

# بررسی تجربی اثر تغییر مکان عمودی مرکز جرم چهارپره بر عملکرد پروازی از طریق شناسایی حوزه‌ی فرکانس

محمد رضا عبدالهی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

افشین بنازاده<sup>\*</sup> (دانشیار)

سید حسین بورقاکدوست (استاد)

دانشکده‌ی هندسی هواپیما، دانشگاه صنعتی شریف

مهمنی مکانیک شریف (پذیرش ۱۳۹۸-۱۳۹۷)، دوری ۳-۲، شماره ۱۰، ص. ۱۶۴-۱۶۸، (پذیرش ۱۳۹۷)

در تحقیق تجربی حاضر، مکانیابی مارها و اثر جایه‌جایی آن‌ها بر عملکرد پروازی و خواص پایداری چهارپره‌های مرسوم بررسی شده است. برای دست‌یابی به بالاترین مکان مرکز جرم، داده‌های بیش از هشتاد آزمایش پرواز به وسیله‌ی شناسایی حوزه‌ی فرکانس مورد ارزیابی قرار گرفته است. داده‌ها توسط ژیروسکوپ، شتاب سنج و مغناطیس سنج اندازگیری و جمع‌آوری شده و با استفاده از فیلتر کالمون تعمیم یافته احیاء شده‌اند. با استفاده از این داده‌ها، مودهای طولی و عرضی چهارپره شناسایی شده و رفتارشان با هدف پیدا کردن مکانی که در آن مودهای دینامیکی دچار ناپایداری شده اند تحقیق بخشیده شده و تغییرات ضریب میرایی در مقابل تغییر مرکز جرم نشان داده شده است. برای صحه‌گذاری و اطمینان از نتایج حاصله، از چهارپرهی دیگر برای مقایسه نتایج استفاده شده است. علاوه بر این، به مظور بررسی عدم قطعیت و نویزهای موجود روی داده‌های سیستم اندازگیری، هر آزمایش چهاربار تکرار شده و رفتار میانگین نتایج گزارش شده است.

m.abdollahi6677@student.sharif.edu  
banazadeh@sharif.edu  
pourtak@sharif.edu

وازگان کلیدی: چهارپره، شناسایی تجربی، حوزه‌ی فرکانس، مودهای دینامیکی، تغییر مرکز جرم.

## ۱. مقدمه

برای اجرای این مأموریت‌ها، تعیین مکان مرکز جرم، به خصوص در راستای محور عمودی، باعث تغییراتی در دینامیک چهارپره می‌شود. از طرفی شناخت دقیق دینامیک، در طراحی و گسترش سامانه‌های کنترلی این چندپره‌ها ضروری است.<sup>[۱۲]</sup> ازین‌رو، شناسایی اثر تغییرات مرکز جرم در راستای محور عمودی بر دینامیک این پرنده‌ها بسیار برآهمیت است.

تیشلر و همکاران<sup>[۱۵]</sup> به بررسی دینامیک چهارپرهی در حوزه‌ی فرکانس پرداختند. آن‌ها چهارپرهی مذکور را به صورت حلقه بسته توسط برنامه‌ی سایفر شناسایی کردند و توابع تیدیل و مکان قطب‌های چهارپرهی مذکور را در تحریک‌های طولی، عرضی، سمتی و عمودی به دست آوردند. تیشلر و همکاران<sup>[۱۴]</sup> در ادامه‌ی مطالعاتشان دینامیک فضای حالت چهارپره را استخراج کردند و برای چهارپرهی مذکور یک کنترل‌کننده‌ی تنسی، مشتقی، انتگرالی طراحی کرده و درنهایت با استفاده از کنترل‌کننده‌ی طراحی شده به بهینه‌سازی سیستم کنترلی چهارپره پرداختند.

پانیزا و همکاران<sup>[۱۶]</sup> در سال ۲۰۱۵ به بررسی وضعیت دینامیکی چهارپره در حالت پیچ متغیر پرداختند. آن‌ها برای بررسی دینامیک چهارپره مذکور از روش جعبه‌سیاه<sup>۱</sup> و جعبه‌خاکستری<sup>۲</sup> استفاده کردند. وی و همکاران<sup>[۱۷]</sup> در سال ۲۰۱۷ دینامیک سامانه‌ی حلقه باز چهارپره را به وسیله‌ی خلبان خودکار تجاری پیکس‌هاوک<sup>۳</sup>

بسته به مأموریت‌هایی که توسط پرنده‌های بدون سرنشین انجام می‌گیرد، ابعاد و تجهیزات متفاوتی روی آن‌ها نصب می‌شود.<sup>[۱۱]</sup> مزایای قابل توجه پرنده‌های بدون سرنشین موجب شده است که مطالعات دقیقی بر بهینه‌سازی و افزایش عملکرد آن‌ها صورت گیرد.<sup>[۱۲]</sup> با توجه به ویژگی‌های پرنده‌های بدون سرنشین، توان بالقوه‌ی برای اجرای کاربردهای متفاوت - از جمله، شناسایی، گشت زنی، حرastت، حمل و نقل بارها و هواشناسی - می‌توان در نظر گرفت.<sup>[۷-۲]</sup>

کاربردهایی که توسط پرنده‌های بدون سرنشین انجام می‌گیرد، در گستره‌ی وسیع از موارد نظامی و غیر نظامی قرار دارد. این پرنده‌ها توانایی اجرای مأموریت‌ها در مکان‌های بسته یا در محیط‌های آزاد را دارند که نشان از قابلیت بالای آن‌ها در محیط‌های متفاوت است.<sup>[۱۸]</sup> این وسائل پرنده توانایی اجرای بیش از ۲۵۰ مأموریت متفاوت را دارند.<sup>[۱۰, ۹]</sup> به تازگی تحويل بسته‌های پستی به وسیله‌ی پرنده‌های بدون سرنشین به عنوان موضوعی جذاب برای شرکت‌های بزرگی از قبیل آمازون و گوگل<sup>[۱۱]</sup> و حتی شرکت پستی دی‌اچ‌ال مورد توجه قرار گرفته است.<sup>[۱۲]</sup>

\* نویسنده مسئول  
تاریخ: دریافت ۲۹/۱۱/۱۳۹۷، اصلاحیه ۳/۱، پذیرش ۱۳۹۸/۳/۲۵

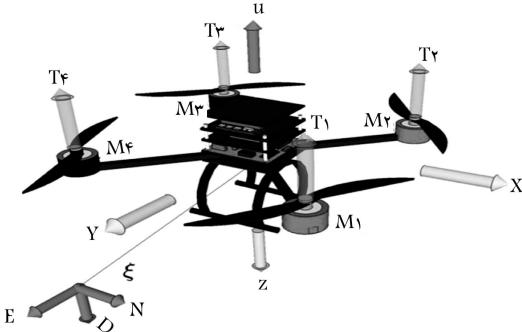
DOI:10.24200/J40.2019.52801.1503



شکل ۱. چهارپره توسعه داده شده برای آزمایش.



شکل ۲. خلبان خودکار نصب شده روی چهارپره.



شکل ۳. نمودار آزاد چهارپره مورد آزمایش.<sup>[۲۳]</sup>

دارد. همچنین از ملحهایی با قطر  $10\text{ mm}$  و گام  $4/5$  در این چهارپره استفاده شده است. با تری مورد استفاده در این پرنده دارای  $4\text{ g}$  سلول با ظرفیت  $5/5\text{ آمپرساعت}$  است. این پرنده در شکل ۱ نشان داده شده است. خلبان خودکار خلبان خودکار تجاری پیکس هاکر ۱ محصول کمپانی آردوپایلوت (شکل ۲) است. از خلبان خودکار فوق برای داده برداری نیز استفاده می شود. به دلیل انجام آزمایش ها در محیط آزمایشگاهی، مسقف و ضعیف بودن امواج ماهواره‌یی، از جی پی اس (GPS) استفاده نشده است. داده های مورد نیاز برای شناسایی، توسط واحد اندازه‌گیری اینرسی جمع آوری می شود. با استفاده از این خلبان خودکار، دستورهای ارسالی توسط سیستم کنترلی از سامانه استخراج و ازان در شناسایی سامانه استفاده می شود. نرخ داده برداری ژیراسکوپ ها  $88\text{ Hz}$  است که با توجه به استفاده از میراگرهای نصب شده، لرزش های ایجاد شده روی خلبان خودکار به مقدار قابل قبولی کاهش یافته است.<sup>[۱۵]</sup> نمودار آزاد چهارپره ای توسعه داده شده در شکل ۳ نشان داده شده است.

محصول کمپانی آردوپایلوت<sup>[۱۶]</sup> شناسایی کردند. همچنین طی تحقیقات خود در جهت درک بیشتر چهارپره، سامانه‌ی کنترل سرعت موتور چهارپره را نیز شناسایی کردند. لیو و همکاران،<sup>[۱۷]</sup> در سال ۲۰۱۷ به بررسی اثر اغتشاشات جوی بر دینامیک چهارپره ها پرداختند و با استخراج دینامیک این سیستم در هنگام برخورد با تندبادها، سیستم کنترلی چهارپره را برای مقابله با این اغتشاشات گسترش دادند. موریس و همکاران،<sup>[۲۰]</sup> در سال ۲۰۱۸ با استفاده از انگکرال پایه به شناسایی مدل دینامیکی یک چهارپره پرداختند؛ اصلی ترین مزیت این روش نسبت به دیگر روش ها، امکان شناسایی آلازین چهارپره بود.

بناراده و همکاران،<sup>[۲۱]</sup> در تحقیق خود دینامیک یک پهپاد بال ثابت دارای کانارد را به کمک شبکه‌ی عصبی خطی و با استفاده از داده های آزمایش پرواز، شناسایی کردند. آن ها در این روش پرنده را در درو حالت مختلف که دریکی از آن ها دینامیک های طولی و عرضی تقسیک شده بود و در روش دیگر اثرات دینامیک های طولی و عرضی نسبت به یکدیگر نیز مدعی نظر قرار می گرفت شناسایی کردند؛ بررسی نتایج به دست آمده حاکی از اعتبار این روش بوده و نشان داد که با توجه به حجم محاسباتی اندک این روش، می توان از آن برای شناسایی آلازین دینامیک پرنده یا تشخیص عیب در آن استفاده کرد. در مرور دینامیک چهارپره ها تحقیقات متعددی صورت گرفته، اما تاکنون پژوهشی نظری یا تجربی در مورد تأثیر تغییر مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی بر دینامیک چهارپره صورت نپذیرفته است. مکانیابی بارها و هرگونه تغییر در آن، به خصوص در راستای محور عمودی، می تواند مرکز جرم چهارپره را تغییر داده و بر عملکرد پرواز آن به شدت تأثیرگذار باشد.

در تحقیق حاضر، فرایند شناسایی رفتار دینامیکی سامانه در شرایط مختلف فرازگیری مرکز جرم در فرایند آزمایش های تجربی اجرا شده، و توابع تبدیل دقیقی بر رفتار غیرخطی سامانه بازش شده است. در توابع تبدیل به دست آمده تمامی همبستگی های دینامیکی موجود در دینامیک سامانه به همراه سامانه کنترلی چهارپره در نظر گرفته شده است. در حین آزمایش، مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی حرکت داده شده و توابع تبدیل سامانه به وسیله‌ی روش های شناسایی حوزه‌ی فرکانس تعیین شده است؛ سپس مکان قطب های مربوط به هر تحریک رسم شده و در نهایت با بررسی مکان قطب ها و ضریب میرایی چهارپره، و نیز آزمایش های تکرار پذیری، نقطه‌یی که در آن چهارپره به مرز ناپایداری می رسد، شناسایی شده است.

## ۲. چیدمان آزمون

به منظور اجرای این پژوهش به چهارپرهی نیاز بود که توانایی حمل حدود  $50\text{ g}$  بار را داشته باشد. با توجه به این که در هر مرحله از اجرای آزمایش، جایه جایی مرکز جرم مورد نیاز است، بدنه‌ی پرنده باید به صورت ابتکاری طراحی و ساخته می شد تا بتوان به وسیله‌ی آن مرکز جرم را در راستای محور عمودی جایه جا کرد. در این راستا با ایجاد حفره‌یی در صفحه‌ی مرکزی و قرار دادن لوله‌یی با قطر مشابه درون حفره و اتصال وزنه‌ی  $50\text{ g}$  رمی به لوله‌ی مذکور - طوری که قابلیت جایه جایی این وزنه در طول لوله وجود داشته باشد - این سازوکار ایجاد شده است. از میان انواع مختلف چندپره ها، چهارپرهی که آرایش موتورهای آن به صورت ضربه‌بری است، برگزیده و ساخته شده است. دلیل استفاده از چهارپره در دسترس بودن قطعات پرنده و هزینه‌ی کم بر بکارگیری، نگهداری و تعمیر آن است. قطر کلی چهارپره  $50\text{ mm}$  سانتی‌متر و ارتفاع آن  $30\text{ mm}$  سانتی‌متری است. این چهارپره از جنس فیبر کربن بوده و چهار موتور الکتریکی با توان  $165\text{ W}$  و حداکثر دور  $9300\text{ RPM}$

تابع تبدیل حاصله با مقادیر پاسخ فرکانسی است «تابع هزینه» نام دارد و مقدار آن از معادله‌ی ۵ محاسبه می‌شود؛ مقدار تابع هزینه هراندازه کوچک‌تر باشد، حکایت از نزدیک‌تر بودن تابع تخمین زده شده به مقادیر پاسخ فرکانسی دارد:

$$J = \frac{2^0}{n_w} \sum_{\omega_1}^{n_w} W_g \left[ W_g \left( |\hat{T}_e| - |T| \right)^2 + W_p \left( \angle \hat{T}_e - \angle T \right)^2 \right] \quad (5)$$

که در آن  $w_g$ ,  $w_p$  وزن‌های نسبی دامنه و فاز و  $n_w$  تعداد نقاط فرکانس در بازه فرکانسی قابل قبول است.

$$n_w = 2^0 \quad (6)$$

$$W_g = 1 \quad (7)$$

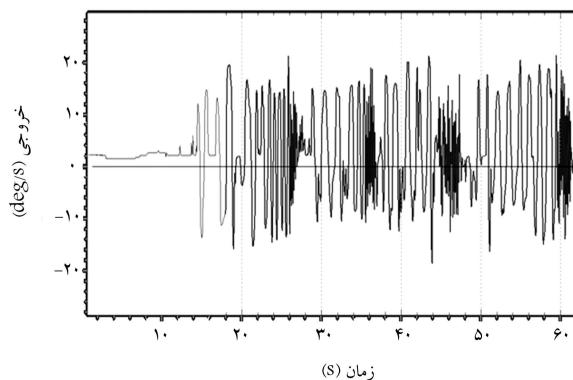
$$W_p = 0,01745 \quad (8)$$

$$W_g = [1/58 \left( 1 - e^{-\gamma_{xy}^2 xy} \right)]^2 \quad (9)$$

با توجه به ضرایب بالا چنانچه مقدار تابع هزینه کوچک‌تر از  $5^0$  باشد، تابع تبدیل مناسبی به رفتار دینامیکی سامانه برآش شده است.

#### ۴. استخراج تابع تبدیل

در فرایند آزمایش‌های پروازی باید ابتدا پرنده را توسط ورودی‌های مناسب کنترلی تحریک کرد. در طراحی سامانه‌های کنترلی محدوده‌ی فرکانسی تحریک بین  $1\text{ تا }2^0$  رادیان بر ثانیه است<sup>[۵]</sup> و لذا چهارپره در بازه مذکور تحریک شده است. نمونه‌ی از تحریک سیستم در بازه مورد نظر در شکل ۵ نمایش داده شده است. در عمل برای اعمال ورودی به پرنده از یک رادیوکنترل فوتاپا ۱۴ اس جی با فرکانس  $2,4\text{ گیگاهرتز}$  استفاده شده و ورودی‌های لازم توسط خلبان بر سامانه اعمال شده است. پس از تحریک مناسب سامانه توسط ورودی‌های مناسب، مقادیر پاسخ‌های زمانی سامانه در یک حافظه‌ی خارجی در درون خلبان خودکار ذخیره می‌شود. پس از اتصال خلبان خودکار به رایانه توسط برنامه‌ی میشن پلنر<sup>۵</sup> نسخه‌ی ۱.۳.۵۶ که توسط میشل آبورن<sup>۶</sup> به سفارش کمپانی آردو پایلوت طراحی شده،<sup>[۱۸]</sup> تمامی داده‌های ذخیره شده در حافظه‌ی خارجی به رایانه منتقل می‌شود. سپس تمامی داده‌ها با نام‌گذاری صحیح در متلب ذخیره و توسط یکی از زیر برنامه‌های تجاری سایفر نسخه‌ی ۳ که توسط اداره‌ی توسعه‌ی هواپی ارتش ایالات متحده، دانشگاه کالیفرنیا در سانتا کروز و مرکز تحقیقات ایمز<sup>۷</sup> توسعه داده شده و



شکل ۵. نمونه‌ی از داده‌برداری توسط سیستم پیکس‌هاوک.

#### ۳. شناسایی سیستم

شناسایی سیستم در حوزه‌ی فرکانس روشی سریع و مؤثر برای به دست آوردن مدل دینامیکی دقیق چهارپره‌هاست. این مدل دینامیکی از طریق اندازه‌گیری پاسخ سامانه سبب به ورودی‌های معین و بهینه‌ی کنترلی حاصل می‌شود.<sup>[۲۰]</sup> علاوه بر دقت بالا شناسایی سیستم فرایندی کم‌هزینه برای گسترش مدل دینامیکی چهارپره‌هاست.<sup>[۲۱]</sup> شناسایی به‌طورکلی به دو روش حوزه‌ی زمان و حوزه‌ی فرکانس صورت می‌پذیرد که به دلیل زمان بر بودن، خطای زیاد و هزینه‌ی محاسباتی بالا در شناسایی سیستم حوزه‌ی زمان، در کاربردهای عملی معمولاً از شناسایی سیستم حوزه‌ی فرکانس (شکل ۴) استفاده می‌شود. در این روش یک تابع توصیف‌کننده‌ی خطی از یک فرایند ورودی - خروجی به دست می‌آید که در واقع بهترین مدل خطی توصیف‌کننده‌ی رفتار غیرخطی سیستم است. در این روش تاریخچه‌ی زمانی پاسخ‌های دینامیکی برنده پس از تحریک توسط ورودی‌های مناسب در فرایند آزمایش‌های پروازی یا آزمایش‌های سخت‌افزار در حلقه مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

معیار ارزیابی صحت شناسایی، تابع همبستگی از دیدگاه فیزیکی، قسمتی از طیف ورودی است ( $G_{xx}$ ) که به صورت خطی، مناسب با طیف خروجی است ( $G_{yy}$ ). این تابع با نماد  $\gamma_{xy}$  در هر فرکانس نشان داده می‌شود و مقدار آن بین صفر و  $1$  است. برای آنکه شناسایی از اعتبار لازم برخوردار باشد، مقدار تابع همبستگی باید بیشتر از  $0,6$  باشد که این به معنای ارتباط مؤثر خطی در رفتار ورودی - خروجی سیستم است.

$$\gamma_{xy}(f) = \frac{|\hat{G}_{xy}(f)|}{|\hat{G}_{xx}(f)||\hat{G}_{yy}(f)|} \quad (1)$$

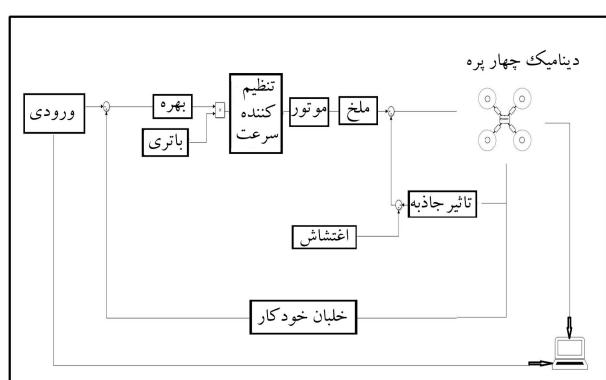
در معادله‌ی  $1$ ،  $(G_{yy})$ ،  $(G_{xx})$  و  $(G_{xy})$  نشان‌گر توان منتقل شده در هر فرکانس است و به آن چگالی توان طیفی گفته می‌شود.

$$\hat{G}_{xx} = \frac{2}{T_{rec}} |x(f)| \quad (2)$$

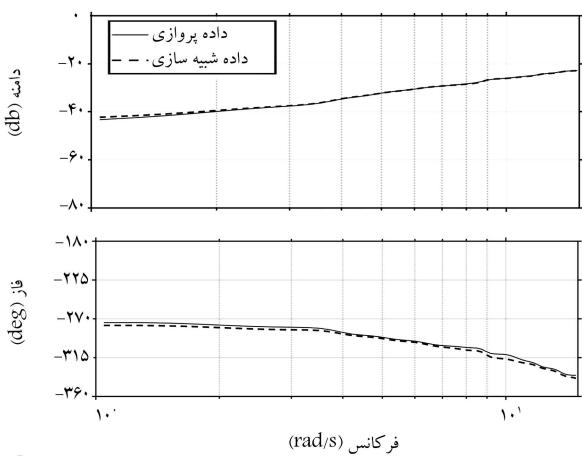
$$\hat{G}_{xy} = \frac{1}{T_{rec}} |x^*(f), y(f)| \quad (3)$$

$$\hat{G}_{yy} = \frac{2}{T_{rec}} |y(f)| \quad (4)$$

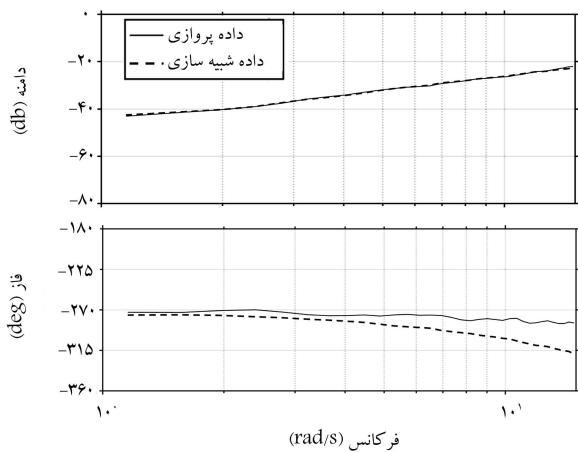
در معادله‌ی  $2$ ،  $x(f)$  ورودی در حوزه‌ی فرکانس است؛ در معادله‌ی  $3$  نیز  $y(f)$  در حوزه‌ی فرکانس است. منظور از «تابع تبدیل» تابعی است که بهترین برآش را بر پاسخ‌های فرکانسی داشته باشد. به همین دلیل، معیاری که بیان‌گر همخوانی



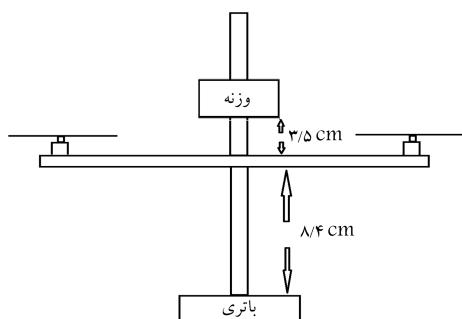
شکل ۴. فرایند کلی پروژه.



شکل ۶. اعتبارسنجی با ورودی دابلت در مرحله‌ی اول، مود طولی.



شکل ۷. اعتبارسنجی با ورودی دابلت در مرحله‌ی اول، مود عرضی.



شکل ۸. نمایی از محل قرارگیری وزنه‌های موجود در چهارپره.

مرحله‌ی دوم: در این مرحله وزنه‌ی  $50\text{ kg}$  در ارتفاع  $3/5$  سانتی‌متری بالای صفحه‌ی مرکزی قرار داده شده است، ولذا مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی در معادله‌ی  $17$  نشان داده شده است.

$$Z_m = \frac{(0.8 \times -8.4) + (0.5 \times 3.5)}{1.3} = -3.82\text{ cm} \quad (17)$$

نمایی قرارگیری وزنه‌ها در سیستم در شکل ۸ ارائه شده است. اعمال این وزنه به پرنده و محل نصب آن روی چهارپره، باعث بالا آمدن مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی شده و سامانه نسبت به حالت اول ناپایدارتر می‌شود. توابع تبدیل طولی و عرضی چهارپره با استفاده از برنامه‌ی سایفر به دست آمده است. برای بررسی توابع

تاکنون بیش از  $30$  پروژه‌ی پروازی توسط این برنامه انجام شده، مورد استفاده قرار گرفته است. نهایتاً توابع تبدیل مناسب با پاسخ فرکانسی حاصله محاسبه شده است.<sup>[۲۲]</sup>

## ۵. آزمایش‌های پروازی

برای اجرای تحقیق تعداد  $83$  آزمایش پروازی انجام شده است. شماره آزمایش‌های مورد استفاده برای هر مرحله به همراه مدت زمان اجرای این آزمایش‌ها در جدول  $1$  ثبت شده است. این آزمایش‌ها در چهار مرحله‌ی کلی صورت گرفته که جزئیات هر یک در ادامه تشریح می‌شود.

مرحله‌ی اول: در این مرحله، چهارپره بدون اتصال وزنه‌ی اضافی شناسایی شده است.

هدف از این شناسایی به دست آوردن تمام قطب‌های دینامیکی سامانه در محورهای طولی و عرضی چهارپره است. در این مرحله وزنه‌ی به سامانه متصل نیست و با تری در زیر پرنده نصب شده است. با توجه به این که محل با تری در پایین ترین حد خود قرار گرفته، مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی بسیار پایین قرار می‌گیرد و پرنده بسیار پایدار می‌شود. با توجه به محل قرارگیری با تری و وزنه، محل مرکز جرم در راستای محور عمودی مشخص می‌شود. جرم با تری  $0.8$  کیلوگرم، و جرم وزنه  $0.5$  کیلوگرم است و فاصله‌ی هر کدام از صفحه‌ی مرکزی بر حسب سانتی‌متر بیان می‌شود. در این قسمت با تری در ارتفاع  $4.8$  سانتی‌متر قرار داده شده است.

$$Z_m = \frac{0.8 \times -8.4}{0.8} = -8.4\text{ cm} \quad (10)$$

تابع تبدیل برازش شده در تحریک طولی واستخراج شده از برنامه‌ی سایفر در معادلات  $11$  تا  $13$  نشان داده شده است.

$$\frac{q}{\delta_{lon}} = \frac{134s}{s^2 + 70.1s^2 + 1918.2s + 26924} e^{-0.8s} \quad (11)$$

$$CF = 1.86 \quad (12)$$

$$pole = \begin{cases} -11 + 25.4j \\ -11 - 25.4j \\ -21 \end{cases} \quad (13)$$

مقدار تابع هزینه‌ی برازش شده به سیستم در معادله‌ی  $12$  نشان داده شده و مقادیر قطب‌های طولی حلقه بسته‌ی سامانه نیز در معادله‌ی  $13$  ارائه شده است.

تابع برازش شده در تحریک عرضی به همراه مقادیر تابع هزینه و مکان قطب‌های حلقه بسته‌ی سیستم در معادلات  $14$  تا  $16$  نشان داده شده است.

$$\frac{p}{\delta_{lat}} = \frac{245.3s}{s^2 + 61.3s^2 + 2485s + 49123} e^{-0.8s} \quad (14)$$

$$CF = 1.45 \quad (15)$$

$$pole = \begin{cases} -14.77 + 36.44j \\ -14.77 - 36.44j \\ -31.76 \end{cases} \quad (16)$$

نمودار اعتبارسنجی حالت اول که در آن چهارپره توسط ورودی دابلت  $^A$  تحریک شده، در شکل‌های  $6$  و  $7$  نشان داده شده است. در این شکل‌ها نمودار دامنه و فاز حاصل از تحریک ورودی سیستم بهوسیله‌ی ورودی سینوسی و دابلت تقریباً بر یکدیگر منطبق است.

جدول ۱. آزمایش‌های پروازی و مدت زمان هر آزمایش.

آزمایش	تحریک	مرحله‌ی اول	مرحله‌ی دوم	مرحله‌ی سوم	مرحله‌ی چهارم	مرحله‌ی اعتبار سنجی
زمان						
داده داده رویداد برداری (ثانیه)						
۳۱,۵۶	۳۸	-	-	-	۹۱,۳۶	۳۶
۴۵,۱۲	۳۹	-	-	۷۳,۸۸	۳۵	۷۹,۲۴
۳۰,۴۵	۴۵	۶۳,۲۶	۶۳	۵۰,۷۴	۵۵	۴۸,۹۷
۲۷,۹۱	۴۴	۵۴,۶۳	۶۵	۵۷,۰۸	۵۶	۴۵,۹۴
-	-	۶۰,۴۹	۷۱	۵۵,۷۷	۷۰	۵۱,۱۱
-	-	۸۶,۷۴	۷۷	۷۰,۷۸	۷۶	۸۱,۲۵
-	-	۷۱,۶۵	۸۰	۵۳,۶۱	۷۹	۶۲,۹۸
-	-	۱۰۶,۶۷	۸۳	۸۵,۹۵	۸۲	۷۴,۳۵
						۶۸,۲۶
						۳۰
						طولی
						عرضی
						۱
						۲
						۳
						۴

جدول ۲. آزمایش‌های طولی مرحله‌ی دوم.

شماره آزمایش	قطب اول	قطب دوم	قطب سوم	تابع هزینه	قطب اول
۱	-۷/۳۵ + ۳۲i	-۷/۳۵ - ۳۲i	-۷	۴,۹۵	-۳۲
۲	-۷/۳۴ + ۳۲/۹i	-۷/۳۴ - ۳۲/۹i	-۷/۳۴	۳,۷۲	-۳۲,۳
۳	-۷/۳۴ + ۳۲/۹i	-۷/۳۴ - ۳۲/۹i	-۷/۳۴	۲,۳۶	-۳۲,۳
۴	-۷/۳۴ + ۳۲/۹i	-۷/۳۴ - ۳۲/۹i	-۷/۳۴	۵,۴۲	-۳۲,۳

جدول ۳. مکان قطب‌های طولی در آزمایش‌های مرحله‌ی دوم.

قطب اول	قطب دوم	قطب سوم	فرکانس	ضریب میرابی	تابع هزینه
-۷/۳۴ + ۳۲/۶i	-۷/۳۴ - ۳۲/۶i	-۳۲/۳	۰,۲۱۷	۳۳,۷۱	

جدول ۴. آزمایش‌های عرضی مرحله‌ی دوم.

شماره آزمایش	قطب اول	قطب دوم	قطب سوم	تابع هزینه
۱	-۵/۷ + ۱۷/۷i	-۵/۷ - ۱۷/۷i	-۱۰/۷	۳,۹۱
۲	-۵/۷ + ۱۷/۸i	-۵/۷ - ۱۷/۸i	-۱۰/۶	۴,۹۴
۳	-۵/۶ + ۱۷/۸i	-۵/۶ - ۱۷/۸i	-۱۰,۶۶	۸,۵۴
۴	-۵/۶ + ۱۸/۲i	-۵/۶ - ۱۸/۲i	-۱۰,۶۸	۳,۷۵

مرحله‌ی سوم: در این مرحله وزنی ۵۰۰ گرمی در ارتفاع ۸,۵ سانتی‌متری بالای صفحه‌ی مرکزی قرار داده شده و مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی در معادله ۱۸ نشان داده شده است.

$$Z_m = \frac{(۰,۸ \times -۸,۴) + (۰,۵ \times ۸,۵)}{۱,۳} = -۱,۹ \text{ cm} \quad (۱۸)$$

با توجه به بالا آمدن مرکز جرم نسبت به دو مرحله‌ی قبلی، پایداری سامانه کاهش یافته است. نتایج آزمایش‌های بالا در جدول ۵ ثبت شده است. نمودار اعتبارسنجی مربوط به حالت

تبديل طولی پرنده در این حالت، چهار آزمایش متوالی صورت گرفته که شرح آن در جدول ۲ بیان شده است. با میانگین‌گیری از چهار پرواز انجام شده، مکان قطب‌های سیستم، ضریب میرابی و فرکانس در جدول ۳ ثبت و ارائه شده است. نمودار اعتبارسنجی مود طولی با ورودی دابلت در شکل ۹ نشان داده شده است. نتایج آزمایش‌های مربوط به قسمت عرضی نیز در جدول ۴ ارائه شده است. میانگین چهار آزمایش بالا در جدول ۵ ثبت شده است. نمودار اعتبارسنجی مربوط به حالت عرضی که توسط ورودی دابلت تحریک شده، در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

جدول ۵. مکان قطب‌های عرضی در آزمایش‌های مرحله‌ی دوم.

فرکانس	ضریب میرابی	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول
۱۸,۷۵	۰,۲۹۵	-۱۰,۶۶	-۵/۶ - ۱۷/۹i	-۵/۶ + ۱۷/۹i

جدول ۶. آزمایش‌های طولی مرحله‌ی سوم.

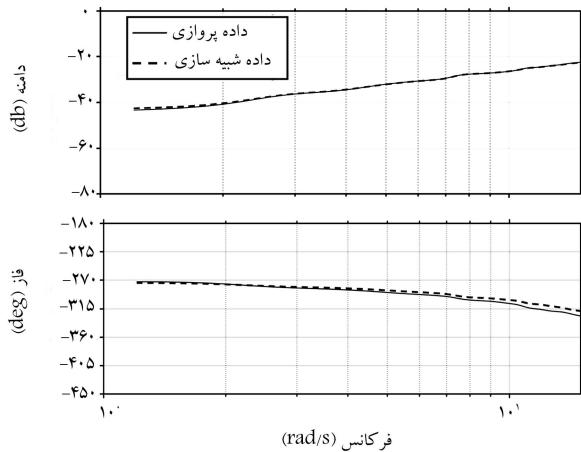
تابع هزینه	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول	شماره آزمایش
۷,۸۷	-۲۱,۸	-۵ - ۲۸/۸i	-۵ + ۲۸/۸i	۱
۹,۱۹	-۲۱,۴	-۴/۹ - ۲۹/۹i	-۴/۹ + ۲۹/۹i	۲
۹,۱۱	-۲۱,۱	-۴/۸ - ۲۹i	-۴/۸ + ۲۹i	۳
۴,۶۵	-۲۱,۴	-۴/۷ - ۲۹/۲i	-۴/۷ + ۲۹/۲i	۴

جدول ۷. مکان قطب‌های طولی در آزمایش‌های مرحله‌ی سوم.

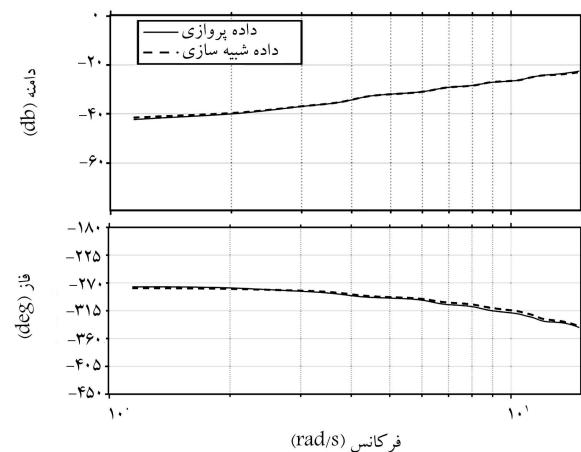
فرکانس	ضریب میرابی	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول
۲۹/۴۵	۰,۱۶۳	-۲۱,۴	-۴/۸۵ - ۲۹/۱i	-۴/۸۵ + ۲۹/۱i

جدول ۸. آزمایش‌های عرضی مرحله‌ی سوم.

تابع هزینه	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول	شماره آزمایش
۹,۶۶	-۹,۶۲	-۵ - ۱۷/۴i	-۵ + ۱۷/۴i	۱
۹,۳۱	-۹,۴۶	-۳/۸ - ۱۷/۵i	-۳/۸ + ۱۷/۵i	۲
۵,۷۷	۹,۳۱	-۳/۹ - ۱۸/۱i	۳/۹ + ۱۸/۱i	۳
۸,۹۶	-۹,۳۵	-۳/۹ - ۱۷/۷i	۳/۹ + ۱۷/۷i	۴



شکل ۱۰. اعتبارسنجی با ورودی دابلت در مرحله‌ی دوم، مود طولی.



شکل ۹. اعتبارسنجی با ورودی دابلت در مرحله‌ی دوم، مود طولی.

$$Z_m = \frac{(۰,۸ \times -۸/۴) + (۰,۵ \times ۱۱)}{۱/۳} = -۰,۹۳ \text{ cm} \quad (۱۹)$$

چهارپره در این مرحله نسبت به سه مرحله‌ی گذشته چاپک‌تر است و پایداری کم‌تری دارد. نتایج آزمایش‌های مرحله‌ی سوم طولی در جدول ۱۰ ثبت شده است. میانگین آزمایش‌های طولی در جدول ۱۱ ارائه شده است. نتایج آزمایش‌های عرضی مرحله‌ی سوم در جدول ۱۲ ثبت واراوه شده است. درنهایت، میانگین مکان قطب‌های عرضی در جدول ۱۳ ارائه شده است.

میانگین آزمایش‌های انجام شده در این حالت در جدول ۷ ثبت واراوه شده است. نتایج آزمایش‌های عرضی مرحله‌ی سوم در جدول ۸ ارائه شده است. میانگین قطب‌های عرضی در این مرحله در جدول ۹ نمایش داده شده است. به عنوان نمونه داده‌های ورودی به سیستم در آزمایش سوم مربوط به بخش عرضی در شکل ۱۱ ارائه شده است.  
مرحله‌ی چهارم: در این مرحله وزنی ۵۰۰ گرمی را در ارتفاع ۱۱ سانتی‌متری بالای صفحه قرار می‌دهیم. در این حالت مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی در ارتفاع ۹۳ سانتی‌متری قرار می‌گیرد.

جدول ۹. مکان قطب های عرضی در آزمایش سوم.

فرکانس	ضریب میرابی	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول	شماره آزمایش
۱۸/۱	۰,۲۱۳	-۹,۴۵	-۳/۹ - ۱۷/۷i	-۳/۹ + ۱۷/۷i	

جدول ۱۰. آزمایش های طولی مرحله‌ی چهارم.

	تابع هزینه	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول	شماره آزمایش
۶,۷۹	-۲۰,۲	-۰/۰۸ - ۲۹/۷i	-۰/۰۸ + ۲۹/۷i	۱	
۹,۶	-۲۰,۰۴	-۰/۵۷ - ۲۹/۸i	-۰/۵۷ + ۲۹/۸i	۲	
۲,۹۲	-۲۰,۰۴	-۰/۱۱ - ۲۹/۷i	-۰/۱۱ + ۲۹/۷i	۳	
۸,۷۳	-۲۰,۱	-۰/۰۵ - ۲۹/۸i	-۰/۰۵ + ۲۹/۸i	۴	

جدول ۱۱. مکان قطب های طولی در آزمایش چهارم.

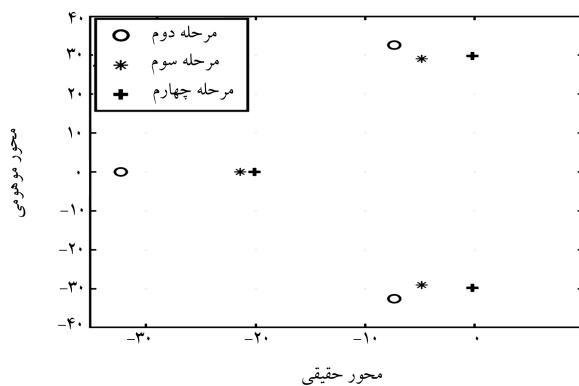
فرکانس	ضریب میرابی	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول	شماره آزمایش
۲۹/۷۵	۰,۰۰۱	-۲۰,۱	-۰/۲ - ۲۹/۷۵i	-۰/۲ + ۲۹/۷۵i	

جدول ۱۲. آزمایش های عرضی مرحله‌ی چهارم.

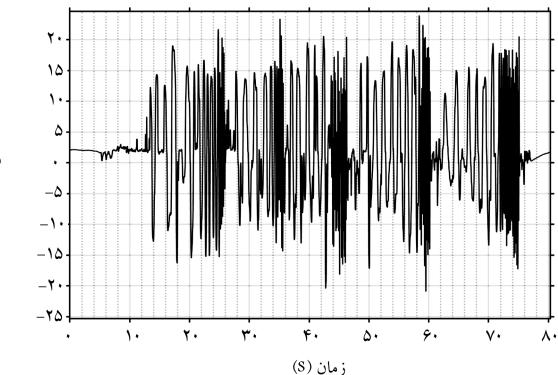
	تابع هزینه	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول	شماره آزمایش
۷,۷۷	-۱۰,۱۱	-۲/۳ - ۲۱/۴i	-۲/۳ + ۲۱/۴i	۱	
۱۵,۲	-۸,۸۶	-۲/۵ - ۲۰/۴i	-۲/۵ + ۲۰/۴i	۲	
۸,۷۷	-۸,۹	-۱ - ۲۰/۴i	-۱ + ۲۰/۴i	۳	
۱۰,۱۴	-۱۰,۱۱	۲/۶ - ۲۰/۹i	-۲/۶ + ۲۰/۹i	۴	

جدول ۱۳. مکان قطب های عرضی در آزمایش چهارم.

فرکانس	ضریب میرابی	قطب سوم	قطب دوم	قطب اول	شماره آزمایش
۲۰/۷۵	۰,۰۱	-۹,۵	-۲/۲ - ۲۰/۶i	-۲/۲ + ۲۰/۶i	



شکل ۱۲. مکان جایه‌جایی قطب های طولی با جایه‌جایی مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی.



شکل ۱۱. ورودی اعمال شده برای تحریک سیستم.

در حالت های مذکور دارای سه قطب منفی است که دو قطب آن مختلط مزدوج و یک قطب آن حقیقی و منفی تراز دو قطب مختلط دیگر است. چنان که در شکل ۱۲ مشاهده می شود، با بالاتر فتن مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی در حالت های دوم، سوم و چهارم مقایسه های آن ها با یکدیگر نشان می دهد که در جایه‌جایی مکان قطب های طولی با توجه به شکل ۱۲، چهار پره

بررسی جایه‌جایی مکان قطب های طولی و عرضی با جایه‌جایی مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی در حالت های دوم، سوم و چهارم مقایسه های آن ها با یکدیگر نشان می دهد که در جایه‌جایی مکان قطب های طولی با توجه به شکل ۱۲، چهار پره

## ۶. تحلیل نتایج

چهارپره به دست آورده شود. برای بی بعد کردن می توان، مکان مرکز جرم را که بر حسب سانتی متر از صفحه میگزینی بیان شده، بر فاصله هی قطری دو موتور که بر حسب سانتی متر اندازه گیری شده، تقسیم کرد. با توجه به این که طول دسته های متصل کننده موتور به بدنه، خود تابعی از توان موتور است و موتور آن نیز نوع ملخ مورد نیاز را تعیین می کند، می توان قابل قبول بودن این پارامتر بی بعد را اثبات کرد.

$$w = \frac{z_m}{L} \quad (20)$$

که در آن  $z_m$  برابر فاصله هی مرکز جرم در راستای محور عمودی تا مرکز صفحه و  $L$  فاصله هی میان دو شفت موتور های قطری است که ضریب بی بعد  $w$  را می سازند. بررسی قطب های طولی هواپیما (شکل ۱۲) نشان می دهد که با بالاتر رفتن مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی کلیه قطب های سامانه به سمت راست حرکت می کنند و در آزمایش حالت چهارم، دو قطب مختلط بسیار به محور موهومی نزدیک می شوند. همین فایند در بررسی قطب های عرضی هواپیما نیز وجود دارد. با توجه به شکل ۱۳، با بالاتر رفتن مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی، بدون هرگونه تغییر در آرایش قطب ها، مکان کلی قطب های آن به سمت راست حرکت می کند.

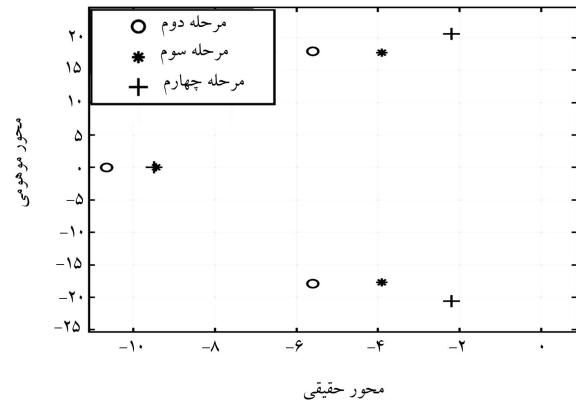
در شکل های ۱۴ و ۱۵ مشاهده می شود که با بالاتر رفتن مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی، مقدار ضریب میرایی برای هر دو حالت طولی و عرضی به سمت منفی حرکت می کند و اگر مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی در ارتفاع ۰,۸- سانتی متر قرار داده شود، مقدار ضریب میرایی صفر می شود. با صفر شدن این ضریب، چهارپره رفتار نوسانی دائمی خواهد داشت. با بالاتر آمدن این ارتفاع، ضریب میرایی چهارپره واگرا می شود. در نتیجه اگر وزنه در ارتفاع ۱۱,۳۶ سانتی متری قرار بگیرد، پرنده به مرز ناپایداری می رسد.

$$w_{instability} = \frac{-0,8}{49,8} = -0,016 \quad (21)$$

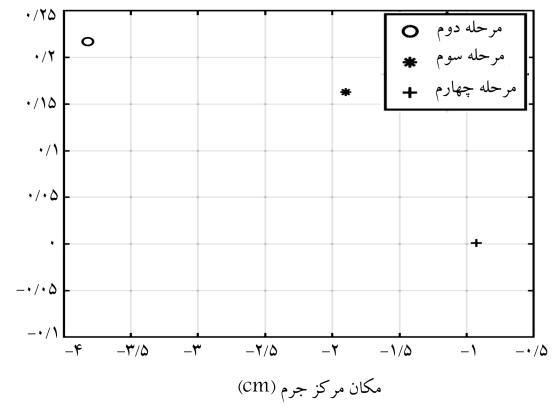
در نتیجه می توان گفت که در تمامی چهارپره ها در این مقدار بی بعد، دو قطب ناپایدار روی محور موهومی قرار می گیرند. علت منفی شدن این مقدار وجود موتور و سامانه های اندازه گیری است که وزن آن ها بالاتر از سطح مرکزی قرار گرفته است. در واقع در تحلیل بالا تنها وزن باتری و محموله به عنوان عامل تأثیرگذار در تغییرات مرکز جرم در راستای محور عمودی در نظر گرفته شده است. با قرار گرفتن این دو قطب روی محور موهومی، پرنده در هنگام بلند شدن دچار لرزش های فرماونی می شود و حتی ممکن است که چهارپره واگرا شود. دلیل واگرایی سریع تر مود طولی، عدم تقارن به دلیل نصب تجهیزات اندازه گیری است که این عدم تقارن باعث شده است که پرنده در مود طولی حساس تر باشد. همچنین با توجه به شکل های ۱۴ و ۱۵ می توان ضریب میرایی دلخواه پرنده را از طریق جایابی صحیح مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی انتخاب کرد، و نیز می توان به درک صحیحی از رفتار میرایی مودهای طولی و عرضی چند پره های جرم متغیر طی پرواز دست یافت.

## ۱.۶. اعتبارسنجی و تکرار پذیری نتایج

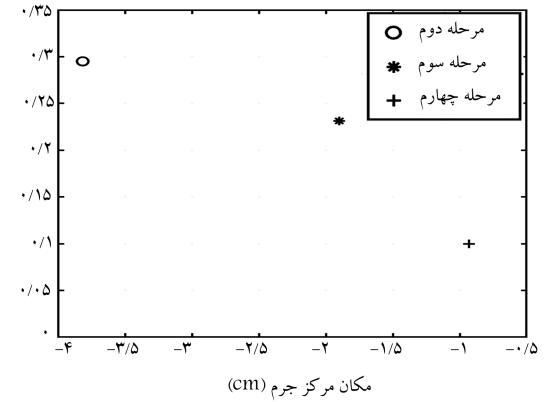
برای بررسی عدم قطعیت در آزمایش های انجام شده، در هر مرحله از اجرای آزمایش و در هر راستا، داده برداری برای چهار مرتبه تکرار و داده های مربوطه تحلیل شده اند. سپس با میانگین گیری از نتایج حاصل از چهار آزمایش، نتایج حاصله به عنوان نتایج به دست آمده از تحریک سینمومو سی چهارپره بیان شده است. در گام بعدی چهارپره با



شکل ۱۳. مکان جایه جایی قطب های عرضی با جایه جایی مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی.



شکل ۱۴. تغییرات ضریب میرایی طولی با جایه جایی مرکز جرم در راستای محور عمودی.



شکل ۱۵. تغییرات ضریب میرایی عرضی با جایه جایی مرکز جرم در راستای محور عمودی.

آزمایش حالت چهارم، دو قطب مختلط بسیار به محور موهومی نزدیک می شوند. آرایش مکان قطب های عرضی همانند قطب های طولی، در شکل ۱۳ نشان داده شده است. همچنین برای بررسی ناپایداری طولی و عرضی چهارپره، مقدار ضریب میرایی چهارپره برای هر دو راستای طولی و عرضی در شکل های ۱۴ و ۱۵ نشان داده شده است.

برای آن که استفاده از پاسخ های حاصله در تمامی چهارپره ها ممکن شود، باید ضریب بی بعدی استخراج شود و سپس بر حسب این ضریب، نقطه ناپایداری

جدول ۱۴. نتایج مربوط به آزمایش‌های تکرارپذیری.

نوع تحریک	قطب اول	قطب دوم	قطب سوم	ضریب میرایی فرکانس
طولی	$0/12 + 29/5i$	$0/12 - 29/5i$	$-20/0$	$-0/004$
عرضی	$-1/15 + 21/6i$	$-1/15 - 21/6i$	$-12/42$	$0/053$

با توجه به ضریب بی بعد  $16/0 - 0/0$ ، مقدار مرکز جرم باید در  $8/0 - 0/0$  سانتی‌متری زیر صفحه‌ی مرکزی قرار داشته باشد که با استفاده از جایابی باتری در مکانی مناسب، مرکز مقل چهارپره در مکان مورد نظر قرار داده شده است. نتایج به دست آمده برای تحریک‌های طولی و عرضی در جدول ۱۴ آراوه شده است.

با توجه به جواب‌های به دست آمده از جدول ۱۴ می‌توان گفت که نتایج حاصل از آزمایش‌های تکرارپذیری کاملاً بر پاسخ‌های مربوط به چهارپرهی اصلی منطبق و هماهنگ است.



شکل ۱۶. چهارپرهی مورد استفاده در آزمون تکرارپذیری.

با حرکت مکان مرکز جرم یک چهارپرهی مشخص در راستای محور عمودی به سمت بالا، قطب‌های طولی و عرضی سامانه، بدون تغییر آرایش به سمت راست محور حقیقی حرکت می‌کنند و چهارپره به مرز ناپایداری نزدیک می‌شود. با قرار گرفتن وزنه‌ی  $500\text{ g}$ رمی در ارتفاع  $11/3$  سانتی‌متری، قطب‌های مختلط روی محور موهومی قرار می‌گیرند. با بررسی روند جایه‌جایی، مقدار ضریب میرایی هنگامی به صفر می‌رسد که مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی در  $8/0 - 0/0$  سانتی‌متر قرار بگیرد. در نتیجه، با قرار گرفتن وزنه در ارتفاع  $11/36$  سانتی‌متر این مرز ناپایداری حاصل می‌شود. نهایتاً با بی‌بعدسازی مشخص شد چنانچه مکان مرکز جرم ناشی از بار اضافه شده به چهارپره در عدد بی بعد  $16/0 - 0/0$  قرار بگیرد، سامانه به مرز ناپایداری خواهد رسید. همچنین با استفاده از شکل‌های  $14$  و  $15$  می‌توان مکان مرکز جرم در راستای محور عمودی را به نحوی قرار داد که رفتار سیستم از لحاظ میرایی به صورت دلخواه در هر راستا تعیین شود.

استفاده از ورودی دابلت به صورت مجدد تحریک شده و با نتایج حاصل از میانگین تحریک با ورودی سینوسی مورد مقایسه قرار گرفته است. برای اطمینان از نتایج به دست آمده و تکرارپذیری آزمایش‌ها، از چهارپرهی دیگری (شکل ۱۶) استفاده شده است. فاصله‌ی میان دو موتور برابر  $50$  سانتی‌متر بوده و سیستم پیش‌رانش آن از چهار موتور الکتریکی با توان  $211$  وات و با دور پیشینه  $10200$  دور در دقیقه تشکیل شده است. قطر پره‌های مورد استفاده  $9$  اینچ، و گام ملحظ  $4/5$  می‌باشد. ظرفیت باتری مورد استفاده در آزمایش  $3000$  میلی‌آمپر ساعتی با  $4$  سلوول است. بدنه‌ی چهارپره از جنس پلاستیک فشرده بوده و ساختار خرپا‌بی شکل دارد. با توجه به این که شناسایی به صورت حلقة‌بسته است، از خلبان خودکاری مشابه که در نمونه‌ی اصلی به کار رفته، بهره‌گیری شده است. وزن کلی چهارپره حدود  $1192$  گرم است و لذا این پرنده کاملاً با نمونه‌ی اصلی تفاوت دارد.

## پانوشت‌ها

1. black box
2. gray box
3. Pixhawk
4. Ardupilot
5. Mission Planer
6. Michel Oborne
7. ames
8. doublet

## منابع (References)

1. Hassanalian, M., Khaki, H. and Khosrawi, M. "A new method for design of fixed wing micro air vehicle", *Proc. Inst. Mech. Eng. J. Aerosp. Eng.* **229** pp. 837-850 (2014).
2. Hassanalian, M. and Abdelkefi, A. "Classifications, applications, and design challenges of drones: a review, *Progress in Aerospace Sciences*, **91**, pp. 99-131 (2017).
3. Radmanesh, M., Hassanalian, M., Feghhi, S.A. and et al. "Numerical investigation of azarakhsh MAV", *Proceeding of International Micro Air Vehicle Conference (IMAV2012), Braunschweig, Germany*, pp. 3-6 July (2012).
4. McMichael, J.M. and Francis, M.S. "Micro air vehicles - toward a new generation of flight", USAF, DARPA TTO document, July (1996).
5. Sibilski, K. "Dynamics of micro-air vehicle with flapping wings", *ActaPolytechnica*, **44**, pp.15-21 (2004).

6. Binenko, V.I., Andreev, V.L. and Ivanov, R.V. "Remote sensing of environment on the base of the microavition", in: *Proceedings of the 31st International Symposium on Remote Sensing of Environment, Saint Petersburg, Russia*, pp. 20-24 (May 2005).
7. Sitnikov, N., Borisov, Y., Akmulin, D. and et al. "Unmanned aerial vehicles (UAV) in atmospheric research and satellite validation", In: *Proceedings of the 40th COSPAR Scientific Assembly.*, Moscow, Russia, pp. 2-10 (August 2014).
8. Rodriguez, R.M., Alarcón, F., Rubio, D.S. and et al. "Autonomous management of an UAV airfield", in: *Proceedings of the 3rd International Conference on Application and Theory of Automation in Command and Control Systems*, Naples, Italy, pp. 28-30 (May 2013).
9. <http://air-vid.com/wp/20-great-uav-applications-areas-drones>.
10. <https://www.microdrones.com/en/applications/>.
11. <http://appleinsider.com/articles/15/11/30/amazon-teases-new-details-of-planned-prime-air-drone-delivery-service>.
12. <http://www.techspot.com/news/62412-two-delivery-drones-built-google-soontes-ted-us.html>.
13. Heutger, M. "Unmanned aerial vehicle in logistics: a DHL perspective on implications and use cases for the logistics industry", DHL Customer Solutions & Innovation, Troisdorf, Germany (2014).
14. Wei, W., Tischler, M.B., Cohen, K. "System identification and controller optimization of a quadrotor UAV", *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference* (January 2015)
15. Wei, W., Tischler, M.B., Schwartz, N. and et al. "Frequency-domain system identification of a quadrotor controller, *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, January (2014).
16. Panizza, P., Riccardi, F. and Lovera, M. "Black-box and grey-box identification of the attitude dynamics for variable-pitch quadrotor", ELSEVIER (2015).
17. Wei, W., Chohen, K. "Development of an effective system identification and control capability for quad-copter UAVs", PHD thesis University of Cincinnati (January 2015).
18. [https://docs.px4.io/en/flight\\_controller/pixhawk.html](https://docs.px4.io/en/flight_controller/pixhawk.html).
19. Liu, Y. "Development of a controller and indoor flight test experiment for research on quadrotor gust response", Master Thesis, the Pennsylvania state University (August 2017).
20. Morris, D., Chen, X., Kind, A. "Real-time system identification of quadrotor dynamics", *13<sup>th</sup> IEEE Conference on Industrial Electronics and Application (ICIEA)* (2018).
21. Banazadeh, A., Nobahari, H. and Seifouripour, Y. "Identification of state space dynamics of a fixed-wing aerial vehicle with neural networks using flight test data", *Mechanical Engineering*, doi: 10.24200/j40.2019.20840 (2019) (in Persian).
22. Tischler, M.B. and Remple, R.K., *Aircraft and Rotorcraft System Identification*. 2nd edition, AIAA Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, NY, pp.12-17 (2012).
23. Garcia Carrillo, L.R., Dzul López, A.E., Lozano R. and et al. "Modeling the quad-rotor mini-rotorcraft. in: quad rotorcraft control", *Advances in Industrial Control*. Springer, London (2013).