نامیزانی دیسک‌ها نیز فرض شده است که دیسک‌های اول و دوم به ترتیب دارای جرم میزان  $m_{11}$  و  $m_{21}$ ، شعاع  $R_1$  و  $R_2$ ، و جرم نامیزان  $m_{12}$  و  $m_{22}$  در فاصله‌ی  $d_1$  و  $d_2$  از مرکز باشند، و در نتیجه:

$$\begin{aligned} M_{d1} &= m_{11} + m_{12}, & M_{d2} &= m_{21} + m_{22}, \\ r_1 &= m_{12}d_1/(m_{11} + m_{12}), & r_2 &= m_{22}d_2/(m_{21} + m_{22}), \\ J_{C1} &= m_{11}R_1^2/2 + m_{12}d_1^2, & J_{C2} &= m_{21}R_2^2/2 + m_{22}d_2^2, \\ \bar{J}_A &= M_b L_b^2/3 + M_{d1}L_b^2 + M_{d2}L_b^2. \end{aligned} \quad (15)$$

در تمام شبیه‌سازی‌هایی که در ادامه می‌آید، از کمیت‌های متریک و مقادیر عددی زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} M_{d1} &= M_{d2} = 0.25 \text{ kg}, & M_b &= 0.5 \text{ kg}, \\ R_1 &= R_2 = d_1 = d_2 = 0.05 \text{ m} \end{aligned}$$

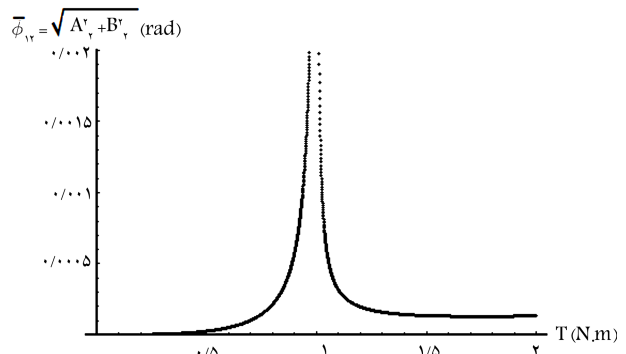
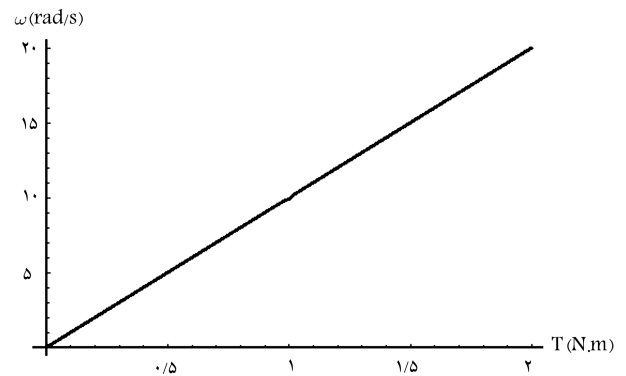
در نخستین شبیه‌سازی فرض شد که دو دیسک دارای جرم نامیزان یکسان و کوچک  $m_{12} = m_{22} = 0.2^\circ \text{ kg}$  باشند. سپس با حل معادلات جبری به دست آمده از روش هارمونیک بالانس، پارامترهای مجهول رابطه‌ی ۱۳ محاسبه شده‌اند. شکل ۱۱ سرعت دوران و دامنه‌ی نوسان دیسک اصلی را بر حسب گشتاور اعمالی در حالت پایدار نشان می‌دهد. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نیز اختلاف فاز بین دو دیسک و دامنه‌ی جابه‌جایی پایه نشان داده شده است. با توجه به شکل‌های ۱۱ تا ۱۳ ملاحظه می‌شود که در این حالت سرعت دوران دیسک به صورت کاملاً خطی و با تغییر ولتاژ افزایش یافته و هیچ‌گونه تغییر رفتاری در نزدیکی بسامد طبیعی ( $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ ) دیده



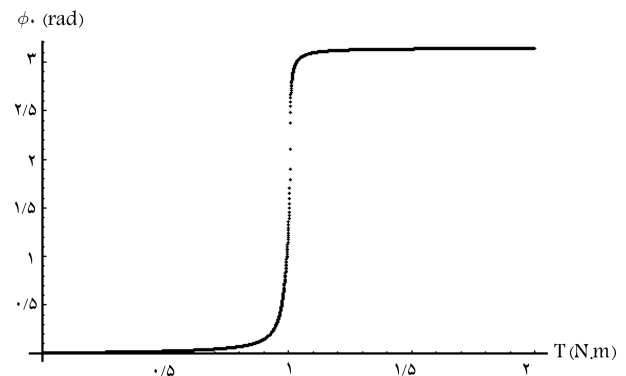
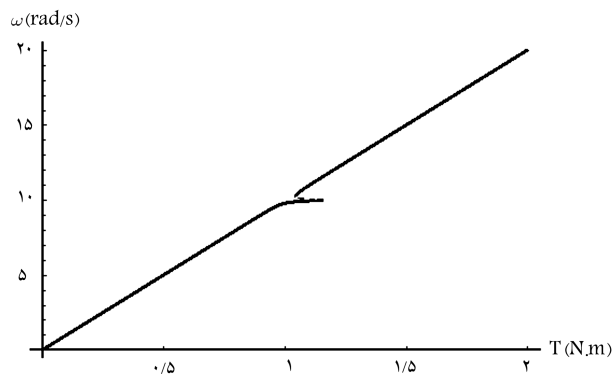
و به بیشترین مقدار خود می‌رسد. شکل ۱۵ دلیل این موضوع را به خوبی شرح می‌دهد. با توجه به این شکل، و با نزدیک شدن به دور بحرانی، اختلاف فاز بین زاویه‌ی دوران دو دیسک به  $\pi/2$  می‌رسد و در سرعت‌های بالاتر از آن اختلاف فاز بین دوران دو دیسک به سمت  $\pi$  میل می‌کند. بنابراین، در سرعت‌های نزدیک به دور بحرانی، دیسک الحاقی ارتعاشات را تقویت می‌کند و در سرعت‌های بالاتر از آن، نقش تضعیف ارتعاشات را به عهده می‌گیرد. در نتیجه در این حالت آنتی‌تشدید در نتایج دیده نمی‌شود. در نامیزانی‌های کوچک، چنین رفتاری برای هر مقدار دیگری از نامیزانی جرم الحاقی، به جز حالتی که نامیزانی جرم الحاقی با جرم اصلی یکسان است، دیده می‌شود.

در ادامه، نامیزانی جرم اصلی به مقدار بزرگ  $m_{12} = 0.15$  افزایش داده شده تا امکان قفل‌شدگی تشدید در ارتعاشات سیستم به وجود آید. برای بررسی اثر جرم نامیزان الحاقی، یک بار  $m_{22} = 0$  و بار دیگر  $m_{22} = 0.15$  قرار داده شده است. در حالت اول دیسک الحاقی کاملاً بالانس است و ارتعاشات پایه نمی‌تواند باعث دوران آن شود. این حالت معادل آن است که دیسک الحاقی با جرم پایه دارای اتصال صلب باشد. در شکل ۱۷ تغییرات سرعت دوران دیسک اصلی و دامنه‌ی ارتعاشات پایه برای حالت اول نشان داده شده است. در شکل ۱۸ نیز تغییرات سرعت دوران دیسک اصلی و دامنه‌ی ارتعاشات پایه برای حالت دوم نشان داده شده است. برای حالت دوم، اختلاف فاز بین سرعت دوران دیسک اصلی و دیسک الحاقی نیز در شکل ۱۹ نشان داده شده است.

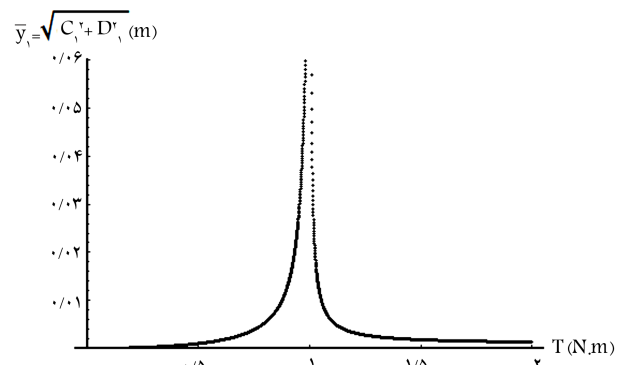
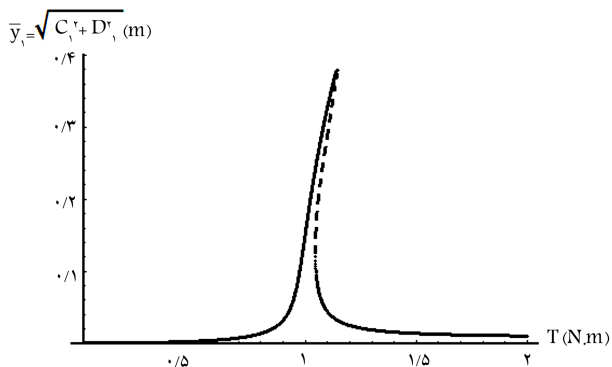
مقایسه‌ی تغییرات سرعت زاویه‌ی برحسب گشتاور در حالت‌های اول و دوم نشان می‌دهد که در حالت اول قفل‌شدگی تشدید می‌تواند تا گشتاور  $T = 1.15 \text{ N.m}$  ادامه داشته باشد. اما در حالت دوم قفل‌شدگی تشدید می‌تواند تا گشتاور  $T = 1.11 \text{ N.m}$



شکل ۱۴. سرعت دوران دیسک و دامنه‌ی نوسان سرعت برحسب گشتاور موتور ( $m_{22} = 0.02$  و  $m_{12} = 0.04$ ).



شکل ۱۵. اختلاف فاز بین دیسک اصلی و دیسک الحاقی ( $m_{12} = 0.04$  و  $m_{22} = 0.02$ ).



شکل ۱۷. سرعت دوران دیسک و دامنه نوسان پایه بر حسب گشتاور موتور ( $m_{12} = 0.15$  و  $m_{22} = 0$ ).

شکل ۱۶. دامنه‌ی نوسان پایه ( $m_{12} = 0.04$  و  $m_{22} = 0.02$ ).

ترتیب می‌توان گفت در حالت پایدار و در صورت دوران دیسک در نزدیکی بسامد طبیعی، این دیسک الحاقی عملکرد مثبتی داشته و موجب محدود شدن ناحیه‌ی قفل‌شدگی شده، اما در نواحی دورتر از بسامد طبیعی، موجب افزایش دامنه ارتعاش پایه شده است. در عمل به دلیل وجود میرایی، دیسک آزاد نمی‌تواند جز در نزدیکی ناحیه‌ی تشدید که در آن دامنه‌ی ارتعاش پایه بزرگ است، به راحتی بچرخد و در نتیجه در نواحی دورتر از بسامد طبیعی اثر آن در افزایش دامنه‌ی ارتعاش مهار می‌شود. امکان مهار دیسک الحاقی در نواحی دورتر از بسامد طبیعی به صورت هوشمند نیز وجود دارد.

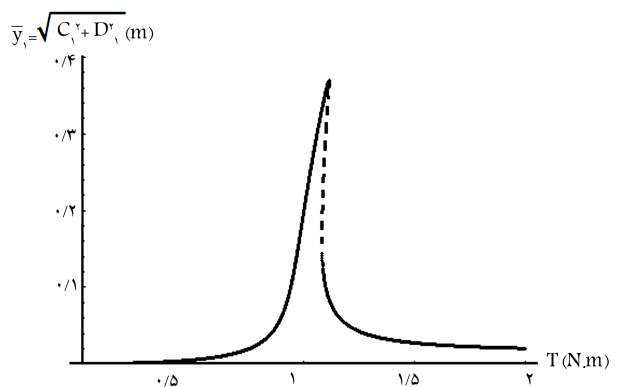
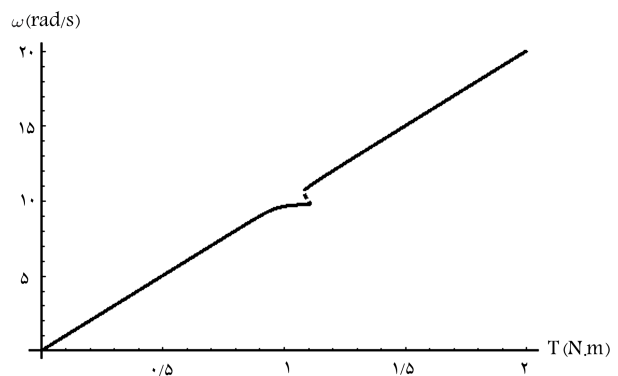
نتایجی که در اینجا ارائه شد، با این فرض به دست آمده که گشتاور اعمالی به صورت شبه‌استاتیکی افزایش یابد و سیستم از حالت سکون شروع به حرکت کند. در عمل ممکن است گشتاور موتور به صورت ناگهانی به سیستم وارد شود یا به صورت نمایی به سمت مقدار نهایی خود میل کند و سیستم نیز دارای شرایط اولیه‌ی صفر نباشد. در این صورت ممکن است سیستم با جهش از یک شاخه از جواب به شاخه دیگری از جواب‌ها، در گشتاورهای کم‌تری نیز از قفل‌شدگی تشدید گذر کند.

در ادامه‌ی موضوع، برای بررسی تأثیر جرم الحاقی بر رفتار حالت گذرای سیستم و امکان گذر از قفل‌شدگی تشدید، یک مطالعه‌ی عددی صورت گرفته است. بدین منظور ابتدا معادلات حرکت  $10^\circ$  تا  $12^\circ$  به فضای حالت منتقل شده‌اند. سپس با فرض آن که گشتاور موتور به صورت نمایی (معادله‌ی ۹) و با نرخ  $s = 0.3$  به مقدار  $T_f = 1.1$  افزایش یابد، پاسخ زمانی معادلات برای مقادیر مختلف نامیزانی جرم الحاقی محاسبه شده است. در این شبیه‌سازی‌ها فرض بر آن است که در آغاز حرکت ارتعاشات پایه دارای شرایط اولیه  $y(0)$  و  $\dot{y}(0)$  بوده و موتور از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. برای حل عددی معادلات از روش آدامز استفاده شده است و زمان شبیه‌سازی برابر  $60$  ثانیه در نظر گرفته شده است. از آنجا که شرایط اولیه‌ی بسیار زیادی مورد بررسی قرار گرفته و در عمل، امکان بررسی موردی تمام حل‌های زمانی وجود ندارد، برای تشخیص قفل‌شدگی، معیاری در نظر گرفته شده است:

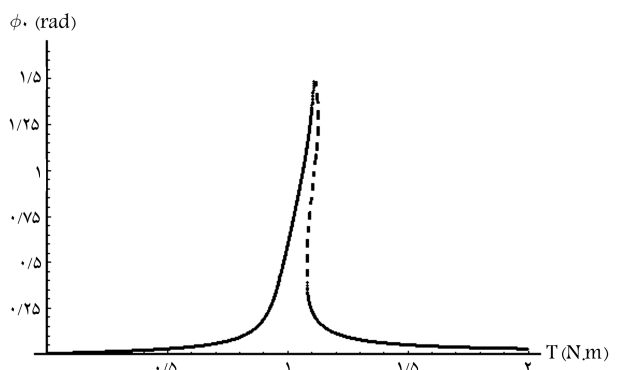
$$v = \frac{|\omega - \omega_n|}{\omega_n}, \quad \omega = \sqrt{\frac{\int_{t_s}^{t_f} \dot{y}^2 dt}{\int_{t_s}^{t_f} y^2 dt}} \quad (16)$$

که در آن  $\omega$  بسامد تقریبی نوسان و  $\omega_n$  بسامد طبیعی سیستم است. اگر در رابطه‌ی ۱۶ اختلاف زمانی بین حد بالا و حد پایین انتگرال به سمت بی‌نهایت میل کند و  $y$  یک تابع هارمونیک باشد، بسامد تقریبی نوسان با بسامد واقعی آن دقیقاً برابر می‌شود. در عمل اگر فاصله‌ی بین حد بالا و پایین انتگرال بیشتر از ده برابر دوره‌ی نوسان باشد، مقدار به دست آمده برای  $\omega$  اختلافی کم‌تر از ۱ درصد با مقدار واقعی آن دارد. هنگامی که سیستم دچار قفل‌شدگی تشدید می‌شود، بسامد نوسان تقریباً با بسامد طبیعی برابر است و انتظار می‌رود مقدار  $v$  (در رابطه‌ی ۱۶) عدد کوچکی را نشان دهد.

در این تحقیق ۱۵ ثانیه‌ی آخر شبیه‌سازی‌های عددی به عنوان حدود انتگرال رابطه‌ی ۱۶ در نظر گرفته شده، و مقدار  $v < 0.15$  به عنوان معیار قفل‌شدگی انتخاب شده است. این عدد پس از مطالعه‌ی موردی چندین شبیه‌سازی عددی انتخاب شده و دارای دقت مناسبی در تشخیص قفل‌شدگی تشدید است. در شکل‌های ۲۰ و ۲۱ شرایط اولیه‌ی که می‌تواند موجب قفل‌شدگی تشدید شود، با نقاط سیاه رنگ نشان داده شده است. برای ترسیم شکل ۲۰ شرایط اولیه با گام‌های  $dy_0 = 0.2^\circ$  و  $d\dot{y}_0 = 0.2^\circ$  تغییر داده شده و ضریب میرایی و بسکوز نیز روی محور دیسک الحاقی برابر  $c_{m2} = 0$  در نظر گرفته شده است. ملاحظه



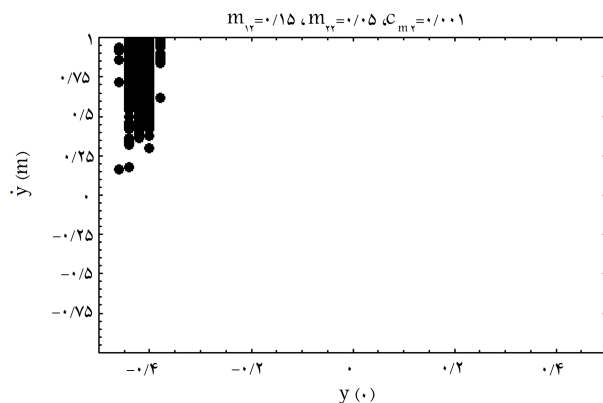
شکل ۱۸. سرعت دوران دیسک و دامنه نوسان پایه بر حسب گشتاور موتور ( $m_{12} = 0.15$  و  $0.15$ ).



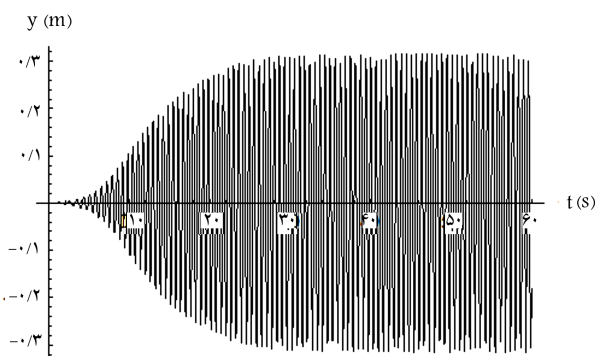
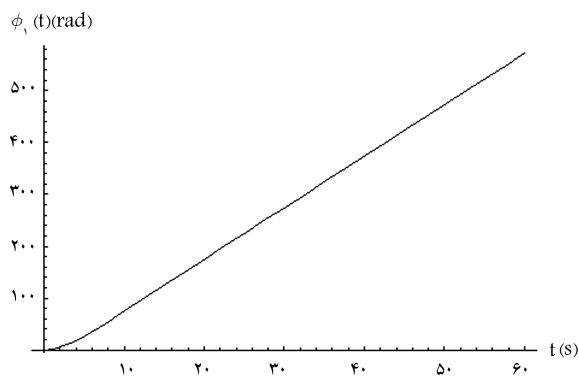
شکل ۱۹. اختلاف فاز بین دیسک اصلی و دیسک الحاقی ( $m_{12} = 0.15$  و  $0.15$ ).

ادامه داشته باشد. به عبارت دیگر نامیزانی جرم الحاقی موجب شده است محدوده‌ی قفل‌شدگی تشدید کوچک‌تر شود.

چنان که در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود با افزایش تدریجی گشتاور، اختلاف فاز بین دو دیسک نیز به تدریج افزایش می‌یابد تا آن که در نزدیکی بسامد طبیعی (دور بحرانی)، مانند حالت نامیزانی کوچک، اختلاف فاز بین زاویه‌ی دوران دو دیسک به  $\pi/2$  می‌رسد. اما پس از آن و با باز شدن ناگهانی قفل‌شدگی تشدید، اختلاف فاز بین دو دیسک به صورت ناگهانی کاهش یافته و با افزایش بیشتر گشتاور، به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه در حالت پایدار، در بیشتر گشتاورها افزوده شدن یک دیسک الحاقی با نامیزانی برابر دیسک اصلی، موجب افزایش دامنه‌ی ارتعاشات پایه می‌شود. برخلاف شکل ۱۳، در شکل ۱۸ آنتی‌تشیدی مشاهده نمی‌شود. به این



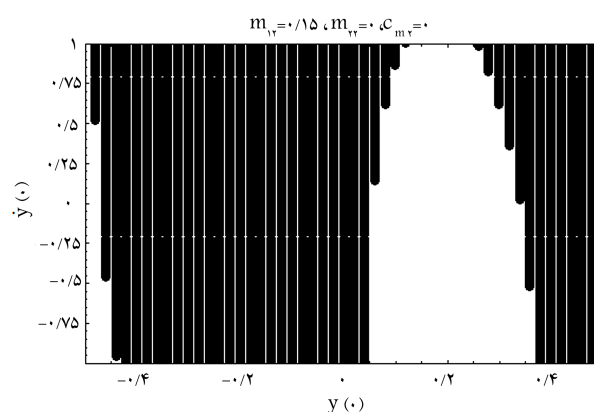
شکل ۲۱. شرایط اولیه‌یی که می‌تواند منجر به قفل‌شدگی تشدید شود.



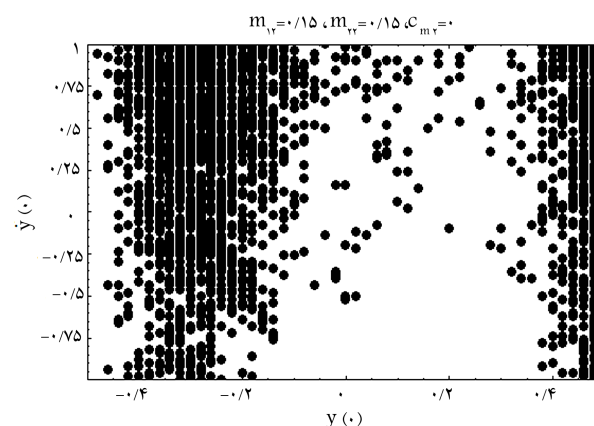
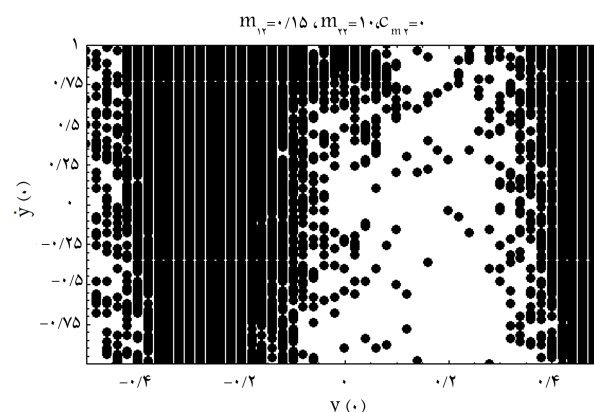
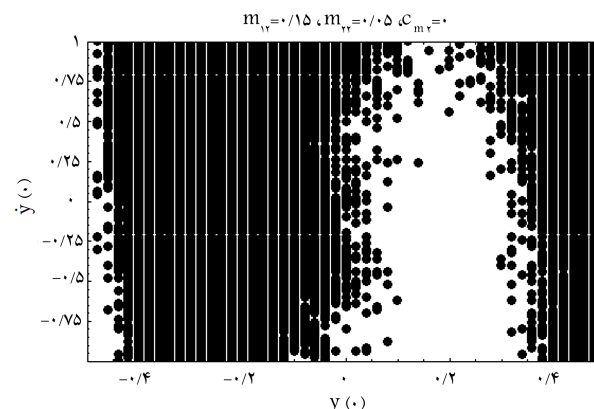
شکل ۲۲. زاویه دوران دیسک نامیزان اصلی و دامنه‌ی نوسان پایه بر حسب زمان ( $T_f = 1.1$  و  $s = 0.3$ ,  $m_{rr} = 0$ ,  $m_{vr} = 0.15$ )

می‌شود با افزوده شدن به جرم نامیزان دیسک الحاقی، احتمال گذر از قفل‌شدگی تشدید به شکل چشمگیری افزایش یافته است. در شکل ۲۱ نیز شرایط اولیه‌ی مناسب برای قفل‌شدگی تشدید برای حالت  $m_{rr} = 0.5$  و  $c_{mv} = 0.01$  ترسیم شده است. در این حالت ملاحظه می‌شود وجود مقدار بسیار کمی میرایی و یسکوز روی محور دیسک الحاقی، امکان گذر از قفل‌شدگی را به میزان بسیار زیادی افزایش داده است. از آنجا که در ضریب میرایی  $c_{mv} = 0.01$  برای دو حالت  $m_{rr} = 0.15$  و  $m_{rr} = 0.5$  مورد بررسی، هیچ شرط اولیه‌یی یافت نشد که منجر به تشدید شود، نمودارهای مربوط به این دو حالت در شکل ۲۱ رسم نشده است.

به‌عنوان نمونه‌یی از شبیه‌سازی‌های عددی، در شکل ۲۲ زاویه‌ی دوران دیسک اصلی و ارتعاشات پایه بر حسب زمان برای حالت بدون دیسک الحاقی و شرط



شکل ۲۰. شرایط اولیه‌یی که می‌تواند منجر به قفل‌شدگی تشدید شود.



اولیه‌ی صفر نشان می‌دهد. در شکل ۲۳ نیز پس از افزودن دیسک نامیزان الحاقی، زاویه‌ی دوران دیسک اصلی، زاویه‌ی دوران دیسک الحاقی و دامنه‌ی ارتعاشات پایه برحسب زمان و با شرط اولیه‌ی صفر و  $m_{22} = 0.01$  نشان داده شده است. مقایسه‌ی شکل‌های ۲۲ و ۲۳ نشان می‌دهد که پیش از اضافه شدن دیسک الحاقی نامیزان، با افزایش دامنه‌ی پایه، دیسک الحاقی شروع به دوران کرده و مانع شکل‌گیری قفل‌شدگی تشدید شده است و پس از آن با کاهش دامنه‌ی ارتعاشات پایه، این دیسک نیز به دلیل میرایی ویسکوز روی محور آن، از حرکت باز ایستاده است. برای مقایسه‌ی کمی ارتعاشات نشان داده شده در شکل‌های ۲۲ و ۲۳، مقدار میانگین مجذور ارتعاشات پایه در  $10^{\circ}$  ثانیه‌ی آخر محاسبه شد که برای شکل ۲۲ برابر  $RMS[y(t)] = 0.224$  و برای شکل ۲۳ برابر  $RMS[y(t)] = 0.373$  بوده است که کاهش چشمگیری را نشان می‌دهد. البته در شکل ۲۳ با افزایش زمان این عدد به مقادیر پایین‌تری نیز کاهش می‌یابد.

## ۶. نتیجه‌گیری

در این نوشتار ارتعاشات سیستم‌های دوار نامیزان روی پایه‌های کشسان مورد بحث قرار گرفت. برای این منظور ابتدا یک سیستم دوار نامیزان با توان محدود در نظر گرفته شد که روی یک پایه‌ی صلب قرار دارد و خود پایه نیز توسط یک فنر و میراگر ویسکوز نگه داشته شده است. سپس معادله‌های حرکت سیستم به دست آمد و به دو روش هارمونیک بالانس و حل زمانی تحلیل شدند. در این حل‌های تحلیلی و عددی، ابتدا سیستم‌هایی با نامیزانی کوچک و بزرگ را در نظر گرفته، و نشان داده شد که در نامیزانی‌های بزرگ سیستم می‌تواند دارای رفتار غیرخطی بوده و دچار پدیده قفل‌شدگی تشدید شود. گذر از این پدیده نیازمند توان بالایی است که ممکن است نیروی محرکه‌ی سیستم قادر به تأمین آن نباشد. برای گذر از این پدیده با توان محدود، باید کاری کرد تا سازوکار شکل‌گیری این پدیده دچار تأخیر یا اختلال (هرچند به مدت محدود) شود تا با وجود توان محدود، سیستم به تدریج از سرعت بحرانی دور شود.

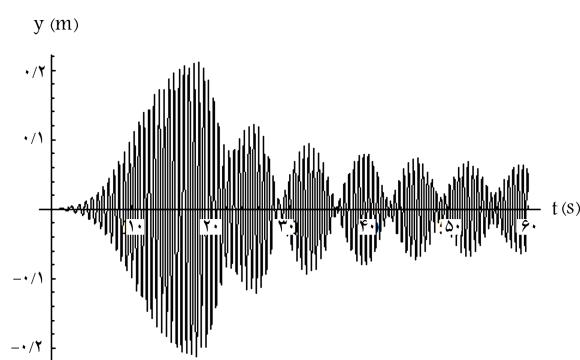
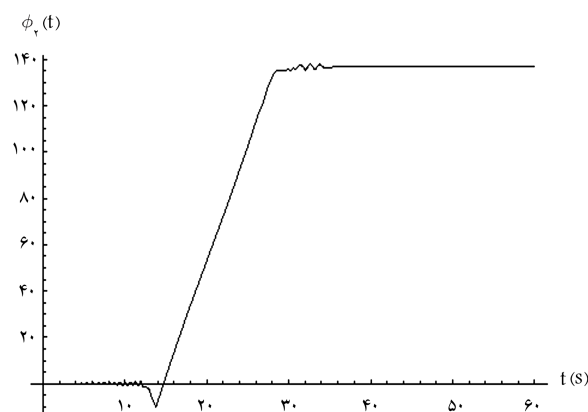
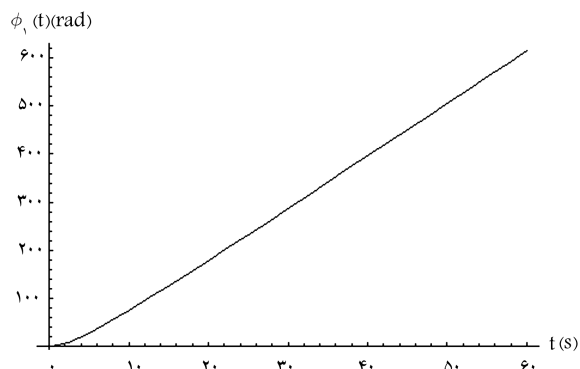
نتایج تحلیلی و عددی نشان داد که با افزودن یک دیسک نامیزان آزاد به مجموعه، می‌توان دینامیک آن را تحت تأثیر قرار داد و شدت و ناحیه‌ی قفل‌شدگی را کاهش داد. وجود چنین دیسکی همچنین باعث می‌شود در هنگام راه‌اندازی مجموعه، شرایط اولیه‌ی مناسب برای شکل‌گیری قفل‌شدگی تشدید به‌طور چشمگیری محدود شود.

## پانویس

1. dual-spin

## منابع (References)

1. Sommerfeld, A. "Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre", *Physikalische Zeitschrift*, **3**, pp. 266-286 (in German) (1902).



شکل ۲۳. زاویه‌ی دوران دیسک نامیزان اصلی، دیسک نامیزان الحاقی و دامنه‌ی نوسان پایه برحسب زمان ( $m_{12} = 0.15$ ,  $m_{22} = 0.05$ ,  $s = 0.3$  و  $T_f = 1/1$ ).

2. Kononenko, V.O., *Vibrating Systems with a Limited Power Supply*, Iliffe Books, London (1969).
3. Rand, R.H., Kinsey, R.J. and Mingori, D.L. "Dynamics of spinup through resonance", *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **27**(3) pp. 489-502 (1992).
4. Dimentberg, F., McGovern, L., Norton, R.L., Chapdelaine, J. and Harrison, R. "Dynamics of an unbalanced shaft interacting with a limited power supply", *Nonlinear Dynamics*, **13**(2) pp. 171-187 (1997).
5. Haberman, R., Rand, R. and Yuster, T. "Resonant capture and separatrix crossing in dual-spin spacecraft",

- Nonlinear Dynamics*, **18**, pp. 159-184 (1999).
6. Zniber, A. and Quinn, D.D. "Resonance capture in a damped three-degree-of-freedom system: Experimental and analytical comparison", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **41**, pp. 1128-1142 (2006).
  7. Quinn, D.D. "Resonant dynamics in a rotordynamic system with nonlinear inertial coupling and shaft anisotropy", *Nonlinear Dynamics*, **57**, pp. 623-633 (2009).
  8. Gozen, S., Olson, B.J., Shaw, S.W. and Pierre, C. "Resonance suppression in multi-dof rotating flexible structures using order-tuned absorbers", *Journal of Vibration and Acoustics*, **134**(6), pp. 1-7 (2012).
  9. Felix, J.L., Chong, W. and Balthazar, J.M. "The non-ideal problem behavior using a dynamic vibration absorber with nonlinear essential stiffness and time-dependent damping properties", *Journal of Multi-Body Dynamics*, **227**(1), pp. 34-41 (2013).
  10. Shahgholi, M. and Khadem, S.E. "Stability analysis of a nonlinear rotating asymmetrical shaft near the resonances", *Nonlinear Dynamics*, **70**, pp. 1311-1325 (2012).
  11. Shahgholi, M. and Khadem, S.E. "Hopf bifurcation analysis of asymmetrical rotating shafts", *Nonlinear Dynamics*, **77**(4), pp. 1141-1155 (2014).
  12. Gonçalves, P.J.P., Silvera, M. and Pontes Jr., B.R. "Numerical and experimental investigation of a vibration system with non-ideal vibration source", *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics*, EURO DYN 2014, Porto, Portugal, (30 June - 2 July 2014).