

بررسی کمانش و ناپایداری وابسته به ابعاد ناشی از نیروهای تکیه گاهی و میدان الکترواستاتیک در

میکرو ورق های توخالی متخلخل

مهدی مجاهدی^۱ - مجیدرضا آیت اللهی^۲ - محمد مجاهدی^۳

^۱دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی-دانشگاه شهید بهشتی

^۱دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی مهندسی گلپایگان، دانشگاه صنعتی اصفهان

^۲استاد، دانشکده مهندسی مکانیک-دانشگاه علم و صنعت ایران

^۳دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

mojahedi62@gmail.com

m.ayat@iust.ac.ir

mojahedi74@gmail.com

چکیده

در این مقاله، ناپایداری و کمانش ناشی از نیروهای تکیه گاهی در میکروورق های متخلخل تحت میدان الکترواستاتیک از طریق تئوری کوپل تنش اصلاحی و با استفاده از روش های نیمه تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار می گیرد. ورق به صورت متخلخل در نظر گرفته شده و توزیع تخلخل به فرم غیریکنواخت لحاظ می گردد. همچنین روشی بر مبنای مشتق گیری برای محاسبه بار کمانش و ولتاژ ناپایداری ارائه می شود که این روش با نتایج ناپایداری و کمانش حاصل از نمودارهای روش گالرکین مقایسه و درصد خطای این روش بررسی می گردد. در بخش نتایج، تفاوت تئوری های کلاسیک و غیرکلاسیک مورد مطالعه قرار گرفته و تأثیر پارامترهای نظریه غیرکلاسیک و نسبت تخلخل بر جابجایی، ولتاژ ناپایداری و بار کمانش مورد مطالعه قرار می گیرد. تغییرات نسبت تخلخل منجر به تغییرات یکنواخت بار کمانش و ولتاژ ناپایداری شده و روابط خطی برای محاسبه بار کمانش و ولتاژ ناپایداری بر حسب تغییرات نسبت تخلخل به دست می آید.

واژه های کلیدی

متخلخل، کمانش، تئوری وابسته به ابعاد، روش عددی، ناپایداری.

Investigating of size-dependent buckling and instability caused by support forces and electrostatic field in porous annular microplates

¹Associate Professor, Mechanical Engineering Group, Golpayegan College of Engineering, Isfahan University of Technology

²Associate Professor, Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University

³Professor, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology

⁴Master's student, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology

mojahedi3@gmail.com

m.avat@iust.ac.ir

mojahedi4@gmail.com

Abstract

In this paper, the static behavior, instability and buckling in porous micro plates under electrostatic field are investigated based on the modified couple stress theory and with regard to modeling, determining equations and solution methods. The plate is considered to be porous and the porosity distribution is considered to be non-uniform. The equations are obtained considering the distributed support load. By using the definition of dimensionless parameters such as load, voltage and length scale, the equations of motion become dimensionless. It can be seen that in the special case, by removing the dimensionless non-classical parameters, the equation of the classical plate under the electrostatic field is obtained. Galerkin mode summation and numerical methods are utilized to solve the static deformation equation and assess the pull-in instability voltages and buckling loads. Convergence analysis is done and the number of approximation functions and elements required for both methods are calculated and the compatibility of the results obtained from the two methods is examined. In the results section, the difference between classical and non-classical theories is examined and the effect of dimensionless parameters of length scale and porosity ratio on maximum displacement, pull-in instability voltages and buckling load is studied. The results show that the use of modified stress couple theory leads to a very large stiffness prediction compared to classical theory. This result highlights the necessity of using the modified couple stress couple theory for the micro-scale. It is observed that the length scale parameter plays the role of stiffening. The change of porosity ratios also shows that as this ratio increases, the displacement increases and the stable areas decrease. Variations in this ratio lead to uniform changes in buckling load and pull-in instability voltage, and linear relationships are obtained to calculate buckling load and pull-in instability voltage versus porosity ratio. Also, in small values of support load, it is shown that the relationship between the instability voltage and the compressive load of the support is linear, but in the buckling range, this relationship is not linear.

Keywords: Porous, Buckling, Size dependent theory, Numerical method, Instability.

دلیل نادیده گرفتن خواص و پیکربندی ابعاد کوچک، ابزاری مطمئن نمی‌باشد. مطالعات متعددی برای غلبه بر این محدودیت‌ها در شبیه‌سازی رفتار مکانیکی میکرو/نانو سازه‌ها انجام شده است. نظریه‌های گرادیان کرنش، کوپل تنش و همچنین کوپل تنش اصلاحی از جمله تئوری‌های معتبری می‌باشند که در سالین گذشته برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی سازه‌های میکرو مورد استفاده قرار گرفته‌اند که در این بین نظریه کوپل تنش اصلاحی به دلیل دقت نسبتاً مناسب و سادگی اعمال در مدل‌سازی با اقبال بیشتری مواجه گردیده است [۱۸-۱۲]. در این تئوری، انرژی کرنشی به صورت تابعی از تانسور انحنای و تانسور کرنش آمده است. در تئوری کوپل تنش اصلاحی به دلیل وجود تنش‌ها و کرنش‌های غیرکلاسیک مراتب بالا و کوپل‌های ایجاد شده، پارامتر جدیدی به نام پارامتر مقیاس طول را تعریف می‌کنند که این پارامتر ارتباط میدان جابه‌جایی و تنش را در همسایگی یک نقطه بیان می‌کند. در فرمول کوپل تنش اصلاحی، از روابط تعادلی نیروها و گشتاور نیروها استفاده می‌شود [۱۹].

فورجان و همکاران [۲۰] به بررسی ارتعاشات یک میکرو صفحه حلقوی کامپوزیت چندلایه با استفاده از نظریه کوپل تنش اصلاحی پرداختند. ساختار با یک پایه از طریق مدل کلین-ویت شبیه‌سازی شده است. معادلات حاکم غیرکلاسیک و شرایط مرزی میکرو صفحه حلقوی وابسته به اندازه با افزودن گرادیان چرخش متقارن و تانسورهای تنش مرتبه بالاتر به انرژی کرنش به دست می‌آیند. معادلات حاکم غیرکلاسیک با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته برای شرایط مرزی مختلف حل می‌شوند. آن‌ها نشان دادند که افزایش پارامتر ویسکوالاستیک نمی‌تواند تغییری در فرکانس دیسک ایجاد کند. آرشید و همکاران [۲۱] ارتعاش آزاد و کماتش مکانیکی یک میکرو تیر سه لایه را که تحت بار مغناطیسی لورنتس در بستر ویسکوالاستیک قرار گرفته است، با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاحی بررسی نمودند. اثر محیط حرارتی بر خواص مکانیکی در نظر گرفته شده و معادلات حاکم بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر و روش انرژی استخراج شده و با بهره‌گیری از روش ناویر حل شده است. در نتایج، فرکانس‌های طبیعی و بارهای کماتشی بحرانی با افزایش زاویه باز شدن مرکزی کاهش یافته و افزایش ضریب تخلخل، مقادیر ذکر شده را کاهش داده است.

در پژوهش زندکریمی و همکاران [۲۲]، کماتش حرارتی و رفتار پس کماتش وابسته به اندازه یک میکرو صفحه مدور تابعی مدرج تحت میدان افزایش دما یکنواخت و شرایط مرزی گیردار بررسی شده است. معادلات تعادل و شرایط مرزی بر اساس تئوری کوپل تنش اصلاحی،

ورق‌ها عضو بسیار مهمی از سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیک رایج در حسگرها و عملگرها هستند که در این مجموعه‌ها، به عنوان المان اصلی انعطاف‌پذیر برای اندازه‌گیری و انجام عملی خاص مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرند [۱]. مواد متخلخل ترکیبی از عناصر جامد با مایع یا گاز می‌باشند. چوب‌ها، سنگ‌ها و اسفنج‌ها نمونه‌ای از این مواد هستند. فوم‌های فلزی نیز نمونه‌ای از مواد متخلخل می‌باشند که وزن کم و سختی قابل توجه سبب شده است که کاربرد آن‌ها به عنوان مواد پیشرفته در زمینه‌های مختلف علوم رشد پیدا نماید. مشخصه مهم این مواد، تخلخل می‌باشد که پارامتر مربوطه نسبت حجم حفره‌ها به حجم کل را نشان می‌دهد. افزایش تخلخل در یک ماده متخلخل منجر به افزایش حفره‌ها و متعاقباً افزایش سختی و کاهش چگالی (جرم ویژه) ماده می‌شود. از طرفی توزیع تخلخل در ماده در عملکرد مکانیکی سازه تأثیر حائز اهمیتی دارد [۲، ۳]. از توزیع‌های رایج تخلخل در فوم‌های فلزی و نیمه فلزی، توزیع یکنواخت و توزیع مدرج تابعی می‌باشد [۴، ۵].

در زمینه استفاده از مواد متخلخل فعالیت‌های متنوعی در سالین اخیر انجام پذیرفته است [۶-۸]. در همین راستا، جلالی و سیوالک [۹] ناپایداری دینامیکی نانو تیر متخلخل ویسکوالاستیک مدرج تابعی تعبیه شده بر روی محیط ویسکو پاسترناک که تحت یک بار نوسان محوری و همچنین میدان مغناطیسی قرار گرفته است را مورد بررسی قرار دادند. خو و همکاران [۱۰] رفتار ارتعاشی یک نانوتیر خمیده متخلخل را با توجه به نظریه گرادیان کرنش غیرموضعی مورد بررسی قرار داده و تغییر شکل و تنش‌های نرمال و برشی وابسته به زمان را که توسط بار دینامیکی القاء می‌شود، محاسبه نمودند. آن‌ها از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا (با در نظر حرکات کوپل شده) در به دست آوردن معادله حرکت بهره گرفته و اثرات تخلخل را در پاسخ دینامیک مطالعه کردند. در پژوهش سعید و همکاران [۱۱]، ارتعاشات آزاد میکرو تیر ساندویچی با هسته متخلخل و ورق‌های تقویت شده نانو لوله کربنی مدرج تابعی روی بستر وینکلر- پاسترناک بررسی گردیده است. آن‌ها تیر را تحت بار حرارتی در نظر گرفته و مولفه‌های جابجایی را بر اساس تئوری تغییر شکل برشی سینوسی بیان نمودند. اثرات مقیاس با توجه به تئوری کوپل تنش اصلاحی لحاظ گردیده است. آن‌ها نتیجه گرفتند که با افزایش تخلخل فرکانس کاهش می‌یابد.

در گذشته به منظور تحلیل و شبیه‌سازی سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیک از دو روش دینامیک مولکولی و روش مکانیک محیط پیوسته استفاده می‌شد. روش دینامیک مولکولی معمولاً نیاز به زمان محاسبات طولانی دارد و روش مکانیک محیط پیوسته کلاسیک نیز به

نظریه صفحه کلاسیک و ترم غیرخطی فون کارمان به دست آمده است. اثرات پارامتر مقیاس طول، شاخص قانون توان و نسبت ضخامت به شعاع بر کماتش حرارتی و رفتار پس کماتش میکرو صفحه‌ای دایره‌ای بررسی شده است.

شاهرخی و همکاران [۲۳] یک تابع گرین برای تحلیل خمشی میکرو صفحات تحت یک بار نامتقارن پیشنهاد دادند و با در نظر گرفتن اثر مقیاس طول، از نظریه کوپل تنش اصلاحی استفاده کردند. معادله تعادلی وابسته به ابعاد میکرو صفحه دایره‌ای تحت بار غیرمحوری با استفاده از حداقل اصل انرژی پتانسیل کل به دست آمده و نشان داده شده است که مقیاس طولی تأثیر معنی داری بر خمش میکرو صفحات دارد.

سیمسک و همکاران [۲۴] خمش استاتیکی و ارتعاش اجباری یک میکرو صفحه مدرج تابعی حامل بار متحرک را بر اساس نظریه صفحه میندین نظریه کوپل تنش اصلاحی بررسی کردند. برای به دست آوردن پاسخ میکرو ورق از معادلات لاگرانژ استفاده شده و معادلات حرکت میکرو صفحه در حوزه زمان با استفاده از روش نیومارک حل شده است. اثرات تغییرات مواد، کسر حجمی تخلخل و هندسه تخلخل، پارامتر مقیاس طول و سرعت بار متحرک بر پاسخ‌های دینامیکی بررسی شده است.

براتی و شاهوردی [۲۵] رفتار ارتعاشی نانو صفحات سیلیکونی نانو کریستالی دولایه را که بر روی پایه وینکلر- پسترناک قرار دارد، تجزیه و تحلیل کردند. آن‌ها از نظریه کوپل تنش اصلاحی برای اثرات وابسته به اندازه استفاده کردند و معادلات حاکم را از طریق اصل همیلتون در چارچوب مدل صفحه‌ای دو متغیره بهبود یافته به دست آوردند. حسینی و همکاران [۲۶] یک مدل تحلیل ارتعاشی را برای نانو صفحه دایره‌ای با خواص ماده مدرج تابعی پیشنهاد دادند و تأثیر میدان مغناطیسی و پارامتر مقیاس طول را بر رفتار ارتعاشی بررسی کردند. آن‌ها از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری کوپل تنش اصلاحی برای دستیابی به معادلات حاکم استفاده کردند. شریفی نسب و مجاهدی [۲۷] پاسخ دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی یک میکرو رزوناتور حاوی یک میکروپول با جرم گواه واقع در وسط را بر مبنای تئوری کوپل تنش اصلاحی بررسی نمودند. جرم گواه میکرو رزوناتور توسط میدان الکترواستاتیکی به گونه‌ای تحریک می‌شود که با اعمال یک ولتاژ مستقیم موقعیت تعادل خاصی پیدا می‌کند و سپس تحت ولتاژ متناوب به لرزش در می‌آید. با اتخاذ تئوری کوپل تنش اصلاح شده و در نظر گرفتن تحریک الکترواستاتیکی، معادله دینامیکی حرکت با استفاده از اصل همیلتون توسعه یافته به دست

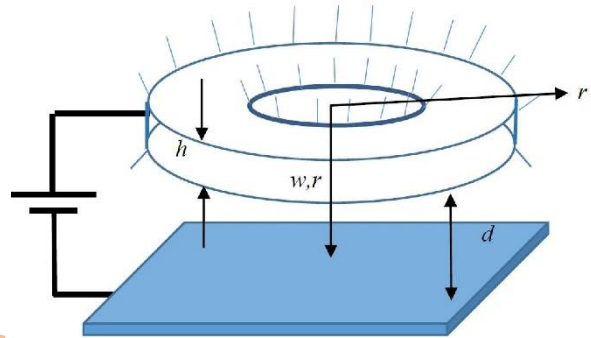
آمده است. علاوه بر این، با تقریب روش گالرکین، معادله حاکم بر حرکت استاتیکی و نوسانی کاهش می‌یابد و معادله حاصل با روش‌های تحلیلی (مقیاس‌های چندگانه) و عددی حل گردیده است. برای شبیه سازی رفتار دینامیکی و استاتیکی وابسته به ابعاد در میکرو ورق‌های نازک، مائو و همکاران [۲۸] یک المان ورق مثلثی سه گره‌ای ناسازگار را با استفاده از اصل لاگرانژ- دالامبر به دست آوردند. مسیوی و همکاران [۲۹] انتشار موج را در میکرو ورق‌های ساندویچی ویسکوالاستیک توسط نظریه زیگزاگ اصلاح شده و تئوری کوپل تنش اصلاحی بررسی نمودند. سازه متشکل از هسته کامپوزیتی تقویت شده گرافنی و لایه‌های پیزوالکتریک به عنوان حسگر و محرک می‌باشد. لایه‌های هسته و پیزوالکتریک در معرض میدان الکترومغناطیسی قرار دارند. مدول یانگ، چگالی جرم و نسبت پواسون بر اساس مدل اصلاح شده هالپین-تسای و قانون مخلوط‌ها محاسبه و خواص ویسکوالاستیک سازه با مدل کلونین-ویت شبیه سازی شده است. شیائو و همکاران [۳۰] راه‌حلی عددی برای پایداری و یافتن فرکانس نانو صفحه مستطیلی ساخته شده از مواد الکتریکی انجام شده است. برای مدل سازی عوامل وابسته به اندازه سیستم‌های نانو الکترومکانیکی پیزوالکتریک، نظریه کوپل تنش اصلاحی با یک پارامتر مقیاس طول و یک عامل غیرموضعی ارائه شده است.

در پژوهش حاضر، به بررسی رفتار استاتیکی و ناپایداری میکرو ورق‌های دایره‌ای متخلخل در میدان الکترواستاتیک پرداخته می‌شود. این ورق دارای تخلخل بوده و توزیع تخلخل در آن به صورت مدرج تابعی است. با توجه به نوع کاربرد، شرایط مرزی به صورت تمام گیردار در نظر گرفته می‌شود. اثر بار فشاری ناشی از تکیه‌گاه و همچنین تأثیر نیروی الکترواستاتیک ناشی از اختلاف پتانسیل الکتریکی بین ورق و لایه ثابت، در مدل سازی و تعیین معادلات حاکم لحاظ می‌گردد. در تبیین تغییر شکل ورق و تنش‌های آن، با توجه به ابعاد سازه، از تئوری کوپل تنش اصلاحی که مورد اقبال گسترده محققان در سال‌های اخیر بوده است، بهره گرفته می‌شود. در مدل سازی، تئوری ورق کلاسیک به کار گرفته خواهد شد و معادلات تغییر شکل استاتیکی ورق متخلخل با استفاده از روش‌های انرژی به دست می‌آید. معادلات با استفاده از روش‌های کاهش مرتبه حل شده و تغییر شکل استاتیکی نانو ورق تعیین می‌گردد. از آنجاکه سازه تحت تأثیر بار گسترده تکیه‌گاهی قرار دارد، در تحلیل نتایج، کماتش مورد توجه قرار گرفته و بار کماتش در حضور میدان الکترواستاتیک (اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی) محاسبه می‌شود.

۳- مدلسازی و حل مسئله

۳-۱- معادلات حاکم بر مسئله

ورق به صورت توخالی با شعاع داخلی r_a و شعاع خارجی r_b در نظر گرفته می‌شود که از دو طرف گیردار است و تحت خیز $w(r, \theta)$ قرار دارد. برای تعیین پاسخ، تحلیل ناپایداری و کماتش، ابتدا معادلات با استفاده از روش‌های انرژی، تعیین می‌شود. در شکل ۱ نمایی از یک میکروورق تحت میدان الکترواستاتیک نشان داده شده است.



شکل ۱- میکروورق تحت میدان الکترواستاتیک

در شکل فوق t و d نشان‌دهنده ضخامت میکروورق و فاصله بین صفحه ثابت و میکروورق است. همچنین ورق از ماده متخلخل تشکیل گردیده است.

برای توزیع غیریکنواخت تخلخل، از رابطه خاصیت فیزیکی در دو ماده با توزیع مدرج تابعی غیریکنواخت بهره گرفته می‌شود. که فرم خطی به صورت توزیع غیریکنواخت لحاظ می‌شود [۶].

$$E(z) = E - \Phi E \left[1 - \frac{2 \left(z - \frac{h}{2} \right)}{h} \right] \quad (1)$$

که پارامتر Φ نسبت تخلخل، E مدول یانگ، h ضخامت ورق و z متغیر موقعیت در راستای ضخامت می‌باشد.

در این بخش معادلات دیفرانسیل حرکت از طریق تئوری کوپل تنش اصلاحی تعیین می‌گردد. در تئوری کوپل تنش اصلاحی که اولین بار توسط یانگ^۱ معرفی شده، انرژی کرنش، تابعی از هر دو تانسور کرنش مربوط به تانسور تنش و انحنا مربوط به تانسور کوپل تنش است؛ بنابراین، انرژی کرنش U_s برای یک میکروورق الاستیک خطی با حجم ∇ به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۱]:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\nabla} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (2)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

در رابطه (۲)، ε_{ij} تانسور کرنش، σ_{ij} تانسور تنش، χ_{ij} تانسور متقارن انحنا و m_{ij} تانسور عرضی تنش کوپل بوده و طبق دسته روابط زیر محاسبه می‌شوند [۳۲].

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

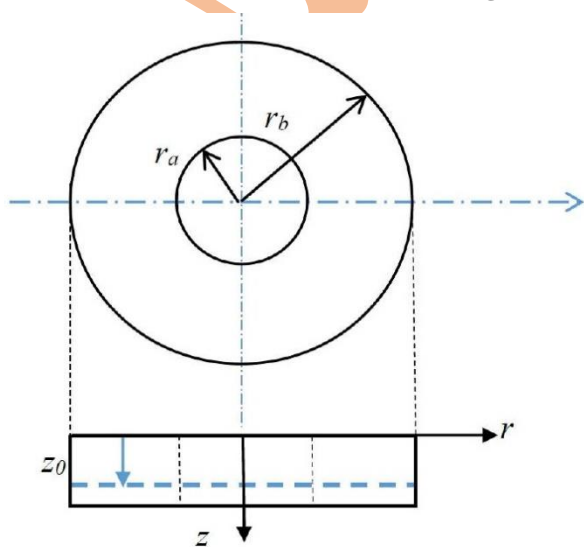
$$m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \text{curl}(\bar{u})_i$$

که u بردار جابه‌جایی، δ_{ij} دلتای کرونکر، l پارامتر مقیاس طول، θ بردار چرخش، λ و μ ثوابت لامه می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\lambda = \frac{E(z)\nu}{(l+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E(z)}{2(l+\nu)} \quad (4)$$

که ν نسبت پواسون است. همان طور که رابطه (۴) نشان می‌دهد، مقدار ضریب الاستیسیته با توجه به پارامتر تخلخل تغییر می‌کند. در شکل ۲، یک ورق متخلخل را که دارای شعاع خارجی r_b و ضخامت h است، نشان می‌دهد. با توجه به متخلخل بودن ورق، محل قرارگیری صفحه خنثی در موقعیت z_0 قرار می‌گیرد. برای مدل‌سازی سیستم مختصات استوانه‌ای (z, θ, r) همان طور که نشان داده شده است اتخاذ می‌شود.



^۱ Yong

$$z_0 = \frac{\int_0^h E(z) z dz}{\int_0^h E(z) dz} \quad (۸)$$

حال ممان‌های خمشی و ممان حاصل از کوپل تنش از طریق رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} M_{rr} &= \int_0^h \sigma_{rr} (z - z_0) dz \\ M_{\theta\theta} &= \int_0^h \sigma_{\theta\theta} (z - z_0) dz \\ \bar{M}_{r\theta} &= \int_0^h m_{r\theta} dz \end{aligned} \quad (۹)$$

با جایگزینی تنش‌ها و کرنش‌ها با میدان جابجایی مطابق با رابطه (۶)، روابط (۱۰) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned} M_{rr} &= \left[-D_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{12}}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ M_{\theta\theta} &= \left[-D_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{11}}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ \bar{M}_{r\theta} &= D_m \left(-\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (۱۰)$$

که ضرایب D_{11} ، D_{12} و D_m از طریق رابطه (۱۱) تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} D_{11} &= \int_0^h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (z - z_0)^2 dz \\ D_{12} &= \int_0^h \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} \right) (z - z_0)^2 dz \\ D_m &= \int_0^h Gl^2 dz \end{aligned} \quad (۱۱)$$

با توجه به مقادیر به دست آمده تنش‌ها و کرنش‌های کلاسیک و مرتبه بالاتر، می‌توان انرژی کرنشی را با توجه به جبر تانسوری به دست آورد:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \left[(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) \right] dV \quad (۱۲)$$

$(i, j = 1, 2, 3)$

حال طبق رابطه فوق و تفکیک انتگرال‌های وارد بر سطح و ضخامت، تغییرات انرژی پتانسیل محاسبه می‌شود:

با توجه به تقارن محوری در هندسه، بارگذاری و قیود تکیه گاهی، مسئله به صورت متقارن محوری لحاظ می‌گردد. از آنجا که بارگذاری به صورت استاتیکی اعمال می‌شود و بار الکترواستاتیکی در راستای محیطی ثابت است، تنها مدهای متقارن، به ویژه مد اول که مد غالب است، در پاسخ اثر می‌گذارند. بنابراین می‌توان از اثر مدهای نامتقارن صرف نظر نمود و پاسخ مسئله را با توجه به فرضیات متقارن محوری به دست آورد.

در مدل حاضر به دلیل نازک بودن ورق، از نظریه ورق کلاسیک استفاده می‌شود این نظریه گسترش یافته تئوری تیر اویلر برنولی برای ورق می‌باشد. بنابراین طبق ورق کلاسیک، میدان جابجایی برای مسئله متقارن محوری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} u_r(r) &= -(z - z_0) \frac{dw(r)}{dr}, \\ u_\theta(r) &= 0, \quad u_z(r) = w(r) \end{aligned} \quad (۵)$$

$w(r)$ جابجایی عرضی یک نقطه دلخواه است. با توجه به میدان جابجایی تعریف شده توسط معادله (۵)، اجزای کرنش و تانسور انحنای متقارن را می‌توان با استفاده از روابط (۶) به دست آورد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= (z - z_0) \varepsilon_{rr}^1 = -(z - z_0) \frac{d^2 w}{dr^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= (z - z_0) \varepsilon_{\theta\theta}^1 = -\frac{(z - z_0)}{r} \frac{dw}{dr}, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{r\theta} = 0 \\ \chi_{r\theta} &= \chi_{\theta r} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ \chi_{rr} &= \chi_{\theta\theta} = \chi_{zz} = \chi_{rz} = \chi_{\theta z} = 0 \end{aligned} \quad (۶)$$

حال اجزای تنش کلاسیک و مرتبه بالاتر آن را می‌توان از طریق رابطه زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \\ m_{r\theta} &= m_{\theta r} = 2\mu l^2 \chi \end{aligned} \quad (۷)$$

z_0 مختصات صفحه خنثی است که با محاسبه برآیند بار شعاعی و بار محیطی ناشی از تنش‌های شعاعی و محیطی در مقطع ورق و تعادل

$$\begin{aligned} \delta U = 2\pi \left\{ -rM_{rr} \delta \left(\frac{dw}{dr} \right) \right\}_r + \\ \frac{d(rM_{rr})}{dr} \delta w \Big|_r - M_{\theta\theta} \delta w \Big|_r \\ - r\bar{M}_{r\theta} \delta \left(\frac{dw}{dr} \right) \Big|_r + \frac{d(r\bar{M}_{r\theta})}{dr} \delta w \Big|_r + \\ \bar{M}_{r\theta} \delta w \Big|_r + \int_r \left[-\frac{d^2(rM_{rr})}{dr^2} + \frac{d(M_{\theta\theta})}{dr} \right. \\ \left. - \frac{d^2(r\bar{M}_{r\theta})}{dr^2} - \frac{d(\bar{M}_{r\theta})}{dr} \right] \delta w dr \Big\} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \delta W = 2\pi \left\{ -rP(r) \left(\frac{dw}{dr} \right) \delta w \Big|_r \right\} \\ 2\pi \int_r \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rP(r) \left(\frac{dw}{dr} \right) \right) \right. \\ \left. + q(r) \right] \delta w r dr \end{aligned} \quad (19)$$

با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل و جایگزینی گشتاورهای کلاسیک و غیرکلاسیک از رابطه (۱۰)، معادله حرکت استاتیکی و شرایط مرزی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (D_{11} + D_m) \left[\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right] - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rP(r) \left(\frac{dw}{dr} \right) \right) \\ - q(r) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

به همراه شرایط مرزی زیر:

$$\begin{aligned} w(r_a) = w(r_b) = 0 \\ \frac{dw}{dr}(r_a) = \frac{dw}{dr}(r_b) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

که بار گسترده عرضی با توجه به بار الکترواستاتیکی اعمال شده به ورق توسط رابطه (۲۲)، تعیین می‌شود.

$$q(r) = -\frac{\epsilon_0 V_d^2}{2(d-w)^2} \quad (22)$$

در رابطه فوق ϵ_0 ثابت گذردهی الکتریکی و V_d اختلاف پتانسیل مستقیم اعمالی بین ورق و الکتروود زیرین می‌باشد.

چنانچه در رابطه (۲۰)، ضرایب مربوط به اثرات کوپل تنش و بار شعاعی اعمالی حذف گردد، همان معادله تغییر شکل استاتیکی ورق کلاسیک در میدان الکترواستاتیک به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_{A_0}^h \left[\sigma_{rr} \left[(z - z_0) \delta \epsilon_{rr}^1 \right] \right. \\ \left. + \sigma_{\theta\theta} \left[(z - z_0) \delta \epsilon_{\theta\theta}^1 \right] + \sigma_{zz} (\delta \epsilon_{zz}) \right. \\ \left. + 2m_{r\theta} (\delta \chi_{r\theta}) \right] dz r dr d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

با در نظر گرفتن تقارن محوری، تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی از طریق رابطه (۱۴) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \delta U = 2\pi \int_{r_0}^h \left[\sigma_{rr} \left[(z - z_0) \delta \epsilon_{rr}^1 \right] \right. \\ \left. + \sigma_{\theta\theta} \left[(z - z_0) \delta \epsilon_{\theta\theta}^1 \right] + \sigma_{zz} (\delta \epsilon_{zz}) \right. \\ \left. + 2m_{r\theta} (\delta \chi_{r\theta}) \right] dz r dr \end{aligned} \quad (14)$$

و با در نظر گرفتن بار گسترده شعاعی تکیه‌گاهی $P(r)$ و بار گسترده عرضی الکترواستاتیک $q(r, \theta)$ و تقارن محوری، کار مجازی از طریق رابطه (۱۵) تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} \delta W = 2\pi \int_r \left[-P(r) \left(\frac{dw}{dr} \right) \delta \left(\frac{dw}{dr} \right) \right. \\ \left. + q(r, \theta) \delta w \right] r dr \end{aligned} \quad (15)$$

که δW تغییرات خیز را نشان می‌دهد. با ساده‌سازی و استفاده از ممان‌های خمشی، انرژی کرنشی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_r \left[M_{rr} \delta \epsilon_{rr}^1 + \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta \epsilon_{\theta\theta}^1 \right. \\ \left. + 2\bar{M}_{r\theta} \delta \chi_{r\theta} \right] dr \end{aligned} \quad (16)$$

با در نظر گرفتن تغییرات کرنش و انحنا برحسب جابجایی عرضی، رابطه (۱۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_r \left[M_{rr} \delta \left(-\frac{d^2 w}{dr^2} \right) + \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \right. \\ \left. \times \delta \left(-\frac{dw}{dr} \right) + \bar{M}_{r\theta} \delta \left(-\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] dr \end{aligned} \quad (17)$$

با ساده‌سازی و جایگزینی ممان‌های رابطه (۱۰) و لحاظ نمودن تقارن محوری در روابط (۱۵) و (۱۷)، روابط زیر به دست می‌آید:

$$[K] \{a^{m+1}\} = \{F^m(\{a\})\}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{Eh^3} (D_{11} + D_m)$$

$$\times \int_r \left[\frac{d^4 \phi_i}{d\hat{r}^4} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{d^3 \phi_i}{d\hat{r}^3} - \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{d^2 \phi_i}{d\hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}^3} \frac{d \phi_i}{d\hat{r}} \right] \phi_j \hat{r} d\hat{r} \quad (26)$$

$$- \hat{P} \int_r \frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} \left(\hat{r} \left(\frac{d \phi_i}{d\hat{r}} \right) \right) \phi_j \hat{r} d\hat{r}$$

$$F_j^m = \hat{V}^2 \int_r \frac{\phi_j \hat{r} d\hat{r}}{(1 - [\phi_1 \phi_2 \dots] \{a\}^m)^2}$$

به منظور استفاده از رابطه فوق، ابتدا برای $\{a\}^1$ به عنوان حدس اول مقداری در نظر گرفته می شود و مطابق با رابطه (۲۶)، بردار $\{F\}^1$ تعیین شده و طبق رابطه مذکور، مقدار $\{a\}^2$ تعیین می شود. این روند ادامه پیدا کرده تا بردار $\{a\}^m$ همگرا شده و بیشینه میزان خیز ورق به یک مقدار مشخص همگرا گردد.

با محاسبه $\{a\}$ ، میزان جابجایی با در نظر گرفتن یک و چند تابع تقریب (تا همگرایی پاسخ) تعیین می شود.

در نزدیکی کمناش، شیب منحنی جابجایی بر حسب مقادیر a بسیار بزرگ می گردد [۳۳] و این انتظار وجود دارد که پس از تفکیک ماتریس $[K]$ ، به دو بخش شامل نیروی تکیه گاهی و بدون نیروی تکیه گاهی،

تساوی $d\hat{P}/da = 0$ برقرار باشد. همچنین برای حالت ناپایداری

کششی در اثر ولتاژ، تساوی $d\eta/da = 0$ ($\eta = \hat{V}^2$) برقرار است.

بنابراین با فرآیند مشتق گیری از معادلات و حل آن ها می توان بارکمانش و ولتاژ ناپایداری کششی را مطابق با تغییرات بزرگ جابجایی در محدوده ناپایداری محاسبه نمود.

۴- نتایج:

در این بخش با توجه به روابط به دست آمده در بخش ۳، به بررسی نتایج مستخرج از مدل سازی و حل پرداخته می شود.

در جدول ۱، مشخصات میکروورق ذکر گردیده است. بر همین مبنا جابجایی و پایداری مجموعه مورد بررسی قرار می گیرد.

جدول ۱- مشخصات ورق

r_a	r_b	h	\hat{l}	E	ν
-------	-------	-----	-----------	-----	-------

$$D_{11} \left[\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right] - \frac{\epsilon_0 V_d^2}{2(d-w)^2} = 0 \quad (23)$$

۳-۲- معادلات حاکم بر مسئله

حال با در نظر گرفتن بارمحوری تکیه گاهی و بر اساس معادلات به دست آمده، تغییر شکل ورق دایره ای در میدان الکترواستاتیک بر مبنای تئوری کوپل تنش اصلاحی مورد ارزیابی قرار می گیرد. ابتدا با استفاده از توابع تقریب، پاسخ ورق به صورت ترکیبی از توابع تقریب نوشته می شود:

$$w = \sum_i a_i \phi_i(\hat{r}) \quad (24)$$

که $\phi_i(r)$ توابع تقریبی هستند که شرایط مرزی را ارضا می نمایند. با توجه به تقارن محوری، از توابع شکل مود تیر دو سردرگیر که شرایط مرزی را ارضا می نمایند، استفاده می شود. که a_i ثابت مجهول ضریب هر تابع می باشد که با تعیین آن ها، میزان جابجایی ورق در ولتاژهای مختلف محاسبه می گردد.

با جایگزینی رابطه (۲۴) در معادله دیفرانسیل تعادل رابطه (۲۰) و ضرب تابع وزنی و انتگرال گیری روی ناحیه ورق، مطابق با روش گالرکین، معادله دیفرانسیل تعادل کاهش می یابد. رابطه به دست آمده یک معادله غیرخطی است و به فرم ماتریسی مطابق با رابطه (۲۵) بیان می شود.

$$[K] \{a\} = \{F(a_1, a_2, \dots)\}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{Eh^3} (D_{11} + D_m)$$

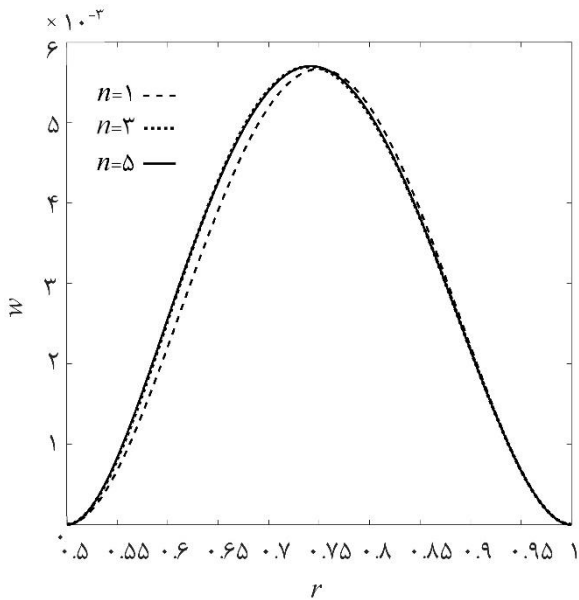
$$\times \int_r \left[\frac{d^4 \phi_i}{d\hat{r}^4} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{d^3 \phi_i}{d\hat{r}^3} - \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{d^2 \phi_i}{d\hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}^3} \frac{d \phi_i}{d\hat{r}} \right] \phi_j \hat{r} d\hat{r} \quad (25)$$

$$- \hat{P} \int_r \frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} \left(\hat{r} \left(\frac{d \phi_i}{d\hat{r}} \right) \right) \phi_j \hat{r} d\hat{r}$$

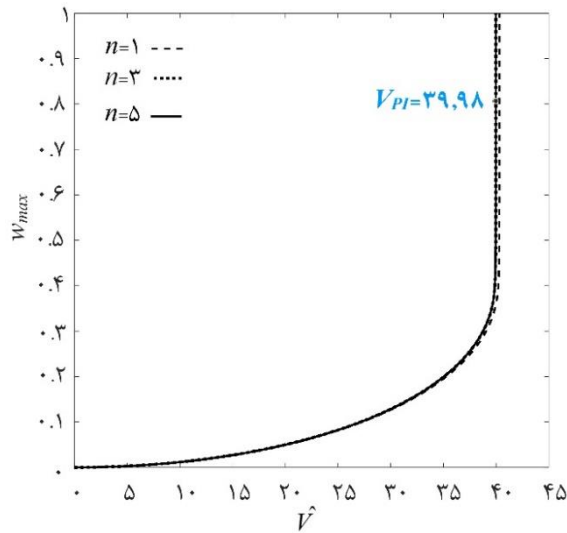
$$F_j = \hat{V}^2 \int_r \frac{\phi_j \hat{r} d\hat{r}}{(1 - \sum_i a_i \phi_i)^2}$$

که برای حل رابطه فوق، از روش سعی و خطا استفاده می شود. بدین منظور ابتدا اندیس m به بردارهای $\{F\}$ اختصاص داده می شود.

۰.۵	۱	۰.۰۱	۰.۰۲	۱۵۰ (Gpa)	۰.۳۳
-----	---	------	------	--------------	------

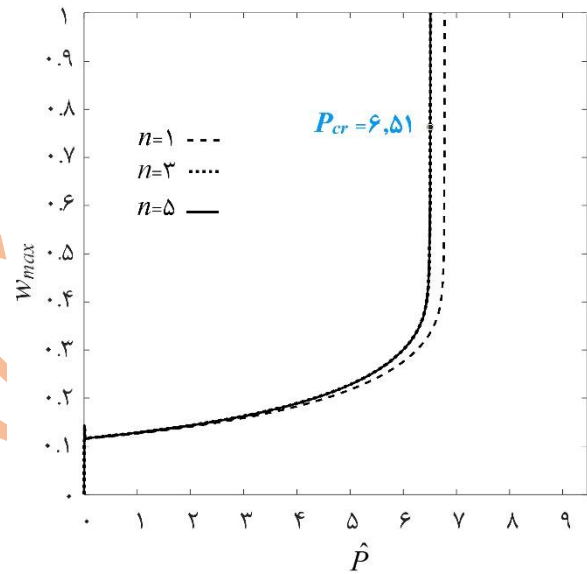


شکل ۴- همگرایی جابجایی برحسب بار شعاعی تکیه‌گاهی در تئوری کوپل تنش اصلاحی



شکل ۵- همگرایی بیشینه جابجایی برحسب ولتاژ در تئوری کوپل تنش اصلاحی

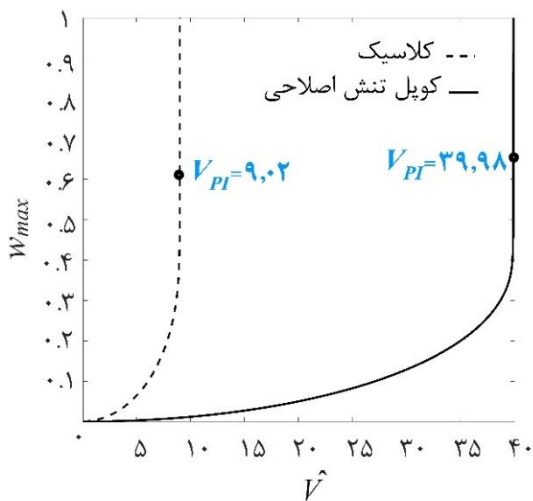
در شکل ۳ برای درصد تخلخل ۱۰، همگرایی بیشینه جابجایی، برحسب بار گسترده تکیه‌گاهی در یک ولتاژ بی بعد مشخص $\hat{V} = 7$ برای تئوری کلاسیک بررسی گردیده است. با افزایش تدریجی بار، بیشینه جابجایی افزایش یافته تا این که در بار کمانش، شیب منحنی مذکور به مقدار بزرگی می‌رسد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با در نظر گرفتن پنج تابع تقریب، همگرایی نتایج روش گالرکین حتی تا محدوده ناپایداری رخ می‌دهد.



شکل ۳- همگرایی بیشینه جابجایی برحسب ولتاژ بی‌بعد برای تئوری کلاسیک

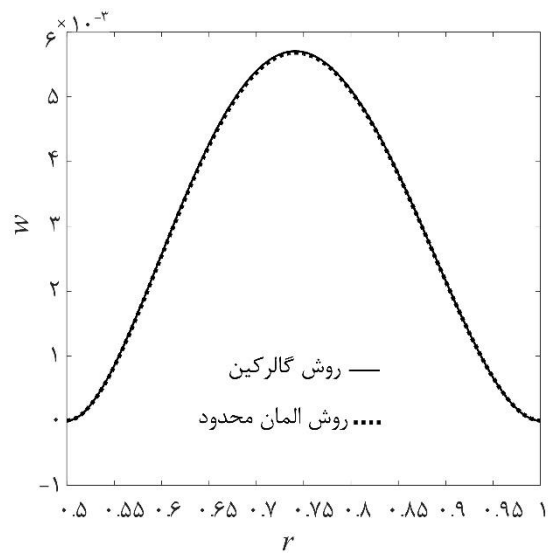
در شکل ۴، برای مقادیر بی‌بعد $\hat{V} = 7, \hat{P} = -2$ و پارامتر بی‌بعد مقیاس طول $\hat{l} = 0.02$ و درصد تخلخل مورد اشاره، نمودار جابجایی برحسب موقعیت با استفاده از روش تحلیلی با در نظر گرفتن تقریب‌های مختلف برای تئوری کوپل تنش اصلاحی ترسیم شده است. در این نمودار و نمودارهای بیشینه جابجایی برحسب ولتاژ در شکل ۵ نیز ملاحظه می‌شود که در نظر گرفتن پنج تابع تقریب، می‌تواند منجر به همگرایی شود. به‌گونه‌ای که در بیشینه جابجایی‌های به دست آمده با استفاده از سه تابع تقریب و پنج تابع تقریب تفاوتی مشاهده نمی‌شود. همچنین شکل مذکور نشان می‌دهد که با افزایش ولتاژ، بیشینه جابجایی و شیب آن افزایش یافته تا در یک ولتاژ مشخص، این شیب بسیار بزرگ شده و جابجایی به سمت عدد یک میل می‌نماید. در این حالت میزان جابجایی و فاصله اولیه بین الکترودها باهم برابر شده و تماس برقرار می‌شود. به این پدیده ناپایداری کششی و ولتاژ متناظر با آن را ناپایداری کششی می‌گویند.

در شکل ۶ نتایج دو روش تحلیلی و المان محدود با یکدیگر مقایسه شده است. نتایج حاصل از روش تحلیلی بر مبنای روش گالرکین و با در نظر گرفتن ۱۰ تابع تقریب نتایج به دست آمده و در روش المان محدود از ۵۰ المان برای محاسبات بهره گرفته شده است. در محاسبات صورت گرفته، میزان ولتاژ و بار بی‌بعد $\hat{V} = 7, \hat{P} = -2$ و برای تئوری کوپل تنش اصلاحی میزان پارامتر مقیاس طول بی‌بعد برابر با $\hat{l} = 0.02$ در نظر گرفته شده است. نتایج در محدوده ناپایداری محاسبه گردیده است و یک تطابق بسیار خوب در نمودار جابجایی برحسب موقعیت (حتی در محدوده قله) در دو روش ملاحظه می‌شود. بنابراین با در نظر گرفتن ۱۰ تابع تقریب در روش تحلیلی و ۵۰ المان در روش المان محدود، امکان پیش‌بینی دقیقی از تغییر شکل سازه و بررسی دقیق ناپایداری کششی و کمانش وجود دارد.



شکل ۷- مقایسه بیشینه جابجایی بر حسب ولتاژ بی‌بعد محاسبه‌شده از طریق تئوری‌های کلاسیک و کوپل تنش اصلاحی

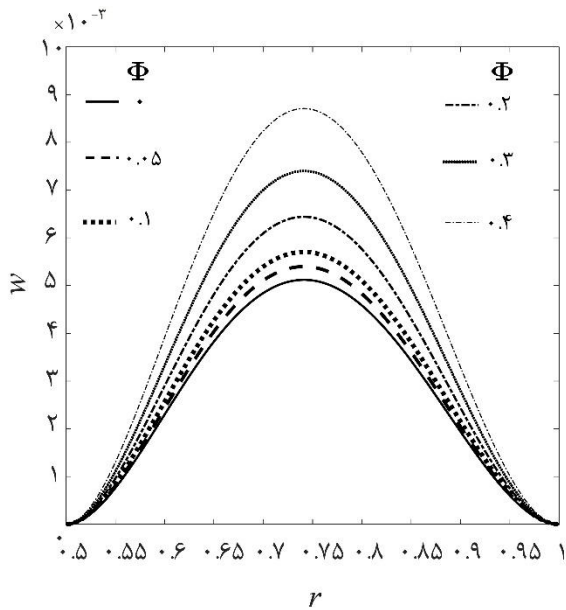
در ادامه با در نظر گرفتن پارامترهای $\hat{V} = 7$, $\hat{P} = -2$ ، محاسبات مربوط به تعیین جابجایی و بررسی پایداری برای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد مقیاس طول انجام می‌پذیرد. این پارامتر بی‌بعد با ابعاد شعاعی نسبت عکس داشته و نقش اساسی و انحصاری در تأثیر تئوری کوپل تنش اصلاحی بر نتایج دارد و اگر این پارامتر در تحلیل نادیده گرفته شود، نتایج حاصل از تئوری کوپل تنش اصلاحی بر نتایج تئوری کلاسیک منطبق می‌شود. برای سه مقدار پارامتر مقیاس طول بی‌بعد شده ($\hat{l} = 0.01, 0.015, 0.02$)، در شکل ۸، تأثیر این پارامتر بر تغییر شکل استاتیکی و کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌گونه که در نتایج مشاهده می‌شود، با افزایش این پارامتر، بیشینه جابجایی (در مقایسه با تئوری کلاسیک) با کاهش قابل‌ملاحظه‌ای همراه است و محدوده پایداری و بار کمانش بزرگ‌تر می‌گردد. بنابراین با افزایش این پارامتر سازه سخت‌تر شده و شاهد افت شدید خیز خواهیم بود. در جدول ۲ بار کمانش و ولتاژ ناپایداری کششی در مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول محاسبه و نتایج آن با روش مشتق‌گیری اشاره شده در بخش قبل مقایسه گردیده است. نشان داده شده است که با تغییر پارامتر مقیاس طول به دو برابر، بار کمانش حدود ۲۰٪ برابر بزرگ‌تر می‌شود. ولتاژ ناپایداری نیز با همین تغییر ۸۶ درصد بزرگ‌تر می‌گردد. همچنین اختلاف کمی بین روش ارائه‌شده برای محاسبه ولتاژ ناپایداری و بار کمانش محاسبه شده توسط ابزار مشتق‌گیری با نتایج ناپایداری ایجادشده در نمودارهای بیشینه جابجایی-ولتاژ و بیشینه جابجایی-بار وجود دارد. این اختلاف در ولتاژ ناپایداری به زیر ۰.۵ درصد و برای بار کمانش به ۳.۵ درصد می‌رسد. بنابراین روش ارائه‌شده مشتق‌گیری می‌تواند با دقت بالا برای محاسبه ولتاژ ناپایداری



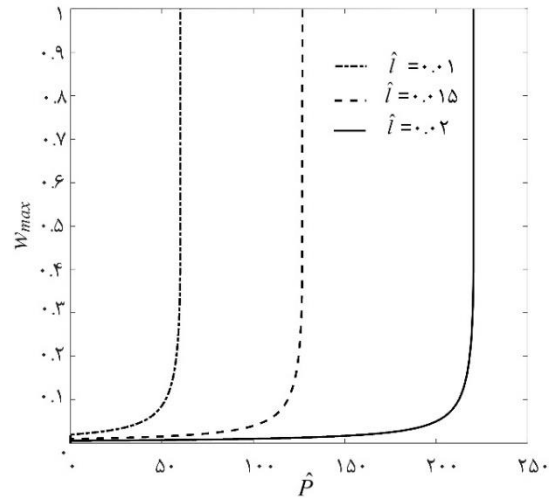
شکل ۶- همگرایی بیشینه جابجایی بر حسب بار شعاعی تکیه‌گاهی برای تئوری کوپل تنش اصلاحی

با توجه به پارامترهای ارائه‌شده در بخش‌های قبلی به مقایسه بیشینه جابجایی بر حسب ولتاژ در تئوری‌های کلاسیک و کوپل تنش اصلاحی پرداخته می‌شود. در نمودار شکل ۷، بیشینه جابجایی بر حسب ولتاژ برای دو تئوری مذکور نشان داده شده است. مقایسه بین نتایج نشان می‌دهد که تئوری کلاسیک در مقایسه با کوپل تنش اصلاحی جابجایی بزرگ‌تری را پیش‌بینی می‌کند، این اختلاف به دلیل پیش‌بینی سختی کوچک‌تر در تئوری کلاسیک می‌باشد که منجر به محاسبه جابجایی بزرگ‌تر در این تئوری گردیده است. در این نمودار، تئوری کوپل تنش اصلاحی در مقایسه با تئوری کلاسیک، محدوده پایداری و ولتاژ ناپایداری بزرگ‌تری را پیش‌بینی می‌نماید. به‌گونه‌ای که ولتاژ ناپایداری کششی در تئوری کوپل تنش اصلاحی $\hat{V}_{PI} = 39.97$ و در تئوری کلاسیک $\hat{V}_{PI} = 9.02$ می‌شود. بنابراین این مشاهدات، در مقیاس میکرو لزوم استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاحی به جای تئوری کلاسیک را بر جسته می‌نماید. زیرا تئوری کلاسیک منجر به پیش‌بینی سختی و محدوده پایداری کوچک‌تر و جابجایی بزرگ‌تر از مقدار واقعی می‌شود.

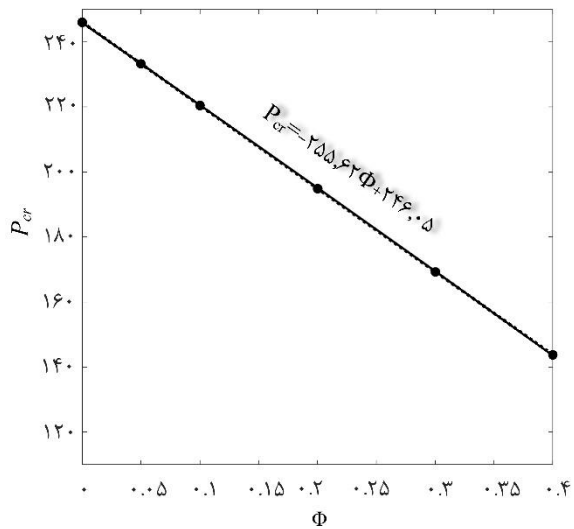
و با دقت مناسبی برای تخمین بار کمانش در تئوری کوپل تنش اصلاحی مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۹- جابجایی برحسب موقعیت شعاعی در تئوری کوپل تنش اصلاحی برای مقادیر مختلف پارامتر نسبت تخلخل



شکل ۸- بیشینه جابجایی برحسب بار شعاعی در تئوری کوپل تنش اصلاحی برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی بعد



شکل ۱۰- بار کمانش برحسب میزان نسبت تخلخل

مطابق با جدول ۳، تغییرات بار کمانش برحسب نسبت تخلخل به صورت خطی است و از رابطه $\hat{P}_{cr} = -255.662\Phi + 246.05$ تبعیت می کند. لازم به ذکر است که منحنی بار کمانش برحسب نسبت تخلخل در مقایسه با رابطه ولتاژ ناپایداری- نسبت تخلخل، به نمودار خطی نزدیک تر است. اما رابطه ولتاژ ناپایداری بر حسب نسبت تخلخل نیز با تقریب مناسبی از رابطه $\hat{V}_{PI} = -24.17\Phi + 42.312$ (با توجه به درون یابی انجام شده) پیروی می نماید.

جدول ۳- بار کمانش و ولتاژ ناپایداری کششی برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی بی بعد

Φ	۰.۰۵	۰.۱	۰.۲	۰.۴
--------	------	-----	-----	-----

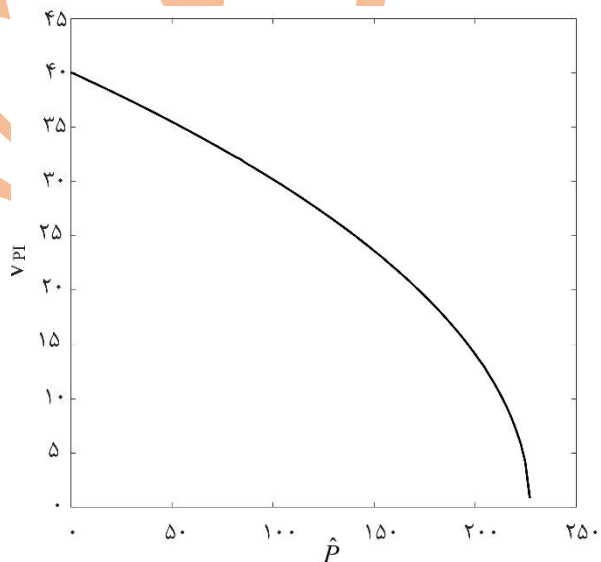
جدول ۲- بار کمانش و ولتاژ ناپایداری کششی برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی بعد در تئوری کوپل تنش اصلاحی

	$\hat{I} = 0.01$		$\hat{I} = 0.015$		$\hat{I} = 0.02$	
	یک مود	همگرا	یک مود	همگرا	یک مود	همگرا
P_{cr}	۶۲.۲	۶۰.۱	۱۳۱.۶۲	۱۲۷	۲۲۸.۸	۲۲۰.۶
V_{PI}	۲۱.۵	۲۱.۵	۳۰.۶۷۹	۳۰.۵۹	۴۰.۱۳	۳۹.۹۸

در ادامه تأثیر تخلخل در بار کمانش و ولتاژ ناپایداری بررسی می شود. نتایج این بخش برای پارامتر مقیاس طول بی بعد $\hat{I} = 0.02$ و میزان ولتاژ و بار شعاعی بی بعد $\hat{V} = 7, \hat{P} = -2$ برای مقادیر مختلف درصد تخلخل استخراج گردیده است. در شکل ۹ تغییرات جابجایی بر حسب موقعیت برای نسبت های مختلف تخلخل و در شکل ۱۰ تغییرات بار کمانش برحسب نسبت تخلخل محاسبه شده است. به دلیل کاهش سختی سازه، با افزایش نسبت تخلخل، میزان جابجایی افزایش می یابد و کاهش محدوده پایداری و بار کمانش رخ می دهد.

P_{cr}	۲۳۳.۲۳۵	۲۲۰.۵۷	۱۹۵.۱۲۵	۱۴۳.۵۶
V_{PI}	۴۱.۰۸	۳۹.۹۷۵	۳۷.۶۶	۳۲.۴۵۵

در نمودار شکل ۱۱، ولتاژ ناپایداری کششی برحسب بار فشاری تکیه-گاهی بی بعد محاسبه گردیده است. همان گونه که نتایج نشان می دهد، با افزایش بار تکیه گاهی، ولتاژ ناپایداری کششی کاهش می یابد. در محدوده ابتدای نمودار مشاهده می شود که ارتباط کاهش بین ولتاژ ناپایداری کششی و بار به صورت خطی است و به صورت یکنواخت با افزایش بار، ولتاژ ناپایداری کاهش پیدا می کند. اما از یک محدوده ای به بعد شیب این نمودار افزایش ناگهانی داشته تا در یک بار مشخص این شیب بسیار بزرگ شده و ولتاژ ناپایداری کششی بسیار کوچک می شود. این بار یک بار بحرانی است. ملاحظه می گردد که در این بار بحرانی، برای ولتاژهای بسیار کوچک نیز ناپایداری رخ می دهد که این رویداد همان پدیده کمانش می باشد.



شکل ۱۱- ولتاژ ناپایداری بی بعد برحسب بار بی بعد

۵- نتیجه گیری و جمع بندی:

در این مقاله با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاحی، رفتار استاتیکی، ناپایداری و کمانش در میکروورق های تحت میدان الکترواستاتیک مورد بررسی قرار گرفته است. در روش گالرکین نشان داده شده است که همگرایی نمودارهای جابجایی و بیشینه آن با در نظر گرفتن پنج تابع تقریب حتی تا محدوده ناپایداری رخ می دهد و همچنین یک تطابق بسیار خوب بین دو روش گالرکین و المان محدود مشاهده می شود. نتایج همگرا شده (چند تابع تقریب) نسبت به نتایج روش مشتق گیری در ولتاژ ناپایداری کششی، مطابقتی با خطای کمتر از یک درصد برای ولتاژ ناپایداری و زیر چهار درصد برای کمانش دارد. مقایسه بین نتایج

تئوری های کلاسیک و کوپل تنش اصلاحی نشان می دهد که تئوری کلاسیک در مقایسه با تئوری کوپل تنش اصلاحی جابجایی بزرگتری پیش بینی می کند که این اختلاف به دلیل پیش بینی سختی کوچکتر در تئوری کلاسیک است که منجر به بزرگتر شدن جابجایی، کاهش محدوده ناپایداری و بار کمانش در این تئوری گردیده است. در ادامه اثر تخلخل بر رفتار ورق مورد بررسی گردیده است. ملاحظه می گردد که با افزایش تخلخل جابجایی بزرگتر شده و ناحیه پایداری، ولتاژ ناپایداری و بار کمانش کاهش می یابد. همچنین تغییرات ولتاژ ناپایداری و بار کمانش برحسب نسبت تخلخل به صورت یکنواخت است، تغییرات ولتاژ برحسب نسبت تخلخل تقریباً به صورت شبه خطی بوده و تغییرات بار کمانش برحسب نسبت تخلخل به صورت خطی است و رابطه خطی آن نیز به دست آمده است. تغییرات ولتاژ ناپایداری کششی برحسب بار فشاری تکیه گاهی بی بعد نشان می دهد که با افزایش بار تکیه گاهی، ولتاژ ناپایداری کششی ابتدا به صورت خطی و یکنواخت کاهش می یابد. اما از یک محدوده ای به بعد شیب این نمودار افزایش ناگهانی داشته تا در یک بار مشخص این شیب بسیار بزرگ شده و ولتاژ ناپایداری کششی بسیار کوچک می شود. این بار همان بار بحرانی کمانش است.

۵- مراجع و منابع:

- [۱] S. Saghir, M.I. Younis, An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation, *Acta Mechanica* ۲۲۹(۷) (۲۰۱۸) ۲۹۰۹-۲۹۲۲.
- [۲] Y.Q. Wang, H.L. Zhao, C. Ye, J.W. Zu, A porous microbeam model for bending and vibration analysis based on the sinusoidal beam theory and modified strain gradient theory, *International Journal of Applied Mechanics* ۱۰(۰۵) (۲۰۱۸) ۱۸۵۰۰۵۹.
- [۳] G.-L. She, F.-G. Yuan, Y.-R. Ren, On wave propagation of porous nanotubes, *International Journal of Engineering Science* ۱۳۰ (۲۰۱۸) ۶۲-۷۴.
- [۴] J. Hong, S. Wang, X. Qiu, G. Zhang, Bending and Wave Propagation Analysis of Magneto-Electro-Elastic Functionally Graded Porous Microbeams, *Crystals* ۱۲(۵) (۲۰۲۲) ۷۳۲.
- [۵] Z. Liu, C. Yang, W. Gao, D. Wu, G. Li, Nonlinear behaviour and stability of functionally graded porous arches with graphene platelets reinforcements, *International Journal of Engineering Science* ۱۳۷ (۲۰۱۹) ۳۷-۵۶.
- [۶] V.-H. Dang, Q.-C. Do, Nonlinear vibration and stability of functionally graded porous microbeam under electrostatic actuation, *Archive of Applied Mechanics* ۹۱(۵) (۲۰۲۱) ۲۳۰۱-۲۳۲۹.
- [۷] Y. Zhang, B. Liu, C. Du, R. Zhou, On the behaviors of porous shape memory alloy beam with gradient porosity under pure bending, *Journal of Materials Research* ۳۴(۲) (۲۰۱۹) ۲۸۲-۲۸۹.
- [۸] M. Heshmati, F. Daneshmand, Vibration analysis of non-uniform porous beams with functionally graded

- functionally graded circular microplates based on modified couple stress theory, *Journal of Thermal Stresses* ۴۱(۱) (۲۰۱۸) ۱-۱۶.
- [۲۳] M. Shahrokhi, E. Jomehzadeh, M. Rezaeizadeh, Size-Dependent Green's Function for Bending of Circular Micro Plates Under Eccentric Load, *Journal of Solid Mechanics* ۱۱(۱) (۲۰۱۹) ۱۴-۲۵.
- [۲۴] M. Şimşek, M. Aydın, Size-dependent forced vibration of an imperfect functionally graded (FG) microplate with porosities subjected to a moving load using the modified couple stress theory, *Composite Structures* ۱۶۰ (۲۰۱۷) ۴۰۸-۴۲۱.
- [۲۵] M.R. Barati, H. Shahverdi, Dynamic modeling and vibration analysis of double-layered multi-phase porous nanocrystalline silicon nanoplate systems, *European Journal of Mechanics-A/Solids* ۹۶ (۲۰۱۷) ۲۵۶-۲۶۸.
- [۲۶] M. Hosseini, M. Mahinzare, M. Ghadiri, Magnetic field effect on vibration of a rotary smart size-dependent two-dimensional porous functionally graded nanoplate, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* ۲۹(۱۴) (۲۰۱۸) ۲۸۸۵-۲۹۰۱.
- [۲۷] E. Sharifinsab, M. Mojahedi, Nonlinear vibration of size dependent microresonators with an electrostatically actuated proof mass, *International Journal of Structural Stability and Dynamics* ۱۸(۰۴) (۲۰۱۸) ۱۸۵۰۰۵۷.
- [۲۸] Y.-H. Mao, Y. Shang, S. Cen, C.-F. Li, An efficient ۳-node triangular plate element for static and dynamic analyses of microplates based on modified couple stress theory with micro-inertia, *Engineering with Computers* (۲۰۲۲) ۱-۲۴.
- [۲۹] M. Mosayyebi, F. Ashenai Ghasemi, M. Aghaei, Modified couple stress theory for wave propagation in viscoelastic sandwich microplates with FG-GPLRC core and piezoelectric face sheets as sensor and actuator, *Waves in Random and Complex Media* (۲۰۲۲) ۱-۲۴.
- [۳۰] X. Yu, A. Maalla, Z. Moradi, Electroelastic high-order computational continuum strategy for critical voltage and frequency of piezoelectric NEMS via modified multi-physical couple stress theory, *Mechanical Systems and Signal Processing* ۱۶۵ (۲۰۲۲) ۱۰۸۳۷۳.
- [۳۱] L.-L. Ke, Y.-S. Wang, J. Yang, S. Kitipornchai, Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory, *Journal of Sound and Vibration* ۳۳۱(۱) (۲۰۱۲) ۹۴-۱۰۶.
- [۳۲] S. Park, X.-L. Gao, Variational formulation of a modified couple stress theory and its application to a simple shear problem, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* ۵۹(۵) (۲۰۰۸) ۹۰۴-۹۱۷.
- [۳۳] H. Niknam, M. Aghdam, A semi analytical approach for large amplitude free vibration and buckling of nonlocal FG beams resting on elastic foundation, *Composite Structures* ۱۱۹ (۲۰۱۵) ۴۵۲-۴۶۲.
- porosity distribution, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications* ۲۳۳(۸) (۲۰۱۹) ۱۶۷۸-۱۶۹۷.
- [۹] M. Jalaei, Ö. Civalek, On dynamic instability of magnetically embedded viscoelastic porous FG nanobeam, *International Journal of Engineering Science* ۱۴۳ (۲۰۱۹) ۱۴-۳۲.
- [۱۰] X. Xu, B. Karami, D. Shahsavari, Time-dependent behavior of porous curved nanobeam, *International Journal of Engineering Science* ۱۶۰ (۲۰۲۱) ۱۰۳۴۵۵.
- [۱۱] S. Amir, Z. Soleimani-Javid, E. Arshid, Size-dependent free vibration of sandwich micro beam with porous core subjected to thermal load based on SSDBT, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* ۹۹(۹) (۲۰۱۹) e۲۰۱۸۰۰۳۳۴.
- [۱۲] H. Farokhi, M.H. Ghayesh, Modified couple stress theory in orthogonal curvilinear coordinates, *Acta Mechanica* ۲۳۰(۳) (۲۰۱۹) ۸۵۱-۸۶۹.
- [۱۳] I. Soleimani, Y.T. Beni, Vibration analysis of nanotubes based on two-node size dependent axisymmetric shell element, *Archives of Civil and Mechanical Engineering* ۱۸(۴) (۲۰۱۸) ۱۳۴۵-۱۳۵۸.
- [۱۴] P. Jiao, A.H. Alavi, W. Borchani, N. Lajnef, Micro-composite films constrained by irregularly bilateral walls: a size-dependent post-buckling analysis, *Composite Structures* ۱۹۵ (۲۰۱۸) ۲۱۹-۲۳۱.
- [۱۵] S. Hakamiha, M. Mojahedi, Nonlinear analysis of microswitches considering nonclassical theory, *International Journal of Applied Mechanics* ۹(۰۸) (۲۰۱۷) ۱۷۵۰۱۱۳.
- [۱۶] A. Moradi, A. Yaghootian, M. Jalalvand, A. Ghanbarzadeh, Magneto-Thermo mechanical vibration analysis of FG nanoplate embedded on Visco Pasternak foundation, *Journal of Computational Applied Mechanics* ۴۹(۲) (۲۰۱۸) ۳۹۵-۴۰۷.
- [۱۷] R. Bina, M. Mojahedi, Static deflection, pull-in instability and oscillatory behavior of the electrostatically actuated microresonator with a distributed proof mass considering non-classical theory, *International Journal of Applied Mechanics* ۹(۰۲) (۲۰۱۷) ۱۷۵۰۰۲۳.
- [۱۸] M. Mahinzare, H. Ranjbarpur, M. Ghadiri, Free vibration analysis of a rotary smart two directional functionally graded piezoelectric material in axial symmetry circular nanoplate, *Mechanical Systems and Signal Processing* ۱۰۰ (۲۰۱۸) ۱۸۸-۲۰۷.
- [۱۹] M. Malikan, V.A. Eremeyev, On time-dependent nonlinear dynamic response of micro-elastic solids, *International Journal of Engineering Science* ۱۸۲ (۲۰۲۳) ۱۰۳۷۹۳.
- [۲۰] M. Al-Furjan, E. Samimi-Sohrforozani, M. Habibi, D. won Jung, H. Safarpour, Vibrational characteristics of a higher-order laminated composite viscoelastic annular microplate via modified couple stress theory, *Composite Structures* ۲۵۷ (۲۰۲۱) ۱۱۳۱۵۲.
- [۲۱] E. Arshid, H. Arshid, S. Amir, S.B. Mousavi, Free vibration and buckling analyses of FG porous sandwich curved microbeams in thermal environment under magnetic field based on modified couple stress theory, *Archives of Civil and Mechanical Engineering* ۲۱(۱) (۲۰۲۱) ۱-۲۳.
- [۲۲] S. Zandekarimi, B. Asadi, M. Rahaeifard, Size dependent thermal buckling and postbuckling of