

# بهینه‌سازی مسیر در بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر با درجات آزادی اضافی به وسیله‌ی جداسازی ارتعاش کشسانی

سید محمدرضا فریطوس (دانشجوی دکترا)

هادی همایی\* (استادیار)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شهرکرد

شهرام هادیان جزئی (استادیار)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۶)  
دوری ۲ - ۳، شماره ۲، ص. ۶۳-۷۳

mr\_faritus@yahoo.com

hadi-h@eng.sku.ac.ir

s.hadian@eng.ui.ac.ir

واژگان کلیدی: بهینه‌سازی مسیر، بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر، افزونگی.

## ۱. مقدمه

شدند. ایزلر و همکاران، برنامه‌ریزی مرتبه‌ی دوم بازگشتی<sup>۳</sup> را برای دست‌یابی به مسیری با زمان و خطای کمتر به‌کار گرفتند. اسپرینگر و همکاران با استفاده از نیروهای تعمیم‌یافته، ضمن احتراز از تشدید ارتعاش کشسانی، مسیر زمانی کمیته را تعیین کردند. ویلسون و همکاران، روش برنامه‌ریزی پویای گسسته را برای تعیین گشتاور فرمان در مسئله‌ی کنترل بهینه‌ی زمانی به‌کار گرفتند.<sup>[۵-۷]</sup> چویی و همکاران از روشی بر مبنای منیقولدهای متعادل دقیق در برنامه‌ریزی مسیر بهینه استفاده کردند.<sup>[۸]</sup> بهرامی و همکاران، کنترل بهینه‌ی ربات‌های فضایی انعطاف‌پذیر را با استفاده از روش باهم‌گذاری<sup>۴</sup> ارتقا دادند. آنها با استفاده از این روش، مسئله‌ی کنترل بهینه را به برنامه‌ریزی غیرخطی استاندارد تبدیل کردند و موفق شدند در حرکت نقطه‌به‌نقطه به کمترین زمان حرکت و گشتاور مفاصل<sup>۵</sup> دست‌یابند.<sup>[۹]</sup> کورایم و همکاران از روش برنامه‌ریزی پویا در تعیین مسیر بهینه‌ی بازوهای مکانیکی صلب استفاده کردند. آنها سرعت همگرایی<sup>۶</sup> را با استفاده از روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی مرتبه دوم ترتیبی افزایش دادند و روش خود را در حرکت نقطه‌به‌نقطه و حرکت در مسیر مشخص توسعه دادند.<sup>[۱۰]</sup>

وو و همکاران برنامه‌ریزی مسیر بهینه را در ربات‌های فضایی انعطاف‌پذیر با کمک منحنی‌های مرتبه چهار انجام دادند.<sup>[۱۱]</sup> پژوهشگران دیگر<sup>[۱۲-۱۴]</sup> الگوریتم‌های تکاملی مانند الگوریتم ژنتیک، رقابت امپریالیستی<sup>۷</sup> و یادگیری لانه زنبور<sup>۸</sup> را در

یکی از راه‌های کاهش مصرف انرژی در ربات استفاده از رابط‌های سبک انعطاف‌پذیر است. از مزایای مهم ربات‌های انعطاف‌پذیر می‌توان به مانور مناسب و قابلیت سازگاری با تغییر شرایط اشاره کرد.<sup>[۱۵]</sup> در این شرایط کنترل نقطه‌ی انتهایی به‌علت لرزش اعضای انعطاف‌پذیر توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است. کاهش قابلیت رفتن به محل تعیین‌شده<sup>۱</sup> و پیچیدگی در مدل‌سازی اعضای انعطاف‌پذیر از جمله مشکلات چنین سیستم‌هایی است. یکی از روش‌های مناسب برای کاهش ارتعاشات اجزای انعطاف‌پذیر، استفاده از درجه‌ی آزادی اضافی<sup>۲</sup> در ربات است. از دیگر مزایای این روش می‌توان به آزادی عمل ربات در مواجهه با موانع، حرکت هموار، و احتراز از شتاب‌های مخرب اشاره کرد.<sup>[۳]</sup> در این شرایط، وظیفه‌ی محوله به ربات می‌تواند در مسیرهای مختلفی در فضای مفاصل احراز شود که مسیر بهینه بر اساس اهداف طراح انتخاب می‌شود.

شوگلا و همکاران از حساب تغییرات در طراحی مسیر بهینه‌ی بازوهای مکانیکی افزونه در فضاهای کاری مقید استفاده کردند. آنها با شرایط مرزی اصلاح‌شده در پایانه‌های مسیر، نقطه‌ی آغاز حرکت و مختصات بهینه را به دست آوردند.<sup>[۴]</sup> پژوهشگران دیگر<sup>[۷-۵]</sup> بر روی برنامه‌ریزی مسیر بهینه‌ی زمانی در ربات‌های انعطاف‌پذیر متمرکز

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۲/۱۱، اصلاحیه ۱۳۹۵/۴/۲۶، پذیرش ۱۳۹۵/۵/۵.

بهینه‌سازی مسیر ربات‌ها به‌کار گرفتند. مقالات [۱۶، ۱۵] روش‌های غیر مستقیم و برنامه‌ریزی غیرخطی ترتیبی را در برنامه‌ریزی مسیر بهینه‌ی ربات‌های انعطاف‌پذیر با پایه‌ی متحرک توسعه دادند. در کارهای برخی پژوهشگران [۱۸، ۱۷] از اصل کمینگی پونتریاگین<sup>۹</sup> برای برنامه‌ریزی مسیر ربات‌های انعطاف‌پذیر استفاده شده است. حیدری و همکاران بر روی حرکت سکون به سکون<sup>۱۰</sup> بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر متمرکز شدند و الماسی و همکاران حرکت ربات با پایه‌ی متحرک را بررسی کردند. [۱۸، ۱۷]

در تحقیقاتی که بر روی بهینه‌سازی مسیر بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر انجام شده حرکت ارتعاشی پنجه و حرکت صلب ربات به‌صورت یک حرکت واحد در نظر گرفته شده است که گاهی با وجود پایین‌بودن خطای مسیر، دستگاه با لرزش همراه می‌شود. همچنین بیشتر پژوهش‌ها و روش‌های ارائه شده به‌طور خاص در حرکت نقطه‌به‌نقطه یا حرکت در مسیر مشخص قابل استفاده‌اند. در این تحقیق روش جدیدی بر اساس جداسازی حرکت ارتعاشی اجزای انعطاف‌پذیر و حرکت صلب ربات ارائه می‌شود. با این روش، ضمن برآورده‌شدن وظایف محوله به بازوی مکانیکی ماهر، کمینه‌کردن ارتعاش به‌عنوان یکی از اولویت‌های اصلی کنترل در نظر گرفته می‌شود. این روش ابتدا برای حرکت نقطه‌به‌نقطه و سپس برای حرکت در مسیر مشخص فرمول‌بندی و توسعه خواهد یافت. با توجه به جمله‌های متعدد غیرخطی حاصل از انعطاف‌پذیری و همچنین پیچیدگی‌های مسائل بهینه‌سازی، اصل کمینگی پونتریاگین برای تبدیل مسئله‌ی بهینه‌سازی به مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌یی انتخاب شده است.

در بخش ۲ به تفصیل، روش‌های به‌کار رفته در این نوشتار شرح داده خواهد شد. در بخش ۳ با استفاده از انرژی سیستم، معادلات لاگرانژ و روش مودهای فرضی، معادلات دینامیکی حرکت بازوی مکانیکی انعطاف‌پذیر استخراج می‌شود. در بخش ۴ فرمول‌بندی مسئله‌ی بهینه‌سازی در حرکت نقطه‌به‌نقطه انجام شده است؛ سپس شکل استاندارد معادلات مشخص شده است. در بخش ۵ معادلات بهینه‌سازی بر اساس اصل کمینگی پونتریاگین حل شده و شرایط مرزی مسئله مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در بخش ۶ به فرمول‌بندی مسئله‌ی بهینه‌سازی برای حرکت در مسیر مشخص پرداخته شده است. بخش ۷ شبیه‌سازی برای بازوی مکانیکی با سه رابط و در دو مثال انجام شده است. بخش ۸ نیز به نتیجه‌گیری اختصاص داده شده است.

## ۲. روش

در طراحی بازوهای مکانیکی با درجات آزادی اضافی می‌توان ضمن انجام کارهای محوله، اهدافی مثل کاهش مصرف انرژی و کمینه‌کردن ارتعاشات پنجه را در نظر گرفت. در این پژوهش، ابتدا همه‌ی جواب‌های ممکن بر اساس شرایط صلب و افزونگی ربات استخراج می‌شود. سپس با استفاده از روش کنترل بهینه‌ی حلقه باز، مسیری که در آن تابع هدف فراگیر کمینه شود، به‌دست می‌آید. تکنیک حلقه باز به‌دلیل طبیعت برون‌خط<sup>۱۱</sup> بودن، توانایی حل سیستم ربات انعطاف‌پذیر افزونه را که دارای غیرخطی‌های زیاد و درجات آزادی بالایی است، دارد. [۱۹] تابع هدف بسته به شرایط حرکت نقطه‌به‌نقطه یا حرکت در مسیر مشخص، متفاوت خواهد بود. در هر حالت با انتخاب مناسب بردار حالت سیستم و سیگنال کنترل، تابع هدف و قیدها به شکل استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی تبدیل می‌شوند. ابتدا این روش برای حرکت نقطه‌به‌نقطه ارائه می‌شود و در ادامه برای حرکت روی مسیر مشخص نیز بیان خواهد شد.

برای استخراج معادلات دینامیکی به‌عنوان قیدهای مسئله‌ی بهینه‌سازی، به

مدل‌سازی ریاضی ربات نیاز است. ربات‌های انعطاف‌پذیر، سیستم‌های دینامیکی پیوسته با درجات آزادی نامحدود هستند. المان محدود، مودهای فرضی<sup>۱۲</sup>، و پارامتر توده‌یی<sup>۱۳</sup> از جمله روش‌های معمول برای گسسته‌سازی چنین سیستم‌هایی هستند. در روش مودهای فرضی، انعطاف‌پذیری به‌وسیله‌ی سری‌های مودال در عباراتی از توابع ویژه و توابع مودی متغیر زمانی بیان می‌شود. در این پژوهش از روش مودهای فرضی برای گسسته‌سازی و روش غیرمستقیم در حل مسئله‌ی بهینه‌سازی فراگیر استفاده شده است. [۲۰] با محاسبه‌ی انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم و با به‌کارگیری روش مودهای فرضی و فرمول‌بندی لاگرانژ، معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم به دست می‌آید.

حال به روش‌های استفاده‌شده در قسمت بهینه‌سازی پرداخته می‌شود. بهینه‌سازی به دو صورت محلی و فراگیر انجام می‌گیرد. بهینه‌سازی محلی در مقایسه با بهینه‌سازی فراگیر، پیچیدگی کمتری دارد و به زمان محاسبات کمتری نیز نیاز دارد. در روش‌های بهینه‌سازی محلی از اطلاعات لحظه‌یی ربات استفاده می‌شود. طراحی مسیر بهینه‌ی ربات با کمینه‌کردن محلی یک سری از توابع ارزش خاص انجام می‌شود که نتیجه‌ی آن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه است. [۲۱] روش‌های بهینه‌سازی فراگیر دقیق‌اند و در آن از اطلاعات وضعیت سیستم در کل مسیر استفاده می‌شود. به‌همین منظور و برای اعمال محدودیت به سیستم، یک شاخص به فرم انتگرالی تعریف می‌شود و هم‌زمان با حل معادلات سینماتیکی، جوابی که شاخص معرفی شده را حداقل کند از میان پاسخ‌های قابل قبول انتخاب می‌شود. [۲۲] در این پژوهش از بهینه‌سازی فراگیر استفاده شده است.

برای حل مسائل بهینه‌سازی می‌توان از روش‌های مستقیم یا غیرمستقیم استفاده کرد. در روش‌های مستقیم یا پارامتری، مسیر بهینه به‌صورت ترکیبی از توابع معلوم با ضرایب مجهول تخمین زده می‌شود. [۲۳] مهم‌ترین مزیت استفاده از این روش، تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل به دستگاه معادلات جبری است. از این‌رو، نیازی به حل مسائل شرط مرزی نیست. روش‌های مستقیم دقیق نیستند و برای سیستم‌هایی با پارامترهای زیاد، زمان‌گیر هستند و کارایی لازم را ندارند. [۲۴] در روش‌های غیرمستقیم، شرایطی که مسیر بهینه باید برآورده کند، از اصل کمینگی پونتریاگین با برنامه‌ریزی پویای بلمن<sup>۱۴</sup> به‌دست می‌آید. در نهایت با استفاده از حساب تغییرات، مسئله‌ی بهینه‌سازی به یک مسئله‌ی مقدار مرزی<sup>۱۵</sup> تبدیل می‌شود. در مواردی که اهداف مختلفی مورد نظر باشد یا اینکه درجه‌ی آزادی سیستم زیاد باشد، روش غیرمستقیم می‌تواند انتخاب مناسبی باشد. [۲۵] از معایب مهم روش غیرمستقیم می‌توان به احتمال عدم همگرایی اشاره کرد. مهم‌ترین روش‌های غیرمستقیم، معادله‌ی همیلتون - ژاکوبی - بلمن و اصل کمینگی پونتریاگین هستند که هر دو از حساب تغییرات برای تبدیل مسئله‌ی بهینه‌سازی به دستگاه معادلات دیفرانسیلی استفاده می‌کنند. اصل کمینگی پونتریاگین در مقایسه با دیگر روش‌ها نیازی به خطی‌سازی معادلات، دیفرانسیل‌گیری از پارامترهای مفاصل، و استفاده از چند جمله‌یی‌ها ندارد. [۱۵] در این نوشتار به علت حضور معادلات غیرخطی و پارامترهای زیاد، از اصل کمینگی پونتریاگین استفاده شده است.

## ۳. معادلات دینامیک سیستم

شکل ۱ رباتی با  $N$  رابط که رابط انتهایی آن انعطاف‌پذیر است، نشان می‌دهد.  $M_i$ ،  $T_i$  و  $\theta_i$  به‌ترتیب هاب، گشتاور هاب، و زاویه‌ی نسبی مفصل بازوی  $i$ ام هستند.  $XOY$  چهارچوب مختصات اینرسیال و  $x_i, y_i, z_i$  چهارچوب مختصات متحرک است که مرکز آن هاب رابط  $i$ ام است.

روش لاگرانژ به دست می آید:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \tau_i; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

که  $\mathcal{L} = T - P$  لاگرانژین است و  $\theta_i$  و  $\phi_j$  مختصات تعمیم یافته اند. با محاسبه مشتق لاگرانژین نسبت به مختصات تعمیم یافته و جایگذاری در روابط ۴ و ۵، معادلات حرکت استخراج می شوند. با مرتب کردن معادلات در شکل ماتریسی، معادلات دینامیکی بازوی مکانیکی انعطاف پذیر به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{bmatrix} B_{\theta\theta}(\theta, \phi) & B_{\theta\phi}(\theta, \phi) \\ B_{\theta\phi}^T(\theta, \phi) & B_{\phi\phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{\theta}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \\ h_{\phi}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

علامت  $T$  در اندیس بالا، نشانه‌ی ماتریس ترانزاده است. ابعاد به صورت  $B_{\theta\theta} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ،  $B_{\theta\phi} \in \mathbb{R}^{N \times M}$ ،  $B_{\phi\phi} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ ،  $h_{\theta} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  و  $h_{\phi} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  است.  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  به ترتیب بردارهای زاویه، سرعت و شتاب مفاصل هستند و  $\tau \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  بردار گشتاور موتورهاست.

#### ۴. فرمول بندی بهینه سازی در حرکت نقطه به نقطه

حرکت ربات به دو صورت نقطه به نقطه یا حرکت بر روی مسیر مشخص انجام می شود. در این بخش حرکت نقطه به نقطه یا حرکت بین دو نقطه مورد نظر است. معادلات دینامیکی حاکم در رابطه ۶ قیده‌های سیستم در این نوع حرکت را تشکیل می دهند. به علت وجود درجه آزادی اضافی در ربات انعطاف پذیر افزونه می توان، ضمن حرکت، شاخص مناسبی تعریف و در طول حرکت کمینه کرد. در این تحقیق راهبرد و روش جداسازی حرکت ارتعاشی اجزای انعطاف پذیر را در نظر می گیریم. در واقع با در نظر گرفتن حرکت صلب ربات و کمینه کردن ارتعاش، به عنوان یکی از اولویت های اصلی، به دنبال دستیابی به اهداف مورد نظر خواهیم بود. در روش پیشنهادی، همه‌ی جواب های ممکن بر اساس شرایط صلب و افزونگی ربات به دست خواهند آمد. مسیر بهینه با کمینه کردن یک تابع هدف به طور فراگیر و با در نظر گرفتن قیده‌های دینامیکی سیستم به دست می آید. تابع هدف  $J$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \tau) dt \quad (7)$$

با بازنویسی رابطه ۶ قیده‌های دینامیکی سیستم به صورت زیر به دست می آید:

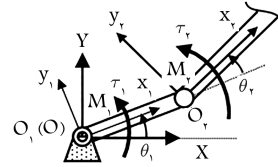
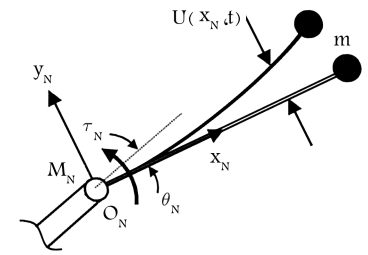
$$B_{\theta\theta}(\theta, \phi) \ddot{\theta} + B_{\theta\phi}(\theta, \phi) \ddot{\phi} + h_{\theta}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \tau \quad (8)$$

$$B_{\theta\phi}^T(\theta, \phi) \ddot{\theta} + B_{\phi\phi}(\theta, \phi) \ddot{\phi} + h_{\phi}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = 0 \quad (9)$$

همچنین قید نامساوی برای محدود کردن گشتاور مفاصل اعمال می شود:

$$\tau_i^- < \tau_i < \tau_i^+ \quad (10)$$

قید نامساوی می تواند با در نظر گرفتن جملاتی از مجذور گشتاورها در تابع هدف (و با تنظیم ضرایب جریمه) محقق شود. برای تبدیل روابط ۷ تا ۹ به فرم استاندارد



شکل ۱. بازوی مکانیکی انعطاف پذیر.

تیر انعطاف پذیر به صورت تیر اولر - برنولی در نظر گرفته شده است؛ به این معنی که از تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی صرف نظر شده است. به دلیل وجود انعطاف پذیری، ابعاد سیستم نامحدود است. در این تحقیق از روش مودهای فرضی برای گسسته سازی و تخمین تغییر شکل کشسانی تیر انعطاف پذیر استفاده می شود. تغییر شکل خمشی بازوی انعطاف پذیر ترکیب خطی حاصل ضرب توابع مودی و توابع زمانی است:

$$U(x_N, t) = \sum_{j=1}^M \psi_j(x_N) \phi_j(t) \quad (1)$$

$x_N$  نقطه‌ی دلخواه بر روی بازوی انعطاف پذیر است.  $\psi_j$  توابع مودی،  $\phi_j$  توابع تعمیم یافته وابسته - زمانی و  $M$  تعداد مودها است. طریقه‌ی محاسبه‌ی توابع مودی و بسامدهای طبیعی تیر انعطاف پذیر بیان شده است.<sup>[۲۶]</sup> انرژی جنبشی بازوی مکانیکی، برابر با مجموع انرژی جنبشی رابط‌ها، موتورها، و بار است. بنابراین:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \rho_i A_i (\dot{\mathbf{R}}_i)^T \dot{\mathbf{R}}_i dx_i + \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{R}}_m)^T \dot{\mathbf{R}}_m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_{M,i} (\dot{\mathbf{R}}_{M,i})^T \dot{\mathbf{R}}_{M,i} + I_{M,i} \omega_{M,i}^2) \quad (2)$$

$\mathbf{R}_{M,i}$  و  $\omega_{M,i}$  به ترتیب بردارهای مکان و سرعت زاویه‌ی مرکز موتورهای مفصل بازوی  $i$ ام و  $m_{M,i}$  و  $I_{M,i}$  جرم و ممان اینرسی آنها هستند. همچنین بردار مکان بار و  $\mathbf{R}_i$  بردار مکان نقطه‌ی عمومی روی رابط انعطاف پذیر  $\rho_i$  و  $A_i$  به ترتیب چگالی و سطح مقطع بازوی  $i$ ام هستند. انرژی پتانسیل بازوی مکانیکی از مجموع انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی حاصل از تغییر شکل کشسانی در بازوی انعطاف پذیر حاصل می شود. انرژی پتانسیل به صورت زیر به دست می آید:

$$P_N = \frac{1}{2} E_N I_N \int_0^{L_N} \left[ \frac{\partial^2 U(S, t)}{\partial S^2} \right]^2 dS + \sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \rho_i A_i Y_i g dx_i \quad (3)$$

که  $E_N$  و  $I_N$  به ترتیب ضریب سختی و ممان اینرسی بازوی انعطاف پذیر و  $g$  شتاب نقل است. با جایگذاری رابطه ۱ در رابطه ۳ انرژی پتانسیل محاسبه می شود. کار مجازی گشتاور  $\tau_i$  برابر است با  $\delta W_i = \tau_i \delta \theta_i$ . معادلات حرکت با استفاده از

مسائل بهینه‌سازی، باید این معادلات به شکل زیر نوشته شوند:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} g(\mathbf{X}, \mathbf{u}) dt \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \mathbf{u}, t) \quad (12)$$

برای انجام این کار، بردار حالت  $\mathbf{X}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \theta^T & \phi^T & (\dot{\theta})^T & (\dot{\phi})^T \end{bmatrix} \quad (13)$$

ابعاد بردار ستونی رابطه‌ی ۱۳ برابر با  $p = 2(M + N)$  است. بردار  $\mathbf{u}$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{u} = \dot{\theta} \quad (14)$$

با استفاده از روابط ۹ و ۱۴،  $\ddot{\phi}$  را به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\ddot{\phi} = -B_{\phi\phi}^{-1} (B_{\theta\phi}^T \mathbf{u} + \mathbf{h}_{\phi}) = \mathbf{Q}_1(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \quad (15)$$

مقدار  $\dot{\mathbf{X}}$  از روابط ۱۳ تا ۱۵ به دست می‌آید:

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{Q}_1(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = f(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \quad (16)$$

همچنین مقدار  $\tau$  با استفاده از رابطه‌های ۸ و ۱۵ به صورت تابعی از  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{X}$  به دست می‌آید:

$$\tau = B_{\theta\theta} \mathbf{u} - B_{\theta\phi} B_{\phi\phi}^{-1} (B_{\theta\phi}^T \mathbf{u} + \mathbf{h}_{\phi}) + \mathbf{h}_{\theta} = \mathbf{Q}_2(\mathbf{X}, \mathbf{u}) \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۳ و ۱۷ در انتگرالده رابطه‌ی ۷ خواهیم داشت:

$$g(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \tau) = g(\mathbf{X}, \mathbf{Q}_2(\mathbf{X}, \mathbf{u})) \quad (18)$$

در نتیجه روابط ۷ تا ۹ به فرم استاندارد روابط ۱۱ و ۱۲ تبدیل شده‌اند.

## ۵. روش حل و شرایط مرزی مسئله

به دلیل حضور تعداد پارامترهای زیاد در معادلات حرکت و بالا رفتن درجه‌ی آزادی سیستم، از روش غیرمستقیم برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی استفاده شده است. مزیت اصلی این روش در جواب‌های نسبتاً دقیق آن است. معادله‌ی همیلتون - ژاکوبی - بلمن و اصل کمینگی پونتریاگین دو روش شناخته‌شده در روش‌های غیرمستقیم هستند. اصول هر دو روش بر اساس اصول حساب تغییرات است. در روش کمینگی پونتریاگین، مسئله‌ی بهینه‌سازی به مجموعه‌ی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و در نهایت به یک مسئله‌ی مقدار مرزی دو نقطه‌ی تبدیل می‌شود. این روش در مقایسه با دیگر روش‌های کنترل بهینه‌ی حلقه باز به خطی‌سازی معادلات، دیفرانسیل‌گیری نسبت به پارامترهای مفاصل، و استفاده از چند جمله‌ی به‌عنوان فرم حل نیازی ندارد.

اصل کمینگی پونتریاگین بیان می‌کند که اگر قانون کنترلی بهینه‌ی  $\mathbf{u}^*$  که در سیستم دینامیکی رابطه‌ی ۶ صدق می‌کند، بخواهد شرایط کنترل بهینه‌ی روابط ۱۱

و ۱۲ را برآورده کند باید معادلات همیلتون را در نقاط بهینه ارضا کند. با توجه به این اصل خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} |_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda^*} = 0 \quad (19)$$

$$+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} |_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda^*} = \dot{\mathbf{X}}^* \quad (20)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{X}} |_{\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \lambda^*} = \dot{\lambda}^* \quad (21)$$

که  $\lambda \in \mathbb{R}^N$  بردار متغیرهای شبه حالت است. همیلتونین  $\mathcal{H}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{H} = g + \lambda^T f \quad (22)$$

برای حل، مؤلفه‌های بردار  $\mathbf{u}$  از رابطه‌ی ۱۹ استخراج شده و در روابط ۲۰ و ۲۱ جایگذاری می‌شود. با انجام این کار  $2p$  متغیر باقی می‌ماند که به همین تعداد شرط مرزی نیاز است. از حساب تغییرات، شروط مرزی به صورت زیر به دست می‌آید: [۲۷]

$$\lambda^T \delta \mathbf{X} = 0 \quad \text{in } t = t_s, t_f \quad (23)$$

رابطه‌ی ۲۳ شرایط مرزی را در نقاط ابتدایی  $t_s$  و انتهای  $t_f$  بیان می‌کند. اگر  $Z$  ابعاد فضای کاری پنجه‌ی ربات باشد، افزونگی درجات آزادی ربات  $r = N - Z$  خواهد بود. با توجه به اینکه موقعیت و سرعت پنجه‌ی بازوی مکانیکی در لحظه‌ی اول و آخر مشخص است و نظر به افزونگی  $r$ ، شرایط در نقاط ابتدایی و انتهای هر یک  $2Z$  شرط مرزی را تأمین خواهند کرد. با توجه به رابطه‌ی ۲۳، در زمان‌های  $t_s$  و  $t_f$ ، بردار  $\lambda$  باید بر مجموعه‌ی معادلات قید عمود باشد. پس بردار  $\lambda$  باید در فضای سطری ماتریس ژاکوبین باشد؛ بنابراین، قرار گرفتن بردار  $\lambda$  در فضای ستونی ماتریس ژاکوبین  $\zeta^T$  معادل است با حضور این بردار در فضای بوج ماتریس  $(\zeta^T)^{\#} - I_N$  که با استفاده از جبرخطی و معادله‌ی زیر به دست می‌آید: [۲۸]

$$[I_N - \zeta^{\#} \zeta] \lambda = 0 \quad \text{in } t = t_s, t_f \quad (24)$$

که  $I_N$  ماتریس قطری واحد مرتبه  $N$  و  $\zeta^{\#}$  ماتریس شبه ژاکوبین است. ژاکوبین  $\zeta \in \mathbb{R}^{Z \times N}$  را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\zeta_{ij} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \theta_j} \quad (25)$$

$\sigma$  تابعی برداری است که موقعیت مکانی پنجه‌ی ربات را برحسب فضای مفاصل بازوی مکانیکی مشخص می‌کند و  $\zeta_{ij}$  آرایه‌های ماتریس ژاکوبین هستند. رابطه‌ی ۲۴ دارای  $2Z - p$  شرط مرزی در هر یک از دو انتهاست؛ در نتیجه، در مجموع  $2p$  شرط مرزی وجود دارد که برای حل معادلات کافی است.

## ۶. فرمول‌بندی بهینه‌سازی در حرکت بر روی مسیر

### مشخص

برای تکمیل بحث، شرایطی را در نظر می‌گیریم که پنجه‌ی بازوی مکانیکی بین دو نقطه و در مسیر مشخصی بین آنها حرکت کند. در این حالت فضای بهینه‌ی مفاصل با حضور قید سینماتیکی تغییر خواهد کرد. در اینجا نیز در میان پاسخ‌هایی که برای حرکت صلب ربات به علت درجات آزادی اضافی در حرکت روی مسیر

جدول ۱. مشخصات جرم و ابعاد بازوی مکانیکی نمونه.

کمیت	واحد	بازوها	
		اول	دوم
طول	میلی متر	۳۰۰	۳۰۰
عرض	میلی متر	۱۰	۱۰
ضخامت	میلی متر	۱۵	۲/۵
جرم	گرم	۱۲۲	۱۰۸

پس ابعاد فضای کاری پنجه در فضای دوبعدی خواهد بود. جدول ۱ مشخصات هندسی و جرم بازوها را نشان می‌دهد. سطح مقطع بازوها مستطیلی و جنس آنها از آلومینیوم است. چگالی، مدول یانگ، جرم، و ممان اینرسی موتورهای محرک مفصل‌ها به ترتیب ۲۷۱۰ کیلوگرم بر مترمکعب، ۷۱ گیگا پاسکال، ۰٫۲ کیلوگرم و ۰٫۲ کیلوگرم - مترمربع و جرم بار، ۲۵۰ گرم است. بسامد طبیعی اول ۶٫۲۷ هرتز و بسامد طبیعی دوم ۹۱٫۲۳ هرتز است. در ادامه به بررسی دو مثال یکی برای حرکت نقطه به نقطه و دیگری حرکت در مسیر مشخص بین دو نقطه‌ی ثابت، می‌پردازیم.

### ۱.۷. مثال ۱

در مثال اول حرکت پنجه‌ی بازوی مکانیکی را در حرکت نقطه به نقطه ارزیابی می‌کنیم. نقاط شروع و پایان حرکت به ترتیب  $(۱٫۴, ۰)$  و  $(۱٫۲۷, ۰٫۹۵)$  هستند. درجه‌ی آزادی بدون در نظر گرفتن انعطاف پذیری  $N = ۳$  است. بنابراین،  $r = ۱$  درجه آزادی اضافی در سیستم وجود دارد. با لحاظ کردن دو مود ارتعاشی، بردارهای حالت و شبه حالت به صورت زیر خواهند بود:

$$\mathbf{X} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \phi_1 \ \phi_2 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_3 \ \dot{\phi}_1 \ \dot{\phi}_2] \quad (۳۴)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_{10}] \quad (۳۵)$$

بردار  $\mathbf{u}$  با توجه به افزونگی  $r$  از رابطه‌ی ۱۴ به دست می‌آید:

$$u_i = \dot{\theta}_i, \quad i = ۱, ۲, ۳ \quad (۳۶)$$

قید نامساوی را برای گشتاور به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$-۰٫۰۶ < \tau_i < ۰٫۰۶, \quad i = ۱, ۲, ۳ \quad (۳۷)$$

که با توجه به رابطه‌های ۱۰ و ۳۷،  $\tau_i^+ = ۰٫۰۰۶$  و  $\tau_i^- = -۰٫۰۶$  خواهند بود. در موارد کاربردی، عبور سرعت از مقادیر حدی باعث آسیب رسیدن به دستگاه می‌شود. در این شرایط سرعت مفاصل در ربات نمی‌توانند از مقادیر مجاز بالاتر بروند؛ بنابراین، این سرعت‌ها کران‌دار خواهند بود. قیدها را برای سرعت زاویه‌ی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$-۰٫۵ < \dot{\theta}_i < ۰٫۵, \quad i = ۱, ۲, ۳ \quad (۳۸)$$

با توجه به محدودیت سرعت مفاصل و گشتاورها، این عوامل تعیین‌کننده هستند و باید در تابع هدف لحاظ شوند. تابع هدف را تابعی از مربعات سرعت مفاصل، تغییر شکل کشسانی پنجه، و مصرف انرژی در عملگرها در نظر می‌گیریم:

$$g = w_\phi U_{\tau}^2 + \sum_{i=1}^3 w_{\tau_i} \tau_i^2 + \sum_{i=1}^3 w_{v_i} (\dot{\theta}_i)^2 \quad (۳۹)$$

مشخص وجود دارد، به دنبال پاسخی هستیم که ارتعاشات سیستم را حداقل کند. قید سینماتیکی مسئله با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\sigma}_d(t) \quad (۲۶)$$

در این رابطه،  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta})$  بردار موقعیت پنجه‌ی بازوی مکانیکی و  $\boldsymbol{\sigma}_d$  بردار مسیر مطلوب و تابعی از زمان است. رابطه‌ی ۲۶ یک معادله‌ی جبری غیرخطی است. به دلیل افزونگی درجه‌ی آزادی، جواب‌های بی‌شماری در فضای زوایای مفاصل وجود دارند که در رابطه‌ی ۲۶ صدق می‌کنند. همچنین، فرض حرکت صلب ربات در رابطه‌ی ۲۶، هنگام استفاده از بردار سرعت به جای مختصات تعمیم‌یافته، اعمال شده است. برای تبدیل معادلات به فرم استاندارد از رابطه‌ی ۲۶ مشتق می‌گیریم:

$$\zeta(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_d(t) \quad (۲۷)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_d(t) = \begin{bmatrix} \dot{X}_d(t) \\ \dot{Y}_d(t) \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

در رابطه‌ی ۲۸،  $X_d$  و  $Y_d$  مؤلفه‌های بردار مسیر مطلوب در چهارچوب  $XOY$  هستند. ژاکوبین  $\zeta(\boldsymbol{\theta})$  نیز از رابطه‌ی ۲۵ به دست می‌آید. فضای پوچ  $\zeta$  پیکربندی‌های مختلفی از ربات را شامل می‌شود که به وضعیتی مشخص از پنجه منجر می‌شوند. با استفاده از این خاصیت می‌توان از بین حالت‌های مختلف، وضعیتی که یک مشخصه از سیستم را بهینه کند، انتخاب کرد. در این حالت تابع معیار رابطه‌ی ۷، قیدهای دینامیکی روابط ۸ و ۹، قید نامساوی رابطه ۱۰ به علاوه قید سینماتیکی رابطه‌ی ۲۶ مسئله کنترل بهینه را تشکیل می‌دهند. برای تبدیل آنها به معادلات فرم استاندارد ۱۱ و ۱۲، از رابطه‌ی ۲۷ مشتق می‌گیریم.

$$\zeta(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d(t) - \dot{\zeta}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (۲۹)$$

بردار  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{V}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{u} = [\ddot{\theta}_1 \ \ddot{\theta}_2 \ \dots \ \ddot{\theta}_r]^T \quad (۳۰)$$

$$\mathbf{V} = [\ddot{\theta}_{r+1} \ \ddot{\theta}_{r+2} \ \dots \ \ddot{\theta}_N]^T \quad (۳۱)$$

رابطه‌ی ۲۹ را با روابط ۳۰ و ۳۱ بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d(t) - \dot{\zeta}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (۳۲)$$

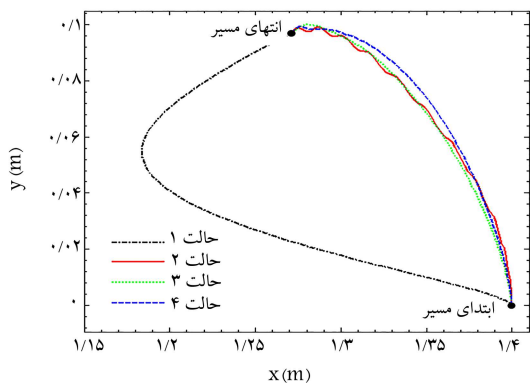
بنابراین، بردار شتاب زاویه‌ی مفاصل ربات  $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$  را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \zeta_r^{-1} \{ \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_d(t) - \dot{\zeta}(\boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\theta}} - \zeta_1 \mathbf{u} \} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{u}, t) \quad (۳۳)$$

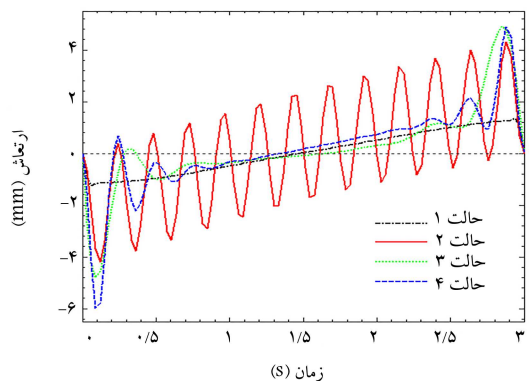
$\ddot{\phi}$ ،  $\dot{\mathbf{X}}$ ،  $\boldsymbol{\tau}$  و  $\mathbf{g}$  به طور مشابه با روابط ۱۵ تا ۱۸ به دست می‌آیند.

### ۷. شبیه‌سازی و بررسی نتایج

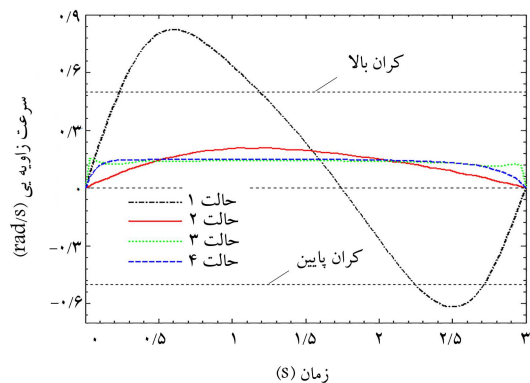
برای اثبات کارآمدی روش ارائه‌شده، در این بخش شبیه‌سازی انجام و نتایج بررسی می‌شود. برای این منظور، بازوی مکانیکی با سه رابط در نظر گرفته شده است. همه‌ی رابط‌ها در صفحه افقی بوده و حرکت آنها نیز در این صفحه انجام می‌شود.



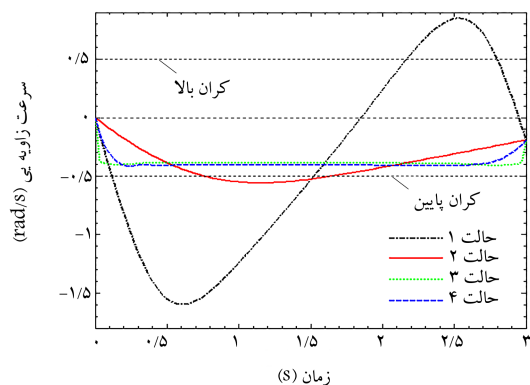
شکل ۲. مسیر پنجه.



شکل ۳. ارتعاش پنجه.



شکل ۴. سرعت زاویه‌یی مفصل ۱.



شکل ۵. سرعت زاویه‌یی مفصل ۲.

$w_\phi$ ،  $w_{\tau_i}$  و  $w_{v_i}$  به ترتیب ضرایب جریمه تغییر شکل کشسانی، گشتاورهای کنترلی و سرعت مفصل هستند. به علت کران دار بودن سرعت و گشتاور در مفصل‌ها، جملات دوم و سوم در رابطه‌ی ۳۹ در نظر گرفته شده است. همپلتونین با استفاده از رابطه‌های ۱۷، ۲۲ و ۳۹ با فرض  $w_\tau = w_{\tau_1} = w_{\tau_2} = w_{\tau_3} = w_v = w_{v_1} = w_{v_2} = w_{v_3}$  به صورت زیر خواهد شد:

$$\mathcal{H} = w_\phi (\psi_1 X_\tau + \psi_2 X_\delta)^2 + w_\tau \sum_{i=1}^3 Q_{\tau_i}^T(\mathbf{X}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i X_i + w_v \sum_{i=6}^8 X_i^2 \quad (40)$$

به منظور مطالعه و نتیجه‌گیری مناسب، ضرایب جریمه را در وضعیت‌های مختلف در نظر می‌گیریم و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

۱.  $(w_\phi = 1000, w_\tau = 1, w_v = 1) \quad w_\phi \gg w_\tau, w_v$
۲.  $(w_\tau = 1000, w_\phi = 1, w_v = 1) \quad w_\tau \gg w_\phi, w_v$
۳.  $(w_v = 1000, w_\phi = 1, w_\tau = 1) \quad w_v \gg w_\phi, w_\tau$
۴.  $w_v = 1, w_\phi = w_\tau = 50$

با حل مسئله شرایط مرزی و زوایا و سیگنال‌های فرمان به دست می‌آیند. برای حل دستگاه معادلات مرتبه اول از دستور `bvp4c` در نرم افزار MATLAB استفاده شده است. در بازه‌ی زمانی  $t_i \in [0, 3]$  از شبکه‌بندی زمانی یکنواخت  $100$  نقطه‌یی ( $i = 1, \dots, 100$ ) استفاده شده است ( $t_f = 3s, t_s = 0$ ).

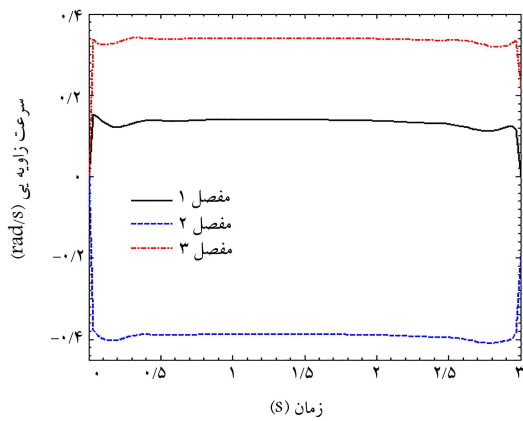
حدس اولیه برای حالت اول و دوم برای موقعیت‌های زاویه‌یی  $0.7009$  و  $0.7$  و سرعت‌های زاویه‌یی  $0.0002$  و  $0.0001$  و پنج متغیر اول شبه حالت  $0.0001$  و پنج متغیر دوم شبه حالت  $0.0002$  است. حدس اولیه برای حالت سوم و چهارم برای مکان‌های زاویه‌یی  $0.7$  و پنج متغیر اول شبه حالت  $0.65$  و پنج متغیر دوم شبه حالت  $0.4$  و بقیه‌ی متغیرها صفر است.

حدس اولیه یکتا نیست ولی جواب دستگاه معادلات منحصراً به فرد است. به عبارت دیگر، حدس‌های اولیه‌ی متفاوت به جواب یکتای دستگاه منجر می‌شود. می‌توان نقاط مختلفی را به عنوان حدس اولیه انتخاب کرد ولی این نقاط باید به اندازه کافی به مجموعه‌ی جواب نزدیک باشند. برای تولید مسیر بهینه علاوه بر اینکه تابع هدف باید کمیته شود، سرعت و گشتاور مجاز در مفاصل نباید از مقادیر حدی تجاوز کنند. در حالت‌های ۱ تا ۳ شرایط حدی ضرایب جریمه، در نظر گرفته شده است. حالت ۴ نیز با توجه به شرایط مسئله، به عنوان یکی از جواب‌های قابل قبول پیشنهاد شده است. شرط  $w_\phi \gg w_\tau, w_v$  عوامل گشتاور و سرعت را نادیده گرفته پس در تابع هدف تنها عامل مؤثر، ارتعاش پنجه است. برای حالت‌های ۲ و ۳ به ترتیب گشتاور و سرعت عوامل اصلی هستند. شکل ۲ مسیر پنجه‌ی بازوی مکانیکی و شکل ۳ ارتعاشات پنجه را نسبت به زمان برای حالات ۱ تا ۴ نشان می‌دهد. شکل‌های ۴ تا ۶ سرعت‌های زاویه‌یی و شکل‌های ۷ تا ۹ گشتاور موتورها را برای مفاصل ۱، ۳، برای حالت‌های چهارگانه نشان می‌دهند. برای بررسی و مقایسه مناسب‌تر، بیشینه‌ی قدرمطلق سرعت زاویه‌یی و گشتاور و ارتعاش برای حالات ۱ تا ۴ در جدول ۲ آمده است.

شکل ۲ نشان می‌دهد برای رسیدن به کمترین ارتعاش، پنجه‌ی بازوی مکانیکی باید مسیر طولانی‌تری پیماید. در این حالت مسیر طی شده  $33$  سانتی‌متر است که دو برابر فاصله‌ی بین نقاط ابتدا و انتهاست. در شکل ۳ کمترین ارتعاش مربوط به حالت ۱ است. در این حالت ضرایب جریمه‌ی ارتعاش نسبت به بقیه‌ی ضرایب

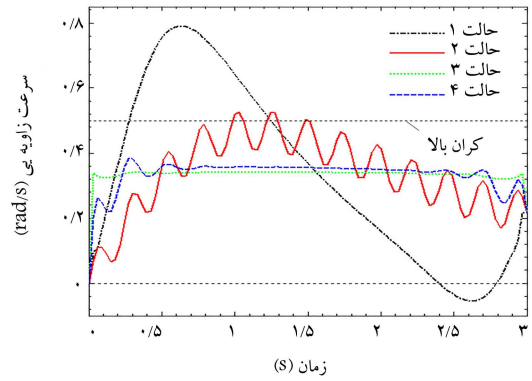
جدول ۲. بیشینه‌ی قدر مطلق سرعت زاویه‌یی، گشتاور و ارتعاش.

مفصل	سرعت (رادیان/ثانیه)	گشتاور (نیوتن - میلی‌متر)	ارتعاش (میلی‌متر)	
۱	۰٫۸۲	۹۲٫۶		
۲	۱٫۶۰	۱۲۰٫۰	۱٫۴	حالت ۱
۳	۰٫۷۹	۴۱٫۵		
۱	۰٫۲۱	۴۲٫۴		
۲	۰٫۵۶	۲۲٫۷	۴٫۳	حالت ۲
۳	۰٫۵۳	۲۱٫۰		
۱	۰٫۱۵	۹۹٫۵		
۲	۰٫۴۱	۱۵۱٫۸	۴٫۹	حالت ۳
۳	۰٫۳۴	۴۹٫۹		
۱	۰٫۱۵	۵۵٫۶		
۲	۰٫۴۲	۲۸٫۳	۴٫۹	حالت ۴
۳	۰٫۳۸	۴۵٫۹		

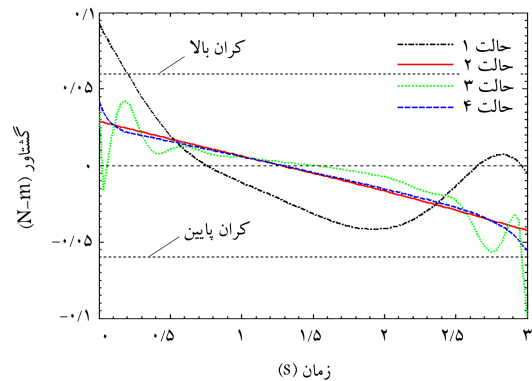


شکل ۱۰. سرعت‌های زاویه‌یی در حالت ۳.

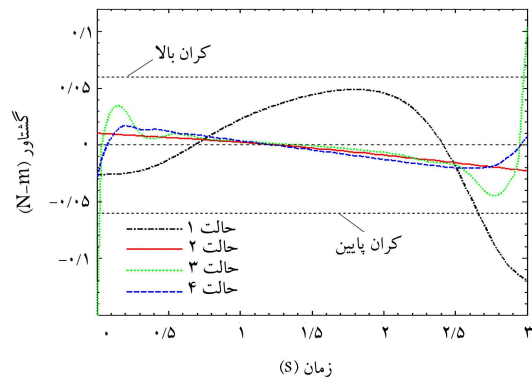
جریمه بیشتر است که به معنی اولویت در کاهش ارتعاش پنجه‌ی ربات است. بیشترین مقادیر ارتعاش برای حالات ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۱٫۴، ۴٫۳ و ۴٫۹ میلی‌متر و انتگرال زمانی آنها ۱٫۴، ۳٫۵، ۲٫۸ میلی‌متر است که افزایش قابل توجه ارتعاش را در حالت‌های ۲ و ۳ نسبت به حالت ۱ نشان می‌دهد. در این شرایط تغییرات ارتعاشی پنجه بین دو قله‌ی ابتدایی و انتهایی توسط یک خط قابل تخمین است. همچنین شکل ۳ نشان می‌دهد که قله‌ها در ابتدا و انتهای مسیر به ماتریس‌های جریمه وابسته نیستند و به ترتیب در ثانیه‌های ۰٫۱ و ۲٫۹ رخ می‌دهند. در حالت ۱، سرعت در مفاصل به بیشینه‌ی مقدار خود می‌رسند. قدرمطلق سرعت در این حالت در مفاصل ۱ تا ۳ به ترتیب ۰٫۸۲، ۱٫۶۰ و ۰٫۷۹ رادیان بر ثانیه است و از مقدار مجاز ۰٫۵ عبور کرده است. در حالت ۲ نیز قدرمطلق سرعت زاویه‌یی در مفاصل ۲ و ۳ در بیشینه‌ی مقدار خود به ترتیب به ۰٫۵۶ و ۰٫۵۳ می‌رسد که از مقدار حدی ۰٫۵ عبور کرده است. شکل ۱۰ سرعت‌های زاویه‌یی را در حالت ۳، که در آن  $w_v \gg w_\phi, w_\tau$  است، برای مفاصل ۱ تا ۳ است، نسبت به زمان نشان می‌دهد. شکل ۱۰ نشان می‌دهد علاوه بر اینکه سرعت‌ها به مقدار قابل توجهی در حالت ۳ کاهش یافته‌اند، تغییرات سرعت ثابت بوده است و با گذشت زمان تغییرات قابل توجهی ندارد. در این حالت سرعت زاویه‌یی در مفاصل‌ها به ترتیب به مقادیر



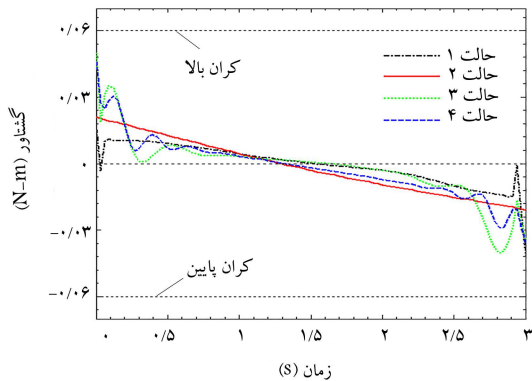
شکل ۶. سرعت زاویه‌یی مفصل ۳.



شکل ۷. گشتاور مفصل ۱.



شکل ۸. گشتاور مفصل ۲.



شکل ۹. گشتاور مفصل ۳.

به ترتیب ضریب‌های جریمه تغییر شکل کشسانی و گشتاورهای کنترلی هستند. در این مثال سرعت زاویه‌ی موتورها به‌عنوان عامل تعیین‌کننده در نظر گرفته شده است. بردارهای حالت و شبه حالت مجدداً روابط ۳۴ و ۳۵ هستند. بردار  $u$  با استفاده از رابطه‌ی ۳۰ به دست می‌آید:

$$u = [\ddot{\theta}_1] \quad (44)$$

برای بررسی و نتیجه‌گیری مناسب، ضرایب جریمه را در حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم و با هم مقایسه می‌کنیم. با فرض  $w_e = w_x = w_y$  چهار وضعیت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$5. \quad (w_e = 1000, w_\phi = 1, w_\tau = 1) \quad w_e \gg w_\phi, w_\tau$$

$$6. \quad (w_\phi = 1000, w_e = 1, w_\tau = 1) \quad w_\phi \gg w_e, w_\tau$$

$$7. \quad (w_\tau = 1000, w_e = 1, w_\phi = 1) \quad w_\tau \gg w_e, w_\phi$$

$$8. \quad w_\tau = 14, w_e = 40, w_\phi = 1$$

شکل ۱۱ مسیر پنجه‌ی بازوی مکانیکی را در وضعیت مطلوب و چهار حالت نشان می‌دهد. شکل‌های ۱۲ و ۱۳ به ترتیب خطای مسیر و ارتعاش پنجه و شکل‌های ۱۴ تا ۱۶ گشتاور موتورها را برای حالات ۵ تا ۸ نشان می‌دهند. در جدول ۳ بیشینه‌ی قدر مطلق خطا، گشتاور، و ارتعاش برای حالات ۵ تا ۸ آمده است.

در مسئله‌ی تعقیب مسیر، ضریب جریمه‌ی  $w_e$  بر مسیر حرکت صلب ربات مؤثر است. با کاهش  $w_e$  و افزایش  $w_\phi$  شاهد انحراف مسیر حرکت صلب از مسیر پیش‌فرض و کاهش دامنه‌ی ارتعاشات حول مسیر حرکت صلب ربات هستیم. در واقع باید با انتخاب مناسب  $w_e$  و  $w_\phi$  ضمن رعایت انحراف مجاز از مسیر پیش‌فرض، نوسانات ربات حول حرکت صلب ربات را نیز کنترل کنیم. با توجه به جدول ۳، بیشینه‌ی خطا برای حالت‌های ۶ و ۷ به ترتیب ۳۷٫۷ و ۴۰٫۰ است که از مقدار حدهی مجاز ۱۶ میلی‌متر تجاوز کرده است. همچنین متوسط قدر مطلق خطا برای حالات ۵ تا ۸ به ترتیب ۳٫۱، ۲۰٫۸، ۲۱٫۸ و ۵٫۶ میلی‌متر است. علت اختلاف نسبتاً زیاد بین حالت ۵ با حالت‌های ۶ و ۷ در ضریب جریمه  $w_e$  است. در حالت ۵، کاهش خطا در اولویت است و شاهد کمترین خطا هستیم. در حالت ۶ اولویت در کاهش ارتعاش است. جدول ۳ نشان می‌دهد بیشینه‌ی تغییر شکل خمشی در این حالت ۴٫۱ میلی‌متر است که نسبت به حالت‌های ۷

ثابت ۰٫۱۴، ۰٫۳۹ و ۰٫۳۴ رسیده است. با توجه به شکل‌های ۷ تا ۹ می‌توان به این نتیجه رسید که در حالت  $w_\tau \gg w_\phi, w_e$  تغییرات گشتاور کنترلی در هر سه مفصل قابل تخمین با یک خط خواهد بود. در حالت ۲، گشتاور عامل تعیین‌کننده است و تأثیر آن افزایش ارتعاش در سیستم و کاهش گشتاور مفاصل است.

در این شرایط مصرف انرژی در عملگرها به کمترین مقدار خود می‌رسد. انتگرال زمانی مجموع مربعات گشتاور به ترتیب برای حالات ۱ تا ۳ برابر است با ۰٫۰۹۸، ۰٫۰۲۲، ۰٫۰۴۳ (مربع نیوتن - متر - ثانیه) که دلایلی بر کاهش چشمگیر در حالت ۲ نسبت به حالات ۱ و ۳ است. شکل ۷ خروج گشتاور حالت ۱ از کران بالا و حالت ۳ از کران پایین را در مفصل ۱ و شکل ۸ خروج گشتاور حالت ۱ از کران پایین و حالت ۳ از کران بالا و پایین را در مفصل ۲ نشان می‌دهد. علت اصلی را می‌توان در ضرایب جریمه جستجو کرد. مطابق با ضرایب جریمه‌ی در نظر گرفته شده برای حالات چهارگانه، در حالت ۱ کمینگی ارتعاش و در حالت‌های ۲ و ۳ به ترتیب کمینگی مجموع مربعات گشتاور و سرعت مفاصل مورد نظر است. در نتیجه این پتانسیل وجود دارد تا ارتعاش در حالت‌های ۲ و ۳، سرعت‌ها در حالت‌های ۱ و ۲ و گشتاورها در حالت‌های ۱ و ۳ افزایش بیابند و گاهی از کران‌های مجاز عبور کنند. با توجه به موارد ذکر شده و پاسخ‌های سیستم در هر یک از سه حالت ۱ و ۲ و ۳ باید شرایطی را پیشنهاد کرد تا ضمن احراز قیدهای مساوی و نامساوی مسئله، دستگاه از ارتعاش مناسب نیز برخوردار باشد. بنابراین حالت ۴ با ضرایب جریمه  $w_e = 50, w_\phi = w_\tau = 1$  پیشنهاد می‌شود. در این شرایط ماتریس‌های جریمه طوری انتخاب شده‌اند که رفتار سیستم در ارتعاش، گشتاور و سرعت به ترتیب به حالت‌های ۱، ۲ و ۳ نزدیک باشد.

شکل‌های ۴ تا ۶ نشان می‌دهند سرعت زاویه‌ی در حالت ۴ به حالت ۳ و شکل‌های ۷ تا ۹ نشان می‌دهند گشتاور کنترلی، به حالت ۲ نزدیک است. همچنین شکل ۳ نشان می‌دهد در این حالت ارتعاش پنجه در ابتدا و انتهای حرکت با نوسانات ناچیز همراه است و در میانه‌ی راه به خط نزدیک می‌شود که مشابه رفتار حالت ۱ است. در هر صورت احراز شرایط بهینه برای تمام شاخص‌ها به‌طور همزمان امکان‌پذیر نیست و بسته به اهمیت آنها، می‌توان ماتریس‌های جریمه را برای دستیابی به نتیجه مورد نظر انتخاب کرد.

## ۲.۷. مثال ۲

در مثال دوم حرکت پنجه‌ی ربات در مسیر مشخص، در نظر گرفته شده است. نقاط ابتدا و انتهای حرکت به ترتیب  $(0, 1/4)$  و  $(1/21, 0/36)$  هستند.

مسیر حرکت پنجه‌ی ربات را دایره‌ی بی به شعاع ۰٫۱ و به مرکز  $(1/3, 0)$  در دستگاه  $XOY$  در نظر می‌گیریم. قیدهای نامساوی را برای محدود کردن گشتاور و خطای مسیر به صورت زیر لحاظ می‌کنیم:

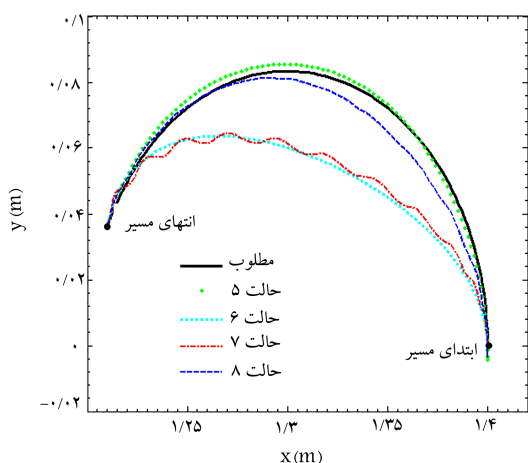
$$-0/06 < \tau_i < 0/06, \quad i = 1, 2, 3 \quad (41)$$

$$-0/016 < e < 0/016, \quad i = 1, 2, 3 \quad (42)$$

$e$  خطای مسیر و واحد آن میلی‌متر است. در اینجا  $\tau_i^+ = 0/06$  و  $\tau_i^- = -0/06$  هستند. تابع هدف را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

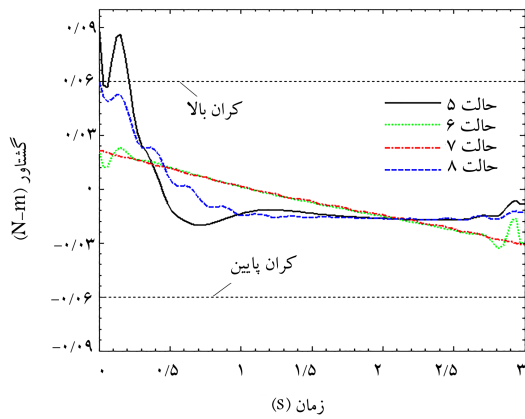
$$g = w_\phi U_{i_r}^2 + \sum_{i=1}^3 w_{\tau_i} \tau_i^2 + w_x (X_d - X_e)^2 + w_y (Y_d - Y_e)^2 \quad (43)$$

$w_x$  و  $w_y$  به ترتیب ضرایب جریمه‌ی خطای مسیر حرکت و  $X_e$  و  $Y_e$  به ترتیب مؤلفه‌های مختصات پنجه در جهات  $X$  و  $Y$  هستند.  $w_{\tau_i}$  و  $w_\phi$  مشابه مثال ۱،



شکل ۱۱. مسیر پنجه.

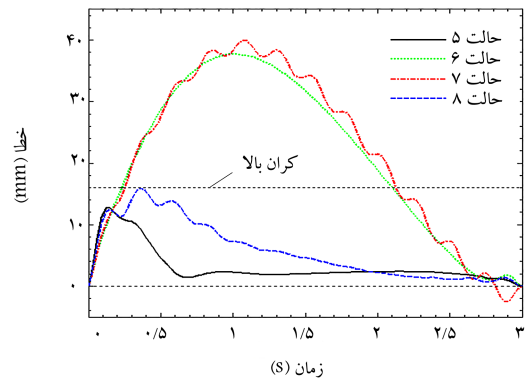




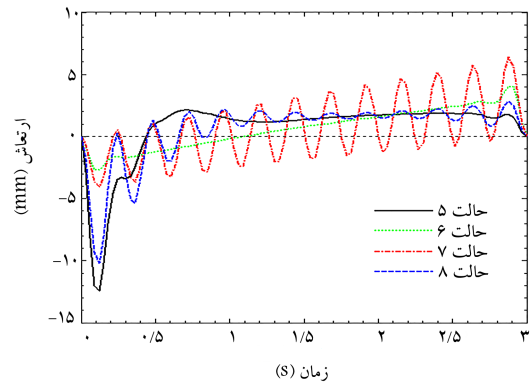
شکل ۱۶. گشتاور مفصل ۳.

جدول ۳. بیشینه‌ی قدر مطلق خطا، گشتاور و ارتعاش.

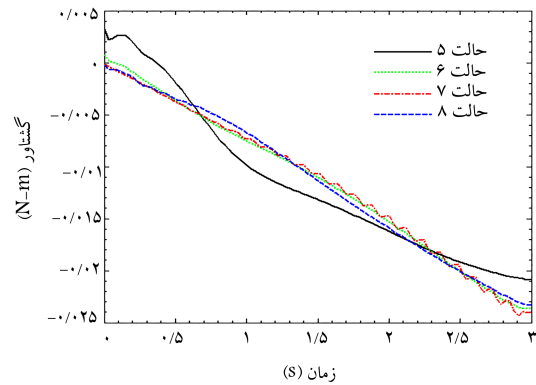
بیشینه قدر مطلق	مفصل	گشتاور (نیوتن - میلی‌متر)	خطا (میلی‌متر)	ارتعاش (میلی‌متر)
	۱	۲۰٫۹		
حالت ۵	۲	۲۹٫۲	۱۲٫۷	۱۲٫۵
	۳	۸۷٫۶		
	۱	۲۳٫۶		
حالت ۶	۲	۱۹٫۸	۳۷٫۷	۴٫۱
	۳	۳۳٫۱		
	۱	۲۴٫۳		
حالت ۷	۲	۱۷٫۳	۴۰٫۰	۶٫۴
	۳	۳۱٫۲		
	۱	۲۳٫۳		
حالت ۸	۲	۲۰٫۷	۱۵٫۹	۱۰٫۲
	۳	۵۹٫۶		
	۱	۲۳٫۳		



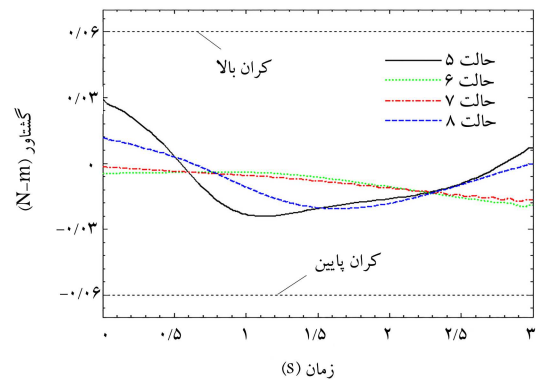
شکل ۱۲. خطای مسیر پنجه.



شکل ۱۳. درج‌الارتعاش پنجه.



شکل ۱۴. گشتاور مفصل ۱.



شکل ۱۵. گشتاور مفصل ۲.

۵ و به ترتیب ۲ و ۳ برابر کاهش یافته است. شکل ۱۳ نشان می‌دهد در حالت ۶، تغییر شکل خمشی با یک خط قابل تخمین است و اولین فرجهش برای هر چهار وضعیت در ۰٫۱۲ ثانیه رخ می‌دهد. همچنین پاسخ مربوط به کمترین ارتعاش، پاسخی است که انتگرال گشتاور رابط سوم را حداقل می‌کند. در مثال ۱، انتگرال گشتاور در مفصل ۳ برای حالات ۱ تا ۴ به ترتیب ۱٫۶، ۱٫۱، ۰٫۳، ۰٫۴ - نیوتن - میلی‌متر - ثانیه و در مثال ۲، ۱٫۶، ۱٫۳، ۱٫۸، ۱٫۷ - نیوتن - میلی‌متر - ثانیه است. هر دو نتیجه صحت این موضوع را تأیید می‌کند. در حالت ۷ که  $w_7$  به بیشترین مقدار خود می‌رسد، گشتاورها به خط نزدیک می‌شوند (شکل‌های ۱۴ تا ۱۶) ضمن اینکه ارتعاشات سینوسی می‌شود و دامنه‌ی ارتعاش در میانه‌ی حرکت به ۲٫۸ میلی‌متر می‌رسد. در این حالت ضریب جرمی گشتاور نسبت به بقیه‌ی ضرایب جرمی بیشتر است و انتظار کاهش گشتاور و مصرف انرژی در عملگرها را داریم. انتگرال زمانی مجموع مربعات گشتاورها به ترتیب برای حالات ۵ تا ۸ برابر است با ۰٫۳۴، ۰٫۲۹، ۰٫۱۶ و ۰٫۲۳ که تأثیر ضریب

## ۸. نتیجه‌گیری

در این نوشتار طراحی مسیر بهینه‌ی بازوهای مکانیکی انعطاف‌پذیر با درجات آزادی اضافی در حرکت نقطه به نقطه و حرکت روی مسیر مشخص ارائه شد. این تحقیق روش جدیدی بر اساس جداسازی حرکت ارتعاشی و حرکت صلب بازوی مکانیکی پیشنهاد کرده است. هدف از این روش، دستیابی به اهداف مورد نظر طراحی با در نظر گرفتن حرکت صلب ربات و کمیته کردن ارتعاش به عنوان یکی از اولویت‌های اصلی است. در روش پیشنهادی، همه‌ی جواب‌های ممکن بر اساس شرایط صلب و افزونگی ربات استخراج می‌شوند؛ سپس مسیری که تابع هدف فراگیر را کمیته کند، با استفاده از روش کنترل بهینه‌ی حلقه باز به دست می‌آید. در این روش، تابع هدف بسته به شرایط حرکت نقطه به نقطه یا حرکت در مسیر مشخص، متفاوت خواهد بود. در هر دو حالت، کاهش ارتعاشات کشسانی اعضای انعطاف‌پذیر به عنوان یکی از اهداف اصلی در نظر گرفته می‌شود. در هر حالت با انتخاب مناسب بردار حالت و سیگنال کنترل، تابع هدف و قیدها به شکل استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی تبدیل می‌شوند. قیدها در حرکت نقطه به نقطه، شامل معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم و قیدهای نامساوی هستند. تابع هدف در این شرایط شامل جملاتی از مصرف انرژی در عملگرها، سرعت زاویه‌ی در مفاصل و تغییر شکل کشسانی خواهد بود. در شرایط حرکت در مسیر مشخص، قید سینماتیکی به قیدهای مسئله اضافه می‌شود. همچنین قیدهای نامساوی برای محدود کردن گشتاور و سرعت، اضافه می‌شوند. در این تحقیق، به علت ابعاد نامحدود اجزای انعطاف‌پذیر، از روش مودهای فرضی برای گسسته‌سازی و تخمین تغییر شکل خمشی استفاده شد. سپس با محاسبه‌ی انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم و به‌کارگیری روش لاگرانژ، معادلات حرکت استخراج شد. برای تصدیق مدل‌سازی ریاضی و تصدیق روش بهینه‌سازی ارائه شده، شبیه‌سازی برای بازوی مکانیکی با سه رابط که رابط انتهایی انعطاف‌پذیر است، در دو مثال ارائه شد. مثال اول برای حرکت نقطه به نقطه و مثال دوم برای حرکت روی مسیر مشخص انجام شد. در این شرایط از یک درجه آزادی اضافی، برای کمیته کردن تابع هدف استفاده شد. بر اساس اهداف مورد نظر و قیدهای نامساوی در هر یک از دو مثال، تابع هدف مرتبط با آنها تعریف شد. نتایج نشان داد که می‌توان با بررسی و تحلیل شرایط حدی و سپس تنظیم ضرایب جریمه، اهداف مورد نظر را تأمین کرد. بررسی پاسخ سیستم در شرایط متفاوت و نتایج به دست آمده حکایت از کارایی و دقت مناسب در روش ارائه شده دارد.

جریمه‌ی گشتاور را نشان می‌دهد. نکته‌ی قابل توجه این که بیشینه‌ی گشتاور در حالت ۵ در مفصل ۳، ۸۷/۶ نیوتن - میلی‌متر (جدول ۳) است که از کران  $T_i^+$  تجاوز کرده است (شکل ۱۶). بررسی حالت‌های ۵ تا ۷ نشان می‌دهد، حالت ۵ از کران بالای  $T_i^+$  و حالت‌های ۶ و ۷ از محدوده‌ی مجاز خطای مسیر عبور می‌کنند.

در اینجا نیز مشابه مثال ۱، باید شرایطی را پیشنهاد کرد تا ضمن احراز قیدهای نامساوی برای  $e$  و  $T$ ، ارتعاش پنجه نیز از وضعیت مناسبی برخوردار باشد. به این منظور حالت ۸ پیشنهاد می‌شود. ضرایب جریمه در حالت ۸ طوری انتخاب شده‌اند تا ضمن عدم عبور گشتاورهای کنترلی از مقدار حدی مجاز، خطا نیز از ۱۶ میلی‌متر تجاوز نکند. در این شرایط بیشینه‌ی خطا، ارتعاش و گشتاور به ترتیب ۱۵/۹ میلی‌متر، ۱۰/۲ میلی‌متر، و ۵۹/۶ نیوتن - میلی‌متر هستند (جدول ۳). نتیجه‌گیری‌های مهم به‌طور خلاصه به صورت زیر هستند:

۱. زمان اولین و آخرین فراجهدش در خمش کشسانی به ماتریس‌های جریمه وابسته نیست.
۲. در شرایطی که ضرایب‌های جریمه‌ی خطای مسیر، تغییر شکل خمشی، گشتاور، و سرعت به عنوان اولویت اصلی در بیشینه‌ی مقدار خود نسبت به بقیه‌ی ضرایب جریمه قرار می‌گیرند، تغییرات این پارامترها به صورت خطی قابل تخمین خواهند بود.
۳. با استفاده از قیدهای نامساوی، محدودیت‌های گشتاور، سرعت یا خطا به سیستم اعمال می‌شوند. در این شرایط در صورت انتخاب نامناسب ضرایب‌های جریمه، امکان آسیب رسیدن به سیستم وجود دارد (مثلاً با اشباع عملگرها).
۴. احراز شرایط بهینه برای تمام شاخص‌ها به‌طور هم‌زمان امکان‌پذیر نیست و بسته به اولویت‌های در نظر گرفته شده، می‌توان آنها را برای اهداف مورد نظر تنظیم کرد. برای این کار برای پیش‌بینی تخمینی پاسخ سیستم (نسبت به ضرایب‌های جریمه)، می‌توان ابتدا شرایط حدی این ضرایب را در حالت‌های متفاوت (مشابه حالت‌های ۱ تا ۳ در مثال ۱ و حالت‌های ۵ تا ۷ در مثال ۲) بررسی کرد و سپس با انتخاب مناسب ضرایب جریمه، اهداف مورد نظر را تأمین کرد.

## پانویس‌ها

1. positioning
2. redundancy
3. recursive quadratic programming
4. collocation method
5. minimum control effort
6. sequential quadratic programming
7. Imperialist competitive algorithm
8. particle swarm optimization
9. Pontryagin's minimum principle
10. rest-to-rest

11. off-line
12. assumed mode method
13. lamped parameter
14. Bellman's dynamic programming
15. Boundary value problem

## منابع (References)

1. Vu, V.H., Liu, Z., Thomas, M., Li, W. and Hazel, B. "Output-only identification of modal shape coupling in a

- flexible robot by vector autoregressive modeling”, *Mechanism and Machine Theory*, **97**, pp. 141-154 (2016).
2. Kiang, C.T., Spowage, A. and Yoong, C.K. “Review of control and sensor system of flexible manipulator”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **77**(1), pp. 187-213 (2015).
  3. Nguyen, L.A., Walker, I.D. and Defigueiredo, R.J.P. “Dynamic control of flexible, kinematically redundant robot manipulators”, *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, **8**(6), pp. 759-767 (1992).
  4. Shukla, A., Singla, E., Wahi, P. and Dasgupta, B. “A direct vibrational method for planning monotonically optimal paths for redundant manipulators in constrained workspaces”, *Robotics and Autonomous System*, **61**(2), pp. 209-220 (2013).
  5. Eisler, G.R., Robinett, R.D., Segalman, D.J. and Feddema, J.D. “Approximate optimal trajectories for flexible-link manipulator slewing using recursive quadratic programming”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **115**(3), pp. 405-410 (1993).
  6. Springer, K., Gattringer, H. and Staufer, P. “On time-optimal trajectory planning for a flexible link robot”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, **227**(10), pp. 752-763 (2013).
  7. Wilson, D.G., Robinett III, R.D. and Eisler, G.R. “Discrete programming for Optimized path planning of flexible robots”, *Proceeding of the International Conference on Intelligent Robot and Systems (IROS)*, **3**, pp. 2918-2923 (2004).
  8. Choi, Y., Cheong, J. and Moon, H. “A trajectory planning method for output tracking of linear flexible systems using exact equilibrium manifolds”, *Mechanics, IEEE/ASME Transactions on*, **15**(5), pp. 819-826 (2010).
  9. Bahrami, M., Jamilnia, R. and Naghash, A. “Optimal control of flexible space robots using direct collocation method and nonlinear programming”, *In the IASTED International Conference on Robotics, Telematics and Applications*, China (2009).
  10. Korayem, M.H., Irani, M., Charesaz, A., Korayem, A.H. and Hashemi, A. “Trajectory planning of mobile manipulators using programming approach”, *Robotica*, **31**(04), pp. 643-656 (2013).
  11. Wu, H., Sun, F., Sun, Z. and Wu, L. “Optimal trajectory planning of a flexible dual-arm space robot with vibration reduction”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **40**(2), pp. 147-163 (2004).
  12. Lou, J., Wei, Y., Li, G., Yang, Y. and Xie, F. “Optimal trajectory planning and linear velocity feedback control of a flexible piezoelectric manipulator for vibration suppression”, *Shock and Vibration*, **2015**, 11 p. (2015).
  13. Tabealhojeh, H. and Ghanbarzadeh, A. “Two steps optimization path planning algorithm for robot manipulators using imperialist competitive algorithm”, *2th RSI/ISM International Conference on IEEE in Robotics and Mechatronics (ICROM)*, pp. 801-806 (2014).
  14. Abe, A. and Komuro, K. “Minimum energy trajectory planning for vibration control of a flexible manipulator using a multi-objective optimization approach”, *International Journal of Mechatronics and Automation*, **2**(4), pp. 286-294 (2012).
  15. Korayem, M.H., Rahimi, H.N. and Nikoobin, A. “Path planning of mobile elastic robotic arms by indirect approach of optimal control”, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, **8**(1), pp. 10-20 (2011).
  16. Korayem, M.H., Rahimi, H.N. and Nikoobin, A. “Mathematical modeling and trajectory planning of mobile manipulators with flexible links and joint”, *Applied Mathematical Modeling*, **36**(7), pp. 3229-3244 (2012).
  17. Heidari, H.R. Korayem, M.H. Haghpanahi, M. and Batlle, V.F. “Optimal trajectory planning for flexible link manipulators with large selection using a new displacements approach”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **72**(3-4), pp. 287-300 (2013).
  18. Almasi, A., Ghayour, M. and Sadigh, M.J. “Trajectory optimization of a mobile robot with flexible links using pontryagin's method”, *International Journal of Mechanical Engineering and Robotic Research*, **3**(3), pp. 149-164 (2014).
  19. Sentinella, M.R. and Casalino, L. “Genetic algorithm and indirect method coupling for low thrust trajectory optimization”, *Proceedings of 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, Sacramento, USA (2006).
  20. Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, Mcmillan Press, New York, USA (1967).
  21. Zhang, X. and Yu, Y.Q. “Motion control of flexible robot manipulators via optimizing redundant configurations”, *Journal of Mechanism and Machine Theory*, **36**, pp. 883-892 (2001).
  22. Gotlih, K. “The use and comparison of a special global optimal control algorithm with a local optimal control solution for redundant mechanisms”, *Proceedings of the IEEE International Symposium*, **2**, pp. 872-876 (1999).
  23. Yen, H., Fahroo, F. and Ross, I.M. “Optimal feedback control laws by legendre pseudospectral approximation”, *Proc. American Control Conference*, Arlington, VA (June 2001).
  24. Park, K.J. “Flexible robot manipulator path design to reduce the endpoint residual vibration under torque constraints”, *Journal of Sound and Vibration*, **275**(3), pp. 1051-1068 (2004).
  25. Bertolazzi, E., Biral, F. and Da Lio, M. “Symbolic-numeric indirect method for solving optimal control problems for large multibody systems”, *Multibody System Dynamics*, **13**(2), pp. 233-252 (2005).
  26. Rao, S.S., *Vibration of Continuous Systems*, 4th Edn, Chapter 11, Wiley & Sons Press, New Jersey, USA (2007).
  27. Kirk, D.E., *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice Hall Press, Englewood Cliffs, NJ (2012).
  28. Nakamura, Y., *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*, Addison-Wesley Longman Publishing Co. (1990).