

آنالیز عددی رفتار دینامیکی پادشهودی تیرهای کشسانی - خمیری پین دار تحت بار ضربه‌یی با ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی خطی

مهدی شمس‌علیزاده* (دانشجوی دکتری)

کوروش حیدری شیرازی (استاد)

شاپور مرادی (استاد)

حمید محمد صدیقی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران، اهواز

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۷)
دورری ۳-۳۳، شماره‌ی ۲، ص. ۸۰-۷۱

در این تحقیق با توسعه‌ی مدل عددی گارکین و با ارائه‌ی الگوریتمی جدید برای اولین بار اثرات سخت‌شوندگی در رفتار دینامیکی پادشهودی تیرهای کشسانی - خمیری پین‌دار تحت بار ضربه‌یی، مطالعه شده است. برای انجام این مطالعه، علاوه بر استفاده از روش گارکین، تحلیل‌های مشابهی نیز به وسیله‌ی کد اجزای محدود ANSYS/LS-DYNA صورت گرفته و نتایج این دو روش با یکدیگر مقایسه شده است. جزئیات منحنی‌های جابه‌جایی بر حسب زمان نقطه‌ی میانی تیر مورد مطالعه قرار گرفته و ناحیه‌ی رخداد رفتار پادشهودی تعیین شده است. محاسبات صورت گرفته با هر دو روش عددی نشان می‌دهد که پاسخ پادشهودی، پدیده‌ی بسیار حساس به بارگذاری است، به‌گونه‌ی که تغییراتی بسیار اندک در میزان بار ضربه‌یی سبب ظهور آن در دو ناحیه‌ی پیوسته و مجزا می‌شود. همچنین بررسی نمودارهای انرژی تیر نیز آشکار می‌سازد که این رفتار غیرعادی در نسبت‌های مناسب انرژی داخلی به انرژی جنبشی رخ می‌دهد.

واژگان کلیدی: رفتار پادشهودی، پاسخ غیرعادی، بارگذاری ضربه‌یی، آنالیز دینامیکی کشسانی - خمیری.

mshalizadeh@gmail.com
k.shirazi@scu.ac.ir
moradis@scu.ac.ir
h.msedighi@scu.ac.ir

۱. مقدمه

در سال ۱۹۸۵ در کشور ایالات متحده‌ی آمریکا، یک واقعیت جالب توسط متخصص مشهور دینامیک کشسانی - خمیری تیرها، سایمونز و همکارش یو^[۱] کشف شد. محاسبات صورت گرفته توسط آنها نشان می‌داد که تحت شرایط معین، وقتی که یک بار ضربه‌یی عرضی بر تیر کشسانی - خمیری وارد می‌شود، اگر این عضو به‌طور محوری مقید شده باشد و بار وارده نیز دارای شدت کافی برای ایجاد تغییر شکل خمیری باشد، ناحیه‌ی کوچکی از بارگذاری وجود دارد که در آن خیز دائمی تیر، به جای این که در جهت بار ضربه‌یی قرار گیرد، در خلاف جهت آن واقع می‌شود. از آن‌جا که این رفتار برخلاف رفتار «شهودی»^۱ و قابل انتظار در آزمایشات بود، آنها این پدیده را رفتار «پادشهودی»^۲ یا رفتار «غیرعادی»^۳ تیر نامیدند. اگرچه پاسخ‌های مسئله‌ی ویژه‌ی تعریف شده توسط سایمونز و یو، به وسیله‌ی ده‌کده عددی روش اجزای

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۹/۲۴، اصلاحیه ۱۳۹۶/۱/۱۴، پذیرش ۱۳۹۶/۲/۱۹.

DOI:10.24200/J40.2018.6416

از آن‌جا که بسیاری از کدهای عددی در پیش‌بینی رفتار پادشهودی و توصیف ویژگی‌های آن ناتوان هستند،^[۱] برخی از مدل‌های تقریبی با دقت محدود نیز برای بررسی جنبه‌های ویژه‌ی این رفتار ارائه شده است. برای آنالیز رفتار تیر پس از

خیز بیشینه، یک پاسخ تقریبی به نام «پاسخ بازیافت کشسانی»^[۴] پیشنهاد شده که در تخمین حد پایین خیز در زمان‌های طولانی مفید است و مطابق آن، پاسخ تیر پس از خیز بیشینه تماماً کشسانی فرض می‌شود.^[۵] لیک از ترکیب روش گلرکین و پاسخ بازیافت کشسانی برای بررسی پاسخ پادشهودی تیرهای کاملاً گیردار استفاده کرد.^[۶] او همچنین ترکیب این روش‌ها را برای مطالعه‌ی آشوب در رفتار پادشهودی تیرهای پین‌دار به کار گرفت.^[۷] و بررسی‌هایی را نیز روی پاسخ آشوب‌ناک پادشهودی تیرهای کاملاً گیردار و کمان‌های هموار تحت بارهای ضربه‌یی انجام داد.^[۸]

رفتار پادشهودی برخی دیگر از سازه‌ها نیز مورد توجه محققین بوده است. لی و همکاران^[۹] با استفاده از روش‌های تحلیلی و شبیه‌سازی اجزای محدود، رفتار پادشهودی حلقه‌های آلومینیومی کشسانی - خمیری تحت ضربه فشاری شعاعی را مورد بررسی قرار دادند. فلورس جانسون و لی^[۱۰] یک بررسی عددی روی پاسخ پادشهودی صفحات مربعی کشسانی - خمیری تحت بار ضربه‌یی ارائه کردند. دانگ و همکاران^[۱۱] برای تعیین نواحی پادشهودی، روش انرژی را برای حلقه‌های دارای وضعیت کرنش صفحه‌یی و پوسته‌های کروی توسعه دادند. زاتو و همکاران^[۱۲] با به کارگیری قوانین ترمودینامیک و قضیه‌ی ناپایداری لیاپانوف، رفتار پادشهودی صفحات دایره‌یی و مربعی کشسانی - خمیری کامل را مورد بررسی قرار دادند. ما و همکاران^[۱۳] بسته تجاری اجزای محدود LS-DYNA را برای شبیه‌سازی پاسخ پادشهودی سدهای مشبک تک‌لایه‌یی، که در ابتدا با یک پیش‌بار استاتیکی تحت تنش قرار داشتند، به کار گرفتند. ژنگ و همکاران^[۱۴] یک روش تحلیلی را برای پیش‌بینی پاسخ‌های دینامیکی صفحات کاملاً گیردار کشسانی - خمیری تحت بارهای انفجاری ارائه دادند.

از آن‌جا که به منظور مشاهده رفتار پادشهودی مسئله سایمونز^[۱] شبیه‌سازی دقیق آزمایشگاهی این مسئله اعم از ایجاد شرایط مرزی، اعمال بارگذاری و کنترل دقیق زمان اثر بسیار اندک بارگذاری، بسیار دشوار است، لذا تاکنون هیچ گزارشی از اثبات یافته‌های سایمونز^[۱] به وسیله‌ی آزمایش و تحت همان شرایط ارائه نشده است اما شواهد مستحکمی مبنی بر وجود پدیده پادشهودی در تیرهای کشسانی - خمیری تحت بار دینامیکی، در مرجع^[۱۵] ارائه شده است. اگرچه پاسخ‌های غیرعادی مراجع^[۱۵] دارای جابه‌جایی‌های نهایی در خلاف جهت سرعت ضربه‌یی است، لیکن تیرهای مورد استفاده در این مراجع، دارای شرایط مرزی و بارگذاری متفاوتی می‌باشند. اولی، یک تیر پین‌دار تحت تأثیر ضربه فشاری مستطیلی است اما تحقیق بعدی برای تیرهای کاملاً گیردار تحت تأثیر ضربه‌ی پرتابه‌یی در نقطه‌ی میانی است. نتایج تحقیقات انجام شده نشان می‌دهد^[۱۶] که احتمال وقوع پدیده پادشهودی در حدود پنجاه درصد کل آزمایشات است و بنابراین واضح است که پدیده‌ی مشاهده شده غیرمعین است و مدل‌های قطعی موجود نمی‌تواند آن را پیش‌بینی کنند. پاسخ غیرعادی تیرهای مربوط به آزمایش مرجع^[۱۵] بعدها به صورت عددی با استفاده از برنامه ANSYS/LS-DYNA توسط لی و کین^[۱۶] برای تیرهای پین‌دار مدل‌سازی شده است. علاوه بر این، کولسکی و همکاران^[۱۷] نیز برای مشاهده‌ی رفتار پادشهودی پیش‌بینی شده توسط سایمونز و یو^[۱] آزمایشات دیگری را روی نمونه‌های تیری از جنس آلایژ آلومینیوم انجام دادند. از آن‌جا که باز هم انجام رضایت‌بخش این آزمایشات برای تیرهای پین‌دار دشوار است، در این آزمایشات از نمونه‌های تیری با انتهای کاملاً ثابت استفاده شده است. آنها شیوه‌ی ساده‌یی را به کار گرفتند که در آن، بارگذاری ضربه‌یی، به وسیله‌ی ایجاد کشش اولیه روی نمونه و سپس رهاسازی آنی آن شبیه‌سازی شده است. نتایج این آزمایشات نشان می‌دهد که از مجموع ۳۶ آزمایش صورت گرفته فقط در دوتای آنها، خیز دائمی در جهت مخالف خیز تحمیلی اولیه به وجود می‌آید. پاسخ غیرعادی تیرهای مربوط به آزمایش مرجع^[۱۷] بعدها

به صورت عددی با استفاده از کد عددی ANSYS/LS-DYNA و روش گلرکین توسط شمس علیزاده و همکاران^[۱۸] برای تیرهای کاملاً گیردار مدل‌سازی شده و ناحیه‌ی رخداد رفتار پادشهودی در این قبیل آزمایشات تعیین شده است علاوه بر این با بررسی نمودارهای انرژی تیر، معیاری برای ظهور این رفتار بر اساس دیدگاه انرژی ارائه شده است.

مطالعه‌ی پژوهش‌های انجام شده در این حوزه نشان می‌دهد که این پدیده‌ی غیرعادی منجر به بروز اختلافاتی در پاسخ‌های به دست آمده از روش‌های مختلف، و ناتوانی برخی از این روش‌ها در پیش‌بینی رفتار پادشهودی می‌شود. علاوه بر این ناپایداری‌های موجود در این رفتار سبب می‌شود که ظهور آن به پارامترهای مختلفی از جمله پارامترهای هندسی، بارگذاری و مواد، به استراتژی حل مسئله نیز فوق‌العاده حساس باشد. همچنین از آن‌جا که مشاهده و شبیه‌سازی آزمایشگاهی این رفتار دشواری‌های فراوانی دارد، بدیهی است به منظور مشاهده، شناخت و تجزیه و تحلیل دقیق تر جنبه‌های مختلف آن، ارائه‌ی مدل‌های جدیدتر یا توسعه‌ی مدل‌هایی که هرچه بیشتر به رفتار واقعی مواد نزدیک باشند باعث شبیه‌سازی دقیق‌ترین رفتار و آگاهی بهتر از ماهیت این پدیده خواهد شد. لذا نظر به اهمیت موضوع و با توجه به تعداد اندک تحقیقات صورت گرفته در این حوزه، در این تحقیق ابتدا برای اولین بار به توسعه‌ی روش گلرکین و ارائه‌ی الگوریتم صریحی در این روش برای مطالعه‌ی رفتار پادشهودی تیرهای کشسانی خطی - خمیری کامل پرداخته‌ایم. در ادامه اثر تغییر رفتار ماده بر ناحیه‌ی پادشهودی بررسی شده است. از آن‌جا که منحنی رفتار بسیاری از مواد با سخت‌شوندگی خطی تقریب زده می‌شود، به منظور شبیه‌سازی هرچه دقیق‌تر رفتار واقعی این دسته از مواد، ضمن توسعه‌ی این مدل، اقدام به ارائه‌ی استراتژی‌های نوین برای در نظر گرفتن اثرات سخت‌شوندگی شده است. برای انجام این مطالعه، علاوه بر توسعه‌ی روش گلرکین، تحلیل‌های مشابهی نیز به وسیله‌ی کد اجزای محدود ANSYS/LS-DYNA صورت گرفته و نتایج این دو روش با یکدیگر مقایسه شده است. برای بررسی صحت الگوریتم پیشنهادی، ابتدا پاسخ تیر کشسانی - خمیری کامل استخراج، و سپس اثرات سخت‌شوندگی در پاسخ پادشهودی بررسی شده است. جزئیات منحنی‌های جابه‌جایی بر حسب زمان نقطه‌ی میانی تیر مورد مطالعه قرار گرفته و ناحیه‌ی رخداد رفتار پادشهودی تعیین شده است. علاوه بر این، با توصیف ناپایداری‌های دینامیکی به وسیله‌ی نمودارهای انرژی، و با بیان دیدگاه فرکانس و حجم تبدیل انرژی‌ها، معیاری برای مشاهده رفتار پادشهودی بر اساس دیدگاه انرژی ارائه و تعیین شده است.

۲. شرح مسئله و مدل‌سازی

۲.۱. شرح مسئله

در این تحقیق، مشابه برخی مطالعات پیشین^[۱] از تیری با انتهای پین‌دار استفاده شده است که تحت تأثیر بارگسترده یکنواختی $p = 19.2 \times 10^3 \text{ N/m}$ است. این بارگذاری در مرکز تیر اعمال می‌شود و تا لحظه‌ی $t_1 = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$ اثر می‌کند و پس از آن برداشته می‌شود. پس از باربرداری، تیر شروع به ارتعاشات غیرخطی می‌کند که در این تحقیق به ارزیابی رفتار ارتعاشاتی تیر پس از باربرداری پرداخته می‌شود. فرض می‌کنیم مطابق آنچه که در شکل‌های ۱ الف و ۱ ب نشان داده شده،^[۱] تیر دارای طول دهانه‌ی $(L) = 20$ میلی‌متری و سطح مقطع مستطیلی یکنواختی با پهنای $(b) = 20$ میلی‌متر و ارتفاع $(h) = 4$ میلی‌متر است. پارامترهای ماده عبارت‌اند از: چگالی $(\rho = 2700 \text{ kg/m}^3)$ ، مدول کشسانی $(E = 80 \times 10^9 \text{ N/m}^2)$ ،

است، نتیجه می شود:

$$\int_0^{L/2} (T' - \rho b h \ddot{u}) \delta u dx = 0$$

$$\int_0^{L/2} [M'' + (T w')' + p(x) - \rho b h \ddot{w}] \delta w dx = 0 \quad (4)$$

در اینجا از نشانه های پرایم و نقطه برای مشتق گیری نسبت به x و t استفاده شده است. شرایط مرزی موجود در مسئله برای $x = 0$ عبارت است از:

$$u = w' = M' = 0 \text{ for } x = 0 \quad (5)$$

و همچنین شرایط تقارن برای $x = L/2$ عبارت است از:

$$u = w = M = 0 \text{ for } x = L/2 \quad (6)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از معادلات ۴ و ملاحظه ای شرایط مرزی ۵ و شرایط تقارن ۶ می توان نتیجه گرفت:

$$\int_0^{L/2} (T \delta u' + \rho b h \ddot{u} \delta u) dx = 0$$

$$\int_0^{L/2} (M \delta w'' - T w' \delta w' + p(x) \delta w - \rho b h \ddot{w} \delta w) dx = 0 \quad (7)$$

بررسی ها^[۷] نشان می دهد که با تقریب جابه جایی های u و w به شکل روابط ۸، علاوه بر ارضای شرایط مرزی و تقارن، پاسخ رفتار پادشهودی با دقت قابل قبولی استخراج می شود:

$$u = A_1 L \sin \frac{\pi x}{L} + A_2 L \sin \frac{\pi x}{L} + A_3 L \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$w = B_1 h \cos \frac{\pi x}{L} + B_2 h \cos \frac{\pi x}{L} + B_3 h \cos \frac{\pi x}{L} \quad (8)$$

با جایگزینی این روابط در معادلات حاکم ۷ و انجام انتگرال گیری، معادلات ۹ برای ضرایب $A_i (i = 1, 2, 3)$ حاصل می شود:

$$\ddot{A}_i = -\lambda_i \pi \left[\left(\frac{1}{\rho b h L^2} \right) \int_0^L T \cos \frac{\pi x}{L} dx \right] (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

همچنین معادلات حاکم بر ضرایب $B_i (i = 1, 2, 3)$ عبارت اند از:

$$\ddot{B}_1 = \frac{-\pi^2}{\rho b h L^2} (Q_{11} B_1 + 2Q_{12} B_2 + 5Q_{13} B_3)$$

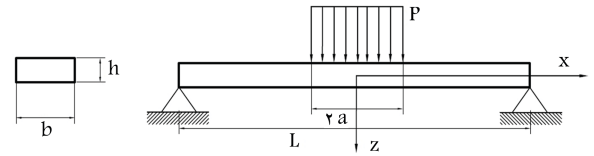
$$- \frac{\pi^2}{\rho b h^2 L^2} R_1 + \frac{\pi p}{\rho b h^2 \pi} \sin \left(\frac{\pi a}{L} \right)$$

$$\ddot{B}_2 = \frac{-12\pi^2}{\rho b h L^2} (Q_{21} B_1 + 3Q_{22} B_2 + 5Q_{23} B_3)$$

$$- \frac{36\pi^2}{\rho b h^2 L^2} R_2 + \frac{\pi p}{\rho b h^2 \pi} \sin \left(\frac{3\pi a}{L} \right)$$

$$\ddot{B}_3 = \frac{-20\pi^2}{\rho b h L^2} (Q_{31} B_1 + 3Q_{32} B_2 + 5Q_{33} B_3)$$

$$- \frac{100\pi^2}{\rho b h^2 L^2} R_3 + \frac{\pi p}{\rho b h^2 \pi} \sin \left(\frac{5\pi a}{L} \right) \quad (10)$$



الف) تیر تحت اثر بار گسترده یکنواخت؛ ب) سطح مقطع تیر.

شکل ۱. بارگذاری روی تیر با تکیه گاه ساده.

حد تسلیم اولیه ($\sigma_{Y0} = 0.3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$) و نسبت پواسان ($\nu = 0.3$). در هر مرحله از تحقیق، رفتار ماده تیر، ابتدا به صورت کشسانی - خمیری کامل در نظر گرفته می شود و سپس با استفاده از یک مدل سخت شونده گی سینماتیک خطی، اثرات سخت شونده گی در پاسخ پادشهودی مطالعه می شود.

۲.۲. روش گلرکین

روش گلرکین، به عنوان یکی از روش های باقی مانده ی وزنی شناخته می شود. این روش، ابتدا توسط لیک^[۶] برای آنالیز رفتار دینامیکی پادشهودی تیرهای کشسانی - خمیری پیشنهاد شد. در این تحقیق، با توسعه ی مدل عددی پیشنهادی گلرکین و با ارائه ی یک الگوریتم پیشنهادی جدید برای اولین بار اثرات سخت شونده گی در رفتار دینامیکی پادشهودی تیرهای کشسانی - خمیری پین دار تحت بار ضربه یی مطالعه می شود.

۱.۲.۲. معادلات حاکم

معادلات حاکم بر حرکت تیر کشسانی - خمیری (شکل ۱) عبارت اند از:^[۷]

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho b h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + p(x) = \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1)$$

در این روابط x و z محورهای مختصات مطابق شکل ۱، t زمان، u جابه جایی محوری، w خیز و ρ چگالی است. علاوه بر این p شدت بارگذاری^۶ و $2a$ طول ناحیه ی بارگذاری است به گونه یی که تابع بارگذاری برای $|x| < a$ برابر $p(x) = p$ و برای $|x| > a$ برابر $p(x) = 0$ است. همچنین T نیروی محوری و M ممان خمشی اند که بر اساس روابط زیر تعیین می شوند:

$$T(x, t) = \int_{-L/2}^{L/2} \sigma(x, z, t) b dz$$

$$M(x, t) = \int_{-L/2}^{L/2} \sigma(x, z, t) b z dz \quad (2)$$

با استفاده از فرضیات کیرشهف^[۷]، رابطه ی بین تغییر شکل محوری بدون بعد و جابه جایی های u و w عبارت است از

$$\varepsilon = u' + \left(\frac{h}{L} \right)^2 (0.5 w'' - z w'') \quad (3)$$

با انتگرال گیری معادلات ۱ به کمک روش گلرکین و با استفاده از تقارن هندسه و بارگذاری موجود در مسئله و ملاحظه ی یک نیمه ی تیر که در آن $x \in (0, L/2)$

در این معادلات، ضرایب $Q_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ و $R_i(i = 1, 2, 3)$ عبارت‌اند از:

$$Q_{ij} = \int_0^{L/2} T \sin\left[\frac{(2i-1)\pi x}{L}\right] \sin\left[\frac{(2j-1)\pi x}{L}\right] dx = Q_{ji}(i, j = 1, 2, 3) \quad (11)$$

$$R_i = \int_0^{L/2} M \cos\left[\frac{(2i-1)\pi x}{L}\right] dx \quad (i = 1, 2, 3) \quad (12)$$

برای شروع آنالیز عددی مسئله از وضعیت بدون تنش تیر استفاده می‌شود. با محاسبه‌ی میدان تنش برای هر نقطه از تیر و در زمان مورد نظر، می‌توان نیروهای کششی T و ممان‌های خمشی M را از روابط ۲ استخراج و براساس آن انتگرال‌های ۱۱ و ۱۲ را محاسبه کرد. سپس می‌توان به کمک معادلات ۹ و ۱۰ ضرایب $\ddot{A}_i(i = 1, 2, 3)$ و $\ddot{B}_i(i = 1, 2, 3)$ را در لحظه‌ی t محاسبه کرد. ضرایب $\dot{A}_i(i = 1, 2, 3)$ و $\dot{B}_i(i = 1, 2, 3)$ و تغییرات زمانی آنها در لحظه‌ی $t + \Delta t$ یعنی $\dot{A}_i(i = 1, 2, 3)$ و $\dot{B}_i(i = 1, 2, 3)$ را نیز می‌توان با استفاده از روش تفاضل محدود^۷ و به وسیله‌ی روابط ۱۳ محاسبه کرد و الگوریتم راه حل را ادامه داد.

$$\begin{aligned} A_i(t + \Delta t) &= \ddot{A}_i(t) \Delta t^2 + 2A_i(t) - A_i(t - \Delta t) \\ \dot{A}_i(t + \Delta t) &= 2\dot{A}_i(t) \Delta t + \dot{A}_i(t - \Delta t) \\ B_i(t + \Delta t) &= \ddot{B}_i(t) \Delta t^2 + 2B_i(t) - B_i(t - \Delta t) \\ \dot{B}_i(t + \Delta t) &= 2\dot{B}_i(t) \Delta t + \dot{B}_i(t - \Delta t) \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (13)$$

در هر مرحله از آنالیز عددی و قبل از به کارگیری تنش‌ها باید محدودیت ایجاد شده به وسیله‌ی روابط تنش - کرنش حاکم بر رفتار ماده تیر را بر آنها اعمال کرد. در ادامه، رفتار ماده تیر به صورت کشسانی - خمیری با سخت شونده‌ی سینماتیک خطی^۸ در نظر گرفته شده است. در ادامه، معادلات حاکم بر این رفتار و الگوریتم چگونگی اعمال محدودیت ایجاد شده به وسیله‌ی رفتار ماده بر سطح تنش‌ها بیان می‌شود.

۲.۲.۲. معادلات تنش - کرنش و روابط سخت‌شونده‌ی

در هر نقطه‌یی که فراتر از تنش تسلیم اولیه باشد، کرنش محوری کل، به دو بخش کشسانی ε^e و خمیری ε^p قابل تجزیه است^[۱۹] به گونه‌یی که:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (14)$$

با فرض این که منحنی تنش - کرنش، توسط یک رابطه‌ی دوخطی مشخص شده باشد که در آن E شیب منحنی تنش - کرنش در ناحیه‌ی کشسانی یا مدول یانگ^۹ و E_T شیب منحنی تنش - کرنش در فراتر از ناحیه‌ی تسلیم یا مدول تانژانت^{۱۰} باشد، معادله‌ی بنیادین^{۱۱} حاکم بر رفتار تیر کشسانی - خمیری عبارت است از:

$$\sigma = E \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (15)$$

بنابراین برای بارهایی که کرنش خمیری بیشتری به وجود می‌آورند، مشتق زمانی تنش محوری برابر است با:

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (16)$$

در این تحقیق برای ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شونده‌ی، از ساده‌ترین شکل سخت‌شونده‌ی سینماتیک، یعنی سخت‌شونده‌ی سینماتیک خطی استفاده می‌شود. در این نوع سخت‌شونده‌ی فرض می‌شود که برای هر تغییرات افزایشی $\Delta\sigma_Y$ مربوط به تنش تسلیم در کرنش، تغییرات افزایشی $-\Delta\sigma_Y$ برای تنش تسلیم در فشار وجود داشته باشد و بالعکس. این بدان معناست که محدوده‌ی ناحیه‌ی کشسان تغییر نمی‌کند و این ناحیه به سادگی منتقل می‌شود. نمودار تغییرات تنش - کرنش مربوط به بارگذاری دوره‌یی ماده‌ی کشسانی - خمیری با سخت‌شونده‌ی سینماتیک خطی در شکل ۲ نشان داده شده است. در این نمودار، ناحیه‌ی (I) متناظر با تغییر شکل کشسان خالص است. نواحی (II) و (IV) به ترتیب متناظر با بارگذاری کششی خمیری و بارگذاری فشاری خمیری هستند. در ناحیه‌ی (III) باربرداری کشسان رخ می‌دهد و ناحیه‌ی (V) متناظر با بارگذاری کشسان مجدد است.

در مسئله‌ی حاضر، فرض می‌شود که تابع تسلیم منتقل شده^{۱۲} (رابطه‌ی ۱۷) حاکم بر تسلیم باشد:

$$f(\sigma, \alpha, \sigma_{Y0}) = |\sigma - \alpha| - \sigma_{Y0} \leq 0 \quad (17)$$

در این جا، α تنش زمینه^{۱۳} (با مقدار اولیه‌ی $\alpha = 0$) است و به وسیله‌ی مقدار متوسط جبری تنش‌ها در کرنش و فشار تعیین می‌شود؛ به عبارت دیگر، مختصات تنش نقطه‌ی میانی بین σ_{YT} و $-\sigma_{YT}$ روی محور تنش‌هاست. همچنین شرط سازگاری^{۱۴} چنین بیان می‌شود:

$$\dot{f}(\sigma, \alpha, \sigma_{Y0}) = 0 \quad (18)$$

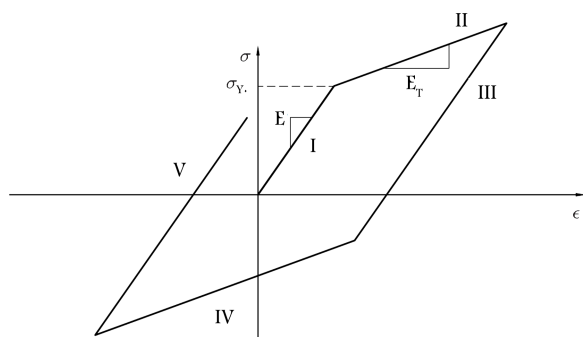
که با اعمال این شرط به تابع تنش منتقل شده و با توجه به این که در سخت‌شونده‌ی سینماتیک $\dot{\sigma}_{Y0} = 0$ است، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\text{sign}(\sigma - \alpha)(\dot{\sigma} - \dot{\alpha}) = 0 \Rightarrow \dot{\sigma} = \dot{\alpha} \quad (19)$$

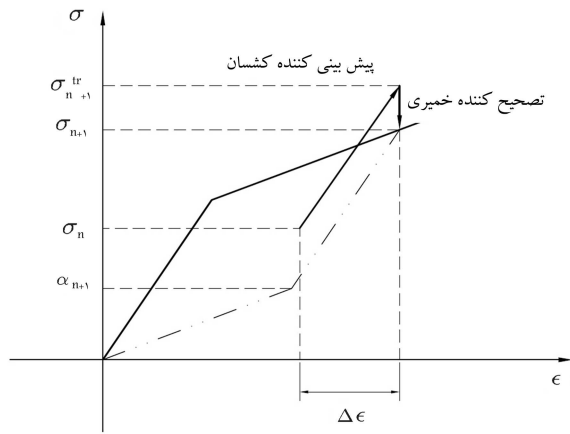
حال اگر مقدار بارگذاری به گونه‌یی باشد که در کرنش یا فشار، تسلیم رخ دهد و منجر به تولید کرنش محوری خمیری جزیی شود، آنگاه چنانچه اندازه نرخ تغییرات کرنش خمیری^{۱۵} با $\dot{\lambda} > 0$ نشان داده شود، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} +\dot{\lambda}, & \text{if } \sigma > 0 \\ -\dot{\lambda}, & \text{if } \sigma < 0 \end{cases} \quad (20)$$

بنابراین قاعده‌ی جریان برای نرخ تغییرات کرنش خمیری^{۱۶} $\dot{\varepsilon}^p$ ، که در برگزیده‌ی اندازه نرخ تغییرات کرنش خمیری $\dot{\lambda}$ و همچنین جهت آن (که به وسیله‌ی مشتق جزیی



شکل ۲. نمودار تنش - کرنش ماده‌ی کشسانی - خمیری با سخت‌شونده‌ی سینماتیک خطی.



شکل ۳. الگوریتم سخت‌شوندگی سینماتیک.

صورت هندسی ترسیم شده است، می‌توان محدودیت ایجاد شده به وسیله رفتار ماده بر سطح تنش‌ها را در نظر گرفت. لذا مراحل تصحیح تنش‌ها و همچنین تعیین موقعیت جاری سطح تسلیم با ملاحظه محدودیت ناشی از خصوصیات رفتار ماده تیر به شرح زیر است:

مرحله ۱: محاسبه σ_{n+1}^{tr} با استفاده از رابطه ۲۴؛ مرحله ۲: بررسی شرط $|\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n| > \sigma_{Y^0}$. در صورت عدم برقراری این شرط، از جایگزینی $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr}$ و $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ استفاده و سپس خارج شد. مرحله ۳: در صورت برقراری شرط مرحله ۲، با استفاده از رابطه ۲۸، $\Delta\lambda$ محاسبه شود.

مرحله ۴: با ترکیب روابط ۲۴ و ۲۵ و تشکیل رابطه $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - E\Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n)$ مقدار σ_{n+1} تعیین می‌شود. همچنین با استفاده از رابطه ۲۶، α_{n+1} تعیین و سپس خارج می‌شود.

۳.۲. مدل‌سازی اجزای محدود

در این تحقیق، از روش اجزای محدود به عنوان روش جایگزین برای مطالعه جزئیات منحنی‌های جابه‌جایی برحسب زمان نقطه‌ی میانی تیر و تعیین ناحیه‌ی رخداد رفتار پادشهودی استفاده خواهد شد. علاوه بر این، نمودارهای انرژی تیر نیز به وسیله‌ی این روش مورد ارزیابی قرار گرفته است. کد ANSYS/LS-DYNA که در این مطالعه مورد استفاده قرار خواهد گرفت، یک کد ضمنی اجزای محدود، برای آنالیز تغییر شکل بزرگ و پاسخ دینامیکی جامدات غیرکشسانی است. تیر موجود به وسیله‌ی ۲۰ المان از نوع BEAM161 مدل‌سازی شده است. شرایط مرزی تیر مدل‌سازی شده به گونه‌ی انتخاب شده است که گره‌های ابتدایی و انتهایی دارای شرایط بین‌دار باشند، بنابراین همه جابه‌جایی‌های UX و UY و UZ در این گره‌های تکیه‌گاهی برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. نیروهای اولیه برگره میانی اعمال می‌شود و سبب می‌شود که خیز نقطه‌ی میانی تا یک پیشینه‌ی مشخص افزایش باید پس از آن باربرداری رخ می‌دهد و سپس رفتار تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. رفتار ماده در ابتدا به صورت کشسانی خطی - خمیری کامل در نظر گرفته شده است. اما در ادامه برای ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی، از مدل سخت‌شوندگی سینماتیک خطی استفاده شده است. جزئیات ورودی‌ها و همچنین چگونگی اعمال بار و شرایط مرزی در راهنمای کاربری ANSYS/LS-DYNA ذکر شده است.^[۲۱]

$\partial f / \partial \sigma$ داده شده است) است، عبارت است از:

$$\varepsilon^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}, \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma - \alpha) \quad (21)$$

چنانچه σ_Y مقدار جاری تنش تسلیم باشد، چون در آستانه تسلیم خمیری $|\sigma| = \sigma_Y$ است، با توجه به وجود یک تنش تسلیم در کشش و یک تنش تسلیم در فشار و با به کارگیری قانون سخت‌شوندگی^{۱۷} (که چگونگی محاسبه σ_Y از روی تغییر شکل خمیری را نشان می‌دهد)، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\text{sign}(\sigma - \alpha) \dot{\sigma} = H' |\dot{\varepsilon}^p| = H' \dot{\lambda} \quad (22)$$

و با استفاده از معادلات ۱۹ و ۲۲ نتیجه می‌شود:

$$\dot{\alpha} = H' \dot{\lambda} \text{sign}(\sigma - \alpha) \quad (23)$$

در این جا، پارامتر H' را که مدول خمیری^{۱۸} است می‌توان به عنوان شیب منحنی تنش - کرنش، بعد از برداشتن مؤلفه‌ی کشسانی کرنش تفسیر کرد.

۳.۲.۲. الگوریتم به کارگیری سخت‌شوندگی سینماتیک

از آن‌جا که برای محاسبه دقیق تنش‌ها در کدهای رایانه‌ی، شکل افزایشی معادله‌ی بنیادین کافی نیست لذا ضروری است یک الگوریتم انتگرال‌گیری عددی نیز برای توصیف چگونگی محاسبه متغیرهای مختلف حالت، روی بازه‌های زمانی مجزا گسترش یابد. بدین منظور، در معادلات افزایشی ۱۶، ۲۱ و ۲۳ فرض می‌شود که در بازه زمانی مطلوب $t \in [t_n, t_{n+1}]$ ، مقادیر σ_n ، α_n و $\Delta\varepsilon$ مشخص باشند و هدف، تعیین پارامترهای σ_{n+1} و α_{n+1} باشد. ابتدا شکل گسسته^{۱۹} شده‌ی متناظر با معادلات ۱۶، ۲۱ و ۲۳ استخراج می‌شود:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - E\Delta\varepsilon^p, \sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + E\Delta\varepsilon \quad (24)$$

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}) = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n) \quad (25)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + H' \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_{n+1}) = \alpha_n + H' \Delta\lambda \text{sign}(\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n) \quad (26)$$

از آن‌جا که هر دو پارامتر σ_{n+1} و σ_{n+1}^{tr} مشخص‌اند، در معادله ۲۶ از جایگزینی $\text{sign}(\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}) = \text{sign}(\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n)$ استفاده شده است. به عبارت دیگر برای تعیین علامت صحیح اختلاف بین پارامترهای σ_{n+1} و α_{n+1} ، دانستن مقادیر آنها ضروری نیست. مفهوم هندسی آن این است که در طول فاز پیش‌بینی کننده‌ی کشسانی،^{۲۰} تنش زمینه ثابت است و بنابراین در خلال فاز تصحیح کننده‌ی خمیری^{۲۱} به تنش اصلی می‌رسد. به همین سبب این الگوریتم را «الگوریتم رسیدن^{۲۲}» می‌نامند.^[۲۰] همچنین با توجه به معادله ۱۸، شرط سازگاری گسسته عبارت است از:

$$f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}, \sigma_{Y^0}) = |\sigma_{n+1} - \alpha_{n+1}| - \sigma_{Y^0} = 0 \quad (27)$$

که در آن، σ_{Y^0} فاصله‌ی ثابت بین تنش زمینه تا نقاط تسلیم است. اکنون با استفاده از شرط سازگاری گسسته و با بهره‌گیری از معادلات ۲۴، ۲۵ و ۲۶، برای حل ضریب خمیری گسسته $\Delta\lambda$ از رابطه ۲۸ استفاده می‌شود:

$$\Delta\lambda = \frac{|\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n| - \sigma_{Y^0}}{E + H'} > 0 \quad (28)$$

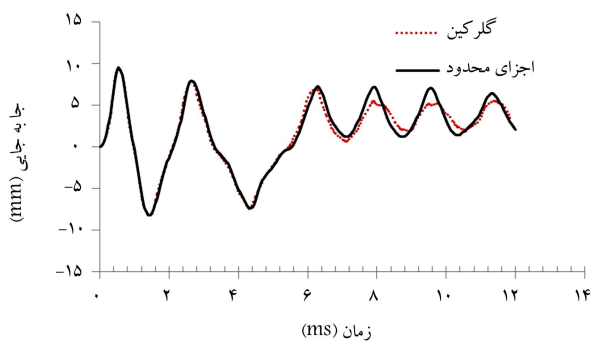
که در آن برقراری نامساوی $\Delta\lambda > 0$ ، فراهم کننده‌ی شرط $|\sigma_{n+1}^{tr} - \alpha_n| > \sigma_{Y^0}$ است. بنابراین با به کارگیری روابط این بخش و نیز مطابق آن‌چه که در شکل ۳ به

۳. نتایج و بحث

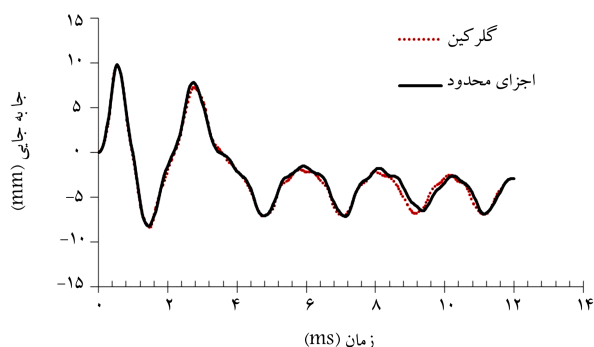
۱.۳. منحنی‌های جابه‌جایی - زمان

در اثر اعمال بار ضربه‌یی گسترده، ابتدا خیز مرکز تیر تا یک مقدار بیشینه افزایش پیدا می‌کند. در اینجا توجه ویژه‌یی بر پاسخ تیر پس از خیز بیشینه شده است. پس از خیز بیشینه، تیر شروع به ارتعاشات

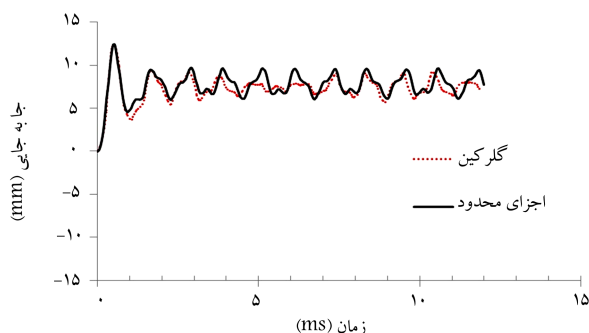
غیرخطی می‌کند. برای آنالیز این فاز حرکت، می‌توان به تفسیر منحنی‌های جابه‌جایی - زمان مرکز تیر پرداخت. در ابتدا و به منظور بررسی صحت الگوریتم پیشنهادی منحنی جابه‌جایی - زمان مرکز تیر با رفتار کشسانی خطی - خمیری کامل برای بار ضربه‌یی گسترده 19200 نیوتن بر متر در شکل ۴ نشان داده شده است. در این جا علاوه بر نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود و روش گلرکین، نمودار مربوط به شکل ۲ از مرجع [۱] نیز ترسیم شده است و چنان که ملاحظه می‌شود، این نتایج با یکدیگر تطابق بسیار خوبی دارند. به منظور ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی در پاسخ پادشهودی، در اینجا با استفاده از مدل تانزانسی که برابر 0.1 مدول الاستیسیته است به بررسی رفتار تیر مورد نظر تحت بار گسترده ضربه‌یی پرداخته‌ایم. منحنی‌های جابه‌جایی - زمان مرکز تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی در شکل‌های ۵ تا ۹ نشان داده شده است. در مقادیر کوچک بارهای ضربه‌یی، تیر دارای حرکت ارتعاشاتی منظم و با دامنه ثابت حول موقعیت تعادل است که نشانگر رفتار کشسانی تیر است (شکل ۵). با افزایش مقدار بار ضربه‌یی، تیر به طور نامنظم ارتعاش می‌کند و دامنه ارتعاشات آن، در سیکل سوم کاهش می‌یابد و پس از آن ثابت می‌ماند،



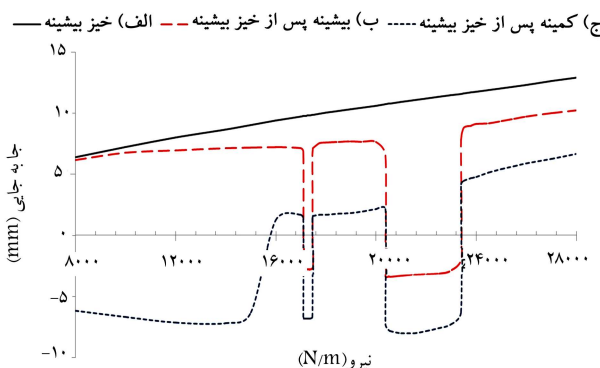
شکل ۶. منحنی تغییرات زمانی جابه‌جایی نقطه‌ی میانی تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 16000 \text{ N/m}$).



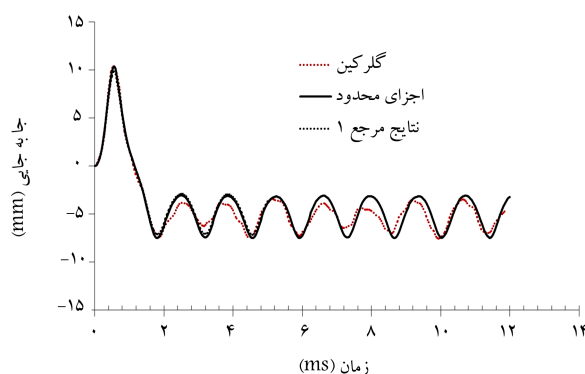
شکل ۷. منحنی تغییرات زمانی جابه‌جایی نقطه‌ی میانی تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 17200 \text{ N/m}$).



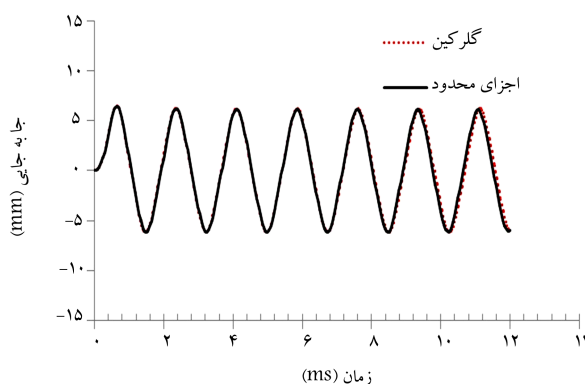
شکل ۸. منحنی تغییرات زمانی جابه‌جایی نقطه‌ی میانی تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 26000 \text{ N/m}$).



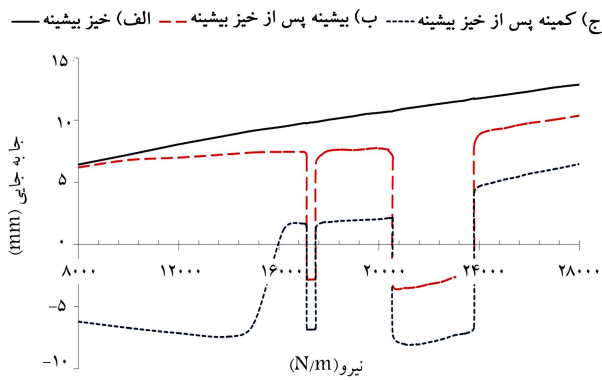
شکل ۹. ناحیه‌ی پادشهودی تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی به دست آمده از روش اجزای محدود.



شکل ۴. منحنی تغییرات زمانی جابه‌جایی نقطه‌ی میانی تیر کشسانی - خمیری کامل، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 19200 \text{ N/m}$).



شکل ۵. منحنی تغییرات زمانی جابه‌جایی نقطه‌ی میانی تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 8000 \text{ N/m}$).



شکل ۱۰. ناحیه‌ی پادشهودی تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی به دست آمده از روش گلرکین.

مجرا رخ می‌دهد و دو ناحیه‌ی مجزا برای رخداد رفتار پادشهودی پیش‌بینی می‌شود که ناحیه‌ی نخست دارای پهنای باند کوچک‌تری است و در محدوده‌ی کوچک‌تری از بارهای ضربه‌یی رخ می‌دهد اما ناحیه‌ی بعدی دارای پهنای باند بیشتری است و در محدوده وسیع‌تری از بارهای ضربه‌یی رخ می‌دهد. همچنین پس از گذر از دومین ناحیه‌ی پادشهودی، افزایش بیشتر مقدار بار ضربه‌یی سبب می‌شود که مقادیر بیشینه و کمینه‌ی دامنه‌ی ارتعاشات پایدار، پس از خیز بیشینه سریعاً تغییر جهت داده و دوباره در جهت بارگذاری اولیه قرار گیرند. به عبارت دیگر هر دو منحنی ب و ج دارای مقادیر مثبت می‌شوند و در ناحیه‌ی شهودی قرار می‌گیرند. ادامه‌ی روند افزایشی بار ضربه‌یی، باعث تغییر این رفتار نخواهد شد و این مقادیر کماکان در ناحیه‌ی مثبت قرار خواهد داشت.

مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از روش اجزای محدود (نمودارهای شکل ۹) با نتایج استخراج شده از روش گلرکین (نمودارهای شکل ۱۰) نشان می‌دهد که روش گلرکین، همانند روش اجزای محدود توانایی پیش‌بینی رفتار پادشهودی تیر کشسانی - خمیری تحت بار ضربه‌یی حتی با ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی را دارد و این روش همانند روش اجزای محدود وقوع پدیده‌ی پادشهودی را به‌وسیله‌ی دو ناحیه‌ی مجزا و پیوسته از بارگذاری نشان می‌دهد. نتایج حاصله همچنین نشان می‌دهد که اگرچه ورود به هر کدام از این نواحی پادشهودی و خروج از آنها، در ابتدا توسط روش اجزای محدود و سپس با اندکی تأخیر نسبت به این روش، توسط روش گلرکین می‌شود لیکن پهنای باندهای وقوع رفتار پادشهودی که توسط روش گلرکین پیش‌بینی می‌شوند اندکی بزرگ‌تر از مقادیر پیش‌بینی شده در روش اجزای محدود است.

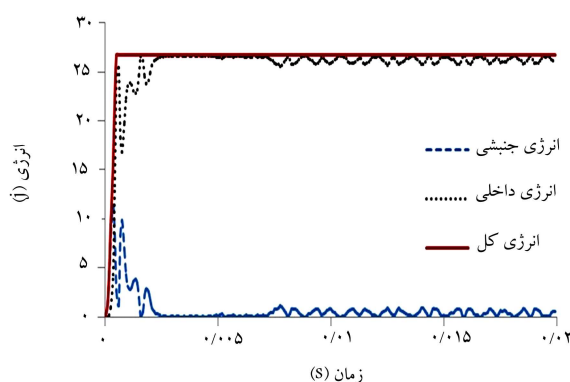
۳.۳. نمودارهای انرژی

نمودارهای انرژی رویکردی برای نمایش و تفسیر ساده‌تر پاسخ نسبت به فضای فاز است^[۲۳،۲۴] در مسئله‌ی مورد بررسی که تغییر شکل‌های خمیری کوچک نقشی اساسی در پاسخ‌ها ایفا می‌کند، نمودارهای صفحه فاز خیلی مفید نیستند چون اثرات پدیده‌ی حاکم را فقط به‌طور غیرمستقیم تعیین می‌کنند، اما نمودارهای انرژی مستقیماً نشان‌گر افزایش کرنش‌های خمیری و اثر آن بر پاسخ‌های متجه هستند. مفهوم انرژی دربرگیرنده‌ی ایده‌ی ساده است و آن، ترسیم توأمان منحنی‌های زمانی انرژی کل، انرژی داخلی و انرژی جنبشی است. تغییر نامتناوب وضعیت نهایی بین مقادیر مثبت و منفی و قالب‌های دیگر نمودار مشخصه‌ی مدل، بر اساس نمودارهای انرژی، سریعاً قابل تشخیص است.^[۲۴] با استفاده از روش اجزای محدود، منحنی‌های زمانی انرژی کل، انرژی داخلی و انرژی جنبشی برای برخی از پاسخ‌های دینامیکی مربوط تیر

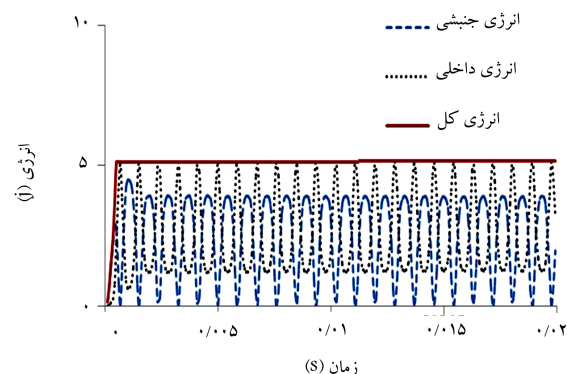
بروز این رفتار، ناشی از ظهور تغییر شکل‌های خمیری و اتلاف انرژی، پس از دومین سیکل حرکت کشسانی - خمیری است (شکل ۶). با ادامه روند بارگذاری، مطابق پیش‌بینی‌های صورت گرفته توسط هر دو روش اجزای محدود و گلرکین، مشاهده می‌شود که در مقادیر مشخصی از بارگذاری، رفتار تیر ناپایدار می‌شود و تیر در آستانه ورود به ناحیه‌ی پادشهودی قرار می‌گیرد، به‌گونه‌ی که تغییر اندکی در میزان بارگذاری، سبب تغییرات بسیار زیادی در رفتار تیر و حرکت تیر از ناحیه‌ی شهودی به ناحیه‌ی پادشهودی می‌شود. با ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی، این ناپایداری‌های دو بار در آستانه‌ی ورود به ناحیه‌ی پادشهودی و دو بار در هنگام بازگشت به ناحیه‌ی مثبت مشاهده می‌شوند و چنان که مثلاً در شکل ۷ نشان داده شده، بارگذاری در هر کدام از محدوده‌های رفتار پادشهودی، منجر به بروز رفتار شبه‌تناوبی و با دامنه‌های کوچک در این نواحی می‌شود. علاوه بر این، بررسی‌های بیشتر نشان می‌دهد که بارگذاری در محدوده‌ی بین دو ناحیه‌ی پادشهودی منجر به بروز رفتاری مشابه در ناحیه‌ی شهودی می‌شود. به علاوه، نتایج به دست آمده در شکل ۸ نشان می‌دهد که پس از خروج از ناحیه‌ی پادشهودی دوم، تداوم روند افزایشی بار ضربه‌یی سبب می‌شود که تیر دارای رفتار ارتعاشاتی شبه‌تناوبی با دامنه‌ی کوچک در ناحیه‌ی مثبت باشد؛ افزایش بیشتر این بارگذاری، باعث تغییر رژیم ارتعاشاتی نمی‌شود و فقط به سبب اتلاف بیشتر انرژی (ناشی از افزایش کرنش خمیری اولیه) کاهش بیشتری در دامنه‌ی ارتعاشات پایدار به وجود می‌آید.

۳.۳. تعیین پهنای نواحی پادشهودی

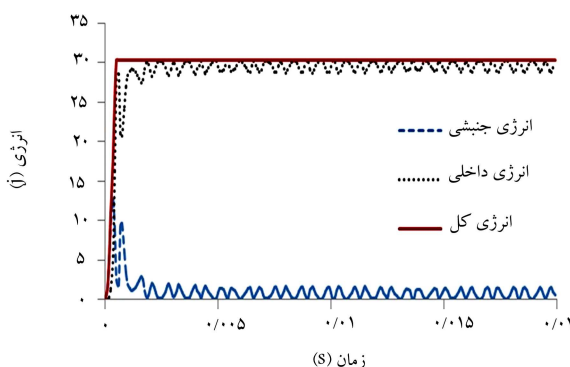
به‌منظور تعیین پهنای ناحیه‌ی پادشهودی تیر، می‌توان چگونگی وابستگی رفتار تیر به نیروی اولیه را بررسی کرد. بدین منظور می‌توان از منحنی‌های جابه‌جایی بر حسب زمان مرکز تیر در بارگذاری‌های مختلف استفاده کرد که برخی از آنها در بخش قبل نشان داده شده است. نتایج به دست آمده در روش اجزای محدود و روش گلرکین روی تیرهای کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است. در این شکل‌ها، منحنی الف نشان‌گر بیشینه خیز نقطه‌ی میانی، منحنی‌های ب و ج به ترتیب نشان‌گر منحنی‌های در برگیرنده مقادیر بیشینه و کمینه‌ی دامنه‌ی ارتعاشات پایدار، پس از خیز بیشینه است. با مشاهده‌ی این منحنی‌ها، چند ناحیه‌ی متمایز قابل تشخیص است. در مقادیر کوچک بارهای ضربه‌یی، تیر دارای حرکت ارتعاشاتی منظم و با دامنه‌ی ثابت حول موقعیت تعادل است که نشان‌گر رفتار کشسانی تیر است. در این حالت، منحنی‌های الف و ب بر یکدیگر منطبق‌اند. با افزایش مقدار بار ضربه‌یی، در اثر ظهور تغییر شکل‌های خمیری، رفتار تیر به صورت کشسانی - خمیری است اما کماکان ارتعاشات تیر حول موقعیت تعادل صورت می‌گیرد؛ به عبارت دیگر منحنی ب در بخش مثبت و منحنی ج در بخش منفی باقی می‌مانند. تداوم روند بارگذاری سبب می‌شود که به دلیل تغییر شکل خمیری بزرگ اولیه ایجاد شده در جهت بارگذاری، مقدار کمینه‌ی دامنه‌ی ارتعاشات پایدار، پس از خیز بیشینه مثبت شود و منحنی ج در بخش مثبت واقع شود. اما با ادامه‌ی روند بارگذاری مشاهده می‌شود که این رفتار به طریقی حیرت‌آور و آنی تغییر می‌کند، به گونه‌ی که مقادیر بیشینه و کمینه‌ی دامنه‌ی ارتعاشات پایدار، پس از خیز بیشینه سریعاً تغییر جهت داده و در خلاف جهت بارگذاری اولیه قرار می‌گیرند؛ به عبارت دیگر هر دو منحنی ب و ج دارای مقادیر منفی می‌شوند. این واکنش نشان‌گر بروز رفتار پادشهودی در بارگذاری ضربه‌یی تیر، و ناحیه‌ی مزبور نشان‌گر ناحیه‌ی وقوع رفتار پادشهودی تیر است. ادامه‌ی روند بارگذاری نشان می‌دهد که گذر از ناحیه‌ی مثبت به ناحیه‌ی پادشهودی و به عکس در دو بازه بارگذاری پیوسته و



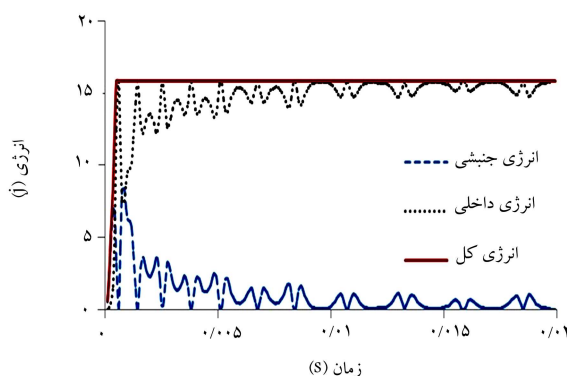
شکل ۱۳. منحنی تغییرات زمانی انرژی‌های تیرکشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 20380 \text{ N/m}$).



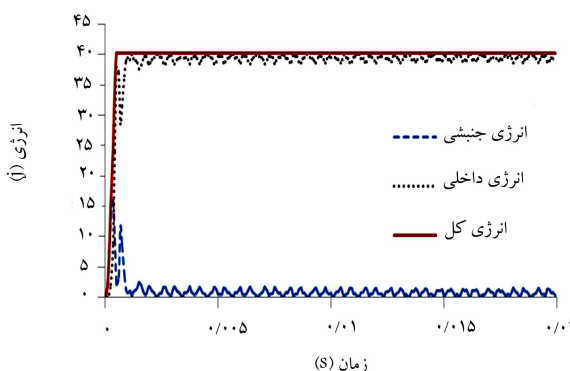
شکل ۱۱. منحنی تغییرات زمانی انرژی‌های تیرکشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 8000 \text{ N/m}$).



شکل ۱۴. منحنی تغییرات زمانی انرژی‌های تیرکشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 22000 \text{ N/m}$).



شکل ۱۲. منحنی تغییرات زمانی انرژی‌های تیرکشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 15000 \text{ N/m}$).



شکل ۱۵. منحنی تغییرات زمانی انرژی‌های تیرکشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، تحت نیروی ضربه‌یی گسترده ($P = 26000 \text{ N/m}$).

کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، در شکل‌های ۱۱ تا ۱۵ نشان داده شده است. با به کار بردن قانون بقای انرژی و صرف‌نظر کردن از اتلاف انرژی گرمایی، چنان که در این شکل‌ها نشان داده شده است، انرژی کل عمدتاً مشتمل بر انرژی داخلی و انرژی جنبشی است و بنابراین افزایش انرژی داخلی مساوی کاهش انرژی جنبشی است. با مراجعه به این شکل‌ها، حالت‌های مختلفی قابل تشخیص است. در این حالت، مقادیر انرژی جنبشی و انرژی داخلی به هم نزدیک‌اند (شکل ۱۱) و به عبارت دیگر انرژی جنبشی دائمی کافی برای تغییر شکل متناوب تیر وجود دارد و تیر، پس از اعمال بار ضربه‌یی، عمدتاً به صورت کشسانی ارتعاش می‌کند. بیشینه انرژی جنبشی پس از اعمال بار ضربه‌یی، فقط توانایی غلبه بر بخشی از انرژی داخلی متناظرش را دارد و سبب می‌شود که بخشی از تغییر شکل اولیه ایجاد شده در تیر جابه‌جا شود و بنابراین رفتار تیر به صورت کشسانی - خمیری است (شکل ۱۲). در این حالت، بسته به میزان تغییر شکل ایجاد شده در اثر بارگذاری ضربه‌یی اولیه، مقادیر بیشینه و کمینه ارتعاشات پایدار پس از خیز بیشینه ممکن است حول موقعیت تعادل در حال تغییر باشند یا هر دو در ناحیه هم‌جهت با بارگذاری اولیه قرار گیرند. در شکل ۱۳ منحنی‌های انرژی مربوط به پاسخ تیر در آستانه ورود به ناحیه پادشهودی نشان داده شده است. در این حالت، نسبت مقادیر بیشینه انرژی جنبشی پس از خیز بیشینه و انرژی داخلی متناظرش به گونه‌یی است که تیر در بازگشت، در یک وضعیت تعادل دینامیکی ناپایدار قرار می‌گیرد. این وضعیت تعادل دینامیکی ناپایدار روی نمودارهای انرژی بدین صورت آشکار شده است که در بخش ابتدای این نمودارها، علی‌رغم اینکه حجم انرژی‌های تبدیل شده جنبشی و پتانسیل

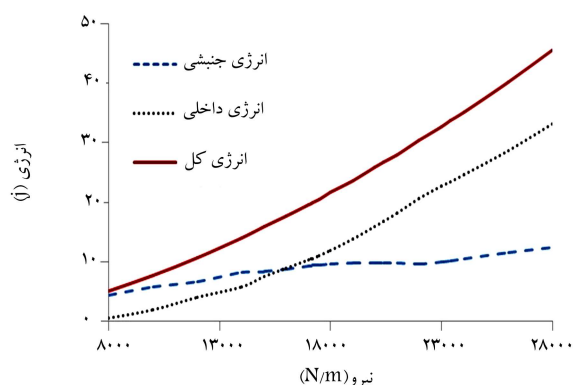
به کمترین مقدار خود می‌رسد اما فرکانس این تبدیل، به مقدار قابل توجهی افزایش می‌یابد. در این وضعیت، کوچک‌ترین تغییر در میزان بارگذاری ضربه‌یی سبب می‌شود که نسبت مقدار بیشینه انرژی جنبشی پس از خیز حداکثر و انرژی داخلی متناظرش به گونه‌یی تغییر یابد و نهایتاً باعث انتقال حرکت تیر به ناحیه خلاف جهت بارگذاری خواهد شد؛ و در نتیجه رفتار پادشهودی بروز خواهد کرد. بررسی‌های بیشتر نشان می‌دهد که این قبیل رفتارها، پس از گذر از ناحیه پادشهودی و در آستانه بارگشت به ناحیه شهودی نیز ظاهر خواهد شد. همچنین با توجه به نمودارهای انرژی شکل ۱۴ که مربوط به بارگذاری در ناحیه پادشهودی است، مشخص است که در این وضعیت، نسبت مقادیر انرژی‌های به گونه‌یی است که نهایتاً سبب خواهد

وسیله‌ی کد اجزای محدود ANSYS/LS-DYNA صورت گرفته و نتایج این دو روش با یکدیگر مقایسه شده است. به منظور ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی در روش گالرکین، از یک الگوریتم جدید استفاده شده است. و نیز برای بررسی صحت الگوریتم پیشنهادی، در ابتدا پاسخ‌های تیر کشسانی - خمیری کامل استخراج شده و سپس اثرات سخت‌شوندگی در پاسخ پادشهودی مطالعه شده است.

جزئیات منحنی‌های جابه‌جایی بر حسب زمان نقطه‌ی میانی تیر مورد مطالعه قرار گرفته و مشاهده شده است که پیرامون رفتار پادشهودی بی‌نظمی‌های بیشتری در ارتعاشات حرکت ظاهر می‌شود که این بی‌نظمی‌ها در ترکیب با ناپایداری‌های دینامیکی به وجود آمده در رفتار تیر، باعث انتقال حرکت تیر به ناحیه‌ی منفی می‌شوند. همچنین مشاهده می‌شود که پاسخ پادشهودی پدیده‌ی بسیار حساس به بارگذاری است به‌گونه‌ی که، تغییر بسیار اندکی در میزان بار ضربه‌ی سبب ظهور آن می‌شود. مقایسه‌ی نتایج به دست آمده در هر دو روش عددی نشان می‌دهد که در صورت ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی، در نواحی بیرون از ناحیه‌ی پادشهودی و در درون این نواحی، نتایج هر دو روش با دقت خوبی بر هم منطبق‌اند اما در نواحی گذر، اندکی واگرایی در پاسخ‌ها مشاهده می‌شود که نشان‌گر وابستگی پاسخ‌ها در این نواحی به روش عددی حل است.

یکی از مهم‌ترین اهداف این مقاله، تعیین ناحیه‌ی رخداد رفتار پادشهودی است. مقایسه‌ی نتایج نشان می‌دهد که روش گالرکین، همانند روش اجزای محدود، توانایی پیش‌بینی رفتار پادشهودی تیر کشسانی - خمیری تحت بار ضربه‌ی حتی با ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی را دارد. بر اساس نتایج حاصله، در صورت ملاحظه‌ی اثرات سخت‌شوندگی، دو ناحیه‌ی مجزا برای رخداد رفتار پادشهودی وجود دارد که ناحیه‌ی نخست در محدوده‌ی کوچک‌تری از بارهای ضربه‌ی رخ می‌دهد اما ناحیه‌ی بعدی، دارای پهنای باند وسیع‌تری است. علاوه بر این، اگرچه ورود به هر کدام از این نواحی پادشهودی و خروج از آنها در ابتدا توسط روش اجزای محدود و سپس با اندکی تأخیر نسبت به این روش، توسط روش گالرکین تعیین می‌شود، پهنای باندهای وقوع رفتار پادشهودی در روش گالرکین، اندکی بزرگ‌تر از مقادیر پیش‌بینی شده به وسیله‌ی روش اجزای محدود است.

بررسی‌های صورت گرفته با روش اجزای محدود روی نمودارهای انرژی تیر نشان می‌دهد که در آستانه‌ی ورود به ناحیه‌ی پادشهودی و همچنین پس از گذر از این ناحیه و در آستانه‌ی بازگشت به ناحیه‌ی شهودی، نسبت مقادیر بیشینه‌ی انرژی جنبشی پس از خیز بیشینه و انرژی داخلی متناظرش به گونه‌ی است که تیر در یک وضعیت تعادل دینامیکی ناپایدار قرار می‌گیرد. در این وضعیت، کوچک‌ترین تغییری در میزان بارگذاری ضربه‌ی سبب می‌شود که نسبت مقادیر انرژی‌های داخلی و جنبشی پس از خیز حداکثر به گونه‌ی تغییر یابد که نهایتاً باعث انتقال حرکت تیر به ناحیه‌ی پادشهودی یا بالعکس شود. در خاتمه، یادآور می‌شود از آن‌جا که این پدیده‌ی ناپایدار، منجر به بروز دشواری‌هایی در روش‌های عددی می‌شود و باعث تکرار ناپذیر بودن آزمایشات می‌شود لذا تحقیق حاضر ابزاری مفید برای کمک به محققین جهت کاوش بیشتر در مسائل مرتبط است.



شکل ۱۶. ارتباط بین بارگذاری ضربه‌ی و انرژی تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی.

شد که تیر در ناحیه‌ی پادشهودی دارای ارتعاشات کشسانی - خمیری باشد. در شکل ۱۵، که متناظر با بار ضربه‌ی اولیه بزرگ است، مقدار انرژی جنبشی پس از خیز بیشینه بسیار کوچک‌تر است از انرژی داخلی متناظرش، و در این وضعیت چون بخش عمده‌ی انرژی داخلی صرف تغییر شکل خمیری تیر شده است، لذا انرژی جنبشی کافی برای حرکت تیر و استقرار آن در خلاف جهت بار ضربه‌ی اولیه وجود ندارد و بنابراین در این حالت رفتار پادشهودی رخ نمی‌دهد. مطالعه‌ی نمودارهای انرژی نشان می‌دهد که در هنگام وقوع رفتار پادشهودی، نسبت انرژی‌های داخلی و جنبشی در محدوده مناسبی قرار دارد لیکن از آنجا که در نمودارهای نشان داده شده، مؤلفه‌های انرژی، تابعی از زمان هستند و تبدیل آنها از یک شکل به شکل دیگر، بسیار پیچیده است. در شکل ۱۶ نمودار تغییرات بیشینه‌ی انرژی جنبشی پس از خیز حداکثر و مقادیر متناظر انرژی داخلی و انرژی کل، نسبت به مقادیر بار ضربه‌ی برای تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، ترسیم شده است. چنان که در این شکل می‌توان مشاهده کرد، انرژی داخلی در برگرداندن بخش عمده‌ی انرژی کل است و تغییرات این انرژی با بار ضربه‌ی زیاد ولی تغییرات انرژی جنبشی با بار ضربه‌ی اندک است. با استفاده از نمودارهای شکل ۱۶ می‌توان دریافت که رفتار پادشهودی برای تیر کشسانی - خمیری با سخت‌شوندگی خطی، در حرکت‌هایی رخ خواهد داد که انرژی داخلی آنها تقریباً در دو محدوده‌ی ۱/۱۲ تا ۱/۲۳ و همچنین ۱/۶۷ تا ۲/۴۲ برابر انرژی جنبشی واقع شده باشد.

۴. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، با توسعه‌ی مدل عددی پیشنهادی گالرکین و با ارائه‌ی یک الگوریتم پیشنهادی جدید برای اولین بار به مطالعه‌ی اثرات سخت‌شوندگی در رفتار دینامیکی پادشهودی تیرهای کشسانی - خمیری بین‌دار تحت بار ضربه‌ی پرداخته شده است. برای انجام این مطالعه، علاوه بر استفاده از روش گالرکین، تحلیل‌های مشابهی نیز به

پانویس‌ها

1. intuitive
2. counterintuitive

3. anomalous
4. elastic recovery solution
5. Galerkin's method
6. load intensity
7. central difference method

8. linear kinematic hardening
9. Young's modulus
10. tangential modulus
11. constitutive equation
12. translated yield function
13. back stress
14. consistency condition
15. magnitude of the plastic strain rate
16. plastic strain rate
17. hardening law
18. plastic modulus
19. discrete
20. elastic predictor phase
21. plastic corrector phase
22. catching up

منابع (References)

1. Symonds, P. S. and Yu, T. X. "Counterintuitive behavior in a problem of elastic-plastic beam dynamics", *ASME Journal of Applied Mechanics*, **52**, pp. 517-522 (1985).
2. Li, Q. M. and Liu, Y. M. "Correlation between parameter sensitivity and counter-intuitive phenomenon of elastic-plastic beam dynamics", *Computers and Structures*, **84**, pp. 156-165 (2006).
3. Li, Q. M. and Liu, Y. M. "Uncertain dynamic response of a deterministic elastic-plastic beam", *International Journal of Impact Engineering*, **28**(6), pp. 643-651 (2003).
4. Li, Q. M., Liu, Y. M. and Ma, G.W. "The anomalous region of elastic-plastic beam dynamics", *International Journal of Impact Engineering*, **32**, pp. 1357-1369 (2006).
5. Symonds, P. S., Genna, F. and Ciullini, A. "Special cases in study of anomalous dynamic elastic-plastic response of beams by a simple model", *International Journal of Solids and Structures*, **27**(3), pp. 299-314 (1991).
6. Lepik, U. "Impulsively loaded fully fixed-ended elastic plastic beams by Galerkin's method", *International Journal of Impact Engineering*, **15**, pp. 17-23 (1994).
7. Lepik, U. "Dynamic response of elastic-plastic pin-ended beams by galerkin's method", *International Journal of solids and structures*, **31**, pp. 3249-3260 (1994).
8. Lepik, U. "Vibrations of elastic-plastic fully clamped beams and flat arches under impulsive loading", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **29**, pp. 613-623 (1994).
9. Li, Q. M., Dong, Q. and Zheng, J. Y. "Counter-intuitive breathing mode response of an elastic-plastic circular ring subjected to axisymmetric internal pressure pulse", *International Journal of Impact Engineering*, **3**, pp. 784-794 (2008).
10. Flores-Johnson, E. A., Li, Q. M. "A brief note on the counter-intuitive region of a square plate", *International Journal of Impact Engineering*, **38**(2-3), pp. 136, (2010).
11. Dong, Q., Li, Q. M. and Zheng, Y. J. "Further study on the counter-intuitive response of single-degree-of-freedom structures", *International Journal of Impact Engineering*, **38**(5), pp. 305-308 (2011).
12. Zhao, Y. G., Yan, X. P. and Yang, G. T. "Counterintuitive Dynamic Behavior in Elastic-Plastic Structures", *Advanced Material Research*, **428**, pp. 47-51 (2012).
13. Ma, J., Fan, F. and Zhi, X. "Counter-intuitive collapse of single-layer reticulated domes subject to interior blast loading", *Thin-Walled Structures*, **96**, pp. 130-138 (2015).
14. Zheng, C., Kong, X. S., Wu, W. G. and Liu, F. "The elastic-plastic dynamic response of stiffened plates under confined blast load", *International Journal of Impact Engineering*, **95**, pp. 141-153 (2016).
15. Li, Q. M., Zhao, L. M. and Yang, G. T. "Experimental results on the counter-intuitive behavior of thin clamped beams subjected to projectile impact", *International Journal of Impact Engineering*, **11**(3), pp. 341-348 (1991).
16. Li, H.W. and Qin, D. Q. "A study on the counter-intuitive behaviors of pin-ended beams under projectile impact", *Acta Mechanica Solida Sinica*, **19**, pp. 135-140 (2006).
17. Kolsky, H., Rush, P. and Symonds, P. S. "Some experimental observations of anomalous response of fully clamped beams", *International Journal of Impact Engineering*, **11**(4), pp. 445-56 (1991).
18. Shams Alizadeh, M., Heidari Shirazi, K., Moradi, S. and Mohammad Sedighi, H. "Numerical analysis of the counterintuitive dynamic behavior of the elastic-plastic fully-clamped beams under impulsive loading", *Mechanika Journal*, **23**(1), pp. 84-91 (2017).
19. Borja, R. I., *Plasticity: Modeling and Computation*, ISBN 978-3-642-38546-9, Springer, (2013).
20. Moreau, J. J. "Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space", *Journal of Differential Equations*, **26**, PP. 347-374 (1977).
21. ANSYS LS-DYNA User's Guide, Release 12.1, ANSYS Inc, Southpointe 275 Technology Drive, Canonsburg, PA 15317, November (2009).
22. Borino, G., Perego, U. and Symonds, P. S. "An energy approach to anomalous damped elastic-plastic response to short pulse loading", *ASME Journal of Applied Mechanics*, **56**, pp. 430-438 (1989).
23. Perego, U., Borino, G. and Symonds, P. S. "The Role of Damping in Anomalous Response to Short Pulse Loading", *Journal of Engineering Mechanics*, **115**(2), pp. 2782-2788 (1989).