

# تحلیل ارتعاشاتی میکروروتورهای نامیزان و شفت‌های متشکل از مواد هدفمند تابعی براساس نظریه‌ی تنش کوپلی

مهدی هاشمی (دانشجوی دکتری)

محسن اصغری\* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف، (بهار ۱۳۹۶)  
دوره‌ی ۳ - ۳۳، شماره‌ی ۱، ص. ۶۳-۷۱

در این نوشتار خصوصیات رفتار ارتعاشی میکروروتورهای نامیزان ساخته شده از مواد هدفمند تابعی براساس نظریه‌ی غیرکلاسیک تنش کوپلی به‌طور تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. این نظریه قادر به پوشش اثرات ناشی از کوچکی ابعاد هندسی سازه‌ها و قطعات است. ابتدا معادلات کوپل حاکم بر نوسانات عرضی مجموعه میکروروتور استخراج شده و با به‌کار بردن روش گالکین و در نظر گرفتن دو مود اول خمشی، عباراتی برای دو بسامد اول طبیعی در هریک از حالات لنگ‌زنی هم‌جهت و خلاف جهت با دوران شفت ارائه شده است. به‌علاوه، رابطه‌ی برای دامنه‌ی ارتعاشات پایدار مجموعه نامیزان استخراج شده است. اثرات خصوصیات مادی غیرکلاسیک بر بسامدهای طبیعی و دامنه‌ی ارتعاشات با استفاده از این نتایج تحلیلی قابل بررسی است. نتایجی عددی نیز در مثال‌های خاصی ارائه شده است تا تأثیرات قابل توجه خصوصیات مادی غیرکلاسیک به‌صورت عددی مشخص شود.

واژگان کلیدی: میکروروتور، مواد هدفمند تابعی، نظریه‌ی تنش کوپلی، ارتعاشات آزاد و اجباری، نامیزانی.

mehdihashemi@mech.sharif.ir  
asghari@sharif.edu

## ۱. مقدمه

آن، می‌توان به‌گونه‌ی طراحی کرد که برای کاربردهای خاص سودمند باشد. همچنین تغییرات پیوسته‌ی خواص از طریق درجه‌بندی کسر حجمی مواد تشکیل‌دهنده‌ی آن در این مواد از یک سطح به سطح دیگر مزایای خاصی -- نظیر کمینه‌سازی تمرکز تنش، کاهش تنش در سطوح مشترک و کاستن از موج‌های تنشی و غیره -- به آن می‌بخشد.<sup>[۱۲،۱۳]</sup> از این رو، مواد هدفمند تابعی کاربردهای بالقوه‌ی زیادی در زمینه‌های مهندسی و بخش‌های صنعتی به‌همراه دارند.

خواص منحصر به فرد مواد هدفمند تابعی سبب شده است که محققین به استفاده از این مواد در سیستم‌های پیشرفته‌ی همچون سیستم‌های میکرو و نانوالکترومکانیک روی آورند.<sup>[۱۴-۱۷]</sup>

از سوی دیگر، مطالعات و تحقیقات آزمایشگاهی اخیر ثابت کرده که رفتار مکانیکی سازه‌ها در مقیاس کوچک را نمی‌توان به‌درستی توسط نظریه‌ی مکانیکی محیط پیوسته‌ی کلاسیک پیش‌بینی کرد.<sup>[۱۸-۲۰]</sup> نتایج این تحقیقات یک صدا بیان می‌دارند که نظریه‌ی مکانیکی محیط پیوسته‌ی کلاسیک توانایی پیش‌بینی و تشریح رفتار وابسته به مقیاس در سازه‌های مینیاتوری ساخته شده در ابعاد میکرو و زیر آن را ندارد. از این رو، تحلیل صحیح‌تر رفتار مکانیکی میکروروتورها با در نظر گرفتن اثرات مربوط به کوچکی اندازه، نیازمند آن است که این سازه‌ها را براساس نظریه‌های محیط پیوسته‌ی غیرکلاسیک پیشنهاد شده مانند نظریه‌ی تنش کوپلی مدل‌سازی کرد.

انواع روتورها شامل مجموعه‌های گوناگون شفت - دیسک چرخان، از اجزای اصلی ماشین‌آلات و تجهیزات دوار مورد استفاده در بخش‌های مختلف صنعتی محسوب می‌شوند. از این رو بررسی رفتار مکانیکی این سازه‌ها از دیرباز مورد توجه محققین بوده و نقش به‌سزایی در توسعه‌ی علم روتوردینامیک تا به امروز داشته است. اگرچه تا امروز مطالعات و تحقیقات فراوانی در خصوص رفتار ارتعاشاتی این روتورها صورت گرفته،<sup>[۱-۵]</sup> زمانی که ابعاد هندسی این روتورها در مقیاس میکرو باشد، انجام بررسی‌های بیشتر ضرورت می‌یابد. میکروروتورها در تجهیزات نوین شامل میکروروتوربین‌ها، میکروکمپرسورها و میکروموتورها مورد استفاده قرار می‌گیرند که در مواردی همچون میکروروتوربین‌ها در مجاورت سیال با دمای بالا نیز قرار دارند.<sup>[۶-۹]</sup> تقاضا برای طراحی سپرهای حرارتی که قادرند ضمن حفظ ساختار سازه‌ی خود، گرادیان دمایی بالایی را در یک محیط خاص تحمل کنند، منجر به معرفی مواد جدیدی شد که امروزه به‌نام «مواد هدفمند تابعی» شناخته می‌شوند.<sup>[۱۰،۱۱]</sup> به‌طور کلی مواد هدفمند تابعی مواد مرکب همگنی هستند که از دو ماده -- معمولاً سرامیک و فلز -- تشکیل شده و خواص آن توسط تابعی از موقعیت در راستای یک جهت یا جهات مشخص، به‌صورت پیوسته و مورد نظر از خواص دو ماده تغییر می‌یابد. این مواد را به‌واسطه‌ی بهره‌مندی از خواص مورد نظر مواد تشکیل‌دهنده‌ی

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۸/۲۰، اصلاحیه ۱۳۹۴/۱۲/۲۲، پذیرش ۱۳۹۵/۱/۲۴.

متشکل از مواد هدفمند، و یک دیسک صلب است که درست در وسط شفت قرار گرفته است. طول میکروشفت مربوط به سیستم برابر  $L$ ، شعاع آن برابر  $R$ ، و سطح مقطع آن دایره‌بی به مساحت  $A$  است. از سوی دیگر دیسک نیز دارای شعاعی به بزرگی  $R_d$ ، جرم  $M$  و ممان اینرسی قطری  $I_d$  و ممان اینرسی قطبی  $J_d$  است. همچنین فرض می‌شود که خواص مادی میکروشفت به‌طور پیوسته در راستای شعاعی از فلز به سرامیک با حرکت از مرکز میکروشفت به سمت سطح آن تغییر کند. بدین ترتیب خواص مکانیکی شفت، از جمله چگالی آن نیز، تابعی از شعاع شفت  $\rho(r)$  است. میکروروتور مذکور با سرعت دورانی ثابت  $\Omega$  حول محور طولی میکروشفت در حال دوران است. علاوه بر آن، دستگاه مختصات  $X - Y - Z$  معرف دستگاه مرجع اینرسی یا دستگاه ثابت است (شکل ۱)، درحالی که دستگاه  $x - y - z$  بیانگر دستگاه مختصات محلی است که با سرعت زاویه‌بی ثابت  $\Omega$  حول محور طولی  $X$  می‌چرخد. همچنین فرض می‌شود که شفت میکروروتور در زمان شروع ( $t = 0$ ) به‌صورت یک خط مستقیم باشد.

براساس مدل تیر رابلی، مؤلفه‌های جابه‌جایی  $u_1(x, y, z, t)$ ،  $u_2(x, y, z, t)$  و  $u_3(x, y, z, t)$  از بردار جابه‌جایی ذرات شفت نسبت به مرجع دوار چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x, t) - z \frac{\partial \bar{w}(x, t)}{\partial x} - y \frac{\partial \bar{v}(x, t)}{\partial x}, \\ u_2 &= \bar{v}(x, t), \\ u_3 &= \bar{w}(x, t), \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $(x, y, z)$  بیانگر موقعیت ذرات در مرجع زمانی است که نسبت به دستگاه دوار اندازه‌گیری می‌شود؛  $\bar{v}$  و  $\bar{w}$  نیز معرف تغییر شکل محدود خط مرکزی میکروشفت نسبت به مرجع دوار هستند. این مؤلفه‌های تغییر شکل را می‌توان نسبت به مرجع ثابت از طریق روابط زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v \cos \varphi + w \sin \varphi, \\ \bar{w} &= w \cos \varphi - v \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن  $\varphi$  زاویه‌ی چرخش دستگاه  $x - y - z$  نسبت به دستگاه  $X - Y - Z$  است (شکل ۱). مشخص است که المان‌های شفت علاوه بر حرکت انتقالی، تحت حرکت دورانی نیز قرار می‌گیرند. از این رو به‌منظور تعیین مؤلفه‌های سرعت زاویه‌بی این حرکت جسم صلب، سه زاویه‌ی اوپلر متوالی یعنی  $\psi_z(x, t)$ ،  $\psi_y(x, t)$  و  $\psi_x(x, t)$  در نظر گرفته می‌شود (شکل ۲). از آنجا که از تغییر شکل مربوط به پیچش در این نوشتار صرف‌نظر شده، بنابراین:  $\psi_x(x, t) = \Omega t$ . بدین ترتیب، براساس زوایای اوپلر، بردار سرعت زاویه‌بی یک المان میکروشفت چنین بیان می‌شود: [۲۹، ۳۰]

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 = (\Omega - \dot{\psi}_z \sin \psi_y) \hat{e}_1 \\ &+ (\dot{\psi}_z \cos \psi_y \sin \Omega t + \dot{\psi}_y \cos \Omega t) \hat{e}_2 \\ &+ (\dot{\psi}_z \cos \psi_y \cos \Omega t - \dot{\psi}_y \sin \Omega t) \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (3)$$

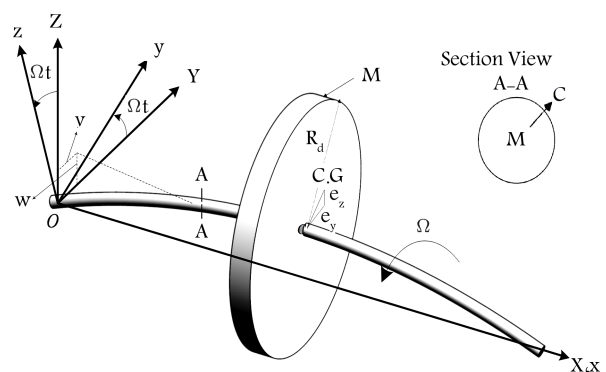
که در آن  $\hat{e}_1$ ،  $\hat{e}_2$  و  $\hat{e}_3$  بردارهای یکه‌ی دستگاه مختصات  $X_1 - Y_1 - Z_1$  هستند که خود کاملاً به المان مورد نظر متصل شده‌اند. دو زاویه‌ی اول اوپلر مطابق رابطه‌ی ۴

نظریه‌ی تنش کوپلی برای اولین بار در مورد ماده‌ی کشسان خطی معرفی شد. [۲۱-۲۳] چندین سال بعد، با اعمال تغییراتی در نظریه‌ی مذکور، شکل جدیدی از این نظریه پیشنهاد شد [۲۴] که به آن نظریه‌ی تنش کوپلی اصلاح شده می‌گویند. در سال‌های اخیر، استفاده از نظریه‌ی تنش کوپلی برای مطالعه‌ی رفتار مکانیکی میکروسازه‌ها افزایش چشمگیری در بین محققین داشته است. در این خصوص محققین [۲۵، ۲۶] پاسخ استاتیکی و دینامیکی میکروتیرها را با در نظر گرفتن مدل اوپلر-برنولی و با استفاده از این نظریه مورد بررسی قرار دادند. افزون بر این، براساس نظریه‌ی تنش کوپلی، اثرات مربوط به کوچکی اندازه در رفتار میکروتیرها [۲۷، ۲۸] با استفاده از مدل تیر تیموشنکو بررسی شد. همچنین رفتار ارتعاشاتی وابسته به مقیاس در ابعاد کوچک میکروتیرهای متشکل از مواد هدفمند تابعی مورد مطالعه قرار گرفت. [۲۹-۳۲] پیش از این، اثرات مربوط به کوچکی ابعاد میکروصفحه‌ها در رفتار استاتیکی و دینامیکی نیز براساس نظریه‌ی تنش کوپلی اصلاح شده مورد بررسی قرار گرفت. [۳۳-۳۵] همچنین رفتار مکانیکی وابسته به اندازه در مقیاس کوچک میکروروتورهای متشکل از مواد هوشمند مورد مطالعه و ارزیابی محققین قرار گرفت. [۳۶-۳۸]

در این نوشتار، اثرات مربوط به کوچکی اندازه بر رفتار ارتعاشی آزاد و اجباری میکروروتورها با شفت‌های متشکل از مواد هدفمند تابعی براساس نظریه‌ی تنش کوپلی به‌صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. فرض بر آن است که خواص میکروشفت به‌صورت شعاعی -- برای مثال از فلز به سرامیک -- با حرکت به سمت سطح شفت تغییر می‌کند. برای دیسک واقع در میانه‌ی شفت سیستم میکروروتور یک نامیرانی جرمی در نظر گرفته شده که سبب ارتعاشات اجباری سیستم می‌شود. با استفاده از اصل همپلتون، معادلات سه‌بعدی کوپل شده‌ی حاکم بر حرکت میکروروتور استخراج شده است. سپس عبارات تحلیلی برای بسامدهای رزونانسی میکروروتور در حالت لنگ‌زنی پیش‌رو و پس‌رو با استفاده از به کارگیری روش گالرکین و در نظر گرفتن دو مود اول خمشی حاصل شده است. علاوه بر آن، دامنه‌ی ارتعاشات میکروروتور مورد نظر در اثر وجود خروج از مرکز در دیسک تعیین شده است. برای تشریح چگونگی تأثیر پارامترهای اندازه در مقیاس کوچک بر مشخصات ارتعاشاتی میکروروتور چند مثال عددی ارائه شده است.

## ۲. تعریف مسئله و مفاهیم پایه مربوط به فرمولاسیون

در شکل ۱ یک میکروسیستم شامل شفت - دیسک به‌عنوان اجزای اصلی یک میکروروتور نمایش داده شده است. این میکروروتور شامل یک میکروشفت باریک



شکل ۱. یک میکروروتور با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی و در حال دوران با سرعت زاویه‌بی ثابت  $\Omega$ .

### ۳. مدل سازی سیستم

به منظور استخراج معادلات حاکم بر حرکت میکروروتور حاوی شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی با استفاده از اصل همیتون، ابتدا لازم است تغییرات در انرژی کرنشی و انرژی جنبشی شفت حین تغییر شکل نسبت به حالت اولیه آن محاسبه شود و همچنین کار انجام شده توسط نیروهای خارجی نیز مورد محاسبه قرار گیرد. براساس فرضیات مطرح شده در قسمت قبل در ابتدا مؤلفه‌های  $\varepsilon_{ij}$ ،  $\chi_{ij}$ ،  $\sigma_{ij}$  و  $m_{ij}$  برای میکروشفت مطابق رابطه ۱۲ محاسبه خواهد شد. با جایگذاری رابطه ۱ در رابطه ۷ تنها مؤلفه‌ی غیرصفر تانسور کرنش حاصل می‌شود:

$$\varepsilon_{11} = -y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}. \quad (12)$$

همچنین با جایگذاری رابطه ۱ در روابط ۹ و ۱۰، مؤلفه‌های غیرصفر بردار چرخش و مؤلفه‌های متقارن انحنای به ترتیب از روابط ۱۳ و ۱۴ حاصل می‌شود.

$$\theta_r = -\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \quad \theta_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}. \quad (13)$$

$$\chi_{12} = \chi_{21} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2},$$

$$\chi_{13} = \chi_{31} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}. \quad (14)$$

افزون بر این، با جایگذاری رابطه ۱۲ در رابطه ۶ و نیز با جایگذاری روابط ۱۳ و ۱۴ در رابطه ۸، به ترتیب مؤلفه‌ی  $\sigma_{11}$  و مؤلفه‌های غیر صفر  $\mathbf{m}$  از روابط ۱۵ و ۱۶ محاسبه می‌شوند.

$$\sigma_{11} = E(r)\varepsilon_{11} = -E(r) \left( y \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right), \quad (15)$$

$$m_{12} = m_{21} = -l^r(r)\mu(r) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2},$$

$$m_{13} = m_{31} = l^r(r)\mu(r) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2}. \quad (16)$$

حال با توجه به اتحاد:

$$(\partial^i \bar{v} / \partial x^i)^2 + (\partial^i \bar{w} / \partial x^i)^2 = (\partial^i v / \partial x^i)^2 + (\partial^i w / \partial x^i)^2$$

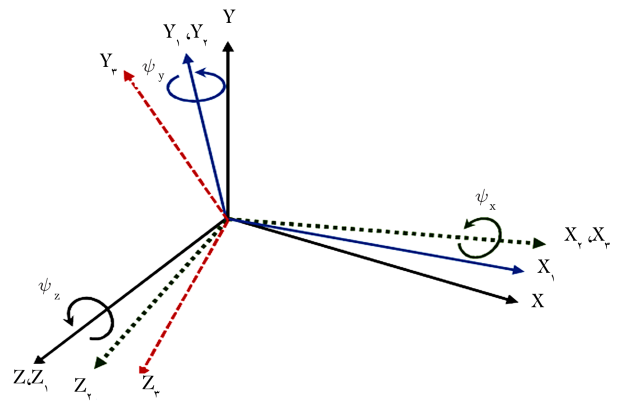
و با جایگذاری روابط ۱۲ تا ۱۶ در رابطه ۱۱ و نوشتن انرژی کرنشی سیستم به صورت  $U = \int \bar{u} dV = \int_x \int_A \bar{u} dA dx$ ، و نیز با انتگرال‌گیری نسبت به سطح مقطع شفت داریم:

$$U = \frac{(EI)_{eq} + (\mu l^r A)_{eq}}{2} \times \int_0^L \left( \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx, \quad (17)$$

که در آن:

$$(\mu l^r A)_{eq} = \int_A \mu(r) l^r(r) dA,$$

$$(EI)_{eq} = \int_A z^2 E(r) dA. \quad (18)$$



شکل ۲. چرخش‌های مربوط به سه زاویه‌ی متوالی اولیه.

به مؤلفه‌های جابه‌جایی مرتبط می‌شوند: [۴۰، ۴۱]

$$\psi_z = \sin^{-1} \left[ \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{(1 + \frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2}} \right],$$

$$\psi_y = -\sin^{-1} \left[ \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\sqrt{(1 + \frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2}} \right]. \quad (4)$$

براساس نظریه‌ی تنش کوبلی، چگالی انرژی کرنشی برای یک ماده‌ی ایزوتروپیک با تغییر شکل‌های کوچک طبق رابطه ۵ محاسبه می‌شود: [۲۴]

$$\bar{u} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5)$$

که در آن:

$$\sigma_{ij} = \lambda(r) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu(r) \varepsilon_{ij}, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (7)$$

$$m_{ij} = 2l^r(r) \mu(r) \chi_{ij}, \quad (8)$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}), \quad (9)$$

در روابط بالا  $\sigma_{ij}$ ،  $\varepsilon_{ij}$ ،  $m_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  به ترتیب معرف مؤلفه‌های تانسور تنش، تانسور کرنش، بخش خارج قطر اصلی تانسور تنش کوبلی و تانسور متقارن انحناست. همچنین، در این روابط  $\lambda$  و  $\mu$  ثابت کلاسیک لم هستند که توسط رابطه  $E$  و نسبت پواسون  $\nu$  مرتبط می‌شوند (مشابه نظریه‌ی کلاسیک). علاوه بر این موارد، پارامتر  $l$  با بعد طولی بیانگر مقیاس طولی است؛ پارامتر  $l$  جزء خواص یک ماده است که از طریق آزمایش برای یک ماده‌ی مشخص تعیین می‌شود. همچنین  $\theta_i$  بیانگر مؤلفه‌های بردار چرخش است که از طریق رابطه‌ی زیر با بردار جابه‌جایی  $\mathbf{u}$  مرتبط می‌شوند: [۲۴]

$$\theta_i = \frac{1}{2} [\text{curl}(\mathbf{u})]_i, \quad (10)$$

شایان ذکر است که چگالی انرژی کرنشی  $\bar{u}$  را می‌توان همچنین براساس حاصل ضرب مؤلفه‌های  $\varepsilon_{ij}$  در  $\sigma_{ij}$  و  $\chi_{ij}$  در  $m_{ij}$  از طریق رابطه‌ی ۱۱ حساب کرد: [۲۴]

$$\bar{u} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}). \quad (11)$$

که در آن  $e_z$  و  $e_y$  با بعد طولی به ترتیب معرف میزان خروج از مرکز بودن جرم دیسک از مرکز آن نسبت به محورهای  $y$  و  $z$  هستند. شایان ذکر است که مجموع انرژی جنبشی میکروروتور، که در ادامه و در اصل همیلتون مورد استفاده قرار خواهد گرفت، از رابطه‌ی ۲۴ به دست می‌آید.

$$T = T_1 + T_{ecc} \quad (24)$$

از سوی دیگر، کار نیروهای خارجی که حین تغییر شکل مجازی میکروروتور به آن اعمال می‌شود از طریق رابطه‌ی ۲۵ محاسبه می‌شود:

$$\delta W = \left[ \hat{V}_y \delta v + \hat{V}_z \delta w + \hat{M}_y \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \hat{M}_z \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=L}, \quad (25)$$

که در آن  $\hat{V}_z$  و  $\hat{V}_y$  کار نیروهای برشی در جهات  $y$  و  $z$ ، و حاصل تنش‌های وارده بر سطح مقطع میکروشفت هستند. همچنین  $\hat{M}_z$  و  $\hat{M}_y$  برآیند گشتاورهای وارده در راستاهای  $y$  و  $z$  هستند. حال برای میکروروتور با شفت متشکل از هدفمند تابعی، از اصل همیلتون استفاده می‌شود.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = 0, \quad (26)$$

با جایگذاری روابط ۱۷، ۲۴ و ۲۵ به ترتیب برای  $T$ ،  $U$  و  $\delta W$  در رابطه‌ی ۲۶ و انجام محاسبات مربوط به حساب تغییرات، معادلات حرکت و شرایط مرزی طبیعی و ضروری چنین حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} & [(EI)_{eq} + (\mu l^3 A)_{eq}] \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \left( (\rho A)_{eq} + M \delta \left( x - \frac{L}{4} \right) \right) \ddot{v} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( (\rho I)_{eq} + I_d \delta \left( x - \frac{L}{4} \right) \right) \times \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} + 2\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \right] \\ & = M \Omega^2 [e_y \cos \Omega t - e_z \sin \Omega t] \delta \left( x - \frac{L}{4} \right), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & [(EI)_{eq} + (\mu l^3 A)_{eq}] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left( (\rho A)_{eq} + M \delta \left( x - \frac{L}{4} \right) \right) \ddot{w} \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( (\rho I)_{eq} + I_d \delta \left( x - \frac{L}{4} \right) \right) \times \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - 2\Omega \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \right] \\ & = M \Omega^2 [e_y \sin \Omega t + e_z \cos \Omega t] \delta \left( x - \frac{L}{4} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & [-(EI)_{eq} + (\mu l^3 A)_{eq}] \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + (\rho I)_{eq} \left( \frac{\partial \ddot{v}}{\partial x} + 2\Omega \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right) \\ & - \hat{V}_y \Big|_{x=0, L} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & [-(EI)_{eq} + (\mu l^3 A)_{eq}] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (\rho I)_{eq} \left( \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} - 2\Omega \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right) \\ & - \hat{V}_z \Big|_{x=0, L} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left( [(EI)_{eq} + (\mu l^3 A)_{eq}] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \hat{M}_y \right) \Big|_{x=0, L} = 0,$$

$$\text{or } \delta \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=0, L} = 0, \quad (31)$$

انرژی جنبشی میکروشفت نیز از طریق روابط ۱۹ و ۲۰ محاسبه می‌شود. [۲۰، ۲۹]

$$\begin{aligned} T_{shaft} &= T_{tran} + T_{rot} = \frac{1}{4} \int_0^L \int_A \rho(r) \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dA dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^L \int_A \rho(r) \{\omega\}^T [I] \{\omega\} dA dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^L \left[ (\rho A)_{eq} (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + (\rho J)_{eq} \omega^2 \right. \\ &\left. + (\rho I)_{eq} (\omega_y^2 + \omega_z^2) \right] dx \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} (\rho A)_{eq} &= \int_A \rho(r) dA, \\ (\rho I)_{eq} &= \int_A z^2 \rho(r) dA = \int_A y^2 \rho(r) dA, \\ (\rho J)_{eq} &= \int_A (y^2 + z^2) \rho(r) dA = \int_A r^2 \rho(r) dA. \end{aligned} \quad (20)$$

همچنین انرژی جنبشی دیسک از طریق رابطه‌ی ۲۱ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} T_{disk} &= \frac{1}{4} \int_0^L \left[ M (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) + J_d \omega^2 \right. \\ &\left. + I_d (\omega_y^2 + \omega_z^2) \right] \delta \left( x - \frac{L}{4} \right) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن  $\delta(\cdot)$  معرف تابع دلتای دیراک است. بدین ترتیب انرژی جنبشی میکروروتور برابر با  $T_1 = T_{shaft} + T_{disk}$  است. در شرایط تغییر شکل کوچک، مؤلفه‌های جابه‌جایی و مشتق آن‌ها نسبت به  $x$  بسیار کوچک خواهد بود، بنابراین مقادیر  $\psi_z$  و  $\psi_y$  که در رابطه‌ی ۴ معرفی شد کوچک بوده و به ترتیب تقریباً برابر  $\partial v / \partial x$  و  $-\partial w / \partial x$  خواهد بود. بنابراین در معادله‌ی انرژی، ترم‌هایی تا مرتبه‌ی دو در نظر خواهد گرفته شد. از سوی دیگر به دلیل دایروی بودن سطح مقطع شفت و ریسک داریم:  $J_d = 2I_d$  و  $(\rho J)_{eq} = 2(\rho I)_{eq}$  و ۲۱ و ۲۱ و حاصل آن با موارد مذکور منجر به رابطه‌ی ۲۲ برای انرژی جنبشی کل سیستم خواهد شد.

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{4} \int_0^L \left[ \left( (\rho A)_{eq} + M \delta \left( x - \frac{L}{4} \right) \right) (\dot{v}^2 + \dot{w}^2) \right. \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^L \left[ \left( (\rho I)_{eq} + I_d \delta \left( x - \frac{L}{4} \right) \right) \right. \\ &\left. \left. \times \left( 4\Omega \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \left( \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} \right)^2 \right) \right] dx \right. \\ &\left. + ((\rho J)_{eq} + I_d) \Omega^2 \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

علاوه بر آن، با فرض وجود خروج از مرکزیت در دیسک، ترم دیگری به انرژی جنبشی سیستم اضافه خواهد شد ( $T_{ecc}$ ) که مقدار آن از رابطه‌ی ۲۳ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} T_{ecc} &= -M \Omega \left[ \dot{v} (e_y \sin \Omega t + e_z \cos \Omega t) + \dot{w} (-e_y \cos \Omega t + e_z \sin \Omega t) \right. \\ &\left. - \frac{\Omega}{4} (e_y^2 + e_z^2) \right] \Big|_{x=L/4}, \end{aligned} \quad (23)$$

افزون بر این، شرایط مرزی داده شده در روابط ۳۳ تا ۳۵ برحسب  $Z$  بازنویسی می‌شود:

$$Z|_{\tilde{x}=0, 1} = 0, \quad -((EI)_{eq} + (\mu l^2 A)_{eq}) \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{x}^2} \Big|_{\tilde{x}=0, 1} = 0. \quad (40)$$

#### ۴. روش حل

در این قسمت به منظور حل معادلات حاکم بر حرکت عرضی میکروروتور با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی (رابطه ۳۸) با شرایط مرزی داده شده در رابطه ۴۰، از رابطه ۴۱ برای تابع  $Z(\tilde{x}, \tau)$  استفاده می‌شود:

$$Z(\tilde{x}, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\tilde{x}) Z_k(\tau) \quad (41)$$

که در آن  $\phi_k = \sqrt{2} \sin(k\pi\tilde{x})$  تابع ویژه برای یک تیر در شرایط تکیه‌گاهی ساده (لولای) است. با وارد کردن رابطه ۴۱ در رابطه ۳۸ و به‌کارگیری روش کالرکین، یک معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت از رسته ۲ نسبت به زمان حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} (1 + n^2 \pi^2 \tilde{R}^2) \frac{\partial^2 Z_n}{\partial \tau^2} - 2\Omega^* i (n\pi \tilde{R}) \frac{\partial Z_n}{\partial \tau} + (n\pi)^2 \tilde{S} Z_n \\ + 2M^* \sin \frac{n\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 Z_k}{\partial \tau^2} \sin \frac{k\pi}{2} + 2n\pi I_d^* \cos \frac{n\pi}{2} \\ \times \sum_{k=1}^{\infty} k\pi \left( \frac{\partial^2 Z_k}{\partial \tau^2} - 2\Omega^* i \frac{\partial Z_k}{\partial \tau} \right) \cos \frac{k\pi}{2} \\ = M^* \Omega^{*2} (\tilde{e}_y + i\tilde{e}_z) \sin \frac{n\pi}{2} e^{i\Omega^* \tau}, \end{aligned} \quad (42)$$

با مراجعه به رابطه ۴۲، بخش پاسخ وابسته به زمان برای  $Z_n(\tau)$  چنین در نظر گرفته می‌شود:

$$Z_n(\tau) = \mathbf{Z}_n e^{i\Omega^* \tau}, \quad (43)$$

که در آن دامنه ارتعاش است و از رابطه ۴۴ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} -\Omega^{*2} (1 + n^2 \pi^2 \tilde{R}^2) \mathbf{Z}_n + 2(n\pi \tilde{R})^2 \Omega^* \mathbf{Z}_n + (n\pi)^2 \tilde{S} \mathbf{Z}_n \\ - 2\Omega^{*2} M^* \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Z}_k \sin \frac{k\pi}{2} \\ + 2n\pi \Omega^{*2} \tilde{R} I_d^* \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Z}_k k\pi \cos \frac{k\pi}{2} \\ = M^* \Omega^{*2} (\tilde{e}_y + i\tilde{e}_z) \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned} \quad (44)$$

رابطه ۴۴ یک رابطه جبری است که در آن دامنه‌های مودهای مختلف بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند. در ادامه، به‌عنوان تقریب تنها دو ترم اول که مربوط به مودهای اول و دوم است در نظر گرفته می‌شود. در این صورت:

$$n = 1$$

$$\mathbf{Z}_1 = M^* \Omega^{*2} \frac{\tilde{e}_y + i\tilde{e}_z}{\pi^2 \tilde{S} - (1 + 2M^* - \pi^2 \tilde{R}^2) \Omega^{*2}} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \left( ((EI)_{eq} + (\mu l^2 A)_{eq}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \hat{M}_z \right) \Big|_{x=0, L} = 0, \\ \text{or } \delta \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0, L} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

چنان که در روابط ۲۷ و ۲۸ مشاهده می‌شود هم اینرسی ناشی از دوران شفت، و هم ترم‌های مربوط به اثرات ژيروسکوپیک در معادلات حرکت میکروروتور حضور دارند. در ادامه فرض می‌شود که هر دو انتهای شفت میکروروتور روی یاتاقان‌های صلب قرار دارند که از حرکت آن در جهات مختلف جلوگیری می‌کنند. به عبارت دیگر برای میکروشفت داریم:

$$v|_{x=0, L} = w|_{x=0, L} = 0. \quad (33)$$

فرض می‌کنیم که یاتاقان‌های مذکور تنها می‌تواند نیروی برشی وارده در دو انتها را تحمل کنند. به عبارت دیگر گشتاورهای  $\hat{M}_z$  و  $\hat{M}_y$  در هر دو انتهای میکروشفت مورد نظر وجود ندارند. با ملاحظه روابط ۳۱ و ۳۲، می‌توان نتیجه گرفت که شرایط مرزی زیر باید برقرار باشد:

$$\left( ((EI)_{eq} + (\mu l^2 A)_{eq}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0, L} = 0, \quad (34)$$

$$\left( ((EI)_{eq} + (\mu l^2 A)_{eq}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=0, L} = 0, \quad (35)$$

با تعریف تابع مختلط  $s = v + iw$ ، دو معادله دیفرانسیلی با مشتق جزئی حاکم بر حرکت عرضی میکروروتور (روابط ۲۷ و ۲۸) را می‌توان به یک معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی مختلط تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} ((EI)_{eq} + (\mu l^2 A)_{eq}) \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \left( (\rho A)_{eq} + M \delta(x - \frac{L}{2}) \right) \ddot{s} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( (\rho I)_{eq} + I_d \delta(x - \frac{L}{2}) \right) \times \left( \frac{\partial \dot{s}}{\partial x} - 2i\Omega \frac{\partial \dot{s}}{\partial x} \right) \right] \\ = M \Omega^2 (e_y + ie_z) \delta(x - \frac{L}{2}) e^{i\Omega t}, \end{aligned} \quad (36)$$

همچنین با استفاده از پارامترهای بی‌بعد رابطه ۳۷:

$$\begin{aligned} Z = \frac{s}{R}, \quad \tilde{e}_y = \frac{e_y}{R}, \quad \tilde{e}_z = \frac{e_z}{R}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \\ \tilde{\omega} = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{(EI)_{eq}}{(\rho A)_{eq}}}, \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{\tilde{\omega}}, \quad \tau = \tilde{\omega} t, \end{aligned} \quad (37)$$

معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی برای حرکت یک میکروروتور حاوی شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی با خروج از مرکز در دیسک به صورت بی‌بعد شده حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{S} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{x}^2} + \left( 1 + M^* \delta(\tilde{x} - \frac{1}{2}) \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \left( \tilde{R}^2 + I_d^* \delta(\tilde{x} - \frac{1}{2}) \right) \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau^2 \partial \tilde{x}} - 2\Omega^* i \frac{\partial^2 Z}{\partial \tau \partial \tilde{x}} \right) \right] \\ = M^* \Omega^{*2} (\tilde{e}_y + i\tilde{e}_z) \delta(\tilde{x} - \frac{1}{2}) e^{i\Omega^* \tau}, \end{aligned} \quad (38)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \frac{1}{\pi^2} \left( 1 + \frac{(\mu l^2 A)_{eq}}{(EI)_{eq}} \right), \quad \tilde{R} = \frac{R}{2L}, \\ M^* = \frac{M}{(\rho A)_{eq} L}, \quad I_d^* = \frac{I_d}{(\rho A)_{eq} L^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

و برای  $n = 2$ :

$$\mathbf{Z}_r = \mathbf{0}, \quad (46)$$

همچنین در صورتی که خروج از مرکز دیسک صفر باشد، یعنی در حالت ارتعاشات آزاد میکروروتور، قسمت وابسته به زمان چنین محاسبه می‌شود:

$$Z_k(\tau) = \mathbf{A}_k e^{i\omega_k \tau}, \quad (47)$$

که در آن  $\mathbf{A}_k$  تابع ثابت مختلطی است که از شرایط اولیه محاسبه شده، و  $\omega_k$  بسامد رزونانس نظیر شماره‌ی مود  $k$ ام است. این بسامدها را می‌توان با جایگذاری رابطه‌ی 47 در 42، و با در نظر گرفتن جواب‌های غیربدهی محاسبه کرد. بدین ترتیب بعد از انجام محاسبات مذکور و با لحاظ کردن دو مود اول، بسامدهای رزونانسی مربوط به لنگ‌زنی هم‌جهت با دوران شفت یا پیشرو<sup>۱</sup> و لنگ‌زنی مربوط به خلاف جهت با دوران شفت یا پسرو<sup>۲</sup> برای میکروروتور برای دو مود اول حاصل می‌شود:

$$\omega_1^f = \pi^2 \frac{\Omega^* \tilde{R}^r + \sqrt{\Omega^{*2} \tilde{R}^r + \tilde{S}(\lambda + \pi^2 \tilde{R}^r + 2M^*)}}{\lambda + \pi^2 \tilde{R}^r + 2M^*},$$

$$\omega_1^b = -\pi^2 \frac{\Omega^* \tilde{R}^r - \sqrt{\Omega^{*2} \tilde{R}^r + \tilde{S}(\lambda + \pi^2 \tilde{R}^r + 2M^*)}}{\lambda + \pi^2 \tilde{R}^r + 2M^*}. \quad (48)$$

و

$$\omega_2^f = \frac{4\pi^2}{\lambda + 4\pi^2 \tilde{R}^r + 8\pi^2 I_d^*} \left[ \Omega^* (\tilde{R}^r + 2I_d^*) + \sqrt{\Omega^{*2} (\tilde{R}^r + 2I_d^*)^2 + \tilde{S}(\lambda + 4\pi^2 \tilde{R}^r + 8\pi^2 I_d^*)} \right],$$

$$\omega_2^b = -\frac{4\pi^2}{\lambda + 4\pi^2 \tilde{R}^r + 8\pi^2 I_d^*} \left[ \Omega^* (\tilde{R}^r + 2I_d^*) - \sqrt{\Omega^{*2} (\tilde{R}^r + 2I_d^*)^2 + \tilde{S}(\lambda + 4\pi^2 \tilde{R}^r + 8\pi^2 I_d^*)} \right]. \quad (49)$$

## ۵. نتایج عددی

به منظور تشریح چگونگی تأثیر کوچکی مقیاس بر روی رفتار ارتعاشاتی میکروروتور با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی، در این قسمت نتایج عددی ارائه می‌شود. به عنوان یک حالت مورد مطالعه، یک مدل توانی برای توزیع خواص مادی در میکروشفت به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\rho(r) = \rho_m + \left(\frac{r}{R}\right)^p (\rho_c - \rho_m),$$

$$E(r) = E_m + \left(\frac{r}{R}\right)^p (E_c - E_m),$$

$$\mu(r) = \mu_m + \left(\frac{r}{R}\right)^p (\mu_c - \mu_m), \quad (50)$$

که در آن اندیس‌های  $m$  و  $c$  به ترتیب معرف خواص مورد نظر در فلز و سرامیک است؛ همچنین  $p$  معرف توان توزیع خواص مواد است. در صورتی که  $p = 0$  باشد خواص میکروشفت به سرامیک کامل، و در صورتی که  $p$  افزایش یابد در بی‌نهایت خواص میکروشفت کاملاً فلزی خواهد بود. همچنین در این جا فرض می‌شود که پارامتر مقیاس طولی  $l$  در راستای ضخامت یکسان است. برای عناصر تشکیل‌دهنده‌ی ماده‌ی هدفمند تابعی، مواد خاصی برای فاز فلز و سرامیک میکروشفت در نظر گرفته

شده است. بدین صورت که خواص مادی فاز فلز آن شامل  $E_m = 70$  GPa،  $\rho_m = 2700$  kg/m<sup>3</sup> و  $\mu_m = 26$  GPa آن شامل  $E_c = 393$  GPa،  $\rho_c = 3960$  kg/m<sup>3</sup> و  $\mu_c = 157$  GPa، خواص مادی معادلی مطابق هستند.<sup>[19]</sup> جایگذاری روابط 50 در روابط 18 و 20، خواص مادی معادلی مطابق رابطه‌ی 51 برای میکروروتور با شفت متشکل از مواد هدفمند مورد نظر حاصل می‌شود.

$$(\rho A)_{eq} = \frac{p\rho_m + 2\rho_c}{p+2} A$$

$$(\rho I)_{eq} = \frac{p\rho_m + 4\rho_c}{p+4} I$$

$$(\rho J)_{eq} = 2 \frac{p\rho_m + 4\rho_c}{p+4} I$$

$$(41)$$

$$(\mu I^r A)_{eq} = \frac{p\mu_m + 2\mu_c}{p+2} A l^r,$$

$$(EI)_{eq} = \frac{pE_m + 4E_c}{p+4} I. \quad (52)$$

همچنین از رابطه‌ی 39 مقدار  $\tilde{S}$ ،  $M^*$  و  $I_d^*$  برای میکروروتور مورد نظر چنین حاصل می‌شود:

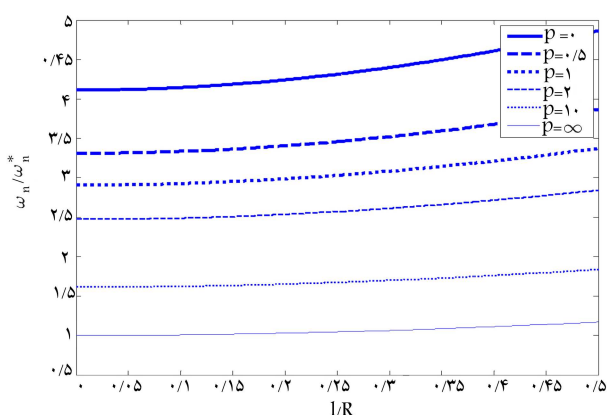
$$\tilde{S} = \frac{\lambda}{\pi^2} \left( \lambda + 4 \frac{p\mu_m + 2\mu_c}{pE_m + 4E_c} \frac{p+4}{p+2} \left(\frac{l}{R}\right)^r \right),$$

$$M^* = \frac{(p+2)M}{(p\rho_m + 2\rho_c)AL},$$

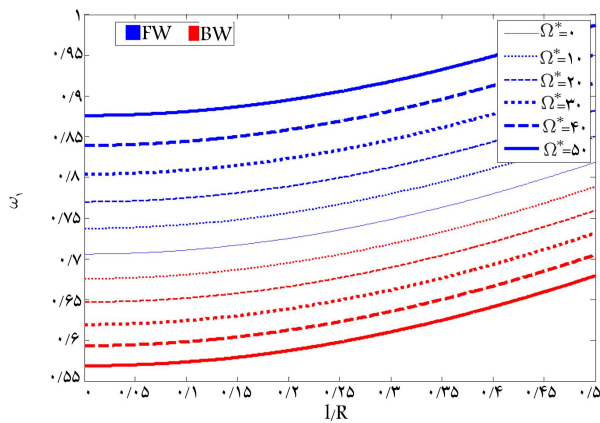
$$I_d^* = \frac{(p+2)I_d}{(p\rho_m + 2\rho_c)AL^r}. \quad (53)$$

با مراجعه به رابطه‌ی 53، نسبت  $l/R$  به صورت یک پارامتر بی‌بعد طولی برای تحلیل‌های بعدی تعریف می‌شود. همچنین باید اشاره کرد که در حالت  $l/R = 0$  نتایج به نتایج حاصل از نظریه‌ی کلاسیک محیط پیوسته کاهش می‌یابد. شایان ذکر است که در مثال‌های پیشرو نسبت شعاع به طول میکروشفت نیز برابر 1 به 20 فرض می‌شود.

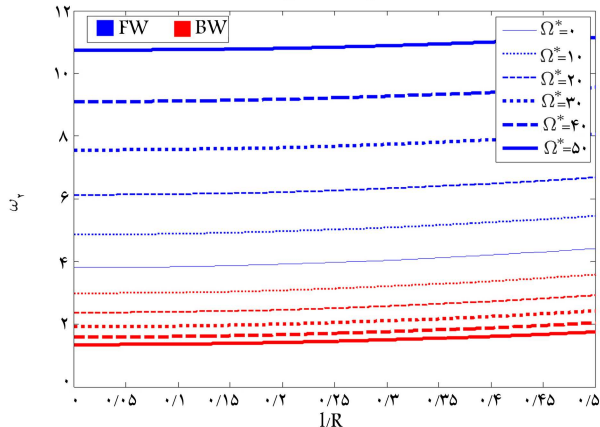
در شکل 3، تغییرات نسبت بسامدهای طبیعی  $\omega_n$  یک میکروشفت ( $M^* = 0$ ) و  $(I_d^* = 0)$  غیر چرخان و متشکل از مواد هدفمند تابعی به بسامدهای طبیعی



شکل 3. تغییرات نسبت بسامدهای طبیعی  $\omega_n$  یک میکروشفت ( $M^* = 0$ ) و  $(I_d^* = 0)$  غیر چرخان و متشکل از مواد هدفمند تابعی به بسامدهای طبیعی میکروشفتی متشابه با جنس فلزی و محاسبه شده از طریق نظریه‌ی کلاسیک  $\omega_n^*$  برحسب مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد طولی  $l/R$  و به ازای مقادیر مختلف  $p$ .



الف) مود اول خمشی؛



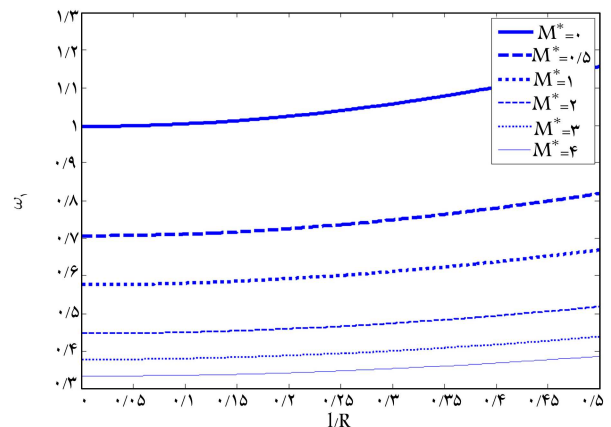
ب) مود دوم خمشی.

شکل ۵. تغییرات بسامدهای طبیعی برای مود اول و دوم خمشی یک میکروروتور با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی و با  $p = 1$  در سرعت‌های مختلف دورانی بر حسب پارامتر بی بعد طولی  $l/R$  برای  $M^* = 0.75$  و  $I_d^* = 0.001$ .

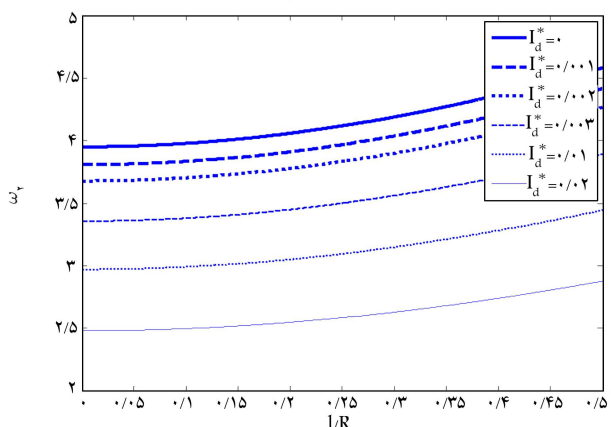
است. با افزایش سرعت دورانی بسامدهای مربوط به لنگ زنی پیش‌رو افزایش می‌یابد، در حالی که بسامدهای نظیر حرکت پس‌رو کاهش خواهد یافت. به طور مشابه موارد پیش‌تر، مقادیر بسامدی نیز با افزایش  $l/R$  به صورت پیوسته افزایش می‌یابد.

یکی از نمودارهای مهم در علم روتور دینامیک، رسم تغییرات بسامدهای طبیعی روتور بر حسب دور است که به آن «نمودار کمپل» می‌گویند. از این نمودار برای تعیین سرعت‌های بحرانی به‌ازای هارمونیک‌های مختلف استفاده می‌شود. این نمودار برای میکروروتور مورد نظر در شکل ۶ برای مقادیر مختلف پارامتر طولی بی‌بعد شده  $l/R$  و در حالت  $p = 1$ ،  $M^* = 0.75$  و  $I_d^* = 0.001$  برای دو مود اول خمشی رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود بسامدهای طبیعی میکروسیستم با افزایش  $l/R$  افزایش و افزایش دور نیز سبب افزایش بسامدهای طبیعی پیش‌رو و کاهش پس‌رو می‌شود.

در شکل ۷ نمودار تغییرات دامنه‌ی نرمال شده‌ی میکروروتور به‌ازای وجود خروج از مرکزیت یا نامیزانی در دیسک به مقدار  $e = \tilde{e}_{yz}$  و  $e_z = 0$  و بر حسب  $l/R$  نشان داده شده است؛ در این حالت نیز  $p = 1$  و  $M^* = 0.75$  فرض شده است. چنان که مشاهده می‌شود، با افزایش  $l/R$  سرعت بحرانی شفت، جایی که بیشینه‌ی دامنه پدیدار می‌شود، افزایش می‌یابد. علت این امر افزایش بسامدهای رزونانسی سیستم بر اثر افزایش  $l/R$  است.



الف) مود اول خمشی؛



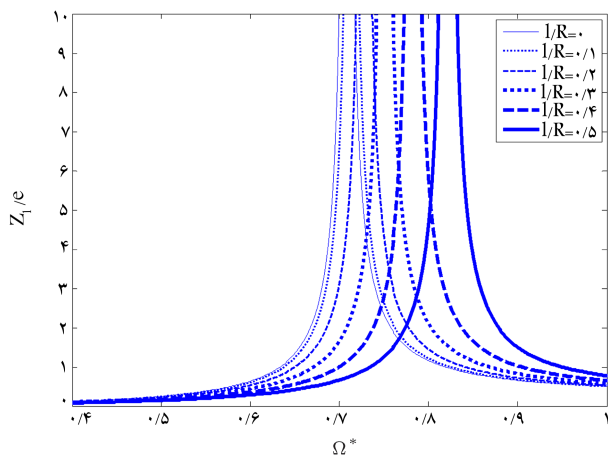
ب) مود دوم خمشی.

شکل ۴. تغییرات بسامدهای طبیعی برای مود اول و دوم خمشی یک میکروروتور غیرچرخان با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی و با  $p = 1$  بر حسب پارامتر بی بعد طولی  $l/R$  برای مقادیر مختلف  $M^*$  و  $I_d^*$ .

میکروشفتی متشابه، اما با جنس کاملاً فلزی و محاسبه شده از طریق نظریه‌ی کلاسیک  $\omega_n^*$ ، برای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد طولی  $l/R$  و بازای توان‌های مختلف توزیع خواص مادی آن  $p$ ، نمایش داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود این نسبت با افزایش  $l/R$  رشد می‌یابد به طوری که با افزایش این مقدار انحراف نظریه‌ی تش کوپلی از نظریه‌ی کلاسیک افزایش می‌یابد. همچنین با کاهش مقدار  $p$ ، نسبت  $\omega_n^*$  به  $\omega_n^*$  افزایش می‌یابد.

در شکل ۴ تغییرات بسامدهای طبیعی برای دو مود اول خمشی یک میکروروتور غیرچرخان با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی و با فرض  $p = 1$  بر حسب پارامتر بی‌بعد طولی  $l/R$  برای مقادیر مختلف  $M^*$  و  $I_d^*$  نمایش داده شده است. مطابق رابطه‌های ۴۸ و ۴۹، بسامد نظیر مود اول تنها با  $M^*$  و بسامد نظیر مود دوم میکروروتور با  $I_d^*$  تغییر می‌یابد. با افزایش  $M^*$  و  $I_d^*$  به ترتیب بسامدهای نظیر مود اول و دوم خمشی کاهش می‌یابند. شایان ذکر است که مقادیر بسامدی نیز با افزایش  $l/R$  به صورت پیوسته افزایش می‌یابند.

تغییرات بسامدهای طبیعی برای دو مود اول خمشی یک میکروروتور با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی و با فرض  $p = 1$  در سرعت‌های مختلف دورانی بر حسب پارامتر بی‌بعد طولی  $l/R$  برای  $M^* = 0.75$  و  $I_d^* = 0.001$  در شکل ۵ نمایش داده شده است. در این شکل بسامدهای نظیر حرکت پیش‌رو با رنگ آبی (FW) و بسامدهای نظیر حرکت پس‌رو با رنگ قرمز (BW) مشخص شده



شکل ۷. نمودار تغییرات دامنه‌ی نرمال شده میکروروتور با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی و با  $p = 1$  و  $M^* = 0.5$  به‌ازای وجود نامیزانی در دیسک به مقدار  $e = e_y = 0$  و  $e_z = 0$  و برحسب پارامتر طولی بی‌بعد شده  $l/R$ .

## ۶. نتیجه‌گیری

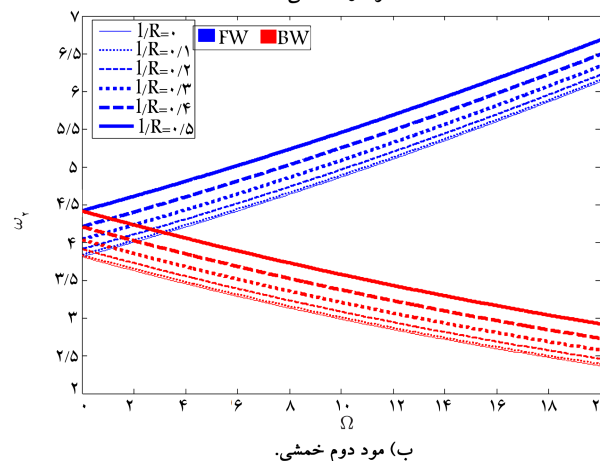
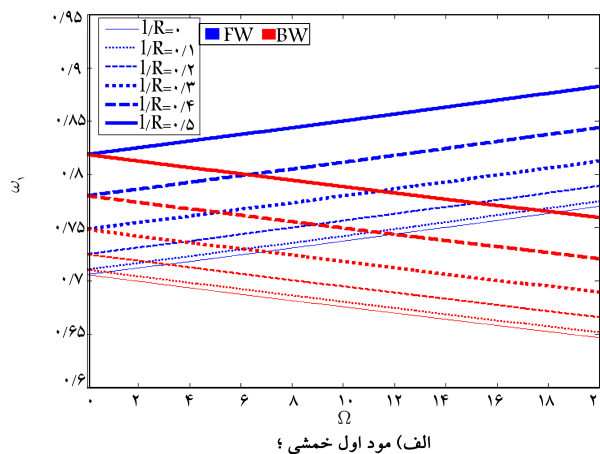
در این نوشتار رفتار ارتعاشاتی میکروروتورهای متشکل از شفتی ساخته شده از مواد هدفمند تابعی و دیسکی در میانه‌ی آن با نامیزانی جرمی، براساس نظریه‌ی غیرکلاسیک تنش کوپلی اصلاح شده مورد مطالعه قرار گرفته است. معادلات حاکم بر حرکت سیستم میکروروتور با استفاده از اصل همیتون استخراج شده است. روابط تحلیلی در معادلات ۴۸ و ۴۹ برای دو بسامد طبیعی اول مربوط به تغییر شکل خمشی در هر دو حرکت پیش‌رو و پس‌رو، و نیز در معادله‌ی ۴۵ برای دامنه‌ی ارتعاشات اجباری بر اثر تحریک نامیزانی ارائه شده است. با استفاده از این روابط تحلیلی، نتایج عددی برای بررسی تأثیر پارامترهای مختلف سیستم بر مشخصات ارتعاشی در مثال‌هایی ارائه شده است.

## پانویس‌ها

1. forward
2. backward

## منابع (References)

1. Bishop, R.E.D. "The vibration of rotating shafts", *J. Mech. Eng. Sci.*, **1**(1), pp. 50-65 (1959).
2. Dimentberg, F.M., *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*, London: Butterworths, 243 p. (1961).
3. Vance, J.M., *Rotordynamics of Turbomachinery*, John Wiley & Sons (1988).
4. Rao, J.S., *History of Rotating Machinery Dynamics*, Springer, Chennai (2011).
5. Ma, H., Li, H., Niu, H., Song, R. and Wen, B. "Numerical and experimental analysis of the first-and second-



شکل ۶. نمودار کمپل میکروروتور با شفت متشکل از مواد هدفمند تابعی و با  $p = 1$  برای مقادیر مختلف پارامتر طولی بی‌بعد شده  $l/R$  و در حالت  $M^* = 0.5$  و  $I_d^* = 0.001$  برای مود اول و دوم خمشی.

mode instability in a rotor-bearing system", *Arch. Appl. Mech.*, **84**(4), pp. 519-554 (2014).

6. Epstein, A.H., Anathasuresh, G., Ayon, A. and et al. "Power MEMS and microengines", in *Proceeding of IEEE Transducers '97 Conference*, Chicago, IL (1997).
7. Fréchette, L.G., Lee, C., Arslan, S. and et al. "Preliminary design of a MEMS steam turbine power plant-on-a-chip", in *Proceeding of 3rd Int'l Workshop on Micro & Nano Tech. for Power Generation & Energy Conv. (PowerMEMS'03)*, Makuhari, Japan (2003).
8. Lang, J.H., *Multi-Wafer Rotating MEMS Machines, Turbines, Generators, and Engines*, Springer, London (2009).
9. Schubert, D., *Mems-Concept Using Micro Turbines for Satellite Power Supply*, Solar Power InTech (2012).
10. Yamanoushi, M., Koizumi, M., Hiraii, T. and Shiota, I. "On the design of functionally gradient materials", *Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Japan (1990).



11. Koizumi, M. "The concept of FGM", *Ceramic Transactions, Functionally Graded Materials*, **34**, pp. 3-10 (1993).
12. Bruck, H.A. "A one-dimensional model for designing functionally graded materials to manage stress waves", *Int. J. Solid Struct.*, **37**, pp. 6383-6395 (2000).
13. Ghasemi, H., Kerfriden, P., Bordas, S.P.A., Muthu, J., Zi, G. and Rabczuk, T. "Interfacial shear stress optimization in sandwich beams with polymeric core using non-uniform distribution of reinforcing ingredients", *Compos. Struct.*, **120**, pp. 221-230 (2015).
14. Fu, Y.Q., Du, H.J., Huang, W.M., Zhang, S. and Hu, M. "TiNi-based thin films in MEMS applications: A review", *Sensors Actuat. A*, **112**(2-3), pp. 395-408 (2004).
15. Fu, Y.Q., Du, H.J. and Zhang, S. "Functionally graded TiN/TiNi shape memory alloy films", *Mater. Lett.*, **57**(20), pp. 2995-2999 (2003).
16. Witvrouw, A. and Mehta, A. "The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications", *Funct. Graded Mater.*, **VIII**(492-493), pp. 255-260 (2005).
17. Lee, Z., Ophus, C, Fischer, L.M., Nelson-Fitzpatrick, N., Westra, K.L., Evoy, S. and et al. "Metallic NEMS components fabricated from nanocomposite Al-Mo films", *Nanotechnology*, **17**(12), pp. 3063-70 (2006).
18. Stolken, J.S. and Evans, A.G. "Microbend test method for measuring the plasticity length scale", *J. Acta Mater.*, **46**, pp. 5109-5115 (1998).
19. Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M. and et al. "Experiments and theory in strain gradient elasticity", *J. Mech. Phys. Solids*, **51**, pp. 1477-1508 (2003).
20. McFarland, A.W. and Colton, J.S. "Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors", *J. Micromech. Microeng.*, **15**, pp. 1060-1067 (2005).
21. Toupin, R.A. "Theories of elasticity with couple-stress", *Arch. Rational. Mech. Anal.*, **17**, pp. 85-112 (1964).
22. Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F. "Effects of couple-stresses in linear elasticity", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **11**, pp. 415-448 (1962).
23. Koiter, W.T. "Couple stresses in the theory of elasticity, I and II", *Proc. K. Ned. Akad. Wet. (B)*, **67**, pp. 17-44 (1964).
24. Yang, F., Chong, A.C.M., Lam, D.C.C. and Tong, P. "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *Int. J. Solids Struct.*, **39**(10), pp. 2731-2743 (2002).
25. Park, S.K. and Gao, X.-L. "Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory", *J. Micromech. Microeng.*, **16**, pp. 2355-2359 (2006).
26. Kong, S., Zhou, S., Nie, Z. and Wang, K. "The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler microbeams", *Int. J. Eng. Sci.*, **46**, pp. 427-437 (2008).
27. Asghari, M., Kahrobaiyan, M.H., Rahaeifard, M. and Ahmadian, M.T. "Investigation of the size effects in Timoshenko beams based on the couple stress theory", *Arch. Appl. Mech.*, **81**(7), pp. 863-874 (2011).
28. Kahrobaiyan, M.H., Asghari, M. and Ahmadian, M.T. "A Timoshenko beam element based on the modified couple stress theory", *Int. J. Mech. Sci.*, **79**, pp. 75-83 (2014).
29. Asghari, M., Ahmadian, M.T., Kahrobaiyan, M.H. and Rahaeifard, M. "On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams", *Mater. Des.*, **31**, pp. 2324-2329 (2010).
30. Ke, L.L. and Wang, Y.-S. "Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory", *Compos. Struct.*, **93**, pp. 342-350 (2011).
31. Reddy, J.N. "micro structure-dependent couple stress theories of functionally graded beams", *J. Mech. Phys. Solids*, **59**, pp. 2382-2399 (2011).
32. Salamat-talab, M., Nateghi, A. and Torabi, J. "Static and dynamic analysis of third-order shear deformation FG micro beam based on modified couple stress theory", *Int. J. Mech. Sci.*, **57**(1), pp. 63-73 (2012).
33. Jomehzadeh, E., Noori, H.R. and Saidi, A.R. "The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory", *Physica E: Low-dim. Sys. Nanostruct.*, **43**(4), pp. 877-883 (2011).
34. Ma, H.M., Gao, X.-L. and Reddy, J.N. "A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory", *Acta Mech.*, **220**(1-4), pp. 217-235 (2011).
35. Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Yang, J. and Kitipornchai, S. "Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory", *J. Sound Vib.*, **331**(1), pp. 94-106 (2012).
36. Reddy, J.N. and Kim, J. "A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates", *Compos. Struct*, **94**(3), pp. 1128-1143 (2012).
37. Thai, H.-T. and Choi, D.-H. "Size-dependent functionally graded Kirchhoff and Mindlin plate models based on a modified couple stress theory", *Compos. Struct.*, **95**, pp. 142-153 (2013).
38. Thai, H.-T. and Thuc, P.V. "A size-dependent functionally graded sinusoidal plate model based on a modified couple stress theory", *Compos. Struct.*, **96**, pp. 376-383 (2013).
39. Nayfeh, A.H. and Pai, P.F., *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*, Wiley-Interscience, New York (2004).
40. Hosseini, S.A.A. and Khadem, S.E. "Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia", *Mech. Mach. Theory*, **44**, pp. 272-288 (2009).