

# تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌ی قرارگرفته بر بستر پسترناک

رمضانعلی جعفری نلوکلانی\* (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

مریم عابدی (استادیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، بابلسر

مهندسی مکانیک شریف، بهار ۱۳۹۷ (۱۱۵-۱۰۵)  
دوری ۳-۳۴، شماره ۱، ص. ۱۱۵-۱۰۵

در این مقاله برای اولین بار تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌ی قرارگرفته بر بستر دوپارامتری پسترناک ارائه شده است. در ابتدا براساس نظریه‌ی کلاسیک حاکم بر صفحات کامپوزیتی چندلایه، انرژی‌های آن تشکیل شده است. در ادامه با در نظر گرفتن یک تغییرمتغیر، صفحه‌ی کامپوزیتی دوزنقه‌ی به صفحه‌ی کامپوزیتی مستطیلی نگاشت شده است. در ادامه پاسخ سیستم به شکل یک سری با جملات متعامد و ضرایب مجهول در نظر گرفته شده است. سپس با جای‌گذاری پاسخ مذکور در انرژی‌های سیستم، آنها را برحسب ضرایب مجهول بازنویسی کرده‌ایم. در نهایت با به‌کارگیری روش ریتز یک مسئله‌ی مقادیر ویژه به دست آمده که با حل آن، فرکانس‌ها و شکل مدهای سیستم به دست آمده‌اند. نتایج این مطالعه با نتایج دیگران در حالت‌های ساده مقایسه شده و صحت روابط و برنامه‌های رایانه‌ی نوشته شده تأیید شده‌اند. در انتها نتایج برای صفحه با شرایط مختلف به دست آمده و اثر شرایط مختلف بر پاسخ سیستم بررسی شده است.

واژگان کلیدی: صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌ی، بستر پسترناک، روش ریتز، سری با جملات متعامد.

## ۱. مقدمه

برابر تغییر شکل قائم و تغییر شکل دورانی، برای مدل‌سازی بستر بسیار مناسب است.

تحلیل ارتعاشی و پایداری صفحه با شرایط مرزی ساده در یک راستا و شرایط مرزی دلخواه در راستای دیگر،<sup>[۱]</sup> با به‌کارگیری روش لوی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج برای بارهای کمانشی و نیز فرکانس‌های طبیعی صفحه‌ی مستطیلی به دست آمده است. وانگ و همکارانش<sup>[۲]</sup> تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی مستطیلی را با ارائه‌ی یک راهکار مناسب در به‌کارگیری روش بدون مش مطالعه کرده‌اند. با به‌کارگیری روش گارکین تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه با شرایط مرزی کاملاً درگیر<sup>[۳]</sup> مورد بررسی قرار گرفته است.

در برخی مطالعات، تحلیل ارتعاشات آزاد یک صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی مستطیلی با استفاده از روش کمیته‌سازی تریب دیفرانسیل مربعات مورد بررسی قرار گرفته<sup>[۴]</sup> و بحث‌هایی در مورد نحوه‌ی هم‌گرایی معادلات به دست آمده انجام شده است. در مطالعه دیگری، کمانش و ارتعاش یک صفحه مستطیل مستقر بر بستر پسترناک،<sup>[۵]</sup> و با شرایط مرزی تماماً به صورت ساده بررسی شده است. پاسخ‌های سیستم نیز به‌شکل سری مثلثاتی (سینوسی و کسینوسی) در نظر گرفته شده که هر عبارت آن شرایط مرزی ضروری صفحه را ارضا می‌کند.

در دهه‌های اخیر سازه‌های چندلایه‌ی ساخته شده از مواد کامپوزیتی در صنایع مختلف مورد استفاده فراوانی قرار گرفته است. بسیاری از این سازه‌ها به شکل صفحه‌ی با هندسه‌های مختلف هستند. با توجه به این که بسیاری از این صفحات در محیطی همراه با نیروی هارمونیک قرار دارند، طراحی مناسب‌تر این سازه‌ها مستلزم داشتن اطلاعات مربوط به مشخصات ارتعاشی آنها برای جلوگیری از پدیده‌ی تشدید است. تحلیل صفحات کامپوزیتی چندلایه‌ی مستطیلی مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است<sup>[۱۸-۱۹]</sup> در حالی که تحلیل این صفحات با هندسه‌های دیگر از قبیل دوزنقه، مثلث، لوزی و دیگر اشکال هندسی<sup>[۲۸-۱۹]</sup> کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است. واضح است در بسیاری از کاربردها از قبیل بدنه‌ی هواپیماها و کشتی‌ها، صفحات شکل منظم مستطیلی ندارند و اشکال نسبتاً نامنظم دیگر نیز کاربردهای فراوانی خواهند داشت. از سوی دیگر، در بسیاری از کاربردها صفحه روی بستری قرار گرفته تا بتوان حرکت آن را تحت کنترل قرار داد. از بین مدل‌های موجود برای بستر، بستر پسترناک با توجه به مقاوم بودن در

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۶/۲۴، اصلاحیه ۱۳۹۵/۱۰/۸، پذیرش ۱۳۹۵/۱۱/۱۷

DOI: 10.24200/J40.2018.6399

محققین یک نظریه‌ی اصلاحی به منظور در نظر گرفتن تغییر شکل برشی مناسب برای صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه توسعه داده‌اند.<sup>[۶]</sup> در این نظریه توزیع سهموی برای کرنش برشی قائم در راستای ضخامت صفحه در نظر گرفته شده و علاوه بر این شرط صفر بودن کرنش برشی قائم در سطوح آزاد نیز امکان پذیر شده است. واضح است با توجه به شرایط مذکور دیگر نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی نیست. در بررسی تحلیل ارتعاشی یک صفحه‌ی مستطیلی کامپوزیتی چندلایه در تماس با سیال،<sup>[۷]</sup> معادلات صفحه براساس نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول استخراج و از روش ریتز برای یافتن مشخصه‌های ارتعاشی صفحه استفاده شده است.

مهی و همکارانش<sup>[۸]</sup> تحلیل استاتیکی و ارتعاشی صفحات همسانگرد، مدرج تابعی، ساندویچی و کامپوزیتی چندلایه را با معرفی یک نظریه‌ی تغییر شکل برشی هایپر بولیکی جدید مطالعه کرده‌اند. در این نظریه میدان تغییر شکل درون صفحه‌ی از توابع هایپر بولیکی تشکیل شده که موجب تقریب بهتر برای کرنش‌های برشی قائم صفحه‌ی ضخیم می‌شود. سیاد و فوگال<sup>[۹]</sup> مرور کاملی بر نظریه‌های مختلف صفحات و روش‌های متنوع برای حل معادلات حاکم بر صفحات انجام داده‌اند. روش‌های مختلف نیمه تحلیلی از قبیل ناور، لوی، ریتز و گارکین و روش‌های عددی از قبیل المان محدود، تقاضل محدود و نیز روش بدون مش مورد بررسی قرار گرفته‌اند. عابدی و همکارانش<sup>[۱۰]</sup> به تازگی راه حل تحلیلی جدیدی را برای بررسی ارتعاشات صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه با شرایط مرزی کشسان توسعه داده‌اند. ابتدا براساس نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل صفحه به همراه انرژی پتانسیل ناشی از مرزهای کشسان به دست آمده‌اند. سپس با به کارگیری اصل همپتون معادلات دیفرانسیل حرکت صفحه به همراه شرایط مرزی استخراج شده است. در ادامه تابع تشکیل شده و پاسخ وابسته به مکان صفحه به فرم سری که هر عبارت سری شامل توابع پایه‌ی لژاندر همراه با ضرایب مجهول است در نظر گرفته شده است. توابع پایه‌ی لژاندر شرایط مرزی سیستم را ارضا نمی‌کنند و برای برقراری شرایط مرزی، محققین ضرایب لاگرانژ را در تشکیل تابع دخالت داده‌اند. در نهایت با جای‌گذاری پاسخ‌های فرض شده در تابع و کمینه کردن آن نسبت به ضرایب مجهول سری، به یک مسئله‌ی استاندارد مقادیر ویژه ختم شده که با حل آن مقادیر ویژه (فرکانس) و بردارهای ویژه (شکل مدها) به دست آمده‌اند.

اسن<sup>[۱۱]</sup> تحلیل‌گذاری صفحه‌ی مستطیلی همسانگرد را که تحت حرکت یک جرم متمرکز قرار دارد مطالعه کرده است. او ضمن استفاده از نظریه‌ی کلاسیک برای صفحه‌ی نازک، در استخراج معادله‌ی جرم متحرک، علاوه بر وزن، اینرسی آن را نیز دخالت داده است. یک المان مستطیلی بسیار ساده با چهارگره در چهار گوشه معرفی شده که در هر گره چهار درجه آزادی در نظر گرفته شده است. این چهار درجه آزادی شامل خیز، دو دوران خمشی و یک دوران پیچشی است. ژیانگ و همکارانش<sup>[۱۲]</sup> فرمول‌بندی کلی برای تحلیل صفحات همسانگرد مستطیلی را براساس نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی  $m$  معرفی کرده‌اند. در واقع دو مؤلفه‌ی درون صفحه‌ی از مؤلفه‌های میدان تغییر مکان معرفی شده در این مقاله، چنان تقریب زده شده که می‌توان به سادگی از آن نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی  $m$  را استخراج کرد. آمابیلی و همکاران<sup>[۱۳]</sup> تحلیل ارتعاشات غیرخطی صفحه‌ی مستطیلی را با به کارگیری نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی بالا بررسی کرده‌اند.

در بررسی انجام شده پیرامون تحلیل ارتعاشات آزاد و کماتش صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی مستطیلی،<sup>[۱۴]</sup> از نظریه‌ی کلاسیک حاکم بر صفحات مذکور و روش المان محدود هم‌هندسه استفاده شده است. تحلیل‌های کماتش و ارتعاشات آزاد صفحه‌ی مستطیلی براساس نظریه‌ی برشی با سطح مقطع پله‌ی<sup>[۱۵]</sup> ارائه شده است. همچنین تحلیل ارتعاشی صفحات مستطیلی براساس نظریه‌ی لایه‌ی و با به کارگیری روش

باریکه‌ی محدود اسپیلاین<sup>[۱۶]</sup> بررسی شده است. تحلیل مشابهی نیز برای تحلیل ارتعاشات میرای صفحات مستطیلی<sup>[۱۷]</sup> و نیز تحلیل ارتعاشات صفحه‌ی مستطیلی همسانگرد در تماس با سیال<sup>[۱۸]</sup> انجام شده است.

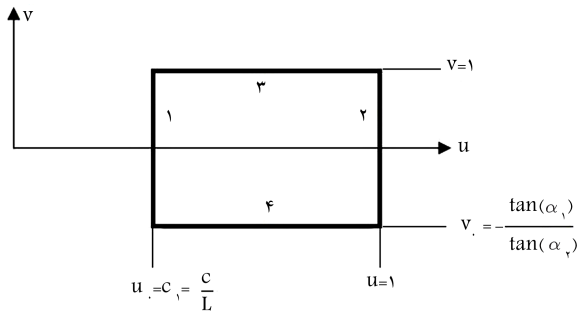
محققین تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی مثلثی همسانگرد<sup>[۱۹]</sup> را براساس نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول مورد مطالعه قرار دادند و نیز، تحلیل ارتعاشی یک صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌ی را براساس نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول<sup>[۲۰]</sup> بررسی کرده‌اند. برای حل مسئله از روش کانولوشن تکینگی گسسته استفاده شده است. با به کارگیری روش ریتز و براساس نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل ارتعاشی صفحات همسانگرد دوزنقه‌ی<sup>[۲۱]</sup> مورد بررسی قرار گرفته است (مرزها به صورت فزهایی با سفتی مشخص در نظر گرفته شده است). در بررسی تحلیل استاتیکی و ارتعاشی یک صفحه‌ی همسانگرد تک لایه‌ی متوازی الاضلاعی مستقر بر بستر پسترناک،<sup>[۲۲]</sup> از نظریه‌ی کلاسیک حاکم بر صفحات همسانگرد استفاده شده است.

کوترو و سیگیلیتو<sup>[۲۳]</sup> حدود بالا و پایین فرکانس‌های صفحات همسانگرد تک لایه‌ی مثلثی و دوزنقه‌ی را برای اولین بار ارائه کرده‌اند. صفحات تنها با شرایط کاملاً درگیر در تمامی مرزها در نظر گرفته شده است. پاسخ به صورت یک سری با ضرایب مجهول تقریب زده شده است. در مقاله‌ی مشابهی، کوترو و سیگیلیتو<sup>[۲۴]</sup> حدود بالا و پایین فرکانس‌های صفحات لوزی شکل را براساس نظریه‌ی کلاسیک انجام داده‌اند. شرایط مرزی صفحه‌ی مذکور نیز درگیر است. با در نظر گرفتن یک المان دوزنقه‌ی با چهارگره که هر گره دارای سه درجه آزادی است، تحلیل ارتعاشی یک صفحه‌ی دوزنقه‌ی براساس نظریه‌ی کلاسیک ارائه شد.<sup>[۲۵]</sup> درجات آزادی هر گره شامل خیز و دو شیب در راستای محورهای مختصات درون صفحه‌ی المان است.

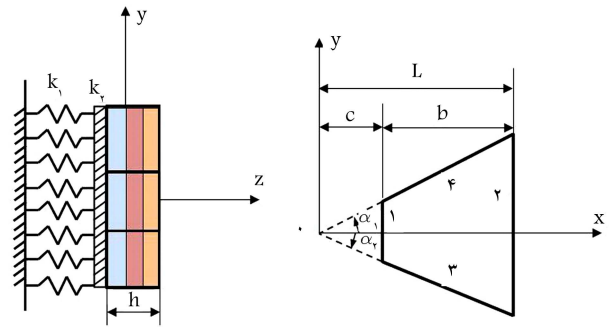
برای تحلیل استاتیکی صفحات مثلثی نازک در دستگاه مختصات مساحتی یک روش عددی مناسب<sup>[۲۶]</sup> ارائه شده است. تابع جابه‌جایی به صورت چند جمله‌ی‌های مجاز بسط داده شده و از روش رایلی - ریتز برای یافتن مشخصه‌های ارتعاشی مسئله استفاده شده است. همگرایی مناسبی نیز برای این تحلیل گزارش شده است. عده‌ی تحلیل ارتعاشی صفحه‌ی دوزنقه‌ی متقارن، براساس نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول<sup>[۲۷]</sup> را مورد بررسی قرار داده‌اند؛ آنان با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل مربعات برای یافتن مشخصات ارتعاشی، اثر پارامترهای مختلف بر پاسخ سیستم را بررسی کرده‌اند.

ژانگ و لی<sup>[۲۸]</sup> تحلیل صفحات مثلثی با هر شکل دلخواه و تحت شرایط مرزی کشسان را مورد بررسی قرار داده‌اند. در استخراج معادلات از نظریه‌ی کلاسیک کیرشرف استفاده شده و از تغییر شکل درون صفحه‌ی نیز صرف نظر شده است. برای تحلیل این صفحات، ابتدا یک صفحه‌ی مثلثی با هر شکل دلخواه در نظر گرفته شده و سپس این صفحه‌ی مثلثی به یک صفحه‌ی مثلثی قائم‌الزاویه نگاشت شده است. بعد صفحه‌ی مثلثی قائم‌الزاویه به یک صفحه‌ی مستطیلی بسط داده شده و در نهایت با به کارگیری سری‌های فوری، پاسخ صفحه را به صورت یک سری با ضرایب مجهول تخمین زده شده و در نهایت با به کارگیری روش ریتز، ضرایب مجهول و در نتیجه پاسخ ارتعاشی سیستم محاسبه شده است.

چنان که مشاهده می‌شود تحلیل صفحات با هندسه‌های غیرمستطیلی بسیار کم مورد توجه قرار گرفته است که یکی از دلایل آن چگونگی تحلیل مرزهای غیرمنظم آن است. همچنین با توجه به جست‌وجوهای انجام شده، از آنجا که تاکنون تحلیلی بر صفحات کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌ی مستقر بر بستر پسترناک انجام نشده، در این مقاله انجام این تحلیل هدف‌گیری شده است. در ادامه، ابتدا مسئله و پارامترهای مختلف صفحه و بستر تعریف خواهد شد. سپس انرژی‌های پتانسیل و جنبشی صفحه براساس نظریه‌ی کلاسیک، و نیز انرژی پتانسیل ناشی از بستر نوشته خواهد



شکل ۲. صفحه‌ی مستطیلی نگاشت شده.



(ب) نمای چپ.

(الف) نمای بالا؛

شکل ۱. صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌یی مستقر بر بستر پسترناک.

رابطه‌ی ۲ چنین تعریف می‌شود:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4)$$

که در آن  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  سفتی کاهنده و تبدیل‌شده‌ی لایه‌ی  $k$ ام است. [۱۰] انرژی پتانسیل ناشی از بستر نیز عبارت است از:

$$U_F = \frac{1}{4} k_1 \int_A w^2 dA + \frac{1}{4} k_2 \int_A (w_{,x}^2 + w_{,y}^2) dA \quad (5)$$

می‌توان اثبات کرد که با تغییر متغیر زیر، صفحه‌ی دوزنقه‌یی به صفحه‌ی مستطیلی نشان داده شده در شکل ۲ نگاشت می‌شود:

$$u = \frac{x}{L}, \quad v = \frac{y}{x} \cot(\alpha_1) \quad (6)$$

در ادامه باید روابط مربوط به انرژی‌ها را برحسب مختصات جدید بازنویسی کنیم. از ریاضیات می‌دانیم که رابطه‌ی ۷ برای تبدیل انتگرال از یک مختصات به مختصات دیگر برقرار است:

$$\int_A f(x, y) dA = \int_S f(x(u, v), y(u, v)) |J| dS \quad (7)$$

و در آن  $|J|$  ژاکوبین تبدیل است و چنین محاسبه می‌شود:

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (8)$$

که برای مختصات معرفی شده در رابطه‌ی ۶ به صورت  $|J| = L^2 u \tan(\alpha_1)$  محاسبه می‌شود. همچنین با استفاده از رابطه‌ی ۶ تبدیل مشتقات اول و دوم نیز عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{v}{L u} \frac{\partial}{\partial v}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{L u \tan(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{v^2}{L^2 u^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{2v}{L^2 u^2} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{2v}{L^2 u} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{1}{L^2 u^2 \tan^2(\alpha_1)} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{L^2 u \tan(\alpha_1)} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - \frac{1}{L^2 u^2 \tan(\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial v} \\ &\quad - \frac{v}{L^2 u^2 \tan(\alpha_1)} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (9)$$

شد. در ادامه با تغییر متغیرها، صفحه‌ی دوزنقه‌یی به صفحه‌ی مستطیلی نگاشت خواهد شد. سپس پاسخ ارتعاشی صفحه به صورت یک سری با جملات متعامد، که هر عبارت سری شرایط مرزی ضروری صفحه را ارضا خواهد کرد، در نظر گرفته شده است. با جای‌گذاری سری فوق در انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و به‌کارگیری روش ریتز به یک مسئله‌ی مقدار ویژه خواهیم رسید که با حل آن مشخصات ارتعاشی صفحه به دست می‌آید.

## ۲. تعریف مسئله

در شکل ۱ صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌یی نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود  $(\alpha_2, \alpha_1)$  زوایای دو ضلع دوزنقه (زوایای راس صفحه) بوده و  $(c, L)$  به ترتیب فواصل قائم دو ضلع دیگر دوزنقه از راس دوزنقه (نقطه‌ی  $O$ ) است. همچنین  $b$  ارتفاع دوزنقه است. همان‌طور که مشاهده می‌شود  $(k_2, k_1)$  نیز سفتی‌های بستر هستند که به ترتیب در برابر حرکت قائم و دوران صفحه از خود مقاومت نشان می‌دهند.

## ۳. انرژی‌های جنبشی و پتانسیل

انرژی‌های جنبشی ( $T$ ) و پتانسیل ( $U_P$ ) صفحه را می‌توان چنین نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \int_A m w_{,t}^2 dA \quad (1)$$

$$U_P = \frac{1}{2} \int_A \left\{ D_{11} w_{,xx}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} + D_{22} w_{,yy}^2 + 4(D_{16} w_{,xx} + D_{26} w_{,yy}) w_{,xy} + 4D_{66} w_{,xy}^2 \right\} dA \quad (2)$$

که در آن  $m$  جرم واحد سطح صفحه است و چنین محاسبه می‌شود:

$$m = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = \sum_{k=0}^N \rho^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (3)$$

که در آن،  $\rho^{(k)}$  چگالی لایه‌ی  $k$ ام،  $(z_{k-1}, z_k)$  به ترتیب فاصله‌ی سطح بالا و پایین لایه‌ی  $k$ ام از سطح میانی و  $N$  تعداد کل لایه‌های صفحه است. گفتنی است که لایه‌ها برحسب ضخامت از پایین به بالا شماره‌گذاری شده‌اند. علاوه بر این  $w(x, y, t)$  نشان‌دهنده‌ی خیز صفحه است. در تمامی معادلات و رابطه‌ها، ویرگول نشان‌گر مشتق نسبت به پارامتری است که بعد از آن ظاهر می‌شود. همچنین ضرایب  $D_{ij}$  در

که در آن  $W_{mn}, U_m(u), V_n(v)$  به ترتیب توابع تخمین زده شده در راستای  $u, v$  و ضرایب مجهول سری هستند. در عبارت آخر از سمت راست معادله ۱۲، از بیان خلاصه استفاده شده و تکرار اندیس نشانگر اندیس جمع (Dummy Index) است. نکته‌ی دیگر آن که توابع تخمین زده شده برای  $U_m(u), V_n(v)$  باید شرایط مرزی ضروری سیستم را ارضا کنند. نحوه‌ی انتخاب توابع مناسب برای انواع شرایط مرزی صفحه در پیوست الف تشریح شده است. با جای‌گذاری سری در نظر گرفته شده در انرژی‌های جنبشی و پتانسیل، می‌توان بیشینه‌ی این عبارت‌ها را محاسبه کرد:

$$T_{\max} = \frac{1}{V} W_{mn} W_{ij} \left[ mL^t \tan(\alpha_1) \omega^t I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \right] \quad (الف ۱۳)$$

$$U_{P,\max} = \frac{1}{V} W_{mn} W_{ij} \left\{ \frac{D_{11} \tan(\alpha_1)}{L^t} \left[ I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \right] + \frac{D_{12}}{L^t \tan(\alpha_1)} I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \frac{\varphi D_{12}}{L^t \tan(\alpha_1)} \left[ I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \right] + \frac{\varphi D_{\varphi\varphi}}{L^t \tan(\alpha_1)} \left[ I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \right] - \frac{\varphi D_{\varphi\varphi}}{L^t \tan(\alpha_1)} \left[ I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \right] - \frac{\varphi D_{1\varphi}}{L^t} \left[ I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} - \varphi I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} + I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \right] \right\} \quad (ب ۱۳)$$

$$U_{F,\max} = \frac{1}{V} W_{mn} W_{ij} \begin{bmatrix} k_{\lambda} L^t \tan(\alpha_1) I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \\ + k_{\tau} \tan(\alpha_1) I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \\ + k_{\tau} \tan(\alpha_1) I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \\ - \varphi k_{\tau} \tan(\alpha_1) I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \\ + k_{\tau} / \tan(\alpha_1) I_{\lambda\lambda}^{mi} I_{\lambda\lambda}^{nj} \end{bmatrix} \quad (ج ۱۳)$$

ثابت‌های  $I_i (i = 1 - 28)$  در پیوست ب ارائه شده است. با جای‌گذاری عبارت‌های فوق در روش ریتز  $(\frac{\partial(T_{\max} - U_{P,\max} - U_{F,\max})}{\partial W_{mn}} = 0)$ ، به معادله‌ی مقدار ویژه خواهیم رسید:

$$([K] - \omega^t [M]) \{W_{mn}\} = ([K] - \omega^t [M]) \begin{Bmatrix} W_{11} \\ W_{12} \\ \vdots \\ W_{MN} \end{Bmatrix} = 0 \quad (۱۴)$$

که در آن:

$$[K] = \frac{\partial(U_{P,\max} + U_{F,\max})}{\partial \{W_{mn}\}}, \quad [M] = \frac{1}{\omega^t} \frac{\partial T_{\max}}{\partial \{W_{mn}\}} \quad (۱۵)$$

در نهایت با جای‌گذاری این روابط در رابطه‌های ۱، ۲، ۵ خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{V} \int_v \int_{c_1}^1 m w_{,t} L^t u \tan(\alpha_1) du dv$$

$$U_P = \int_v \int_{c_1}^1 \left\{ \left( \frac{D_{11} u \tan(\alpha_1)}{L^t} \right) w_{,uu} + \left( \frac{D_{11} v^t \tan(\alpha_1) - \varphi D_{1\varphi} v^t}{L^t u^t} + \frac{D_{12} + \varphi D_{12} v^t + \varphi D_{\varphi\varphi} v^t}{L^t u^t \tan(\alpha_1)} - \frac{\varphi D_{\varphi\varphi} v}{L^t u^t \tan^t(\alpha_1)} \right) w_{,vv} + \left( \frac{\varphi D_{11} v^t \tan(\alpha_1) - \lambda D_{1\varphi} v}{L^t u^t} + \frac{\varphi D_{\varphi\varphi}}{L^t u^t \tan(\alpha_1)} \right) w_{,v} + \left( \frac{\varphi D_{11} v^t \tan(\alpha_1) - \lambda D_{1\varphi} v}{L^t u} + \frac{\varphi D_{\varphi\varphi}}{L^t u \tan(\alpha_1)} \right) w_{,uv} + \left( \frac{\varphi D_{11} v^t \tan(\alpha_1) - \varphi D_{1\varphi} v}{L^t u} + \frac{\varphi D_{\varphi\varphi}}{L^t u \tan(\alpha_1)} \right) w_{,uu} + \left( \frac{\varphi D_{11} v^t \tan(\alpha_1) - \lambda D_{1\varphi} v}{L^t u \tan(\alpha_1)} - \frac{\lambda D_{\varphi\varphi} v}{L^t u^t \tan(\alpha_1)} \right) w_{,uu} w_{,vv} + \left( \frac{\varphi D_{11} v \tan(\alpha_1) - \varphi D_{1\varphi}}{L^t u} \right) w_{,uu} w_{,v} + \left( \frac{\varphi D_{1\varphi} - \varphi D_{11} v \tan(\alpha_1)}{L^t} \right) w_{,uu} w_{,uv} + \left( \frac{\varphi D_{11} v^t \tan(\alpha_1) - \varphi D_{1\varphi} v^t}{L^t u^t} + \frac{\varphi D_{12} v + \lambda D_{\varphi\varphi} v}{L^t u^t \tan(\alpha_1)} - \frac{\varphi D_{\varphi\varphi}}{L^t u^t \tan^t(\alpha_1)} \right) w_{,vv} w_{,v} + \left( \frac{-\varphi D_{11} v^t \tan(\alpha_1) + \varphi D_{1\varphi} v^t}{L^t u^t} - \frac{\varphi D_{12} v}{L^t u^t \tan(\alpha_1)} + \frac{\varphi D_{\varphi\varphi}}{L^t u^t \tan^t(\alpha_1)} \right) w_{,vv} w_{,uv} + \left( \frac{-\lambda D_{11} v^t \tan(\alpha_1) + \varphi D_{1\varphi} v}{L^t u^t} - \frac{\lambda D_{\varphi\varphi}}{L^t u^t \tan(\alpha_1)} \right) w_{,uv} w_{,v} \right\} du dv$$

$$U_F = \frac{1}{V} k_{\lambda} L^t \tan(\alpha_1) \int_v \int_{c_1}^1 u w^t dudv + \frac{1}{V} \int_v \int_{c_1}^1 \left\{ k_{\tau} \tan(\alpha_1) u w_{,u}^t + \frac{k_{\tau} \tan(\alpha_1) v^t}{u} w_{,v}^t - \varphi k_{\tau} \tan(\alpha_1) v w_{,u} w_{,v} + \frac{k_{\tau}}{u \tan(\alpha_1)} w_{,v}^t \right\} dudv \quad (۱۰)$$

#### ۴. روش حل مسئله

با توجه به ماهیت ارتعاشی مسئله، می‌توان پاسخ سیستم را چنین در نظر گرفت:

$$w(u, v, t) = W(u, v) e^{i\omega t} \quad (۱۱)$$

که در آن  $W(u, v), i, \omega$  به ترتیب فرکانس، متغیر مختلط و شکل مد سیستم است. شکل مد سیستم را نیز می‌توان مطابق رابطه‌ی ۱۲ در نظر گرفت:

$$W(u, v) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} U_m(u) V_n(v) = W_{mn} U_m(u) V_n(v) \quad (۱۲)$$

با حل معادله‌ی ۱۴ می‌توان فرکانس‌ها و شکل مدهای متناظر را به دست آورد.

## ۵. نتایج عددی

در این قسمت ابتدا به منظور بررسی صحت روابط ارائه شده و نیز برنامه‌ی رایانه‌ی نوشته شده، نتایج حاصل از تحقیق حاضر با نتایج دیگران برای صفحه‌ی مثلثی مقایسه شده، و در ادامه نتایج متفاوتی برای بررسی پارامترهای مختلف صفحه و بستر ارائه شده است. نتایج فرکانس خمشی به صورت بی بعد  $(\bar{\Omega} = \omega b^2 \sqrt{\rho h/D})$  برای صفحه‌ی همسانگرد ارائه شده که در آن  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  است. همچنین نتایج برای صفحه‌ی کامپوزیتی به شکل  $(\Omega = \omega b^2 \sqrt{\rho/E_{22}/h})$  ارائه شده است. باید توجه داشت که به منظور مقایسه با نتایج دیگران، این دو نوع فرکانس بی بعد برای صفحه‌ی همسانگرد و کامپوزیتی انتخاب شده است. همچنین مقدار ضرایب مربوط به بستر در نتایج برابر صفر در نظر گرفته شده است، مگر در حالت‌هایی که اثر بستر مورد بررسی قرار گرفته است. ده جمله سری برای به دست آوردن نتایج همگرا کافی بوده است. مقادیر عددی زیر برای خواص مواد تشکیل دهنده‌ی صفحه‌ی همسانگرد و صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه در نظر گرفته شده است:

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad E = 206 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3 \quad (16)$$

صفحه‌ی کامپوزیتی ارتوتروپیک:

$$\rho = 1389.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad E_{22} = 9.65 \text{ GPa}, \quad E_{11} = 40E_{22},$$

$$\nu_{12} = 0.25, \quad G_{12} = 0.6E_{22}, \quad G_{13} = 0.6E_{22},$$

$$G_{23} = 0.5E_{22} \quad (17)$$

برای مقایسه‌ی اول، یک مثلث قائم‌الزاویه تک لایه‌ی همسانگرد را در نظر می‌گیریم. قابل ذکر است برای استخراج نتایج برای صفحه‌ی مستطیلی از تحلیل حاضر، مقدار  $c_1$  را به سمت صفر میل می‌دهیم (شکل ۱). به عبارت دیگر، با ارجاع به شکل‌های ۱ و ۲ می‌توان گفت مرز شماره ۱ صفحه، دیگر وجود نخواهد داشت. چهار فرکانس اول و بی بعد صفحه‌ی مثلثی برای دو نوع شرط مرزی کاملاً ساده (SSS) و کاملاً درگیر (CCC) محاسبه شده و در جدول ۱ با نتایج مطالعات قبلی [۲۹]، مقایسه شده است. چنان که مشاهده می‌شود نتایج به خوبی با هم مطابقت دارند.

به عنوان مقایسه‌ی دوم، یک صفحه‌ی دوزنقه‌ی با آرایش متقارن و متعامد  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  در نظر گرفته شده است. فرکانس اصلی صفحه‌ی مذکور برای دو شرط مرزی چهارطرف ساده و چهارطرف درگیر محاسبه شده و در جدول ۲ با نتایج مطالعات قبلی [۳۰،۳۱] مقایسه شده است. باید گفت که نامگذاری شرایط مرزی صفحه به صورت SSSS یا هر نوع شرط دیگری متناظر با مرزهای نشان داده شده در شکل‌های ۱ و ۲، برای صفحه‌ی دوزنقه‌ی به صورت ۱۲۳۴ است. چنان که مشاهده می‌شود در این حالت نیز تطبیق خوبی دیده شده و اختلاف اندکی که در نتایج حاضر با نتایج دیگر مطالعات مشاهده شده (جدول ۲) ناشی از آن است که در مطالعه‌ی حاضر از نظریه‌ی کلاسیک و در مطالعات دیگر از نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول استفاده شده است. نظریه‌ی کلاسیک فرکانس را بیشتر از نظریه‌ی برشی پیش‌بینی می‌کند زیرا نظریه‌ی برشی سازه را انعطاف‌پذیرتر مدل می‌کند و در نتیجه فرکانس سیستم را نیز کم‌تر پیش‌بینی می‌کند.

جدول ۱. مقایسه‌ی نتایج برای چهار فرکانس اول صفحه‌ی مثلثی با شرایط مرزی کاملاً ساده و کاملاً درگیر؛  $(L = b = 1 \text{ m}, c = 0, h/L = 0.1, \alpha_2 = 0)$ .

شرایط مرزی	$\tan(\alpha_1)$	مراجع	$\bar{\Omega}_1$	$\bar{\Omega}_2$	$\bar{\Omega}_3$	$\bar{\Omega}_4$
SSS	۱	[۱۹]	۵,۰۰۰	۹,۹۹۹	۱۳,۰۰۰	۱۷,۰۰۵
		[۲۹]	۵,۰۰۰	۱۰,۰۰۰	۱۳,۰۰۰	۱۷,۰۰۲
		Pres.	۵,۰۰۰	۱۰,۰۰۰	۱۳,۰۰۰	۱۷,۰۰۰
CCC	۲	[۱۹]	۲,۸۱۳	۵,۰۵۴	۷,۵۶۹	۸,۲۴۱
		[۲۹]	۲,۸۱۳	۵,۰۵۴	۷,۵۶۶	۸,۲۳۹
		Pres.	۲,۸۱۴	۵,۰۵۷	۷,۵۷۵	۸,۲۴۲
CCC	۱	[۱۹]	۹,۵۰۳	۱۵,۹۸۸	۱۹,۷۴۱	۲۴,۶۵۵
		[۲۹]	۹,۵۱۰	۱۵,۹۷۸	۱۹,۷۳۷	۲۴,۶۰۱
		Pres.	۹,۵۰۳	۱۵,۹۸۷	۱۹,۷۳۲	۲۴,۶۱۷
	۲	[۱۹]	۵,۴۱۵	۸,۳۵۵	۱۱,۵۱۸	۱۲,۳۵۷
		[۲۹]	۵,۴۱۶	۸,۳۵۱	۱۱,۵۰۰	۱۲,۳۵۱
		Pres.	۵,۴۱۵	۸,۳۵۲	۱۱,۴۹۵	۱۲,۳۵۰

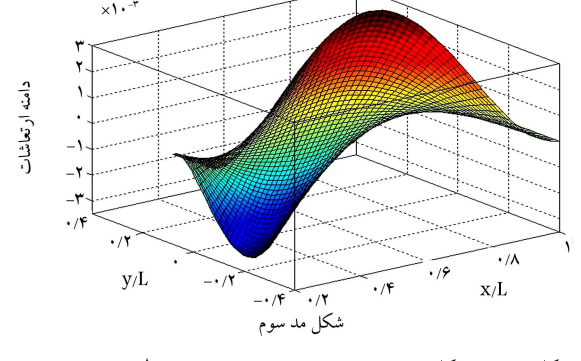
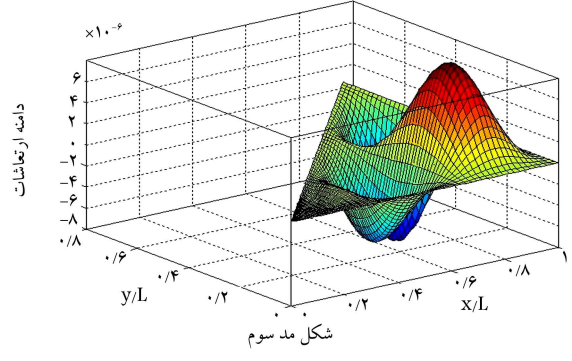
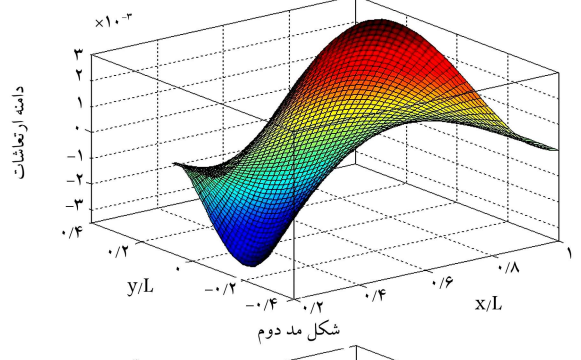
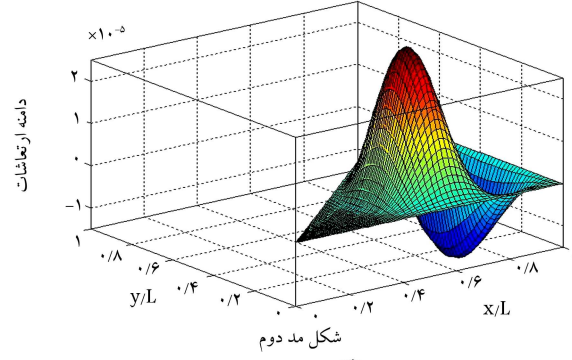
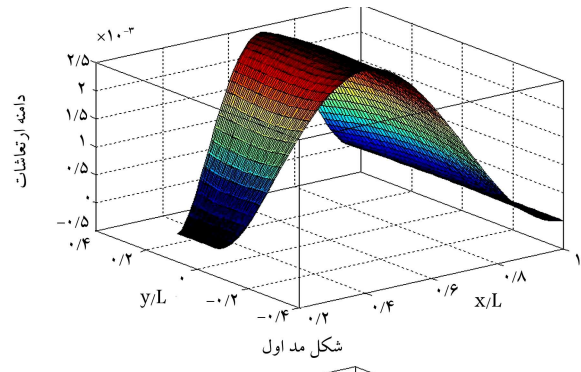
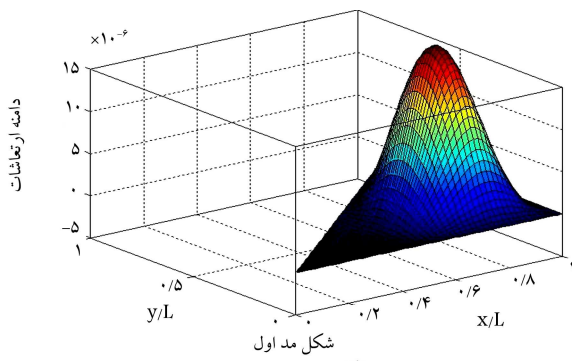
جدول ۲. فرکانس اصلی صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه  $(\Omega_1)$ ، با آرایش متقارن و متعامد  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ،  $(h/b = 0.1)$ .

Pres.	CCCC		SSSS			$\tan(\alpha_1)$	$c_1$
	[۲۰]	[۳۰]	Pres.	[۲۰]	[۳۰]		
۲۶,۲۳	۲۵,۱۲	۲۴,۷۳	۱۹,۸۴	۱۸,۴۱	۱۷,۳۹	۰,۱	۰,۸
۲۸,۹۰	۲۷,۶۲	۲۷,۵۳	۲۱,۹۷	۲۰,۴۸	۲۰,۳۵	۰,۲	۰,۶
۳۲,۵۱	۳۱,۰۸	۳۰,۹۵	۲۶,۴۱	۲۴,۰۶	۲۳,۹۱	۰,۳	۰,۴
۴۱,۱۵	۳۴,۷۶	۳۴,۷۴	۳۴,۹۵	۲۷,۵۴	۲۷,۵۰	۰,۴	۰,۲

جدول ۳. سه فرکانس اول و بی بعد صفحه‌ی دوزنقه‌ی با شرایط مرزی مختلف  $(c_1 = 0.2, \tan(\alpha_1) = 0.4)$ .

شرایط مرزی	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$
SSSS	۳۹,۲۵۱۹	۷۲,۰۱۳۵	۱۱۲,۱۵۵۶
CCCC	۸۰,۹۱۲۱	۱۲۴,۹۳۱۴	۱۷۷,۶۳۱۷
CCSS	۴۶,۹۵۲۴	۸۱,۳۵۷۹	۱۲۶,۱۹۱۴
SSCC	۷۰,۰۵۵۵	۱۱۳,۱۴۴۲	۱۶۰,۵۵۹۱
CCFF	۱۴,۵۶۳۴	۱۷,۲۹۰۱	۴۰,۶۴۲۸
SSFF	۶,۶۲۱۲	۹,۴۴۹۹	۲۶,۷۴۸۹

در ادامه اثر شرایط مرزی بر سه فرکانس اول و بی بعد صفحه‌ی دوزنقه‌ی و آرایش متقارن و متعامد  $[90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  در جدول ۳ ارائه شده است. گفتنی است در مثال‌های بعدی نیز از آرایش مذکور برای استخراج نتایج استفاده شده است. چنان که مشاهده می‌شود برای حالت‌هایی که دارای شرط یا شرایط مرزی درگیر هستند، مقادیر فرکانسی بالاتری به دست می‌آید. این پدیده قابل پیش‌بینی است زیرا شرایط مرزی درگیر موجب سفت‌تر شدن سازه و در نتیجه بالاتر بودن نتایج فرکانسی خواهد شد. در مقابل اگر شرایط مرزی آزاد در صفحه وجود داشته باشد موجب انعطاف‌پذیرتر بودن صفحه و در نتیجه کاهش فرکانس آن خواهد شد. همچنین سه شکل مد اول متناظر با فرکانس‌های ارائه شده در جدول ۳، برای صفحه با شرایط مرزی (CCFF)



شکل ۳. سه شکل مد اول صفحه‌ی دوزنقه‌یی با شرایط مرزی CCFF

شکل ۴. سه شکل مد اول صفحه‌ی مثلثی قائم‌الزاویه ( $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 40^\circ$ ) با شرایط مرزی کاملاً درگیر.

همچنین اثر ناهمسانگردی بر سه فرکانس اول و بی‌بعد صفحه‌ی دوزنقه‌یی با شرایط مرزی CCSS در جدول ۵ ارائه شده است. ناهمسانگردی به صورت نسبت  $(E_{11}/E_{22})$  تعریف شده، و هرچه مقدار این کسر بیشتر باشد نشان‌دهنده‌ی بالاتر بودن درجه‌ی ناهمسانگردی ماده‌ی مورد استفاده در صفحه است. همانطور که مشاهده می‌شود افزایش مقدار ناهمسانگردی موجب افزایش مقدار فرکانس صفحه خواهد شد. حال صفحه‌ی مثلثی را با همان آرایش متعامد  $[90/0/0/90]$  و شرایط مرزی گیردار (CCC) در نظر می‌گیریم. مشابه نتایج قبلی، در این حالت نیز مقدار  $(c_1)$  را برای صفحه‌ی مثلثی بسیار کم در نظر می‌گیریم. اثر افزایش زاویه‌ی رأس صفحه بر سه فرکانس اول صفحه‌ی مثلثی قائم‌الزاویه ( $\alpha_2 = 0$ ) در جدول ۶ و صفحه‌ی مثلثی متساوی‌الساقین ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) در جدول ۷ بررسی شده است. توجه داشته باشید که زوایا برحسب درجه در این جداول نشان داده شده است. همچنین برای استخراج نتایج، تمامی پارامترها به‌جز زوایای رأس مثلث ثابت در نظر گرفته شده‌اند تا تنها اثر زاویه‌ی رأس بررسی شود. ملاحظه می‌شود که در هر دو حالت افزایش زاویه‌ی رأس موجب کاهش فرکانس بی‌بعد صفحه خواهد شد. برای مثال، سه شکل مد اول متناظر با سه فرکانس ارائه شده در جداول ۶ و ۷ به ترتیب در شکل‌های ۴

در شکل ۳ رسم شده است. یادآور می‌شود در شکل‌های ۳ تا ۵ محورها به صورت بی‌بعد شده‌ی  $x/L$  و  $y/L$  هستند و ابعاد صفحه را نشان می‌دهند. علاوه بر این محور دیگر نشان‌دهنده‌ی دامنه‌ی ارتعاشات صفحه است. اثر سفتی‌های مختلف بستر پسترناک بر سه فرکانس اول صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌ی در جدول ۴ بررسی شده است. شرایط مرزی صفحه به شکل SSCC در نظر گرفته شده است. چنان که مشاهده می‌شود، اثر هر یک از سفتی‌ها به‌طور مجزا بررسی شده است. به عبارت دیگر برای بررسی اثر هر یک از سفتی‌ها، میزان سفتی آن تغییر داده شده در حالی که سفتی دیگر برابر صفر قرار داده شده است. سفتی‌های بستر نیز به صورت زیر بی‌بعد شده‌اند:

$$\bar{k}_1 = \frac{k_1 b^2}{D_{11}}, \quad \bar{k}_2 = \frac{k_2 b^2}{D_{11}} \quad (18)$$

چنان که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، با افزایش هر یک از ضرایب بی‌بعد سفتی، مقدار فرکانس‌های صفحه افزایش می‌یابد. همچنین افزایش ضریب سفتی مربوط به تغییر شکل دورانی صفحه‌ی  $(\bar{k}_2)$ ، اثر بیشتری در افزایش مقدار فرکانس صفحه خواهد داشت. به عبارت دیگر به‌ازای مقدار برابر  $\bar{k}_1$  و  $\bar{k}_2$ ، مقدار فرکانس از مقدار  $\bar{k}_2$  بیشتر متأثر خواهد شد.

جدول ۴. اثر ضرایب سختی بستر پسترناک بر سه فرکانس اول صفحه‌ی دوزنقه‌یی ( $c_1 = 0.2, \tan(\alpha_1) = 0.4$ ).

$\bar{k}_2 = 0$						
$100000$	$10000$	$1000$	$100$	$10$	$0$	$\bar{k}_1$
۲۳۲,۲۶۱۰	۹۹,۰۵۳۱	۷۳,۴۷۲۱	۷۰,۴۰۴۶	۷۰,۰۹۰۵	۷۰,۰۵۵۵	$\Omega_1$
۲۴۸,۶۷۴۵	۱۳۳,۰۶۱۴	۱۱۵,۲۹۰۸	۱۱۳,۳۶۰۷	۱۱۳,۱۶۵۸	۱۱۳,۱۴۴۲	$\Omega_2$
۲۷۳,۵۲۶۳	۱۷۵,۱۶۵۵	۱۶۲,۰۷۹۰	۱۶۰,۷۱۱۷	۱۶۰,۵۷۴۴	۱۶۰,۵۵۹۱	$\Omega_3$
$\bar{k}_1 = 0$						
$100000$	$10000$	$1000$	$100$	$10$	$0$	$\bar{k}_2$
۱۳۸۴,۱۳۶۷	۴۵۳,۳۸۸۶	۱۶۵,۹۶۱۱	۸۶,۷۲۰۸	۷۱,۹۷۸۷	۷۰,۰۵۵۵	$\Omega_1$
۲۰۱۳,۱۰۶۴	۶۶۰,۹۹۷۶	۲۴۵,۲۰۷۱	۱۳۳,۹۱۱۰	۱۱۵,۴۱۱۴	۱۱۳,۱۴۴۲	$\Omega_2$
۲۲۱۹,۰۷۹۳	۷۳۴,۲۰۴۰	۲۸۷,۸۹۷۵	۱۷۹,۰۳۴۹	۱۶۲,۵۲۶۳	۱۶۰,۵۵۹۱	$\Omega_3$

جدول ۵. اثر ناهمسانگردی مواد بر سه فرکانس اول صفحه‌ی دوزنقه‌یی ( $c_1 = 0.2, \tan(\alpha_1) = 0.4$ ).

$40$	$35$	$30$	$25$	$20$	$15$	$10$	$5$	$E_{11}/E_{22}$
۴۶,۹۵۲۴	۴۴,۲۲۰۷	۴۱,۳۰۴۱	۳۸,۱۵۷۸	۳۴,۷۱۴۴	۳۰,۸۶۳۳	۲۶,۳۹۴۲	۲۰,۷۷۵۲	$\Omega_1$
۸۱,۳۵۷۹	۷۶,۷۵۲۲	۷۱,۸۴۰۸	۶۶,۵۴۹۹	۶۰,۷۶۸۵	۵۴,۳۱۲۱	۴۶,۸۲۱۱	۳۷,۲۴۵۶	$\Omega_2$
۱۲۶,۱۹۱۴	۱۱۸,۷۲۵۷	۱۱۰,۸۷۹۷	۱۰۱,۸۲۴۶	۹۲,۳۶۷۷	۸۱,۶۸۷۲	۶۹,۲۵۰۰	۵۳,۵۳۷۵	$\Omega_3$

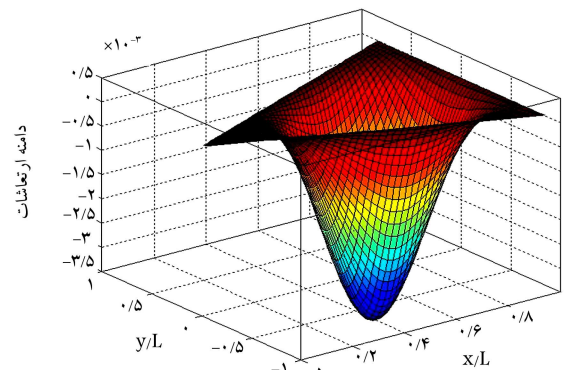
برای ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 40^\circ$ ) و شکل ۵ برای ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 40^\circ$ ) رسم شده است. نتایج مشابهی برای صفحه‌ی دوزنقه‌یی با شرایط مرزی چهار طرف درگیر در جداول ۸ و ۹ ارائه شده است.

در بررسی دیگر، اثر افزایش ارتفاع صفحه‌ی دوزنقه‌یی شکل (پارامتر  $b$ ) بر سه فرکانس اول و بی‌بعد صفحه‌ی دوزنقه‌یی (جدول ۱۰) مطالعه شده است. گفتنی است برای مقایسه‌ی مناسب نتایج، تمامی فرکانس‌ها نسبت به مقدار ( $b/L = 0.5$ ) بی‌بعد شده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش ارتفاع دوزنقه، فرکانس نوسانات صفحه کاهش می‌یابد. همچنین نرخ کاهش در نسبت‌های پایین  $b/L$  بیشتر است و با افزایش این نسبت، نرخ تغییرات کم‌تر می‌شود.

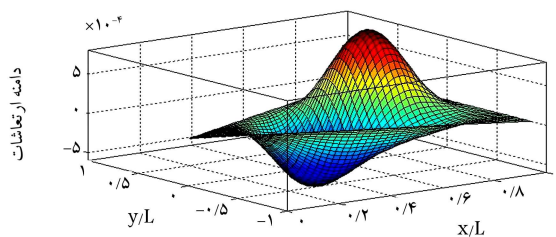
در نهایت اثر زاویه‌ی استقرار فیبرها بر مشخصات ارتعاشی یک صفحه‌ی دوزنقه‌یی در جدول ۱۱ بررسی شده است. لایه‌چینی صفحه به صورت  $[\theta / -\theta / -\theta / \theta]$  در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش زاویه‌ی استقرار فیبرها، فرکانس نوسانات صفحه کاهش می‌یابد.

### ۶. نتیجه‌گیری

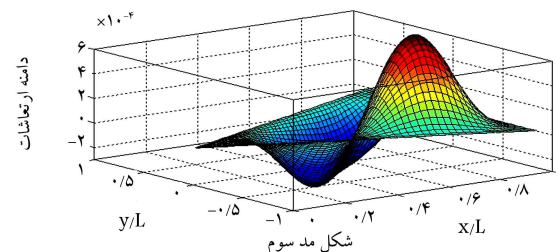
در این مقاله تحلیل ارتعاشات آزاد صفحه‌ی کامپوزیتی چندلایه‌ی دوزنقه‌یی مستقر بر بستر پسترناک دوپارامتری مطالعه شده است. راه حل تحلیلی مناسبی برای یافتن مشخصه‌های ارتعاشی مسئله‌ی مذکور پیشنهاد شده و همگرایی بسیار مناسبی نیز مشاهده شده است. ضمن بررسی اثر پارامترهای مختلف صفحه و بستر بر مشخصه‌های ارتعاشی مسئله‌ی مذکور، نشان داده شده که تحلیل مذکور را می‌توان برای صفحات مثلثی نیز به کار برد. مشاهده شده است استقرار صفحه بر بستر پسترناک موجب افزایش فرکانس سیستم می‌شود و تأثیر سختی بستر مقاوم در برابر دوران بیشتر از تأثیر سختی بستر مقاوم در برابر خیز است. همچنین افزایش زاویه‌ی رأس برای صفحات مثلثی و دوزنقه‌یی موجب کاهش فرکانس سیستم می‌شود.



شکل مد اول



شکل مد دوم



شکل مد سوم

شکل ۵. سه شکل مد اول صفحه‌ی مثلثی متساوی‌الساقین ( $\alpha_2 = \alpha_1 = 40^\circ$ ) با شرایط مرزی کاملاً درگیر.

جدول ۶. اثر افزایش زاویه‌ی رأس صفحه‌ی مثلثی قائم‌الزاویه ( $\alpha_2 = 0^\circ$ ) بر سه فرکانس اول آن ( $L = b = 1\text{ m}, c = 0, h/L = 0,6$ ).

$\alpha_1$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$7^\circ$	$8^\circ$
$\Omega_1$	۱۵۳۷,۳۵۵۷	۴۲۷,۲۹۶۵	۲۰۲,۷۷۶۸	۱۱۷,۴۲۰۳	۷۴,۹۷۵۳	۵۰,۶۵۰۶	۳۵,۳۹۰۶	۲۴,۸۳۱۹
$\Omega_2$	۱۸۹۰,۹۹۰۵	۵۵۶,۲۵۸۸	۲۸۶,۵۷۸۱	۱۸۲,۰۴۲۹	۱۲۶,۱۶۰۶	۸۸,۰۰۲۸	۵۶,۲۶۳۹	۳۳,۵۸۳۴
$\Omega_3$	۳۷۷۲,۳۱۴۵	۷۸۹,۱۹۸۳	۳۹۴,۸۱۵۹	۲۴۸,۷۷۱۴	۱۵۱,۳۶۹۶	۹۹,۳۳۹۶	۷۴,۰۸۸۷	۴۳,۴۷۹۱

جدول ۷. اثر افزایش زاویه‌ی رأس صفحه‌ی مثلثی متساوی‌الساقین ( $\alpha_1 = \alpha_2$ ) بر سه فرکانس اول آن ( $L = b = 1\text{ m}, c = 0, h/L = 0,6$ ).

$\alpha_1 = \alpha_2$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$7^\circ$	$8^\circ$
$\Omega_1$	۴۵۱,۶۲۴۲	۱۴۲,۲۷۱۱	۷۵,۰۳۲۶	۴۸,۲۴۹۹	۳۴,۵۰۲۳	۲۶,۵۳۵۲	۲۱,۶۱۶۷	۱۸,۴۹۵۹
$\Omega_2$	۱۱۱۱,۹۵۱۴	۲۱۴,۱۷۴۱	۱۲۷,۹۷۵۴	۹۱,۳۱۰۴	۶۰,۲۷۰۱	۴۲,۰۸۴۹	۳۰,۶۳۵۶	۲۳,۱۸۲۱
$\Omega_3$	۲۰۴۰,۰۶۳۵	۳۰۲,۷۶۰۱	۱۵۴,۴۷۹۲	۹۲,۰۴۳۲	۷۱,۸۰۳۱	۵۷,۹۸۵۳	۴۰,۵۳۰۱	۲۹,۶۳۲۰

جدول ۸. اثر افزایش زاویه‌ی رأس صفحه‌ی دوزنقه‌یی بر سه فرکانس اول آن ( $\alpha_2 = 0^\circ, b = 0,6L$ ).

$\alpha_1$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$7^\circ$	$8^\circ$
$\Omega_1$	۳۸۷,۶۲۴۰	۱۵۶,۶۵۵۰	۷۴,۴۸۳۱	۴۳,۱۳۴۶	۲۷,۷۹۳۳	۲۰,۱۸۱۱	۱۶,۸۷۰۱	۱۵,۸۱۴۵
$\Omega_2$	۵۲۳,۵۳۱۸	۱۹۹,۶۵۰۵	۱۰۵,۸۲۵۵	۶۷,۲۰۸۲	۴۹,۹۰۷۱	۳۳,۸۴۸۵	۲۲,۱۲۲۴	۱۶,۵۷۷۹
$\Omega_3$	۷۶۹,۰۱۵۴	۲۶۵,۴۵۰۰	۱۷۰,۶۷۵۶	۹۱,۹۹۲۴	۵۶,۹۴۰۳	۵۱,۳۲۰۰	۳۰,۸۳۸۷	۲۲,۴۸۱۶

جدول ۹. اثر افزایش زاویه‌ی رأس صفحه‌ی دوزنقه‌یی بر سه فرکانس اول آن ( $\alpha_1 = \alpha_2, b = 0,6L$ ).

$\alpha_1 = \alpha_2$	$1^\circ$	$2^\circ$	$3^\circ$	$4^\circ$	$5^\circ$	$6^\circ$	$7^\circ$	$8^\circ$
$\Omega_1$	۱۶۶,۲۳۱۱	۵۲,۲۶۰۴	۲۷,۸۱۵۱	۱۹,۷۴۴۳	۱۷,۰۶۶۴	۱۶,۱۳۵۷	۱۵,۷۹۹۶	۱۵,۱۹۰۰
$\Omega_2$	۲۱۵,۷۸۶۲	۷۸,۶۱۷۸	۵۱,۷۷۱۰	۳۳,۷۸۱۰	۲۳,۱۲۳۳	۱۸,۳۸۴۰	۱۶,۴۵۶۷	۱۴,۲۱۰۵
$\Omega_3$	۳۲۶,۰۲۴۸	۱۱۶,۴۷۰۷	۵۶,۷۴۴۸	۴۵,۴۹۱۸	۳۴,۰۳۶۵	۲۳,۳۵۲۴	۱۸,۰۸۰۲	۱۶,۰۴۱۶

جدول ۱۰. اثر افزایش ارتفاع صفحه دوزنقه‌یی شکل بر سه فرکانس اول آن ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 2^\circ, L = 1\text{ m}, h/L = 0,6$ ).

$b/L$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$
$\Omega_1$	۱۰۱,۱۰	۵۱,۲۷	۳۸,۶۰	۳۶,۳۶	۳۶,۳۵	۳۶,۳۴	۳۶,۳۳
$\Omega_2$	۱۱۸,۶۹	۸۳,۹۹	۷۴,۵۸	۵۸,۱۵	۵۴,۸۱	۵۴,۷۹	۵۴,۷۷
$\Omega_3$	۱۶۰,۲۸	۱۴۳,۰۵	۹۶,۵۱	۸۰,۸۵	۷۸,۸۶	۷۶,۹۲	۷۶,۴۵

جدول ۱۱. اثر زاویه‌ی استقرار فیبرها بر فرکانس اصلی صفحه‌ی دوزنقه‌یی ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 4^\circ, L = 1\text{ m}, b = 0,6L, h/L = 0,6$ ).

شرط مرزی	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
SSSS	۱۸,۶۷	۱۶,۰۱	۱۳,۵۴	۹,۲۳	۶,۶۱	۴,۲۷	۲,۴۵
CCCC	۴۱,۱۶	۳۸,۶۵	۳۳,۰۰	۲۷,۳۴	۱۶,۷۱	۱۳,۶۵	۱۳,۲۵



1. B-spline finite strip method

منابع (References)

1. Palardy, R.F. and Palazotto, A.N. "Buckling and vibration of composite plates using the Levy method", *Composite Structures*, **14**, pp. 61-86 (1990).
2. Wang, Y.H., Li, W.D., Tham, L.G., Lee, P.K.K. and Yue, Z.Q. "Parametric study for an efficient meshless method in vibration analysis", *Journal of Sound and Vibration*, **255**(2), pp. 261-279 (2002).
3. Shi, J.W., Nakatani, A. and Kitagawa, H. "Vibration analysis of fully clamped arbitrarily laminated plate", *Composite Structures*, **63**, pp. 115-122 (2004).
4. Lanhe, W., Hua, L. and Daobin, W. "Vibration analysis of generally laminated composite plates by the moving least squares differential quadrature method", *Composite Structures*, **68**, pp. 319-330 (2005).
5. Akavci, S.S. "Buckling and free vibration analysis of symmetric and antisymmetric laminated composite plates on an elastic foundation", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **26**(18), pp. 1907-1919 (2007).
6. Thai, H.-T. and Kim, S.-E. "Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, **52**, pp. 626-633 (2010).
7. Khorshid, K. and Farhadi, S. "Free vibration analysis of a laminated composite rectangular plate in contact with a bounded fluid", *Composite Structures*, **104**, pp. 176-186 (2013).
8. Mahi, A., Bedia, E.A.A. and Tounsi, A. "A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates", *Applied Mathematical Modelling*, **39**, pp. 2489-2508 (2015).
9. Sayyad, A.S. and Ghugal, Y.M. "On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results", *Composite Structures*, **129**, pp. 177-201 (2015).
10. Abedi, M., Jafari-Talookolaei, R.-A. and Valvo, P.S. "A new solution method for free vibration analysis of rectangular laminated composite plates with general stacking sequences and edge restraints", *Computers & Structures*, **175**, pp. 144-156 (2016).
11. Esen, I. "A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass", *Finite Elements in Analysis and Design*, **66**, pp. 26-35 (2013).
12. Xiang, S., Kang, G. and Xing, B. "A nth-order shear deformation theory for the free vibration analysis on the isotropic plates", *Meccanica*, **47**, pp. 1913-1921 (2012).
13. Amabili, M., Karagiozis, K., Farhadi, S. and Khorshidi, K. "Nonlinear vibration of plates with different boundary conditions using higher order theory", *CHAOS 2010, 3rd Chaotic Modeling and Simulation International Conference*, Chania, Crete, Greece (1-4 June 2010).
14. Shojaee, S., Valizadeh, N., Izadpanah, E., Bui, T. and Vu, T. "Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method", *Composite Structures*, **94**, pp. 1677-1693 (2012).
15. Xiang, Y. and Wei, G.W. "Exact solutions for buckling and vibration of stepped rectangular Mindlin plates", *International Journal of Solids and Structures*, **41**, pp. 279-294 (2004).
16. Wang, S. and Zhang, Y. "Vibration analysis of rectangular composite laminated plates using layerwise B-spline finite strip method", *Composite Structures*, **68**, pp. 349-358 (2005).
17. Plagianakos, T.S. and Saravanos, D.A. "High-order layerwise finite element for the damped free-vibration response of thick composite and sandwich composite plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **77**, pp. 1593-1626 (2009).
18. Kerboua, Y., Lakis, A.A., Thomas, M. and Marcouiller, L. "Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid", *Applied Mathematical Modelling*, **32**, pp. 2570-2586 (2008).
19. Karunasena, W. and Kitipornchai, S. "Free vibration of shear-deformable general triangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, **199**(4), pp. 595-613 (1997).
20. Gürses, M., Civalek, O., Ersoy, H. and Kiracioglu, O. "Analysis of shear deformable laminated composite trapezoidal plates", *Materials and Design*, **30**, pp. 3030-3035 (2009).
21. Quintana, M.V. and Nallim, L.G. "A variational approach to free vibration analysis of shear deformable polygonal plates with variable thickness", *Applied Acoustics*, **71**, pp. 393-401 (2010).
22. Joodaky, A. and Joodaky, I. "A semi-analytical study on static behavior of thin skew plates on Winkler and Pasternak foundations", *International Journal of Mechanical Sciences*, **100**, pp. 322-327 (2015).
23. Kuttler, J.R. and Sigillito, V.G. "Upper and lower bounds for frequencies of trapezoidal and triangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, **78**(4), pp. 585-590 (1981).
24. Kuttler, J.R. and Sigillito, V.G. "Upper and lower bounds for frequencies of clamped rhombical plates", *Journal of Sound and Vibration*, **68**, pp. 597-607 (1980).
25. Orris, R.M. and Petyt, M. "A finite element study of the vibration of trapezoidal plates", *Journal of Sound and Vibration*, **27**, pp. 325-344 (1973).
26. Saadatpour, M.M. and Mokhalefi, D. "Static analysis of triangular plates", *Esteghlal*, **16**(2), pp. 51-61 (in Persian) (1997).
27. Zamani, M., Fallah, A. and Aghdam, M.M. "Free vibration analysis of moderately thick trapezoidal symmetrically laminated plates with various combinations of boundary conditions", *European Journal of Mechanics A/Solids*, **36**, pp. 204-212 (2012).
28. Zhang, X.F. and Li, W.L. "Vibration of arbitrarily-shaped triangular plates with elastically restrained edges", *Journal of Sound and Vibration*, **357**, pp. 195-206 (2015).

29. Gorman, D.J. "Free vibration analysis of right triangular plates with combinations of clamped-simply supported boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration*, **106**, pp. 419-431 (1986).

30. Haldar, S. and Manna, M.C. "A high precision shear deformable element for free vibration of thick/thin composite trapezoidal plates", *Steel Composite Structures*, **3**(3), pp. 213-229 (2003).

### پیوست

#### الف) توابع متعامد

جمله‌ی اول سری نوشته شده در رابطه‌ی ۱۲ چنین در نظر گرفته شده است:

$$U_1(u) = \frac{\varphi_1(u)}{\sqrt{\int_{c_1}^1 \varphi_1(u)^2 du}}, \quad V_1(v) = \frac{\psi_1(v)}{\sqrt{\int_{v_0}^1 \psi_1(v)^2 dv}} \quad (\text{الف } 1)$$

همانطور که مشخص است توابع  $\varphi_1(u)$ ,  $\psi_1(v)$  بایستی شرایط مرزی ضروری در مرزها را ارضا کنند که برای سه حالت کلاسیک در رابطه زیر بیان شده است:

$$\text{آزاد: } W \neq 0, \quad W' \neq 0 \quad (\text{الف } 2)$$

$$\text{ساده: } W = 0, \quad W' \neq 0 \quad (\text{الف } 3)$$

$$\text{درگیر: } W = 0, \quad W' = 0 \quad (\text{الف } 4)$$

که در آن پرایم نشان دهنده‌ی مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای  $u, v$  (بسته به موقعیت مرز صفحه) است. توابع مناسب برای شرایط مرزی مختلف در جدول الف ارائه شده است. به عنوان نمونه، برای شرایط مرزی چهار طرف ساده، یا چهار طرف درگیر توابع عبارت‌اند از: چهار طرف ساده:

$$\varphi_1(u) = (u - c_1)(u - 1) \\ \psi_1(v) = (v - v_0)(v - 1) \quad (\text{الف } 5)$$

چهار طرف درگیر:

$$\varphi_1(u) = (u - c_1)^2(u - 1)^2 \\ \psi_1(v) = (v - v_0)^2(v - 1)^2 \quad (\text{الف } 6)$$

از فرایند گرم - اشمیت می‌توان جملات بالاتر سری پاسخ را نوشت: <sup>[۱۲]</sup>

$$U_r(u) = (u - A_r)U_1(u), \\ U_m(u)|_{m \geq r} = (u - A_m)U_{m-1}(u) - B_m U_{m-2}(u) \\ V_r(v) = (v - C_r)V_1(v), \\ V_n(v)|_{n \geq r} = (v - C_n)V_{n-1}(v) - D_n V_{n-2}(v) \quad (\text{الف } 7)$$

جدول الف) توابع قابل قبول برای شرایط مرزی مختلف.

درگیر	ساده	آزاد	
$(u - c_1)^2$	$u - c_1$	۱	$u = c_1$
$(u - 1)^2$	$u - 1$	۱	$u = 1$
$(v - v_0)^2$	$v - v_0$	۱	$v = v_0$
$(v - 1)^2$	$v - 1$	۱	$v = 1$

که در آن:

$$A_m = \frac{\int_{c_1}^1 u (U_{m-1}(u))^2 du}{\int_{c_1}^1 (U_{m-1}(u))^2 du},$$

$$B_m = \frac{\int_{c_1}^1 u U_{m-1}(u) U_{m-2}(u) du}{\int_{c_1}^1 (U_{m-2}(u))^2 du} \quad (\text{الف } 8)$$

$$C_n = \frac{\int_{v_0}^1 v (V_{n-1}(v))^2 dv}{\int_{v_0}^1 (V_{n-1}(v))^2 dv},$$

$$D_n = \frac{\int_{v_0}^1 v V_{n-1}(v) V_{n-2}(v) dv}{\int_{v_0}^1 (V_{n-2}(v))^2 dv} \quad (\text{الف } 9)$$

#### ب) ضرایب انتگرال

ضرایب انتگرالی ظاهر شده در روابط مربوط به انرژی‌های جنبشی، پتانسیل کرنشی صفحه و بستر پسترناک عبارت‌اند از:

$$I_{\gamma}^{mi} = \int_{c_1}^1 u U''_m U''_i du, \quad I_{\gamma}^{nj} = \int_{v_0}^1 V_n V_j dv,$$

$$I_{\gamma}^{mi} = \int_{c_1}^1 u^{-\tau} U_m U_i du, \quad I_{\gamma}^{nj} = \int_{v_0}^1 v^{\tau} V''_n V''_j dv$$

$$I_{\delta}^{nj} = \int_{v_0}^1 V''_n V''_j dv, \quad I_{\delta}^{nj} = \int_{v_0}^1 v^{\tau} V''_n V''_j dv,$$

$$I_{\gamma}^{nj} = \int_{v_0}^1 v^{\tau} V'_n V'_j dv, \quad I_{\lambda}^{nj} = \int_{v_0}^1 V'_n V'_j dv$$

$$I_{\lambda}^{mi} = \int_{c_1}^1 u^{-\lambda} U'_m U'_i du, \quad I_{\lambda}^{mi} = \int_{c_1}^1 u^{-\lambda} U''_m U_i du,$$

$$I_{\gamma}^{nj} = \int_{v_0}^1 v^{\tau} V_n V''_j dv, \quad I_{\gamma}^{nj} = \int_{v_0}^1 V_n V''_j dv$$

$$I_{\gamma}^{nj} = \int_{v_0}^1 v V_n V'_j dv, \quad I_{\tau}^{mi} = \int_{c_1}^1 U''_m U'_i du,$$

$$I_{\delta}^{nj} = \int_{v_0}^1 v^{\tau} V''_n V'_j dv, \quad I_{\delta}^{nj} = \int_{v_0}^1 v V''_n V'_j dv$$

$$I_{\gamma}^{mi} = \int_{c_1}^1 u^{-\tau} U_m U'_i du, \quad I_{\lambda}^{mi} = \int_{c_1}^1 u U_m U_i du,$$

$$I_{\gamma}^{nj} = \int_{v_0}^1 v V''_n V''_j dv, \quad I_{\tau}^{nj} = \int_{v_0}^1 v V'_n V'_j dv$$

$$I_{\gamma}^{nj} = \int_{v_0}^1 v V_n V''_j dv, \quad I_{\tau}^{mi} = \int_{c_1}^1 u^{-\tau} U''_m U_i du,$$

$$I_{\tau\eta}^{mi} = \int_{c_1}^{\lambda} U'_m U_i du$$

(ب)

$$I_{\tau\tau}^{nj} = \int_{v.}^{\lambda} V_n V'_j dv, \quad I_{\tau\tau}^{nj} = \int_{v.}^{\lambda} V''_n V'_j dv$$

$$I_{\tau\delta}^{nj} = \int_{v.}^{\lambda} v^{\delta} V''_n V'_j dv, \quad I_{\tau\delta}^{nj} = \int_{v.}^{\lambda} v^{\tau} V''_n V''_j dv,$$

$$I_{\tau\nu}^{mi} = \int_{c_1}^{\lambda} u U'_m U'_i du, \quad I_{\tau\lambda}^{mi} = \int_{c_1}^{\lambda} u^{-\lambda} U_m U_i du$$

که در آن برای  $V, U$  به ترتیب نشان دهنده‌ی مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای  $v, u$  است.