

# ارتعاش آزاد صفحات گرافن تک لایه با استفاده از نظریه های مختلف گرادیان الاستیسیته

سبها ضیایی (استادیار)

دانشکده ی مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه باسوج

مهندسی مکانیک شریف، (بهار ۱۳۹۶)  
دوره ی ۳ - ۳۳، شماره ی ۱، ص. ۳۶-۲۹

خواص منحصر به فرد الکتریکی و مکانیکی نانوسازه های کربنی آنها را در زمره موادی قرار داده که کاربردهای متنوعی دارند، و این مهم مطالعه ی رفتار مکانیکی آنها را حائز اهمیت گردانده است. در این پژوهش با استفاده از نظریه ی آیفانتیس و تنش کوپل بهبود یافته بهبود یافته به پیش بینی رفتار ارتعاشی نانوصفحات گرافن با شرایط مرزی ساده پرداخته شده است. نتایج نشان می دهد که نظریه ی آیفانتیس را می توان به عنوان نظریه یی با یک مقیاس طول برای این مهم استفاده کرد در حالی که نظریه ی تنش کوپل شاید چندان مناسب نباشد. همچنین دیده می شود که پارامتر مقیاس طول نه تنها تابعی از کایرالیته و سایز نانوصفحات مربعی است بلکه با تغییر نظریه ی غیر کلاسیک نیز تغییر می کند. شایان ذکر است که نظریه های گرادیان الاستیسیته مقیاس شده ضرورتاً در تقریب بسامدهای مرتبه بالاتر باهم تطابق ندارند هرچند که اختلاف آنها با افزایش طول ورق مربعی کاهش می یابد.

واژگان کلیدی: ارتعاش آزاد صفحات گرافن، کایرالیته، نظریه ی آیفانتیس، نظریه ی تنش کوپل بهبود یافته.

ziaee@yu.ac.ir

## ۱. مقدمه

خواص منحصر به فرد الکتریکی و مکانیکی نانوسازه های کربنی آنها را در زمره موادی قرار داده که کاربردهای متنوع دارند.<sup>[۱]</sup> نانوسازه های کربنی را می توان به گروه های نانوسازه های کربنی صفر بعدی و یک بعدی، فیولرنس ها و نانولوله های کربنی و صفحات گرافن تقسیم کرد.<sup>[۱]</sup> گرافن یک شبکه ی لانه زنبوری در مقیاس اتمی است که از اتم های کربن ساخته شده است.<sup>[۲]</sup> این صفحه با ضخامت یک اتم نه تنها نازک ترین ماده موجود تا کنون است<sup>[۲]</sup> بلکه خواص الکتریکی، مکانیکی، حرارتی و نورشناختی برجسته یی نیز دارد. در واقع گرافن دارای مدول الاستیک حدود  $1 \text{ TPa}$ ، استحکام شکست حدود  $125 \text{ GPa}$ ، رسانایی حرارتی معادل  $5 \times 10^2 \text{ Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$  و مساحت سطح مخصوص معادل  $2630 \text{ m}^2 \text{g}^{-1}$  است.<sup>[۳]</sup> از سوی دیگر به دلیل نسبت بالای سختی به جرم، گرافن در مقیاس میکرو دارای بسامدهای تشدید پایه در محدوده ی ۱ تا  $170$  مگاهرتز است.<sup>[۳]</sup> این خواص، گرافن را به یک نامزد مناسب برای استفاده در پوشش سطح، حسگرهای شیمیایی، نانوکامپوزیت ها با پایه ی گرافن،<sup>[۴]</sup> مافوق خازن ها، الکترودهای ترانما، سلول های نیروی و دستگاه های زیستی<sup>[۵]</sup> تبدیل کرده است.

در ضمن، براساس شباهت سنجی با دستگاه های مینیاتوری که مبتنی بر نانولوله ی کربنی هستند، امکان طراحی نوسان گر گینگا هرتز مبتنی بر نوسان تلسکوپی صفحات گرافن، نانولوله ی مبتنی بر حرکت تلسکوپی لایه های گرافن و نانوتشدیدگر مبتنی بر ارتعاشات نسبی کوچک صفحات گرافن نیز پیشنهاد شده است.<sup>[۶]</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۶/۲۸، اصلاحیه ۱۳۹۴/۹/۲۴، پذیرش ۱۳۹۵/۱/۲۴.

این کاربردهای وسیع صفحات گرافن نیازمند بررسی همه جانبه ی رفتار مکانیکی صفحات گرافن تحت بارگذاری های مختلف است. اگرچه با انجام کارهای آزمایشگاهی پیشرفت های شایان توجهی در تحقیقات نانوموادها به دست آمده، بسیاری از محققین به استفاده از روش های محاسباتی نانومکانیک برای تحلیل رفتار مکانیکی نانومواد متوسل می شوند، زیرا شبیه سازی کامپیوتری براساس مدل های فیزیکی معقول نه فقط ویژگی های مولکولی نانومواد را برای نظریه پردازان برجسته می کند بلکه می تواند راهنمایی و تفسیری را برای تجربه گر ها ارائه کند.<sup>[۶]</sup> با این وجود نسبت به نانومواد مشخص، تعیین روش مؤثر و کارآمدی که پاسخ گوی محققین باشد همچنان چالش برانگیز است. مسلماً نظریه های کلاسیک به دلیل در نظر نگرفتن اثر اندازه در این مقوله ناکارآمدند.<sup>[۷]</sup>

میدلین<sup>[۸]</sup> یک نظریه ی الاستیسیته با ریزساختار را توسعه داد که در آن انرژی کرنشی به صورت تابعی از کرنش های ماکروسکوپی، اختلاف بین تغییر شکل ماکروسکوپی و میکروسکوپی، و گرادیان تغییر شکل میکروسکوپی بیان شده است. در این نظریه انرژی کرنشی علاوه بر ثابت های لامه،  $16$  ثابت دیگر را نیز در بر می گیرد. میدلین این نظریه اش را ساده کرد و  $3$  نسخه ی جدید که در فرض مربوط به ارتباط بین گرادیان تغییر شکل میکروسکوپی و جابه جایی ماکروسکوپی با هم متفاوت بودند ارائه کرد.<sup>[۹]</sup> در نظریه ی ساده شده ی میدلین، که در آن انرژی کرنشی فقط تابعی از گرادیان مرتبه اول تانسور کرنش است،  $5$  ثابت جدید به همراه ثابت لامه در انرژی کرنشی وجود دارد.<sup>[۹]</sup> می توان نشان داد که مجموع این تعداد ثابت در دو ثابت جدید قابل گروه بندی است.<sup>[۷]</sup> بدین ترتیب تعداد ثابت های جدید ماده از  $5$  به دو کاهش

می‌یابد.<sup>[۷]</sup> شایان ذکر است که در نظریه‌های میدلین نه تنها انرژی پتانسیل، بلکه انرژی جنبشی نیز برحسب کمیت‌های میکروسکوپی و ماکروسکوپی نوشته می‌شود. براساس مطالعات آیفانتیس که در حوزه‌ی الاستیسیته و الاستیسیته‌ی غیرخطی انجام شده بود، آیفانتیس و همکارانش نظریه‌ی گرادیان الاستیسیته‌ی دیگری با یک طول داخلی پیشنهاد دادند.<sup>[۷]</sup> معادله‌ی حاکم این نظریه تابعی از کرنش و لاپلاسین کرنش است. می‌توان نشان داد اگر در نظریه‌ی ساده شده‌ی میدلین دو ثابت جدید با هم مساوی فرض شوند، نظریه‌ی ساده شده‌ی میدلین به نظریه‌ی گرادیان الاستیسیته آیفانتیس تبدیل می‌شود.<sup>[۱۰]</sup>

براساس نظریه‌ی گرادیان کرنش میدلین، نظریه‌ی گرادیان کرنش بهبود یافته که در برگزیده‌ی ۳ پارامتر مقیاس طول جدید است پیشنهاد شده است.<sup>[۱۱]</sup> در این نظریه کل چگالی انرژی تغییر شکل مستقل از تانسور گرادیان چرخش نامتقارن است و فقط تابعی از تانسور کرنش متقارن، بردار گرادیان اتساع، تانسور گرادیان کشش انحرافی و تانسور گرادیان چرخش متقارن است.<sup>[۱۱]</sup>

نظریه‌ی تنش کوپل کلاسیک و نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته از دیگر نظریه‌های شناخته شده‌ی محیط پیوسته‌ی مرتبه بالا هستند که به ترتیب دو<sup>[۱۲]</sup> و یک<sup>[۱۳]</sup> پارامتر مقیاس طول جدید را در بر می‌گیرند. نشان داده شده است که اگر در نظریه‌ی گرادیان کرنش بهبود یافته دو تا از پارامترهای مقیاس طول صفر شوند، نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته ایجاد می‌شود. بنابراین نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته حالت خاصی از نظریه‌ی گرادیان کرنش بهبود یافته است.<sup>[۱۲]</sup>

در میان نظریه‌های غیرمحملی به شکل انتگرالی که در آنها میانگین حجم متغیرهای حالت محاسبه می‌شود می‌توان به نظریه‌ی ایرینگن اشاره کرد.<sup>[۷]</sup> نظریه‌ی الاستیسیته‌ی غیرمحملی دیگری نیز توسط ایرینگن تدوین شده که در آن انتگرال با گرادیان جایگزین شده است. در این نظریه فقط یک پارامتر مقیاس طول به کار گرفته شده و معادله‌ی حاکم براساس تانسور تنش غیرمحملی و لاپلاس تانسور تنش بیان می‌شود.<sup>[۷]</sup>

اسکاس و همکاران<sup>[۱۵]</sup> نشان دادند که نظریه‌ی آیفانتیس را می‌توان براساس گرادیان تنش یعنی آنچه که در نظریه‌ی غیرمحملی ایرینگن دیده می‌شود بازنویسی کرد. تفاوت نظریه‌ی آیفانتیس و ایرینگن در شکل معادلات تعادل گشتاور<sup>[۱۶]</sup> است. این معادلات در نظریه‌ی ایرینگن براساس انشعاب تانسور تنش غیرمحملی بیان می‌شود که منجر به مزوج شدن معادلات تعادل می‌شود در حالی که طبق نظریه‌ی آیفانتیس، معادلات تعادل گشتاور تابعی از انشعاب تانسور تنش محلی و معادلات تعادل غیرمزوج است که این مهم مدل آیفانتیس را برای تحلیل اجزاء محدود مناسب‌تر می‌سازد.<sup>[۱۶]</sup> در میان نظریه‌های غیرکلاسیک شناخته شده، استفاده از نظریه‌ی غیرمحملی ایرینگن برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی نانوساختارهای کربنی بسیار متداول است.

پرادهام<sup>[۱۷]</sup> با استفاده از نظریه‌ی الاستیک غیرمحملی و تغییرشکل برشی مرتبه بالا، نیروی کماتش الاستیک صفحات بی‌عیب تک‌لایه گرافن را به دست آورده و تأثیر شرایط مرزی و نسبت ابعادی بر ظرفیت تحمل بار صفحه گرافن را بررسی کرده است. فرجی پور و همکاران<sup>[۱۸]</sup> کماتش نانوصفحات دایره‌ی گرافن تحت بار فشاری - شعاعی را با استفاده از مدل ورق پیوسته‌ی غیرمحملی مطالعه کرده‌اند. انصاری و همکاران<sup>[۱۹]</sup> کماتش دومحموری و رفتار ارتعاشی گرافن را با استفاده از نظریه‌ی ورق بر پایه اتم‌گرایی غیرمحملی بررسی کرده‌اند. بررسی تأثیر عیوب تهی جای<sup>۱</sup> بر بار بحرانی کماتش صفحات تک‌لایه گرافن توسط تریس و واتیستاس<sup>[۲]</sup> نشان می‌دهد که تنش بحرانی کماتش با افزایش چگالی عیوب کاهش می‌یابد. تریس و واتیستاس<sup>[۲]</sup> از مدل اجزاء محدود برای مطالعه‌ی خود استفاده کردند. محققین

دیگری نیز<sup>[۲۰]</sup> با استفاده از نظریه‌ی غیرمحملی ورق نازک ارتوتروپ کماتش صفحات چندلایه گرافن را تحلیل کرده‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که بار کماتشی نظیر حالت غیر هم‌فاز برخلاف بار کماتشی نظیر حالت هم‌فاز به واکنش و اندروالسی وابسته است.<sup>[۲۰]</sup> یافته‌های آنها به‌وضوح نشان می‌دهد که از اثر کاهشی پارامتر غیرمحملی روی بار کماتشی نظیر حالت غیر هم‌فاز با قوی‌تر شدن واکنش و اندروالسی کاسته می‌شود.<sup>[۲۰]</sup> مطالعه‌ی سرامی - فروشانی و اظهیری<sup>[۲۱]</sup> نیز وابستگی شدید بار بحرانی و بسامد طبیعی صفحه‌ی تک‌لایه‌ی گرافن را به پارامتر غیرمحملی مقیاس کوچک نشان می‌دهد. آنها همچنین تأثیر شرایط مرزی، نسبت ابعادی و پارامتر غیرمحملی را بر بسامد طبیعی صفحات گرافن چندلایه مورد بررسی قرار داده‌اند.<sup>[۲۲]</sup> انصاری و سهمنی<sup>[۲۳]</sup> با ترکیب نظریه‌ی غیرمحملی ایرینگن و نظریه‌های مختلف ورق همچون نظریه‌ی ورق کلاسیک، نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول و تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر، معادله‌ی حاکم بر بار کماتش دومحموری صفحه‌ی تک‌لایه‌ی گرافنی را یافتند که در چهارسوی خود پین شده است. آنها با تطابق معادله‌ی به دست آمده با نتایج حاصل از شبیه‌سازی به‌روش دینامیک مولکولی مقدار مؤثر پارامتر غیرمحملی نظیر هر نظریه‌ی ورق را برای صفحات آرمچیر و زیگزراگ تعیین کردند. پیرو نتایج آنها مقدار پارامتر غیر محلی تابع مدل ورق مورد استفاده تغییر می‌کند اما مستقل از کایرالیته‌ی است.<sup>[۲۳]</sup>

مورمو و پرادهان<sup>[۲۴]</sup> با استفاده از نظریه‌ی الاستیک غیرمحملی پاسخ ارتعاشی نانوصفحه‌ی گرافن تک‌لایه را مطالعه کرده‌اند. نتایج عددی آنها نشان می‌دهد که بسامدهای پایه شدیداً به ضریب مقیاس کوچک وابسته است. شن و همکاران<sup>[۲۵]</sup> با استفاده از مدل ورق غیرمحملی تأثیر دما بر نسبت بسامد پایه‌ی خطی به غیرخطی صفحات گرافن تک‌لایه با شرایط مرزی ساده را بررسی کرده‌اند. آنها از تطابق نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی با نتایج مدل ورق غیرمحملی، مقدار پارامتر غیر محلی را تقریب زده‌اند. به روشی مشابه، شن و همکاران<sup>[۲۶]</sup> ارتعاشات غیرخطی صفحات گرافن دولایه با شرایط مرزی ساده را در محیط حرارتی بررسی کرده‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که تغییرات دما و نسبت ابعادی بر ارتعاش غیرخطی صفحات دولایه‌ی گرافن تأثیر دارد هرچند که تأثیر تغییرات دما چشمگیرتر است.<sup>[۲۶]</sup> آنها همچنین نشان دادند که ضرایب غیرخطی واکنش و اندروالسی تقریباً بر پاسخ ارتعاش غیرخطی صفحات دولایه گرافن بی‌تأثیرند و می‌توان در مدل‌سازی به روش ورق غیرمحملی از آنها صرف‌نظر کرد.<sup>[۲۶]</sup> تأثیر شرایط مرزی بر ارتعاش آزاد صفحات تک‌لایه‌ی گرافن و پارامتر مقیاس کوچک مورد استفاده در نظریه‌ی ورق نازک غیرمحملی توسط انصاری و همکاران<sup>[۲۷]</sup> مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج آنها وابستگی پارامتر غیرمحملی را به کایرالیته‌ی و شرط مرزی نشان می‌دهد.<sup>[۲۷]</sup> آنها نیز از تطابق نتایج حاصل از مدل‌سازی به دو روش محیط پیوسته و دینامیک مولکولی برای تعیین پارامتر مقیاس کوچک استفاده کرده‌اند. تأثیر محیط الاستیک محصورکننده‌ی صفحات گرافن بر پاسخ غیرخطی ارتعاش آزاد<sup>[۲۸]</sup> و ارتعاش واداشته<sup>[۲۹]</sup> آنها نیز بررسی شده است. با این وجود در میان مطالعات انجام شده برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی صفحات گرافن، برخی از محققین از نظریه‌های محیط پیوسته‌ی غیرکلاسیک دیگر نیز استفاده کرده‌اند.<sup>[۳۰،۳۱]</sup>

نظر به این که تعیین روش مؤثر و کارآمدی که پاسخ‌گوی محققین باشد همچنان چالش برانگیز است، در مطالعه‌ی حاضر سعی شده ضمن بررسی تأثیر نظریه‌های مختلف غیرکلاسیک بر میزان مقیاس طول، امکان بهره‌گیری از آنها برای پیش‌بینی بسامد طبیعی ورق گرافن تک‌لایه فراهم شود. با توجه به استفاده‌ی وسیع از نظریه‌ی غیرمحملی ایرینگن و موجود بودن نتایج آن از دو نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته و نظریه‌ی آیفانتیس به‌عنوان دو نظریه با یک مقیاس طول در تعریف انرژی کرنشی

در معادله ۴ مقادیر  $M_{mnpq}$  و  $K_{mnpq}$  به ترتیب در معادلات (۱الف) و (۲الف) در ضمیمه تعریف شده‌اند. شایان ذکر است که در تمامی پژوهش‌های انجام شده براساس نظریه تنش کوپل بهبودیافته<sup>[۲۳،۲۴،۲۵]</sup> مقیاس طول  $l_1$  در معادله ۳ در نظر گرفته نمی‌شود. بدین ترتیب معادلات حاکم بر این نظریه، شامل یک مقیاس طول است در حالی که اگر از  $l_1$  صرف نظر نشود یک دسته معادلات دیفرانسیل معمولی با دو مقیاس طول حاصل می‌شود.

در صورت بهره‌گیری از نظریه آیفانتیس، معادله ۲ چنین تغییر می‌کند:

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (5)$$

که مؤلفه‌های تانسور تنش در آن عبارت‌اند از:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - l^* \varepsilon_{kl,mm}) \quad (6)$$

$\varepsilon_{kl,mm}$  لاپلاسیان تانسور کرنش است. بدین ترتیب ماتریس سختی به شکل معادله ۳الف موجود در ضمیمه الف تغییر می‌کند.

با تعریف  $W_{pq} = e^{-\omega t} \bar{W}_{pq}$  در معادلات ۴، و با صفر گذاشتن درمیان  $[-\omega^t M_{mnpq} + K_{mnpq}]$  می‌توان بسامدهای طبیعی صفحه‌ی گرافن را تعیین کرد.

### ۳. نتایج عددی

در این بخش با استفاده از بسامد طبیعی پایه صفحات گرافن آرمچیر و زیگزراگ با شرایط مرزی ساده حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی<sup>[۲۷]</sup> مقیاس‌های کوچک نظیر دو نظریه غیرکلاسیک استفاده شده برای استخراج معادله ۴، تعیین می‌شود. بدین منظور از توابع مثلثاتی زیر برای استفاده در معادلات ۱الف، ۲الف یا ۳الف بهره گرفته شده است.

$$\phi_i = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right), \quad \varphi_i = \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad i = m, p, \quad j = n, q \quad (7)$$

اگرچه مطالعات انجام شده پیرامون خواص الاستیک صفحات گرافن نشان‌گر آن است که گرافن خواص یک ماده‌ی ارتوتروپ را دارد<sup>[۲۵]</sup> اختلاف میان خواص الاستیسیته‌ی آن هم‌جهت با آرمچیر و زیگزراگ چندان قابل توجه نیست تا جایی که در برخی از پژوهش‌ها برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی صفحات گرافن از مدل مواد ایزوتروپ<sup>[۲۷]</sup> استفاده شده است. در این مطالعه نیز گرافن به صورت ایزوتروپ شبیه‌سازی شده، و از خواص مواد مورد استفاده<sup>[۲۷]</sup> بهره گرفته شده است.

در جدول ۱ تأثیر افزایش مقیاس طول در نظریه تنش کوپل بهبودیافته ( $l_1 = 0$ ) بر سه بسامد اول یک صفحه‌ی نازک با شرط مرزی ساده فهرست شده است. معادله‌ی استخراج شده<sup>[۳۰]</sup> برای اعتبارسنجی مورد استفاده قرار گرفته است. ملاحظه می‌شود که با افزایش مقیاس طول ( $l$ ) بسامد طبیعی رشد می‌کند. با توجه به فرمول ۶، و به دلیل افزوده شدن  $B$  به  $D$ ، هیچ دلیلی جز افزایش سختی خمشی ورق برای آن وجود ندارد. بدیهی است بسامد طبیعی پیش‌بینی شده با این نظریه، بزرگ‌تر از چیزی است که با نظریه کلاسیک ( $l = 0$ ) حاصل می‌شود.

در جدول ۲ نشان داده شده است که اضافه شدن گرادیان شتاب به نظریه تنش کوپل بهبودیافته بر پیش‌بینی بسامد طبیعی میکرو/نانو ورق نازک چه تأثیری می‌گذارد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت  $l_1/l$  مقدار پیش‌بینی شده‌ی بسامد

بهره گرفته شده است. در ضمن تأثیر اضافه کردن گرادیان شتاب به نظریه تنش کوپل بهبودیافته در پیش‌بینی بسامد طبیعی گرافن مورد بحث قرار گرفته است. بدین منظور از نتایج دینامیک مولکولی موجود<sup>[۲۷]</sup> بهره گرفته شده است. شایان ذکر است که با توجه به مطالعات نویسنده تاکنون از نظریه آیفانتیس برای شبیه‌سازی رفتار ارتعاشی نانوصفحات گرافن استفاده نشده است.

### ۲. معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی ورق گرافن

در این بخش با استفاده از اصل همپتون و استفاده از روش ریلی-ریتز دسته معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش جانبی صفحه گرافن استخراج می‌شود. برای تلفیق اثر اندازه با فرضیات حاکم بر نظریه ورق کیرشهف از نظریه تنش کوپل بهبودیافته و نظریه آیفانتیس استفاده شده است. پیرو اصل همپتون داریم:

$$\int_0^{t_1} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (8)$$

که در آن  $T$  معرف انرژی جنبشی کل صفحه‌ی گرافن، و  $U$  معرف انرژی پتانسیل کل آن است.

طبق نظریه تنش کوپل بهبودیافته، وردش<sup>۲</sup> انرژی پتانسیل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta U = \int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + m_{ij} \delta \chi_{ij}) dV \quad (9)$$

که در آن  $\sigma_{ij}$ ،  $\varepsilon_{ij}$ ،  $m_{ij} = 2l^* G \chi_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  به ترتیب مؤلفه‌های تانسور تنش، تانسور کرنش، بخش انحرافی تانسور تنش کوپل و تانسور متقارن انحناء هستند.<sup>[۳۰]</sup> همچنین  $V$  حجم ورق را مشخص می‌کند و  $G$  مدول صلبیت است.

طبق فرضیات حاکم بر نظریه ورق کیرشهف، می‌توان معادله ۲ را براساس مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی هر نقطه (یعنی  $u, v, w$ ) با مختصات  $(x, y, z)$  در صفحه‌ی میانی ورق نوشت. جزئیات بیشتر در منابع انتهایی این نوشتار<sup>[۳۰]</sup> ذکر شده است.

پیرو نظریه ساده شده میدلین وردش انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta T = \int_V (\rho \dot{u} \delta \dot{u} + \rho \dot{v} \delta \dot{v} + \rho \dot{w} \delta \dot{w}) dV + \int_V (\rho l^* (\dot{u}_{,i} \delta \dot{u}_{,i} + \dot{v}_{,i} \delta \dot{v}_{,i} + \dot{w}_{,i} \delta \dot{w}_{,i})) dV \quad (10)$$

که در آن  $u, v, w$  مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی هر نقطه از ورق به مختصات  $(x, y, z)$  است که طبق فرضیات ورق کیرشهف قابل بیان برحسب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی نقطه در صفحه‌ی میانی است. (') مشتق جزئی نسبت به زمان و  $_{,i}$  (معرف مشتق جزئی نسبت به هریک از مؤلفه‌های مختصات  $(x, y, z)$ ) است و نهایتاً  $l_1$  مقیاس طولی جدا از مقیاس طول تعریف شده در وردش انرژی پتانسیل است.<sup>[۷]</sup>

بعد از جایگزین کردن معادلات ۲ و ۳ در معادله ۱ و تقریب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی صفحه‌ی میانی با توابعی که شرایط مرزی هندسی را ارضاء می‌کنند (طبق روش ریلی - ریتزا) می‌توان دسته معادله دیفرانسیل معمولی حاکم بر ارتعاش جانبی ورق را یافت که کاملاً مستقل از جابه‌جایی در صفحه‌ی ورق است:

$$M_{mnpq} \ddot{W}_{pq} + K_{mnpq} W_{pq} = 0 \quad (11)$$

جدول ۱. مقایسه‌ی سه بسامد اول (MHz) برای یک میکروورق نازک با شرط مرزی ساده ( $a/b = 1, a/h = 30$ ).

شماره حالت	مقیاس طول (l) (میکرومتر)	مدل موجود	[۳۰]
	۰	۰,۵۹۱۲	۰,۵۹۱۲
$\omega_{11}$	۵	۲,۹۱۱۵	۲,۹۱۱۵
	۱۰	۵,۷۳۲۲	۵,۷۳۲۲
	۰	۱,۴۷۶۱	۱,۴۷۶۱
$\omega_{12}$	۵	۷,۲۶۸۷	۷,۲۶۸۷
	۱۰	۱۴,۳۱۰۹	۱۴,۳۱۰۹
	۰	۲,۳۵۸۵	۲,۳۵۸۵
$\omega_{22}$	۵	۱۱,۶۱۴۱	۱۱,۶۱۴۱
	۱۰	۲۲,۸۶۶۲	۲۲,۸۶۶۲

جدول ۲. تأثیر حضور گرادیان تنش در نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته بر سه بسامد اول میکروورق ( $a/b = 1, a/h = 30, l = 17,6 \mu m$ ).

شماره حالت	نسبت مقیاس طول ( $l_1/l$ )	مدل موجود (MHz)
	۰	۱۰,۰۵۳۴
$\omega_{11}$	۰,۵	۷,۳۹۴۱
	۱	۴,۷۹۵۷
	۰	۲۵,۰۲۰۶
$\omega_{12}$	۰,۵	۱۴,۲۱۶۵
	۱	۸,۱۶۵۲
	۰	۳۹,۸۵۳۳
$\omega_{22}$	۰,۵	۱۹,۱۲۳۵
	۱	۱۰,۵۱۲۴

طبیعی کاهش می‌یابد و بدین ترتیب ممکن است بتوان با تنظیم مناسب نسبت  $l_1/l$  میزان بسامد پیش‌بینی شده را از مقدار حاصل از نظریه‌ی کلاسیک کم‌تر کرد. اهمیت این موضوع به مقادیر واقعی بسامدهای طبیعی میکرو/نانوورق نازک بازمی‌گردد که از مقدار پیش‌بینی شده توسط نظریه‌های کلاسیک بیشتر یا کم‌تر است.

در جدول ۳ نیز مقادیر بسامد طبیعی پایه‌ی نانوورق گرافن آرمچیر و زیگزگ با شرایط مرزی ساده به‌همراه مقادیر پیش‌بینی شده توسط نظریه‌ی کلاسیک ورق فهرست شده است. دیده می‌شود که بسامد طبیعی نانوورق گرافن قدری از مقدار کلاسیک آن کوچک‌تر است. لذا پیرو نتیجه‌ی حاصل از جدول ۱ به نظر می‌رسد که برای بهره‌گیری از نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته برای تحلیل ارتعاش آزاد نانوورق گرافن با شرایط مرزی ساده باید مقیاس طول  $l^1$  در معادلات حاکم مقداری منفی را بپذیرد (جدول ۴).

از طریق تطابق میان مقادیر بسامد طبیعی پایه نانوصفحات گرافن حاصل از

جدول ۳. بسامد طبیعی نانوصفحه‌ی گرافن آرمچیر و زیگزگ با شرط مرزی ساده حاصل از نظریه‌ی کلاسیک و دینامیک مولکولی.

طول نانوورق مربعی (nm)	بسامد طبیعی پایه (THz)	
	براساس دینامیک مولکولی	براساس (THz) نظریه‌ی کلاسیک
۱۰	۰,۵۸۷۷۲۵	۰,۵۹۵۰۱۴
۱۵	۰,۲۷۳۸۸۱	۰,۲۷۷۹۲۸
۲۰	۰,۱۵۷۵۲۴	۰,۱۵۸۱۴۱
۲۵	۰,۰۹۹۸۴۰	۰,۰۹۹۹۷۵
۳۰	۰,۰۷۰۶۵۵	۰,۰۷۰۷۱۲
۳۵	۰,۰۵۲۹۸۲	۰,۰۵۲۹۹۳
۴۰	۰,۰۴۰۹۸۵	۰,۰۴۱۰۱۷

شبیه‌سازی دینامیک مولکولی [۲۷] (جدول ۳) با مقادیر حاصل از مدل‌سازی حاضر، مقادیر طول مقیاس نظیر هر نظریه تقریب‌زده شده است (جدول ۴ و ۵).

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که در نظریه‌ی آیفانتیس، برای پیش‌بینی بسامد پایه‌ی نانوصفحات گرافن می‌توان با برابر دانستن مقیاس طول در انرژی کرنشی با مقیاس طول در انرژی جنبشی، با خطایی ناچیز به نتایج مقبولی رسید؛ همانند آنچه که با استفاده از نظریه‌ی ایرینگن حاصل شده است. [۲۷] این مهم در نظریه‌ی ترکیبی تنش کوپل بهبودیافته امکان‌پذیر نیست. شایان ذکر است که برخلاف نظریه‌ی آیفانتیس، امکان به‌کارگیری نظریه‌ی ایرینگن در ساخت یک انرژی کاربردی وجود ندارد. [۳۲] پیرو هر دو نظریه‌ی به‌کار گرفته شده در این مطالعه، مقیاس طول تابعی از کایرالیته‌ی و اندازگی نانوصفحه‌ی گرافن تغییر می‌کند.

در شکل ۱ با فرض عدم تأثیر حالت ارتعاش بر مقدار مقیاس طول، با استفاده از مقیاس طول محاسبه شده براساس تطابق بسامد طبیعی پایه حاصل از نظریه‌ی غیرکلاسیک و دینامیک مولکولی، تأثیر نظریه‌های غیرکلاسیک بر میزان پیش‌بینی شده‌ی بسامدهای مرتبه بالاتر نانوصفحات گرافن دیده شده است. در این شکل MCS و C.MCS به‌ترتیب اختصاری هستند برای نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته، که در آن مجذور مقیاس طول با یک مقدار منفی جایگزین شده، و تنش کوپل بهبودیافته که با گرادیان شتاب ترکیب شده است. چنان که مشاهده می‌شود با وجود تطابق خوبی که در پیش‌بینی بسامد پایه توسط این سه نظریه ایجاد شده، در میزان بسامدهای طبیعی مرتبه بالاتر با هم اختلاف دارند. هرچند این اختلاف با افزایش طول نانوورق مربعی گرافن کم می‌شود.

#### ۴. نتیجه‌گیری

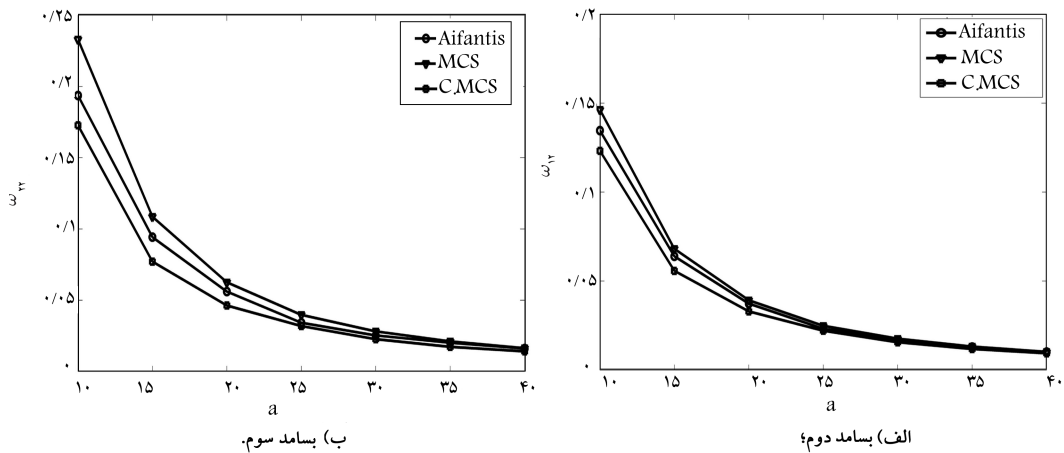
نظر به این که تعیین روشی مؤثر و کارآمد که پاسخ‌گوی محققین در زمینه‌ی شبیه‌سازی رفتار مکانیکی نانسازه‌ها باشد چالش برانگیز است، در این مطالعه سعی شده ضمن بررسی تأثیر نظریه‌های مختلف غیرکلاسیک بر میزان مقیاس طول، امکان بهره‌گیری از آنها برای پیش‌بینی بسامد طبیعی ورق گرافن تک‌لایه مطالعه شود. بدین منظور از دو نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته و نظریه‌ی آیفانتیس بهره گرفته شده است. در ضمن تأثیر اضافه‌کردن گرادیان شتاب به نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته در پیش‌بینی بسامد طبیعی گرافن مورد بحث قرار گرفته است. بدین منظور از نتایج دینامیک مولکولی موجود در منابع در دسترس بهره گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که:

جدول ۴. بسامد پایه‌ی نانوصفحات گرافن با شرایط مرزی ساده براساس نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته با فرض آن که  $\omega < \omega_c$ .

طول نانورق مربعی (nm)	نسبت مجذور مقیاس طول به ضخامت ( $l^2/h$ )	زیگزاگ (THz)	نسبت مجذور مقیاس طول به ضخامت ( $l^2/h$ )	آرمچیر (THz)
۱۰	$-(0,2)^2$	$0,0587862$	$-(0,19)^2$	$0,0595055$
۱۵	$-(0,158)^2$	$0,0273535$	$-(0,14)^2$	$0,0277732$
۲۰	$-(0,13)^2$	$0,0157428$	$-(0,124)^2$	$0,0158088$
۲۵	$-(0,142)^2$	$0,0099852$	$-(0,14)^2$	$0,0100010$
۳۰	$-(0,115)^2$	$0,0070682$	$-(0,113)^2$	$0,0070769$
۳۵	$-(0,075)^2$	$0,0052986$	$-(0,0749)^2$	$0,0052988$
۴۰	$-(0,042)^2$	$0,0040972$	$-(0,0365)^2$	$0,0041017$

جدول ۵. بسامد پایه‌ی نانوصفحات گرافن با شرایط مرزی ساده براساس نظریه‌های غیرکلاسیک.

اندازه ورق مربعی (nm)	نظریه‌ی آیفانتیس ( $l/l_1 = 1$ )			تنش کوپل بهبودیافته		
	مقیاس طول	زیگزاگ	آرمچیر	$l/l_1$	$l_1$	آرمچیر
۱۰	$1,045$	$0,0587786$	$0,059532$	$0,05$	$1,99$	$0,059541$
۱۵	$1,115$	$0,0273919$	$0,027788$	$0,05$	$1,69$	$0,027726$
۲۰	$1,23$	$0,0157568$	$0,015816$	$0,04$	$2$	$0,015814$
۲۵	$1,84$	$0,009990$	$0,0099973$	$0,03$	$2$	$0,010125$
۳۰	$1,72$	$0,007068$	$0,0070716$	$0,025$	$2,25$	$0,0070701$
۳۵	$1,2$	$0,005298$	$0,0052993$	$0,025$	$2,5$	$0,0053058$
۴۰	$0,7$	$0,004099$	$0,0041017$	$0,023$	$2,3$	$0,00410168$



شکل ۱. تأثیر نوع نظریه‌ی گرادیان الاستیسیته بر تقریب زنی بسامد دوم و سوم نانوصفحات گرافن با افزایش ابعاد ورق.

۱. محاسبه‌ی انرژی جنبشی نانوسازه، اگرچه نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته از نظریه‌ی با یک مقیاس طول، به نظریه‌ی با دو مقیاس طول تبدیل می‌شود، بازه مقادیر پیش‌بینی شده‌ی بسامد طبیعی نسبت به نظریه‌ی کلاسیک افزایش می‌یابد و فقط مقادیر بزرگ‌تر از نظریه‌ی کلاسیک را دربر نمی‌گیرد.
۴. با توجه به تطابق نقطه به نقطه بین نتایج حاصل از نظریه‌های گرادیان الاستیسیته و دینامیک مولکولی، مقدار مقیاس طول تابعی از نظریه‌ی غیرکلاسیک، کاپرالیتهی نانوصفحه‌ی گرافن و سائز آن است.
۵. نظریه‌های مقیاس شده برای پیش‌بینی بسامد پایه با بالاترین دقت، در پیش‌بینی بسامدهای حالات بالاتر با هم تطابق ندارند و اختلاف آنها با افزایش طول نانورق مربعی کاهش می‌یابد.

۱. وجود مقیاس طول در نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته منجر به افزایش سختی خمشی سازه می‌شود که به نوبه‌ی خود منجر به افزایش بسامد طبیعی پیش‌بینی شده نسبت به نظریه‌های کلاسیک می‌شود. لذا چنانچه مقدار بسامد طبیعی نانوسازه نسبت به آنچه که توسط نظریه‌ی کلاسیک تعیین می‌شود پایین‌تر باشد استفاده از این نظریه برای شبیه‌سازی ناکارآمد است.
۲. چنانچه مجذور مقیاس طول در نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته با یک مقدار منفی جایگزین شود به سبب کاهش سختی خمشی نانوسازه بسامد طبیعی پیش‌بینی شده کم‌تر از مقدار حاصل از نظریه‌ی کلاسیک می‌شود. بر اثر این عمل، انرژی کرنشی دیگر مثبت معین نخواهد بود.
۳. با پیروی از نظریه‌ی ساده شده میدلین و اضافه کردن گرادیان سرعت به هنگام

## پانویس‌ها

1. vacancy
2. variational

## منابع (References)

1. Lebedeva, I.V., Knizhnik, A.A., Popov, A.M., Lozovik, Y.E. and Potapkin, B.V. "Modeling of grapheme-based NEMS", *Physica E*, **44**, pp. 949-954 (2012).
2. Tserpes, K.I. and Vatistas, I. "Buckling analysis of pristine and defected graphene", *Mechanics Research Communications*, **64**, pp. 50-56 (2015).
3. Jomehzadeh, E., Saidi, A.R., Jomehzadeh, Z., Bonaccorso, F., Palermo, V. and Galiotis, C. "Nonlinear subharmonic oscillation of orthotropic grapheme-matrix composite", *Computational Materials Science*, **99**, pp. 164-172 (2015).
4. Sun, X.Y., Fu, Z., Xia, M. and Xu, Y. "Effect of vacancy defect on the tensile behavior of grapheme", *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, **4**(5), pp. 1-5 (2014).
5. Zandiatashbar, A., Lee, G.-H., An, S.J., Lee, S., Mathew, N., Terrones, M., Hayashi, T., Picu, C.R., Hone, J. and Koratkar, N. "Effect of defects on the intrinsic strength and stiffness of graphene", *Nature Communications*, DOI: 10.1038/ncomms4186 (2014).
6. Li, C. and Chou, T.-W. "A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, **40**, pp. 2487-2499 (2003).
7. Askes, H. and Aifantis, E.C. "Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results", *International Journal of Solids and Structures*, **48**, pp. 1962-1990 (2011).
8. Mindlin, R. "Micro-structure in linear elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pp. 52-78 (1964).
9. Mindlin, R.D. and Eshel, N.N. "On first strain-gradient theories in linear elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, **4**, pp. 109-124 (1968).
10. Altan, B. and Aifantis, E.C. "On some aspects in the special theory of gradient elasticity", *Journal of Mechanical Behavior of Materials*, **8**, pp. 231-82 (1997).
11. Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J. and Tong, P. "Experiments and theory in strain gradient elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **51**, pp. 1477-508 (2003).

12. Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F. "Effects of couple-stresses in linear elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **11**, pp. 415-448 (1962).
13. Yang, F., Chong, A.C., Lam, D.C.C. and Tong, P. "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, **39**, pp. 2731-43 (2002).
14. Ashoori Movassagh, A. and Mahmoodi, A.M.J. "A micro-scale modeling of Kirchhoff plate based on modified strain-gradient elasticity theory", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **40**, pp. 50-59 (2013).
15. Askes, H., Morata, I. and Aifantis, E. "Finite element analysis with staggered gradient elasticity", *Computers and Structures*, **86**, pp. 1266-79 (2008).
16. Askes, H. and Gitman, I. "Review and critique of the stress gradient elasticity theories of Eringen and Aifantis", In: Maugin, G., Metrikine, A. (Eds.), *Mechanics of Generalized Continua*. Springer, pp. 203-210 (2010).
17. Pradhan, S.C. "Buckling of single layer grapheme sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory", *Physics Letters A*, **373**, pp. 4182-4188 (2009).
18. Farajpour, A., Mohammadi, M., Shahidi, A.R. and Mahzoon, M. "Axisymmetric buckling of the circular grapheme sheets with the nonlocal continuum plate model", *Physica E*, **43**, pp. 1820-1825 (2011).
19. Ansari, R., Shahabodini, A. and Rouhi, H. "Prediction of the biaxial buckling and vibration behavior of grapheme via nonlocal atomistic-based plate theory", *Composite Structure*, **95**, pp. 88-94 (2013).
20. Anjomshoa, A., Shahidi, A.R., Hassani, B. and Jomehzadeh, E. "Finite element buckling analysis of multi-layered grapheme sheets on elastic substrate based on nonlocal elasticity theory", *Applied Mathematical Modelling*, **38**, pp. 5934-595 (2014).
21. Sarrami-Foroushani, S. and Azhari, M. "On the use of bubble complex finite strip method in the nonlocal buckling and vibration analysis of single-layered grapheme sheets", *International Journal of Mechanical Sciences*, **85**, pp. 168-178 (2014).
22. Sarrami-Foroushani, S. and Azhari, M. "Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered grapheme sheets using finite strip method including van der Waals effects", *Physica E*, **57**, pp. 83-95 (2014).
23. Ansari, R. and Sahmani, S. "Prediction of biaxial buckling behavior of single-layered grapheme sheets based on nonlocal plate models and molecular dynamics simulations", *Applied Mathematical Modelling*, **37**, pp. 7338-7351 (2013).
24. Murmu, T. and Pradhana, S.C. "Vibration analysis of nano-single-layered grapheme sheets embedded in elastic medium based on nonlocal elasticity theory", *Journal of Applied Physics*, **105**, pp. 064319-8 (2009).
25. Shen, L., Shen, H.-S. and Zhang, C.-L. "Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer grapheme sheets in thermal environments", *Computational Materials Science*, **48**, pp. 680-685 (2010).
26. Shen, H.-S., Xu, Y.-M. and Zhang, C.-L. "Prediction of nonlinear vibration of bilayer grapheme sheets in thermal environments via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **267**, pp. 458-470 (2013).
27. Ansari, R., Sahmani, S. and Arash, B. "Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered grapheme sheets", *Physics Letters A*, **375**, pp. 53-62 (2010).
28. Jomehzadeh, E., Saidi, A.R. and Pugno, N.M. "Large amplitude vibration of a bilayer grapheme embedded in a nonlinear polymer matrix", *Physica E*, **44**, pp. 1973-1982 (2012).
29. Jomehzadeh, E., Saidi, A.R., Jomehzadeh, Z., Bonaccorso, F., Palermo, V. and Galits, C. "Nonlinear subharmonic oscillation of orthotropic grapheme-matrix composite", *Computational Materials Science*, **99**, pp. 167-172 (2015).
30. Akgöz, B. and Civalek, Ö. "Free vibration analysis for single-layered grapheme sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory", *Materials and Design*, **42**, pp. 164-171 (2012).
31. Farajpour, A., Dehghany, M. and Shahidi, A.R. "Surface and nonlocal effects on the axisymmetric buckling of circular grapheme sheets in thermal environment", *Composites Part B: Engineering*, **50**, pp. 333-343 (2013).
32. Ansari, R., Faghieh Shojaei, M., Mohammadi, V., Gholami, R. and Darabi, M.A. "Nonlinear vibration of functionally graded Mindlin microplates based on the modified couple stress theory", *Composite Structures*, **114**, pp. 124-134 (2014).
33. Ma, H.M., Gao, X.-L. and Reddy, J.N. "A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory", *Acta Mechanica*, **220**, pp. 217-235 (2011).
34. Reddy, J.N. "Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **59**, pp. 2382-2399 (2011).

## ضمیمه الف

$$\begin{aligned}
 K_{mnpq} = & \int_a^b \int_a^b -D \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \phi_n \phi_q dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -D \nu \frac{\partial^2 \phi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \phi_n \varphi_p dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -D \frac{\partial^2 \phi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} \varphi_p \varphi_m dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -D \nu \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} \phi_q \varphi_m dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -(\nu D (\lambda - \nu)) \frac{\partial^2 (\varphi_p \phi_q)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (\varphi_m \phi_n)}{\partial x \partial y} dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b -D \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \phi_n \phi_q dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b -D (\lambda + \nu) \frac{\partial^2 \phi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \phi_n \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b -D \nu \frac{\partial^2 \phi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \varphi_p \phi_n dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b -D \frac{\partial^2 \phi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} \varphi_p \varphi_m dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b -D (\lambda + \nu) \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} \varphi_m \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b -D \nu \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} \phi_q \varphi_m dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b -\nu D (\lambda - \nu) \frac{\partial^2 (\varphi_p \phi_q)}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^2 (\varphi_m \phi_n)}{\partial x \partial y} dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b -\nu D (\lambda - \nu) \frac{\partial^2 (\varphi_p \phi_q)}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^2 (\varphi_m \phi_n)}{\partial x \partial y} dx dy
 \end{aligned}$$

(الف ۳)

در معادلات الف ۱ تا الف ۳  $a$  و  $b$  معرف طول و عرض ورق گرافن مستطیلی است.  $D = Eh^3 / 12 (1 - \nu^2)$  معرف سختی خمشی ورق  $\nu$  نسبت پواسون،  $h$  ضخامت ورق،  $B = 2l^2 Gh$ ،  $G$  مدول صلبیت و  $l$  مقیاس طول در نظریه تنش کوپل شده بهبود یافته است.

$$\begin{aligned}
 M_{mnpq} = & -\frac{1}{12} \rho h^3 \int_a^b \int_a^b \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \varphi_q \varphi_n \right) dx dy \\
 & - \frac{1}{12} \rho h^3 \int_a^b \int_a^b \left( \frac{\partial \varphi_q}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \phi_p \phi_m \right) dx dy \\
 & - \int_a^b \int_a^b \rho h \phi_q \varphi_n \phi_m \varphi_p dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b \nu \rho h \left( \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \varphi_q \varphi_n + \frac{\partial \varphi_q}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \phi_p \phi_m \right) dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b \frac{1}{12} \rho h^3 \left( \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \varphi_q \varphi_n \right) dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b \frac{1}{12} \rho h^3 \left( \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \phi_p \phi_m \right) dx dy \\
 & - l^2 \int_a^b \int_a^b \frac{1}{12} \rho h^3 \left( \nu \frac{\partial \phi_p}{\partial x} \frac{\partial \phi_m}{\partial x} \frac{\partial \varphi_q}{\partial y} \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) dx dy
 \end{aligned}$$

(الف ۱)

$$\begin{aligned}
 K_{mnpq} = & \int_a^b \int_a^b -D \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \varphi_q \varphi_n dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -D \nu \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \phi_p \varphi_n dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -D \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \phi_p \phi_m dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -D \nu \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \varphi_q \phi_m dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -(\nu D (\lambda - \nu) + \nu B) \frac{\partial^2 (\phi_p \varphi_q)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (\phi_m \varphi_n)}{\partial x \partial y} dx dy \\
 & + \int_a^b \int_a^b -\frac{B}{\nu} \left( \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} \varphi_q - \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial y^2} \phi_p \right) \frac{\partial^2 \phi_m}{\partial x^2} \varphi_n dx dy \\
 & - \int_a^b \int_a^b -\frac{B}{\nu} \left( \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} \varphi_q - \frac{\partial^2 \varphi_q}{\partial y^2} \phi_p \right) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \phi_m dx dy
 \end{aligned}$$

(الف ۲)