

تحلیل ترمومکانیکی غیرکلاسیک لیزر صفحه‌یی نئودیموم: وانادات تحت دمش طولی چند پالس به روش اجزاء محدود

حمیدرضا زارعی (کارشناسی ارشد)

مهدی مجاهدی* (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی مهندسی گلبانگان

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۷)
دوره‌ی ۳-۱۳۳، شماره‌ی ۲، ص. ۱۲۵-۱۳۲

برای برانگیختگی ترازهای انرژی و تولید نور لیزر در محیط‌های جامد، از دمش نوری بهره گرفته می‌شود. هنگام اعمال دمش به محیط کریستال، بخشی از توان دمشی تبدیل به گرما شده و گرادیان دمایی ایجاد می‌شود. گرادیان دمایی تولید شده می‌تواند منجر به ظهور پدیده‌های نامطلوب حرارتی و مکانیکی، نظیر عدسی‌شدگی حرارتی، قطبیدگی خروجی، تنش‌های مکانیکی، کاهش بازده خروجی و حتی شکست بلور شود. به منظور بررسی و تحلیل دقیق‌ترین پدیده‌های ترمومکانیکی، لازم است به جای استفاده از نظریه‌ی انتقال حرارت هدایت فوری، از نظریه‌ی انتقال حرارت هدایتی غیرکلاسیک (دارای زمان آسایش) استفاده شود. در این پژوهش، بر مبنای ارائه‌ی یک فرمولاسیون اجزاء محدود غیرکلاسیک، توزیع دما و تنش در بلور صفحه‌یی نئودیموم: وانادات محاسبه می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که مقدار بیشینه دما و تنش محاسبه شده توسط مدل غیرفوری، بزرگ‌تر از مدل فوری بوده و نظریه‌ی غیرفوری توان‌های شکست کوچک‌تری برای بلور پیش‌بینی می‌کند.

واژگان کلیدی: دمش طولی پالسی، هدایت غیرفوری، اجزاء محدود، نئودیموم:

وانادات.

hamidreza90.zarei@gmail.com
mojahedi62@gmail.com

۱. مقدمه

به بلور تبدیل به حرارت داخلی می‌شود.^[۸] حرارت تولیدی در بلور، از طریق انتقال حرارت هدایتی، باعث ایجاد گرادیان دمایی در ماده‌ی فعال می‌شود و با توجه به گرادیان حرارتی، تنش حرارتی تولید خواهد شد. هرچه توان دمشی اعمالی به بلور بیشتر شود، تنش حرارتی افزایش می‌یابد. در صورتی که مقدار تنش حرارتی بیش از تنش نهایی شود، شکست بلور اتفاق می‌افتد. به منظور مطالعه‌ی دقیق شکست بلورها و آثار حرارتی ایجاد شده در فرایند تولید لیزر، لازم است توزیع دما و تنش ناشی از دمش در بلور مورد بررسی قرار گیرد.

در فعالیت‌های پیشین با بهره‌گیری از نظریه‌ی انتقال حرارت هدایت فوری، توزیع حرارت، تنش و اثرات گرماشناختی در بلورهای لیزری تحت دمش طولی و عرضی مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی توزیع دمایی و تأثیرات ترموپاتیکی روی بلور صفحه‌یی اولین بار توسط اگلستون و همکاران^[۹] و کن و همکاران^[۱۰] مطرح شد. آن‌ها از لامپ به عنوان منبع دمش استفاده کردند و طول بلور را نامحدود فرض کردند. ژی‌ما و همکاران^[۱۱] آثار ناشی از دمش پیوسته‌ی طولی دیودی را بر بلور صفحه‌یی نئودیموم: وانادات (Nd : YVO₄) به روش تحلیلی و عددی مطالعه کردند. آن‌ها با استفاده از تحلیل اجزاء محدود سه بعدی بلور، توزیع دما، توزیع تنش و طول کانونی عدسی‌شدگی گرمایی را محاسبه و سپس نتایج خود را با نتایج تجربی مقایسه کردند. با استفاده از روش‌های نیمه تحلیلی، لینگ و همکاران^[۱۲] آثار حرارتی و مکانیکی را

پرتو لیزر را به واسطه‌ی دقت بالا و خطای ناچیز می‌توان در موقعیت‌های حساسی به کار گرفت. به عنوان مثال، برای جراحان این امکان فراهم شده که بتوانند به‌جای چاقوی جراحی از پرتو لیزر استفاده کنند.^[۱] از کاربردهای دیگر لیزر می‌توان به تفنگ لیزری در صنایع نظامی، برش لیزری و جوشکاری لیزری در صنعت اشاره کرد. استفاده از لیزرهای دیودی به جای لیزرهای لامپی به دلیل مزیت‌هایی همچون بازده بالا و کیفیت پرتو خوب مورد توجه بیشتری قرار گرفته است.^[۲] لیزرهای حالت جامد را می‌توان به چندین روش عرضی،^[۳] طولی^[۴] و گوشه‌یی^[۵] تحت دمش و برانگیختگی قرار داد. در فرایند تولید لیزر، دمش را می‌توان به شکل پیوسته، تک‌پالس یا چندپالس اعمال کرد. در این لیزرها، محیط ماده‌ی فعال بلور، به فرم صفحه (Slab)، میله (Rod)، دیسک (Disk) و فیبر (Fiber) ساخته می‌شود. در موارد استفاده از بلور صفحه‌یی (با شکل مکعب مستطیل)، به دلیل خنک‌سازی یکنواخت، تا حد زیادی اثرات حرارتی ایجاد شده مانند دوشکستی^۱ کاهش می‌یابد.^[۶] برای ایجاد پرتو لیزر ابتدا پرتو نور به ماده‌ی فعال (در یک فرایند دمشی) تابیده می‌شود، سپس طی واکنش‌هایی درون بلور، پرتو لیزر ایجاد می‌شود و مقداری از انرژی داده شده

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۳/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۶/۶/۱۴، پذیرش ۱۳۹۶/۶/۱۴.

DOI:10.24200/J40.2018.6411

از نظریه‌های غیرکلاسیک برای تعیین توزیع درجه حرارت و تنش در بلور استفاده شود. در فعالیت‌های پیشین برای تمامی بلورهای تحت دمش پالسی، توزیع حرارت و تنش بر اساس مدل انتقال حرارت فوری و با استفاده از نرم‌افزارهای اجزاء محدود انجام پذیرفته است. نوآوری این پژوهش استفاده از مدل انتقال حرارت غیرفوری و ارائه فرمولاسیون مرتبط، برای تعیین توزیع حرارت و تنش در بلور لیزری صفحه‌ای تحت دمش‌های پالسی است. بدین منظور ابتدا معادلات ماتریسی انتقال حرارت غیرفوری، که از طریق روش اجزاء محدود برای بلور تحت دمش به دست آمده تعیین، و توزیع دما در بلور محاسبه خواهد شد. سپس با در نظر گرفتن بار حرارتی و فرمول‌بندی ترموالاستیک اجزاء محدود برای سازه، توزیع تنش‌ها در بلور محاسبه شده و در نهایت بر اساس محاسبات غیرکلاسیک انجام گرفته، توان‌های شکست بلور به دست می‌آید.

۲. مدل‌سازی

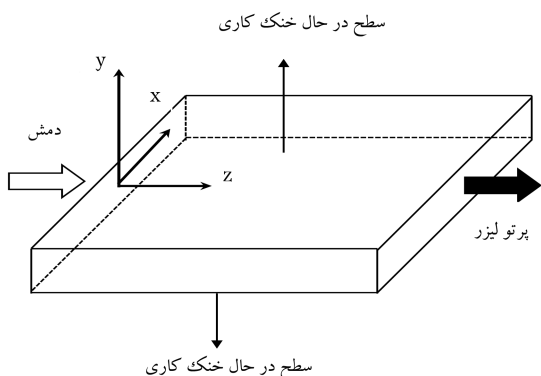
هندسه‌ی بلور صفحه‌ای تحت دمش طولی در شکل ۱ نشان داده شده است. ابعاد این قطعه $10 \text{ mm} \times 12 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ است و دمش از سطح کناری توسط لیزر دیودی انجام می‌پذیرد. راستای انتشار پرتو خروجی لیزر همان جهت پرتو دمش است. همچنین شدت پرتو دمش در امتداد محور x همگن است.

انتقال حرارت روی سطوح بالا و پایین صفحه، ضریب همرفت بالایی دارد و شرایط مرزی حرارتی در آن به گونه‌ی است که دمای سطوح بالا و پایین برابر $T = 293 \text{ K}$ و انتقال حرارت از سطوح دیگر معادل صفر است. دمای اولیه‌ی بلور نیز برابر 293 درجه‌ی کلوین است. برای شرایط مرزی جابه‌جایی سازه، جابه‌جایی تمامی سطوح (به جز سطح خروجی) در راستای عمود بر محور هر سطح معادل صفر است.

یک نمای شماتیک از دمش طولی وارد بر بلور را می‌توان در شکل ۲ مشاهده کرد. مدل در نظر گرفته شده برای دمش طولی از نوع گوسی با ضریب کیفیت پرتو M^2 است. اندازه‌ی لکه به صورت تابعی از اختلاف فاصله‌ی موقعیت طولی (موقعیت z) و موقعیت کم‌ترین اندازه لکه، به صورت رابطه‌ی ۱ تعریف می‌شود:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left[\frac{M^2 \lambda_p (z - z_0)^2}{n \pi w_0^2} \right]^2} \quad (1)$$

که در آن w_0 شعاع کم‌باریکه پرتو دمش، n ضریب شکست بلور، z_0 فاصله کم‌باریکه تا صفحه‌ی ورودی دمش و λ_p طول موج دمش در فضای آزاد است.



شکل ۱. هندسه‌ی بلور تحت دمش طولی.

بر بلور صفحه‌ی نئودیم: واناتات، که تحت دمش جانبی قرار دارد، بررسی کرده و مقایسه‌ی بین مراتب مختلف پرتو سوپرگوسی^۲ انجام داده‌اند. با در نظر گرفتن دو پرتو گوسی^۳ و سرکلاهی^۴ و دمش طولی دوطرفه، خلید و همکاران^[۱۳] تنش و حرارت در یک بلور میله‌ی نئودیم: یاگ (Nd:YAG) را با استفاده از روش اجزاء محدود تحلیل کردند؛ بلور میله‌ی توسط آب احاطه شد تا عملیات خنک کاری انجام شود. آن‌ها از طریق توزیع حرارتی به دست آمده جابه‌جایی، کرنش و تنش را در گره‌ها به دست آوردند و به این نتیجه رسیدند که تغییر پمپاژ از حالت سرکلاهی به گوسی، به خصوص در نسبت شعاع پمپاژ پایین و قدرت جذب بالا، تغییرات چندانی در موقعیت بیشینه تنش ایجاد نمی‌کند. همچنین با افزایش شعاع پمپ، موقعیت بیشینه تنش به سمت کناره‌ها هدایت می‌شود. در زمینه‌ی دمش پالسی، بابایی و همکاران^[۱۴] اثرات ترمومکانیکی دمش پالسی و پیوسته‌ی طولی را روی بلور صفحه‌ی نئودیم: یاگ به روش اجزاء محدود بررسی کردند. ژانگ و همکاران^[۱۵] توزیع دما را در محیط فعال تحت دمش پالسی طولی با در نظر گرفتن نظریه‌ی فوری مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از یک مدل سه‌بعدی حرارتی، و با روش اجزاء محدود، تغییرات دمایی در محیط فعال را شبیه‌سازی کردند.

مطالعات نشان می‌دهد که در بررسی انتقال حرارت هدایتی گذرا، چنانچه زمان آسایش محیط جامد قابل توجه باشد، نظریه‌ی فوری نمی‌تواند با دقت مناسبی بیشینه دمای توزیع شده را محاسبه کند. از این رو لازم است از نظریه‌ی هدایت غیرکلاسیک (غیرفوری) استفاده شود. در همین زمینه ژانگ و همکاران^[۱۶] یک حل تحلیلی بر اساس مدل انتقال حرارت هدایت غیر فوری برای صفحه‌ی نیمه بی‌نهایت تحت دمش لیزری ارائه دادند. مدل مکانیکی بر مبنای معادله‌ی انتقال حرارت هدایت غیرفوری به دست آمده و دارای شرایط مرزی حرارتی و توزیع دمای یکنواخت در سطح است. تبدیل پاسخ با استفاده از تبدیلات لاپلاس و هنکل به دست آمده و سپس از طریق روش معکوس‌گیری، پاسخ نهایی محاسبه شده است. نتایج به دست آمده از روش فوری و روش غیرفوری نشان داده که تفاوت قابل توجهی بین این دو روش وجود دارد. اکبری و همکاران^[۱۷] با استفاده از روش برهم‌نهی و نظریه‌ی ساختار، یک حل تحلیلی برای معادله‌ی انتقال حرارت هذلولوی در یک صفحه ارائه دادند. صفحه از یک سمت عایق و از سمت دیگر در معرض انتقال حرارت جابه‌جایی با محیط قرار دارد. خسروانی فرد و هم‌تیمان^[۱۸] با استفاده از روابط ماکسول - کاتانو، انتقال حرارت غیرکلاسیک در فرایند ریخته‌گری را با استفاده از تحلیل بدون شبکه^۵ مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها تأثیر زمان آسایش را بر انتقال حرارت محیط مورد مطالعه قرار داده و مقایسه‌ی بین نظریه‌های فوری و غیرفوری انجام دادند.

دانشجو و همکاران^[۱۹] با در نظر گرفتن مدل هدایت غیرفوری، توزیع حرارت در یک سیلندر دوطرفه نامحدود توخالی مواد مدرج تابعی (FGM) را که در معرض منبع حرارتی وابسته به زمان قرار دارد، تعیین کردند. با به کارگیری مدل تأخیر زمانی منفرد و استفاده از روش‌های عددی، عظیمی و غلامی^[۲۰] به بررسی انتقال هدایت حرارتی غیرفوری در یک استوانه متشکل از ماده‌ی مدرج تابعی پرداختند. در پژوهش مذکور خواص مواد به صورت توانی و پیوسته تغییر کرده و تأثیر پارامترهای غیرهمگن، مرتبه کسری و تأخیر زمانی مورد بررسی قرار گرفته است.

پیش‌تر رفتار ترمومکانیکی بلورهای لیزری با استفاده از نظریه‌ی انتقال حرارت فوری مورد بررسی قرار گرفته است. در مورد مسائل گذرا و تحت تپ حرارتی، نشان داده شده که استفاده از نظریه‌ی فوری نمی‌تواند پیش‌بینی مناسبی از توزیع حرارت وابسته به زمان و بیشینه دما داشته باشد. بنابراین در کریستال‌های تحت دمش پالسی، برای بررسی دقیق‌تر رفتار ترمومکانیکی و پدیده‌های وابسته به آن، لازم است

دمش به صورت پالسی دوره‌ی است و از تابع کسینوسی برای توصیف دمش پالسی دوره‌ی استفاده شده است. فرم تابع کسینوسی مطابق رابطه‌ی ۴ است:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{2}\pi t}{d_1}\right) \right) (1 - H(t - d_1)) \quad (4)$$

تابع $H(t - d_1)$ تابعی ناپوسته و چند ضابطه‌ی است که مقدارش برای اعداد منفی صفر و برای اعداد نامنفی ۱ است. رابطه‌ی ۴ برای یک پالس در نظر گرفته شده است. همچنین d_1 مدت اعمال پالس است و پس از آن پالس قطع می‌شود. برای چند پالس، d_2 معرف فاصله‌ی زمانی بین دو پالس متوالی است. به منظور توصیف m پالس می‌توان از رابطه‌ی ۵ استفاده کرد:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^m \left\{ 1 - \cos\left[\frac{\sqrt{2}\pi(t - (i-1)(d_1 + d_2))}{d_1}\right] \right\} \times \{H[t - (i-1)(d_1 + d_2)] - H[t - (i-1)(d_1 + d_2) - d_1]\} \quad (5)$$

با ضرب تابع $f(t)$ در منبع چگالی حرارتی ثابت، چگالی حرارتی پالسی ایجاد می‌شود.

۲.۲. معادله‌ی انتقال حرارت هدایت غیرفوریه

هنگام بررسی انتقال حرارت و توزیع زمانی دما در بلور تحت دمش پالسی، در نظر گرفتن اثرات ناشی از سرعت انتشار گرما در معادلات انتقال حرارت ضروری است.^[۲۱] یکی از رویکردهای قابل اعمال در این مورد، استفاده از نظریه‌ی موج در انتقال حرارت هدایتی است که از رفتار آسایشی برای توصیف انتقال حرارت پالسی در بازه زمانی کوتاه استفاده می‌کند. در چنین مواقعی معادله‌ی انتقال حرارت هدایت به صورت رابطه‌ی ۶ نوشته می‌شود:^[۲۱]

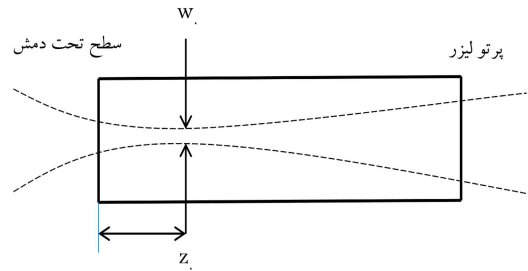
$$\rho c_p \tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + \tau_q \frac{\partial Q}{\partial t} + Q \quad (6)$$

که در آن ρ چگالی جرمی، c_p ظرفیت گرمایی ویژه، Q نرخ تولید گرمای داخلی بر واحد حجم، k ضریب هدایت گرمایی و τ_q زمان آسایش بلور جامد است. معادله‌ی ۶ توصیف ریاضی مدل انتقال حرارت هدایت غیرفوریه است که در آن رفتار آسایشی بلور لحاظ شده است. تفاوت این معادله با معادله‌ی حاصل از مدل انتقال حرارت فوریه، در زمان آسایش است. چنانچه در معادله‌ی ۶ از عبارتهای شامل زمان آسایش صرف‌نظر کنیم یا زمان آسایش صفر در نظر گرفته شود، معادله‌ی دیفرانسیل توزیع دمای بلور همان معادله‌ی به دست آمده از نظریه‌ی انتقال حرارت فوریه خواهد بود. به دلیل این‌که بلور وانادات دارای ضریب هدایت ناهمسانگرد است، باید رابطه‌ی ۶ را به شکل رابطه‌ی ۷ نوشت:

$$\rho c_p \tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \tau_q \frac{\partial Q}{\partial t} + Q \quad (7)$$

۳.۲. محاسبه‌ی توزیع دما در بلور با استفاده از روش تحلیلی

به منظور محاسبه‌ی تحلیلی توزیع دمای داخل کریستال، معادله به روش تبدیلات فوریه و لاپلاس حل می‌شود. بدین منظور با توجه به شرایط مرزی همگن شده برای



شکل ۲. اندازه‌ی لکه و شعاع کمر باریکه‌ی پرتو دمشی.

۱.۲. گرمای تولید شده در بلور

همان‌گونه که پیش‌تر توضیح داده شد، مقداری از توان دمش صرف تولید گرما در بلور می‌شود. چگالی گرمای تولید شده در بلور لیزر که به صورت بار گرمایی کل بر بلور اعمال می‌شود چنین است:^[۷]

$$Q_1(x, y, z) = Q_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2}y^2}{w^2(z)} - \alpha z\right) \quad (2)$$

که در آن α ضریب جذب در ماده‌ی لیزر است. همچنین مقدار ثابت Q_0 توسط رابطه‌ی ۳ تعیین می‌شود:

$$Q_0 = \frac{\eta P_{ab}}{a \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_0^L \exp\left(-\frac{\sqrt{2}y^2}{w^2(z)} - \alpha z\right) dy dz} \quad (3)$$

که در آن η بازده تولید حرارت ماده، a طول بلور در راستای محور x و P_{ab} توان دمش کل جذب شده است. ابعاد هندسی، خواص فیزیکی و مکانیکی بلور در جدول ۱، و خواص نوری بلور و پرتو دمشی در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۱. خواص فیزیکی و مکانیکی بلور.

مقدار	پارامتر
$E = 133$	مدول یانگ (Gpa)
$\nu = 0/33$	نسبت پواسون
$\alpha_x = \alpha_y = 4/43 \times 10^{-6}$	ضرایب انبساط حرارتی (K^{-1})
$\alpha_z = 11/3 \times 10^{-6}$	
$k_x = k_y = 5/3$	ضریب هدایت حرارتی $W(m-K)^{-1}$
$k_z = 5/23$	
$C_p = 590$	ظرفیت گرمایی ویژه $J(kg-K)^{-1}$
$\rho = 4220$	چگالی (kgm^{-3})

جدول ۲. خواص نوری بلور و پرتو دمشی.

مقدار	پارامتر
$\alpha = 410$	ضریب جذب (m^{-1})
$n = 1/82$	ضریب شکست
$\lambda_p = 808$	طول موج دمش در فضای آزاد (nm)
$\eta = 7/42$	بازده تولید حرارت
$w_0 = 120 \times 10^{-6}$	شعاع کمر باریکه (m)
$z_0 = 2$	فاصله کمر باریکه تا صفحه‌ی ورودی دمش (mm)
$M^2 = 50$	ضریب پرتو سوپرگوسی

سه مختصه‌ی معادله (x, y, z) ، سه تبدیل فوریه‌ی نامتناهی مطابق روابط ۸ در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x(f(x)) &= \frac{1}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \\ \mathcal{F}_y(g(y)) &= \frac{1}{c} \int_0^c f(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{c}\right) dy \\ \mathcal{F}_z(h(z)) &= \frac{1}{b} \int_0^b h(z) \cos\left(\frac{r\pi z}{b}\right) dz \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن n, m, r اندیس‌های تبدیلات فوریه‌ی متناهی هستند. با اعمال تبدیلات ارائه شده در رابطه‌ی ۸ روی معادله‌ی ۷، یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه ۲ وابسته به زمان ایجاد می‌شود که با حل این معادله از طریق تبدیل لاپلاس و اعمال تبدیلات معکوس رابطه‌ی ۸، توزیع زمانی دما در بلور تعیین می‌شود.

۴.۲. تحلیل دما و تنش به روش اجزاء محدود

اولین گام برای حل مسائل به روش اجزاء محدود شبکه‌بندی جسم است که در شکل ۳ با استفاده از اجزاء مکعب مستطیلی با هشت گره در گوشه‌ها، شبکه‌بندی انجام شده است. در تحلیل حرارتی تنها یک درجه آزادی در هر گره خواهیم داشت که این درجه آزادی دماست.

به دلیل تقارن هندسی و بارگذاری مدل در نظر گرفته شده در دو راستای x و y ، تنها یک‌چهارم مدل در نظر گرفته می‌شود و شرط مرزی شار حرارتی صفر در دو صفحه‌ی موازی با صفحات xz و yz اعمال می‌شود.

۱.۴.۲. فرمول‌بندی اجزاء محدود حرارت

با استفاده از فرم ضعیف شده‌ی معادله‌ی ۷، معادله‌ی گرمایی اجزاء محدود به صورت رابطه‌ی ۹ تعیین می‌شود: [۲۱]

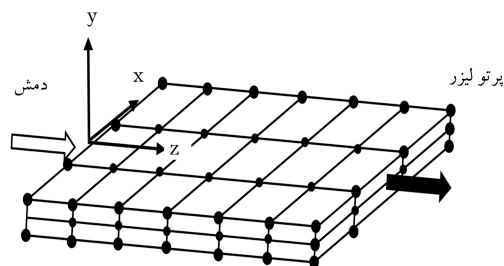
$$[M^T]\{\ddot{T}\} + [C^T]\{\dot{T}\} + [K^T]\{T\} = \{P^T\} \quad (۹)$$

علامت نقطه نشان‌گر مشتق نسبت به زمان است. ماتریس‌های المانی و بردار بارگذاری حرارتی تولید شده چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} [M^T]^e &= \int_{\Omega} \rho c \tau_q [N_\theta]^T [N_\theta] d\Omega \\ [C^T]^e &= \int_{\Omega} \rho c [N_\theta]^T [N_\theta] d\Omega \\ [K^T]^e &= \int_{\Omega} [B_\theta]^T [k] [B_\theta] d\Omega \\ \{P^T\}^e &= \int_{\Omega} Q [N_\theta]^T d\Omega + \int_{\Omega} \tau_q \frac{\partial Q}{\partial t} [N_\theta]^T d\Omega \end{aligned} \quad (۱۰)$$

که:

$$[B_\theta] = [L_\theta][N_\theta] \quad (۱۱)$$



شکل ۳. شبکه‌بندی بلور.

$$\begin{aligned} [L_\theta] &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right]^T \\ [N_\theta] &= [N_{\theta 1}, N_{\theta 2}, \dots, N_{\theta 8}] \end{aligned} \quad (۱۲)$$

که در آن‌ها c, ρ و k تابعی از دستگاه مختصات x_i و $\{T\}$ و $\{P\}$ تابعی از زمان هستند. $[K]$ یک ماتریس 3×3 از ضرایب هدایت حرارتی است که عناصر قطری آن برای حالت همسانگرد یکسان و برای بلور تحت مطالعه با خواص ناهمسانگرد متفاوت است. همچنین $[N_\theta]$ تابع شکل المان‌هاست. با حل معادله‌ی ۹ از طریق روش نیومارک با شرایط غیرمشروط، [۲۲] توزیع زمانی و مکانی دما تعیین می‌شود.

۲.۴.۲. فرمول‌بندی اجزاء محدود تنش و جابه‌جایی

با در نظر گرفتن توزیع حرارت در بلور، رابطه‌ی تنش و کرنش را می‌توان چنین نوشت:

$$\sigma = [D](\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (۱۳)$$

ε_0 کرنش کل، ε_0 کرنش حرارتی و تنش پسماند ماده، و $[D]$ ماتریس کشسان است. [۲۳] برای به دست آوردن روابط اجزاء محدود از قضیه‌ی کمینه‌سازی انرژی استفاده می‌شود، به گونه‌ی که تغییرات انرژی پتانسیل برابر با کار خارجی می‌شود: [۲۲]

$$\delta U = \delta W \quad (۱۴)$$

بنابراین رابطه‌ی ۱۵ برقرار است:

$$\begin{aligned} \int_{V^e} (\delta \varepsilon)^T \sigma dV &= \int_{V^e} (\delta u)^T b dV + \int_{s^e} (\delta u)^T s ds \\ &+ \sum (\delta u)^T f_p \end{aligned} \quad (۱۵)$$

که در آن ε بردار شامل مولفه‌های کرنش و f_p بردار متشکل از بارهای نقطه‌یی هستند. در این مورد بار سطحی و بار نقطه‌یی صفر است. همچنین با تقسیم کردن نیروی حجمی به نیروی اینرسی و نیروی دمینگ، رابطه‌ی ۱۵ چنین ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_{V^e} (\delta \varepsilon)^T \sigma dV &= - \int_{V^e} (\delta u)^T \rho \ddot{u} dV \\ &- \int_{V^e} (\delta u)^T \mu \dot{u} dV \end{aligned} \quad (۱۶)$$

با قرار دادن رابطه‌ی ۱۳ در رابطه‌ی ۱۶ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{V^e} (\delta \varepsilon)^T D \varepsilon dV - \int_{V^e} (\delta \varepsilon)^T D \varepsilon_0 dV \\ \int_{V^e} (\delta u)^T \rho \ddot{u} dV - \int_{V^e} (\delta u)^T \mu \dot{u} dV \end{aligned} \quad (۱۷)$$

همچنین رابطه‌ی ۱۸ برای جابه‌جایی و کرنش در نظر گرفته می‌شود:

$$\{u\} = [N]\{n\}^e, \{\varepsilon\} = [B]\{u\}^e \quad (۱۸)$$

که در آن $[N]$ ماتریس توابع شکل و $[B]$ ماتریس مشتقات توابع شکل المان ۸ گره‌یی هستند. [۲۳]

با قرار دادن روابط ۱۸ در رابطه‌ی ۱۷، و با فاکتور گرفتن تغییرات جابه‌جایی گره‌ها، رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F^T\} \quad (۱۹)$$

که در آن ماتریس‌های المانی و نیرو چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 [M]^e &= \int_{V^e} [N]^T \rho [N] dV, \\
 [C]^e &= \int_{V^e} [N]^T \mu [N] dV, \\
 [K]^e &= \int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV, \\
 \{F^T\}^e &= \int_{V^e} [B]^T [D] [\alpha^t] (T - T_0) dV
 \end{aligned} \quad (20)$$

$[M]^e$ ، $[C]^e$ و $[K]^e$ به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی سازه‌اند و $\{F^T\}^e$ نیز بردار نیروی ناشی از توزیع حرارت است. $[\alpha^t]$ بردار شامل ضرایب انبساط حرارتی است که برابر است با:

$$\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

با توجه به مختصات اجزاء ایزو پارامتریک و محاسبه‌ی ژاکوبین‌ها، ماتریس‌های ارائه شده در رابطه‌ی ۲۰ محاسبه می‌شود. [۲۲، ۲۳] با حل دستگاه معادله‌ی ۱۹ از طریق روش نیومارک، جابه‌جایی در گره‌ها نسبت به زمان محاسبه و در نهایت با استفاده از روابط ۱۳ و ۱۸ تنش‌ها محاسبه می‌شود.

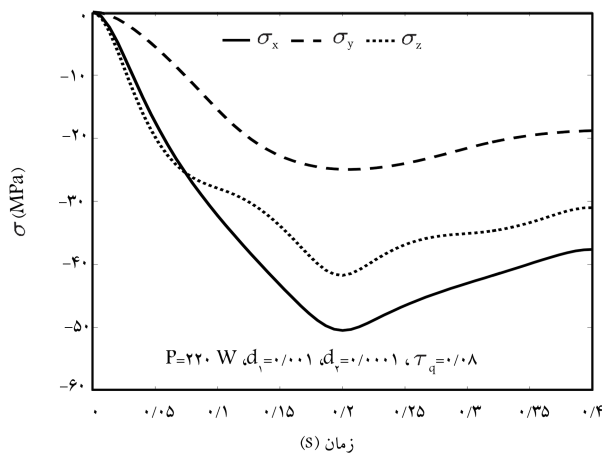
۳. نتایج و بحث

به منظور صحت‌گذاری نتایج، مقایسه‌ی بین نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و اجزاء محدود در شکل ۴ صورت گرفته است. با توجه به نمودارهای ترسیم شده، ملاحظه می‌شود که نتایج دو روش تحلیلی و عددی کاملاً برهم منطبق‌اند. در ادامه بلور صفحه‌ی تحت دمش پالسی دوره‌ی کسینوسی قرار دارد. مدت قطع و وصل پالس دمشی به ترتیب 10^{-2} و 10^{-2} فرض می‌شود. در شکل ۵ بیشینه تنش‌های عمودی صفحه تحت دمش اعمالی 220° وات نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود مقدار تنش نرمال در راستای x بیشتر از جهات

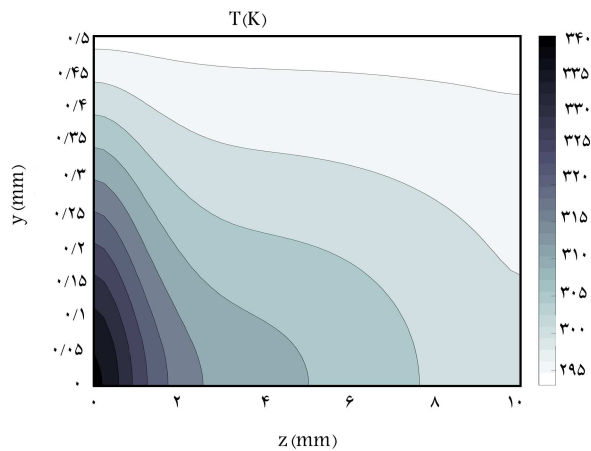
دیگر است. همچنین تنش‌های برشی در تمامی قسمت‌های بلور صفر است. بنابراین تنش نرمال راستای x همان تنش اصلی اول است. همچنین ملاحظه می‌شود که تنش اصلی در زمانی پیش از حالت ماندگار به بیشینه‌اش می‌رسد. در حالی که طبق مدل انتقال حرارت فوری، بیشینه تنش در حالت پایا اتفاق می‌افتد. در مدل انتقال حرارت غیرفوری، وقوع این پدیده ناشی از در نظر گرفتن آسایش حرارتی در بلور و انتقال حرارت کم‌تر با محیط خنک‌کننده است که منجر به بالا رفتن دما و تنش‌های حرارتی قبل از زمان پایا شده است. در مدل غیرکلاسیک وقوع بیشینه تنش پس از گذشت حدود ۱۸۱ پالس اتفاق می‌افتد و مدت آن بزرگ‌تر از میزان زمان آسایش بلور است.

در شکل ۶ کانتور دما، و در شکل ۷ تنش اصلی اول در صفحه‌ی yz و $x = 0$ (در مرکز صفحه) در زمانی که بیشترین تنش اصلی رخ می‌دهد، نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که بیشینه دما و تنش اصلی در صفحه‌ی ورودی اتفاق می‌افتد.

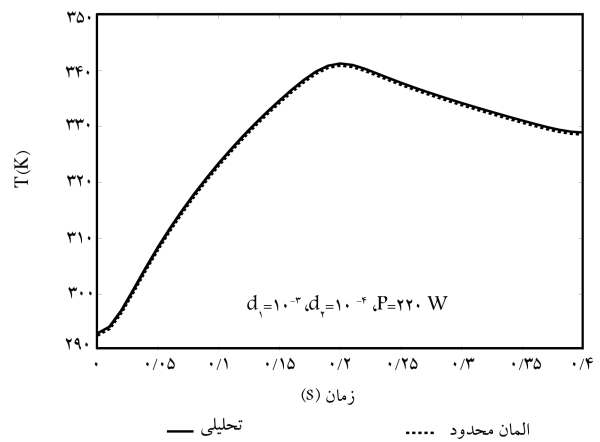
در شکل ۸ توزیع زمانی بیشینه دما در صفحه‌ی ورودی دمش، برای زمان‌های آسایش متفاوت نشان داده شده است. بیشینه دما در بلور با سه زمان آسایش متفاوت در توان دمش 220° وات به دست آمده است. ملاحظه می‌شود که با افزایش زمان آسایش، میزان بیشینه دما افزایش می‌یابد به گونه‌ی که طبق نظریه‌ی غیرفوری، نمودار تاریخچه زمانی دما برای زمان آسایش 0.8° ، دارای اوج است.



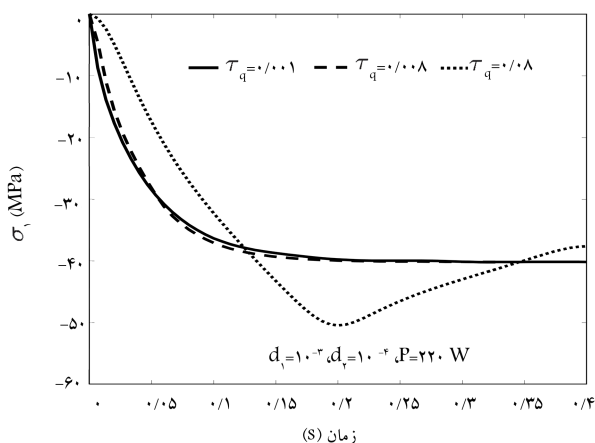
شکل ۵. تاریخچه زمانی بیشینه مولفه‌های تنش بلور.



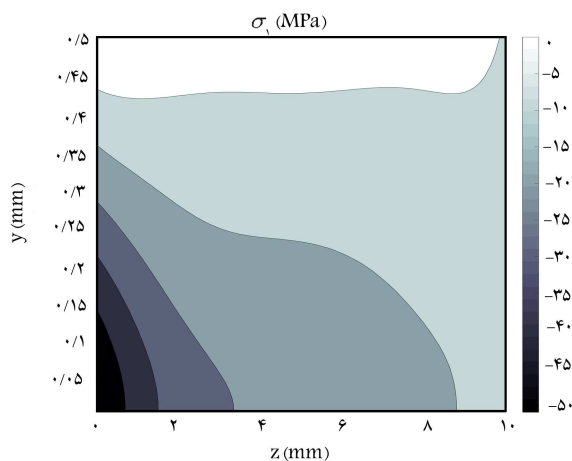
شکل ۶. توزیع دمای بلور در صفحه yz .



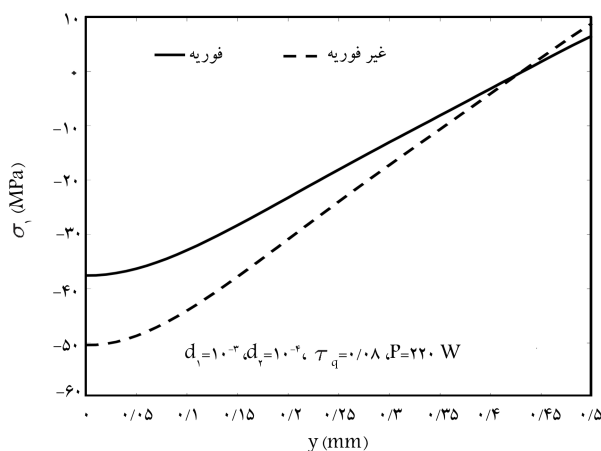
شکل ۴. مقایسه‌ی روش‌های تحلیلی و عددی.



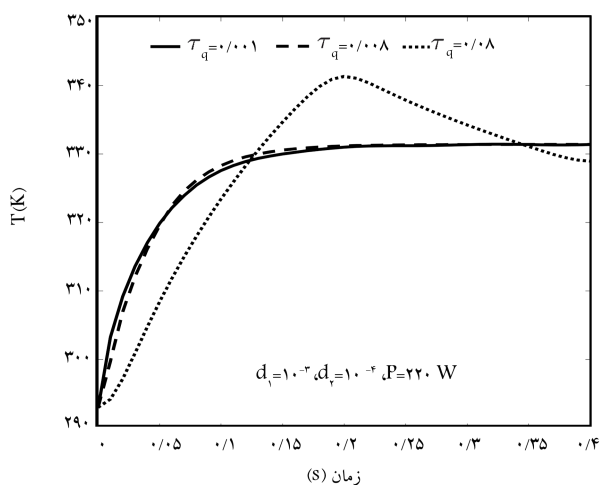
شکل ۹. تاریخچه‌ی زمانی بیشینه تنش اصلی اول بلور برای سه زمان آسایش.



شکل ۷. توزیع تنش اصلی اول بلور در صفحه‌ی yz.



شکل ۱۰. مقایسه‌ی بین توزیع تنش‌های اصلی اول برای دو نظریه‌ی فوریه و غیرفوریه.



شکل ۸. تاریخچه‌ی زمانی بیشینه دمای بلور برای سه زمان آسایش.

مشاهدات نشان می‌دهد که مطابق انتظار، در زمان آسایش کوچک (در اینجا کم‌تر از ۰/۰۰۱)، دمای محاسبه شده‌ی حاصل از نظریه‌ی غیرفوریه منطبق بر دمای محاسبه شده‌ی نظریه‌ی فوریه می‌شود. بنابراین در نظریه‌ی فوریه، دما پیوسته افزایش یافته تا در حالت ماندگار به مقدار بیشینه می‌رسد، اما در نظریه‌ی غیرفوریه این نمودارها دارای یک اوج (بیشینه دما و تنش در یک زمان مشخص) بوده و بیشینه دما در حالت گذرا اتفاق می‌افتد. اختلاف بین نتایج فوریه و غیرفوریه، به علت سرعت انتشار گرماسست. به دلیل بی‌نهایت فرض شدن سرعت انتشار گرما در نظریه‌ی انتقال حرارت فوریه، هنگامی که بلور تحت دمش قرار می‌گیرد، در هر تپ دمشی میزان انتقال حرارت بیشتری با محیط فراهم می‌شود و تغییرات دمای هر نقطه در هر پالس با کاهش بیشتری همراه است. اما در نظریه‌ی غیرکلاسیک، سرعت انتشار گرما محدود فرض می‌شود، در نتیجه هنگامی که بلور تحت دمش تک‌پالس قرار می‌گیرد، مقدار کم‌تری از نرخ گرمای اعمال شده در مدت اعمال هر پالس بلور از بلور خارج می‌شود. بنابراین بیشینه دمای محاسبه شده در مدل غیرکلاسیک بزرگ‌تر از مدل کلاسیک است و توزیع زمانی آن دارای مقدار بیشینه (اوج) است.

مشاهدات نشان می‌دهد که مطابق انتظار، در زمان آسایش کوچک (در اینجا کم‌تر از ۰/۰۰۱)، دمای محاسبه شده‌ی حاصل از نظریه‌ی غیرفوریه منطبق بر دمای محاسبه شده‌ی نظریه‌ی فوریه می‌شود. بنابراین در نظریه‌ی فوریه، دما پیوسته افزایش یافته تا در حالت ماندگار به مقدار بیشینه می‌رسد، اما در نظریه‌ی غیرفوریه این نمودارها دارای یک اوج (بیشینه دما و تنش در یک زمان مشخص) بوده و بیشینه دما در حالت گذرا اتفاق می‌افتد. اختلاف بین نتایج فوریه و غیرفوریه، به علت سرعت انتشار گرماسست. به دلیل بی‌نهایت فرض شدن سرعت انتشار گرما در نظریه‌ی انتقال حرارت فوریه، هنگامی که بلور تحت دمش قرار می‌گیرد، در هر تپ دمشی میزان انتقال حرارت بیشتری با محیط فراهم می‌شود و تغییرات دمای هر نقطه در هر پالس با کاهش بیشتری همراه است. اما در نظریه‌ی غیرکلاسیک، سرعت انتشار گرما محدود فرض می‌شود، در نتیجه هنگامی که بلور تحت دمش تک‌پالس قرار می‌گیرد، مقدار کم‌تری از نرخ گرمای اعمال شده در مدت اعمال هر پالس بلور از بلور خارج می‌شود. بنابراین بیشینه دمای محاسبه شده در مدل غیرکلاسیک بزرگ‌تر از مدل کلاسیک است و توزیع زمانی آن دارای مقدار بیشینه (اوج) است.

توزیع زمانی بیشینه تنش اصلی اول (تنش نرمال در راستای محور x) نیز مشابه با توزیع زمانی دماست و بیشینه‌ی آن برای نظریه‌ی غیرفوریه در حالت گذرا

در جدول ۳ توان‌های شکست نظریه‌های انتقال حرارت فوریه و غیرفوریه، برای

۴. نتیجه گیری

در این پژوهش بلور نئودیم: وانادات تحت دمش طولی چند پالسی قرار گرفته و با در نظر گرفتن نظریه انتقال حرارت هدایت غیرفوری، تحلیل ترمومکانیکی روی این بلور، با ارائه فرمول بندی اجزاء محدود برای آنالیز حرارتی و سازه‌یی، انجام شده است. با رسم کانتور بیشینه دما و تنش مشخص شده است که بیشینه دما و تنش در مرکز صفحه‌ی ورودی دمش اتفاق می‌افتد. نتایج حاصله نشان می‌دهد که برای زمان‌های آسایش کوچک (در مقایسه با مدت پالس)، خروجی تحلیل فوری و غیرفوری در دو آنالیز حرارتی و سازه‌یی بر یکدیگر منطبق است. اما با افزایش مقدار زمان آسایش از مقدار معینی، نتایج دو نظریه متفاوت می‌شود. بیشینه توزیع زمانی دما و تنش در بلور برای مدل‌سازی فوری در حالت پایا اتفاق می‌افتد در حالی که برای مدل‌سازی غیرفوری، بیشینه دما و تنش مقدار بزرگ‌تری دارد که در حالت گذرا رخ می‌دهد. مشاهدات نشان می‌دهد که با افزایش زمان آسایش، دما و تنش بلور بزرگ‌تر می‌شود. همچنین توان شکست پیش‌بینی شده در نظریه غیرفوری کوچک‌تر از توان شکست نظریه فوری است.

جدول ۳. توان شکست بلور با زمان قطع و وصل به ترتیب ۰/۰۰۰۱ و ۰/۰۰۱ برای دمش پالسی.

زمان آسایش	توان شکست	
	مدل فوری (وات)	مدل غیر فوری (وات)
۰/۰۰۱	۲۲۰	۲۴۰
۰/۰۰۵	۲۲۰	۲۴۰
۰/۰۰۸	۲۲۰	۲۲۰

زمان‌های آسایش مختلف، مقایسه شده است. با توجه به افزایش تنش‌های محاسبه شده در نظریه غیر کلاسیک، در مقایسه با نظریه فوری، تنش بیشینه بلور در توان‌های پایین‌تر به تنش شکست می‌رسد. بنابراین نظریه غیر کلاسیک توان شکست کوچک‌تری را پیش‌بینی می‌کند. همچنین ملاحظه می‌شود که با افزایش زمان آسایش، توان شکست مدل غیرفوری کاهش یافته اما توان شکست پیش‌بینی شده توسط نظریه فوری ثابت است.

پانویس‌ها

1. birefringence
2. supper gaussian beam
3. gaussian beam
4. top hat beam
5. meshless

منابع (References)

1. Boulon, G. "Fifty years of advances in solid-state laser materials", *Optical Materials*, **34**, pp. 499-512 (2012).
2. Koechner, W. *Solid-state laser engineering*, pp.1-10, Springer (2013).
3. Thomson, I.J., Monjardin, F.J., Baker, H.J. and et al. "Efficient operation of a 400 W diode side-pumped Yb: YAG planar waveguide laser", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **47**, pp. 1336-1345 (2011).
4. Tang, C. and et al. "Scaling output energy in a diode-end-pumped passively Q-switched laser with a flat-flat resonator", *Applied Physics B*, **123**, pp. 20 (2017).
5. Li, M. and et al. Edge-pumped multi-slab amplifier for inertial fusion energy (IFE). In SPIE/COS Photonics Asia, pp. 100160F-100160F-100110, International Society for Optics and Photonics
6. Dudney, N.J., West, W.C., and Nanda, J. *Handbook of Solid State Batteries*, World Scientific (2016).
7. Injeyan, H., Pflug, G.C., and Vespucci, M.T., *High Power Laser Handbook*, McGraw-Hill (2011).
8. Lü, Y., et al. "All solid state Nd: LuVO₄ laser operating at 1066 nm and 1343 nm under diode pumping into the emitting level", *Laser Physics Letters*, **7**, pp. 699-702 (2010).
9. Eggleston, J. and et al. "The slab geometry laser-part I: theory", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **20**, pp. 289-301 (1984).
10. Kane, T., Eggleston, J. and Byer, R. "The slab geometry laser-Part II: Thermal effects in a finite slab", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **21**, pp. 1195-1210 (1985).
11. Ma, Z. and et al. "Thermal effects of the diode end-pumped Nd: YVO₄ slab", *Optics Communications*, **275**, pp. 179-185 (2007).
12. Ling, Y. and Chen, W. "Research on super-gaussian theory of the thermal effect in a side-pumped Nd: YVO₄ laser crystal", IEE 2009 Symposium on Photonics and Optoelectronics, pp. 1-4, (2009).
13. Shibib, K.S., Minshid, M.A. and Alattar, N.E. "Thermal and stress analysis in Nd: YAG laser rod with different double end pumping methods", *Thermal Science*, **15**, pp. S399-S407 (2011).
14. Babaei Babil, M. and Safari, E. "Thermal and stress analyses in an end-pumped Nd: YAG slab laser using finite element method", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **28**, pp. 3231-3236 (2014).
15. Zhang, S. and Xu, J. Transient thermal effect in the gain medium of pulsed and end-pumped laser. In *Conference on Lasers and Electro-Optics/Pacific Rim*, pp. TUP4_6, Optical Society of America (2009).
16. Zhang, L. and Shang, X. "Analytical solution to non-Fourier heat conduction as a laser beam irradiating on local surface of a semi-infinite medium", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **85**, pp. 772-780 (2015).

17. Akbari, M., Kowsari, F., Sadodin, S. and et al. "Analytical solution of non-fourier heat conduction problem on a slab under convection boundary conditions", *Journal of Modeling in Engineering (In Persian)* **11**, pp. 69-81 (2013).
18. Khosravifard, A. and Hematiyan, M. "Meshless analysis of casting process considering non-Fourier heat transfer", *Iranian Journal of Materials Forming*, **3**, pp. 13-25 (2016).
19. Daneshjou, K., Bakhtiari, M., Parsania, H., and et al. "Non-Fourier heat conduction analysis of infinite 2D orthotropic FG hollow cylinders subjected to time-dependent heat source", *Applied Thermal Engineering*, **98**, pp. 582-590 (2016).
20. Azimi, A. and Gholami, S. "Temperature distribution in a hollow cylinder composed of functionally graded material using non-Fourier fractional single phase lag model", *Modares Mechanical Engineering (In Persian)*, **14**, pp. 61-67 (2014).
21. Wang, B.L. and Han, J.C. "A finite element method for non-Fourier heat conduction in strong thermal shock environments", *Frontiers of Materials Science in China*, **4**, pp. 226-233 (2010).
22. Reddy, J.N. "An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: with applications to heat transfer, fluid mechanics, and solid mechanics", *OUP Oxford* (2014).
23. Rao, S.S. *The Finite Element Method in Engineering: Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies*, Elsevier (2013).
24. Logan, D.L. *A first course in the finite element method*, Cengage Learning (2011).