

بررسی کمانش و ناپایداری وابسته به ابعاد ناشی از نیروهای تکیه‌گاهی و میدان الکترواستاتیک در میکرو ورق‌های توخالی متخلخل

مهدی مجاهدی* (دانشیار)

دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی

مجیدرضا آیت‌اللهی (استاد)

محمد مجاهدی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

مهندسی مکانیک شریف (بهار ۱۴۰۳)
دوری ۳۰، شماره ۱، ص. ۸۴-۷۵، (پژوهشی)

در این مقاله، ناپایداری و کمانش ناشی از نیروهای تکیه‌گاهی در میکروورق‌های متخلخل تحت میدان الکترواستاتیک از طریق تئوری کوپل تنش اصلاحی و با استفاده از روش‌های نیمه‌تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ورق به صورت متخلخل در نظر گرفته شده و توزیع تخلخل به فرم غیریکنواخت لحاظ می‌گردد. همچنین روشی بر مبنای مشتق‌گیری برای محاسبه بار کمانش و ولتاژ ناپایداری ارائه می‌شود که این روش با نتایج ناپایداری کمانش حاصل از نمودارهای روش گالرکین مقایسه و درصد خطای این روش بررسی می‌گردد. در بخش نتایج، تفاوت تئوری‌های کلاسیک و غیرکلاسیک مورد مطالعه قرار گرفته و تأثیر پارامترهای نظریه غیرکلاسیک و نسبت تخلخل بر جابجایی، ولتاژ ناپایداری و بار کمانش مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تغییرات نسبت تخلخل منجر به تغییرات یکنواخت بار کمانش و ولتاژ ناپایداری شده و روابط خطی برای محاسبه بار کمانش و ولتاژ ناپایداری برحسب تغییرات نسبت تخلخل به دست می‌آید.

واژگان کلیدی: متخلخل، کمانش، تئوری وابسته به ابعاد، روش عددی، ناپایداری.

۱. مقدمه

ماده متخلخل منجر به افزایش حفره‌ها و متعاقباً افزایش سختی و کاهش چگالی (جرم ویژه) ماده می‌شود. از طرفی، توزیع تخلخل در ماده در عملکرد مکانیکی سازه، تأثیر قابل توجهی دارد. [۳] از توزیع‌های رایج تخلخل در فوم‌های فلزی و نیمه فلزی، توزیع یکنواخت و توزیع مدرج تابعی می‌باشد. [۴]

در زمینه استفاده از مواد متخلخل فعالیت‌های متنوعی در سال‌های اخیر انجام پذیرفته است. [۶-۸] در همین راستا، جلالی و سیوالک [۹] ناپایداری دینامیکی نانوتیر متخلخل ویسکوالاستیک مدرج تابعی تعبیه شده، بر روی محیط ویسکوپاسترناک که تحت یک بار نوسان محوری و همچنین میدان مغناطیسی قرار گرفته است، را مورد بررسی قرار دادند. خو و همکاران، [۱۰] رفتار ارتعاشی یک نانوتیر خمیده متخلخل را با توجه به نظریه گرادیان کرنش غیرموضعی مورد بررسی قرار داده و تغییر شکل و

ورق‌ها، عضو بسیار مهمی از سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیک رایج در حسگرها و عملگرها هستند که در این مجموعه‌ها، به‌عنوان المان اصلی انعطاف‌پذیر برای اندازه‌گیری و انجام عملی خاص مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرند. [۱] مواد متخلخل، ترکیبی از عناصر جامد با مایع یا گاز می‌باشند. چوب‌ها، سنگ‌ها و اسفنج‌ها نمونه‌ای از این مواد هستند. فوم‌های فلزی نیز نمونه‌ای از مواد متخلخل می‌باشند که وزن کم و سختی قابل توجه سبب شده است که کاربرد آنها به‌عنوان مواد پیشرفته در زمینه‌های مختلف علوم رشد پیدا کنند. مشخصه مهم این مواد، تخلخل می‌باشد که پارامتر مربوطه نسبت حجم حفره‌ها به حجم کل را نشان می‌دهد. افزایش تخلخل در یک

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۶/۱۱/۱۴۰۱، اصلاحیه ۲۰/۱۲/۱۴۰۱، پذیرش ۲۳/۱۲/۱۴۰۱.

استاد به این مقاله:

مجاهدی، مهدی، آیت‌اللهی، مجیدرضا، و مجاهدی، محمد، ۱۴۰۳. بررسی کمانش و ناپایداری وابسته به ابعاد ناشی از نیروهای تکیه‌گاهی و میدان الکترواستاتیک در میکرو ورق‌های توخالی متخلخل. مهندسی مکانیک شریف، ۴۰(۱)، صص. ۸۴-۷۵. DOI:10.24200/J40.2023.61768.1673

تنش‌های نرمال و برشی وابسته به زمان را که توسط بار دینامیکی القاء می‌شود، محاسبه نمودند. آنها از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا (با در نظر حرکات کوپل شده) در به دست آوردن معادله حرکت بهره‌گرفته و اثرات تداخل را در پاسخ دینامیک مطالعه کردند. در پژوهش سعید و همکاران،^[۱۱] ارتعاشات آزاد میکروتر ساندویچی با هسته متخلخل و ورق‌های تقویت شده نانو لوله کربنی مدرج تابعی روی بستر وینکلر - پاسترناک بررسی گردیده است. آنها تیر را تحت بار حرارتی در نظر گرفته و مولفه‌های جابجایی را براساس تئوری تغییر شکل برشی سینوسی بیان نمودند. اثرات مقیاس با توجه به تئوری کوپل تنش اصلاحی لحاظ گردیده است. آنها نتیجه گرفتند که با افزایش تداخل فرکانس کاهش می‌یابد.

در گذشته به منظور تحلیل و شبیه‌سازی سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیک از دو روش دینامیک مولکولی و روش مکانیک محیط پیوسته استفاده می‌شد. روش دینامیک مولکولی معمولاً نیاز به زمان محاسبات طولانی دارد و روش مکانیک محیط پیوسته کلاسیک نیز به دلیل نادیده گرفتن خواص و پیکربندی ابعاد کوچک، ابزاری مطمئن نمی‌باشد. مطالعات متعددی برای غلبه بر این محدودیت‌ها در شبیه‌سازی رفتار مکانیکی میکرو/نانو سازه‌ها انجام شده است. نظریه‌های گرا دیان کرنش، کوپل تنش و همچنین کوپل تنش اصلاحی از جمله تئوری‌های معتبری می‌باشند که در سالیان گذشته برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی سازه‌های میکرو مورد استفاده قرار گرفته‌اند که در این بین نظریه کوپل تنش اصلاحی به دلیل دقت نسبتاً مناسب و سادگی اعمال در مدل‌سازی با اقبال بیشتری مواجه گردیده است.^[۱۲-۱۸] در این تئوری، انرژی کرنشی به صورت تابعی از تانسور انحنا و تانسور کرنش آمده است. در تئوری کوپل تنش اصلاحی به دلیل وجود تنش‌ها و کرنش‌های غیرکلاسیک مراتب بالا و کوپل‌های ایجاد شده، پارامتر جدیدی به نام پارامتر مقیاس طول را تعریف می‌کنند که این پارامتر ارتباط میدان جابه‌جایی و تنش را در همسایگی یک نقطه بیان می‌کند. در فرمول کوپل تنش اصلاحی، از روابط تعادلی نیروها و گشتاور نیروها استفاده می‌شود.^[۱۹]

فورجان و همکاران^[۲۰] به بررسی ارتعاشات یک میکروصفحه حلقوی کامپوزیت چندلایه با استفاده از نظریه کوپل تنش اصلاحی پرداختند. ساختار با یک پایه از طریق مدل کلونین - ویت شبیه‌سازی شده است. معادلات حاکم غیرکلاسیک و شرایط مرزی میکرو صفحه حلقوی وابسته به اندازه با افزودن گرا دیان چرخش متقارن و تانسورهای تنش مرتبه بالاتر به انرژی کرنش به دست می‌آیند. معادلات حاکم غیرکلاسیک، با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل تعمیم یافته برای شرایط مرزی مختلف حل می‌شوند. آنها نشان دادند که افزایش پارامتر ویسکوالاستیک نمی‌تواند تغییری در فرکانس دیسک ایجاد کند.

آرشید و همکاران^[۲۱] ارتعاش آزاد و کماتش مکانیکی یک میکروتر ساندویچی سه لایه را که تحت بار مغناطیسی لورنتس در بستر ویسکوالاستیک قرار گرفته است، را با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاحی بررسی نمودند. اثر محیط حرارتی بر خواص مکانیکی در نظر گرفته شده، و معادلات حاکم براساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر و روش انرژی استخراج شده و با بهره‌گیری از روش ناویر حل شده است. در نتایج، فرکانس‌های طبیعی و بارهای کماتشی بحرانی با افزایش زاویه باز شدن مرکزی کاهش یافته و افزایش ضریب، تداخل، مقادیر ذکر شده را کاهش داده است.

در پژوهش زندکریمی و همکاران،^[۲۲] کماتش حرارتی و رفتار پس‌کمانش وابسته به اندازه یک میکروصفحه مدور تابعی مدرج تحت میدان افزایش دمای یکنواخت و شرایط مرزی گیردار بررسی شده است. معادلات تعادل و شرایط مرزی براساس تئوری کوپل تنش اصلاحی، نظریه صفحه کلاسیک و ترم غیرخطی فون کارمان به دست

آمده است. اثرات پارامتر مقیاس طول، شاخص قانون توان و نسبت ضخامت به شعاع بر کماتش حرارتی و رفتار پس‌کمانش میکرو صفحه‌ای دایره‌ای بررسی شده است.

شاهرخی و همکاران^[۲۳] یک تابع گرین برای تحلیل خمشی میکرو صفحات تحت یک بار نامتقارن پیشنهاد دادند و با در نظر گرفتن اثر مقیاس طول، از نظریه کوپل تنش اصلاحی استفاده کردند. معادله تعادلی وابسته به ابعاد میکروصفحه دایره‌ای تحت بار غیرمحوری با استفاده از حداقل اصل انرژی پتانسیل کل به دست آمده و نشان داده شده است، که مقیاس طولی تأثیر معنی‌داری بر خمش میکرو صفحات دارد. سیمسک و همکاران^[۲۴] خمش استاتیکی و ارتعاش اجباری یک میکرو صفحه مدرج تابعی حامل بار متحرک را براساس نظریه صفحه میندین نظریه کوپل تنش اصلاحی بررسی کردند. برای به دست آوردن پاسخ میکروورق از معادلات لاگرانژ استفاده شده و معادلات حرکت میکرو صفحه در حوزه زمان با استفاده از روش نیومارک حل شده است. اثرات تغییرات مواد، کسر حجمی تداخل و هندسه تداخل، پارامتر مقیاس طول و سرعت بار متحرک بر پاسخ‌های دینامیکی بررسی شده است.

براتی و شاهوردی^[۲۵] رفتار ارتعاشی نانو صفحات سیلیکونینانو کریستالی دولایه را که بر روی پایه وینکلر پسترناک قرار دارد، تجزیه و تحلیل کردند. آنها از نظریه کوپل تنش اصلاحی برای اثرات وابسته به اندازه استفاده کردند و معادلات حاکم را از طریق اصل همپلتون در چارچوب مدل صفحه‌ای دومتغیره بهبود یافته به دست آوردند. حسینی و همکاران^[۲۶] یک مدل تحلیل ارتعاشی را برای نانو صفحه دایره‌ای با خواص ماده مدرج تابعی پیشنهاد دادند و تأثیر میدان مغناطیسی و پارامتر مقیاس طول را بر رفتار ارتعاشی بررسی کردند. آنها از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و تئوری کوپل تنش اصلاحی برای دستیابی به معادلات حاکم استفاده کردند. شریفی نسب و مجاهدی^[۲۷] پاسخ دینامیکی و ارتعاشات غیرخطی یک میکرورزوناتور حاوی یک میکروپل با جرم گواه واقع در وسط را بر مبنای تئوری کوپل تنش اصلاحی بررسی نمودند. جرم گواه میکرورزوناتور توسط میدان الکترواستاتیکی به گونه‌ای تحریک می‌شود که با اعمال یک ولتاژ مستقیم موقعیت تعادل خاصی پیدا می‌کند و سپس تحت ولتاژ متناوب به لرزش در می‌آید. با اتخاذ تئوری کوپل تنش اصلاح شده و در نظر گرفتن تحریک الکترواستاتیکی، معادله دینامیکی حرکت با استفاده از اصل همپلتون توسعه یافته به دست آمده است. علاوه بر این، با تقریب روش گالرکین، معادله حاکم بر حرکت استاتیکی و نوسانی کاهش می‌یابد و معادله حاصل با روش‌های تحلیلی (مقیاس‌های چندگانه) و عددی حل گردیده است. برای شبیه‌سازی رفتار دینامیکی و استاتیکی وابسته به ابعاد در میکروورق‌های نازک، مانو و همکاران^[۲۸] یک المان ورق مثلثی سه گره‌ای ناسازگار را با استفاده از اصل لاگرانژ - دالامبر به دست آوردند. مسیبی و همکاران^[۲۹] انتشار موج را در میکروورق‌های ساندویچی ویسکوالاستیک توسط نظریه زیگزاگ اصلاح شده و تئوری کوپل تنش اصلاحی بررسی نمودند. سازه متشکل از هسته کامپوزیتی تقویت شده گرافیتی و لایه‌های پیروالکترونیک به عنوان حسگر و محرک می‌باشند. که لایه‌های هسته و پیروالکترونیک در معرض میدان الکترومغناطیسی قرار دارند. مدول یانگ، چگالی جرم و نسبت پواسون براساس مدل اصلاح شده هالپین - تسای و قانون مخلوط‌ها محاسبه و خواص ویسکوالاستیک سازه با مدل کلونین - ویت شبیه‌سازی شده است. شیائوم و همکاران^[۳۰] راه‌حلی عددی برای پایداری و یافتن فرکانس نانو صفحه مستطیلی ساخته شده از مواد الکترونیکی انجام داده‌اند. برای مدل‌سازی عوامل وابسته به اندازه سیستم‌های نانو الکترومکانیکی پیروالکترونیک، نظریه کوپل تنش اصلاحی با یک پارامتر مقیاس طول و یک عامل غیرموضعی ارائه شده است. در این پژوهش،

تعیین می‌گردد. در تئوری کوپل تنش اصلاحی که اولین بار توسط یانگ معرفی شده، انرژی کرنش، تابعی از هر دو تانسور کرنش مربوط به تانسور تنش و انحنا مربوط به تانسور کوپل تنش است؛ بنابراین، انرژی کرنش U_s برای یک میکروورق الاستیک خطی با حجم V به صورت زیر نوشته می‌شود: [۲۱]

$$U_s = \frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}) dV \quad (2)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

در رابطه ۲، ε_{ij} تانسور کرنش، σ_{ij} تانسور تنش، x_{ij} تانسور متقارن انحنا و m_{ij} تانسور عرضی تنش کوپل بوده و طبق دسته روابط زیر محاسبه می‌شوند: [۲۲]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}) \quad (3)$$

$$m_{ij} = 2\mu l^T \chi_{ij}$$

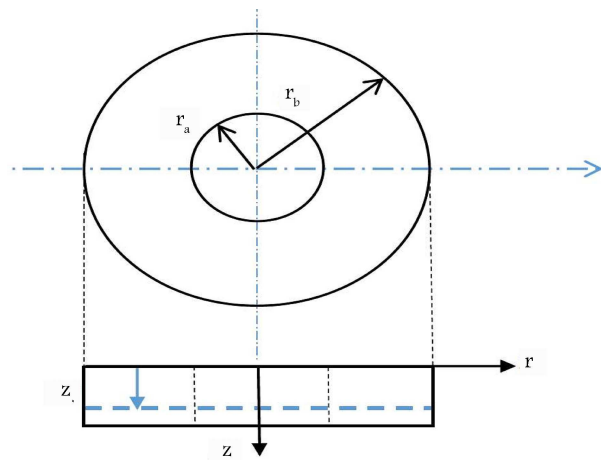
$$\theta = \frac{1}{2} \text{curl}(\bar{u})_i$$

که u بردار جابه‌جایی، δ_{ij} دلتای کرونکر، l پارامتر مقیاس طول، θ بردار چرخش و λ و μ ثوابت لامه می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\lambda = \frac{E(z)v}{(l+v)(1-2v)} \quad \mu = \frac{E(z)}{2(l+v)} \quad (4)$$

به طوریکه v نسبت پواسون است. همان‌طور که رابطه ۴ نشان می‌دهد، مقدار ضریب الاستیسیته با توجه به پارامتر تخلخل تغییر می‌کند. در شکل ۲، یک ورق متخلخل را که دارای شعاع خارجی r_b و ضخامت h است، نشان می‌دهد. با توجه به متخلخل بودن ورق، محل قرارگیری صفحه خشی در موقعیت z قرار می‌گیرد. برای مدل‌سازی سیستم مختصات استوانه‌ای (z, θ, r) همان‌طور که نشان داده شده است اتخاذ می‌شود.

با توجه به تقارن محوری در هندسه، بارگذاری و قیود تکیه‌گاهی، مسئله به صورت متقارن محوری لحاظ می‌گردد. از آنجا که بارگذاری به صورت استاتیکی اعمال می‌شود و بار الکترواستاتیکی در راستای محیطی ثابت است، تنها مدهای متقارن، به ویژه مد اول که مد غالب است، در پاسخ اثر می‌گذارند. بنابراین می‌توان از اثر مدهای نامتقارن صرف‌نظر نمود و پاسخ مسئله را با توجه به فرضیات متقارن محوری به دست آورد.



شکل ۲. میکرو ورق متخلخل.

به بررسی رفتار استاتیکی و ناپایداری میکروورق‌های دایره‌ای متخلخل در میدان الکترواستاتیک پرداخته می‌شود. این ورق دارای تخلخل بوده و توزیع تخلخل در آن به صورت مدرج تابعی است. با توجه به نوع کاربرد، شرایط مرزی به صورت تمام گیردار در نظر گرفته می‌شود. اثر بار فشاری ناشی از تکیه‌گاه و همچنین تأثیر نیروی الکترواستاتیک ناشی از اختلاف پتانسیل الکتریکی بین ورق و لایه ثابت، در مدل‌سازی و تعیین معادلات حاکم لحاظ می‌گردد. در محاسبه تغییر شکل ورق و تنش‌های آن، با توجه به ابعاد سازه، از تئوری کوپل تنش اصلاحی که مورد توجه گسترده محققان در سال‌های اخیر بوده است، استفاده می‌شود. در مدل‌سازی، تئوری ورق کلاسیک به کار گرفته خواهد شد و معادلات تغییر شکل استاتیکی ورق متخلخل با استفاده از روش‌های انرژی می‌آید. معادلات با استفاده از روش‌های کاهش مرتبه حل شده و تغییر شکل استاتیکی نانو ورق تعیین می‌گردد. از آنجا که سازه تحت تأثیر بار گسترده تکیه‌گاهی قرار دارد، در تحلیل نتایج، کماتش مورد توجه قرار گرفته و بار کماتش در حضور میدان الکترواستاتیک (اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی) محاسبه می‌شود.

۲. مدل‌سازی و حل مسئله

۲.۱. معادلات حاکم بر مسئله

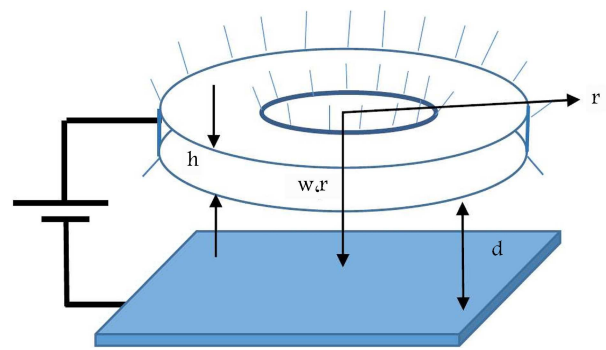
ورق به صورت توخالی با شعاع داخلی r_a و شعاع خارجی r_b در نظر گرفته می‌شود که از دو طرف گیردار است و تحت خیز $w(r, \theta)$ قرار دارد. برای تعیین پاسخ، تحلیل ناپایداری و کماتش، ابتدا معادلات با استفاده از روش‌های انرژی، تعیین می‌شود. در شکل ۱ نمایی از یک میکرو ورق تحت میدان الکترواستاتیک نشان داده شده است.

در شکل فوق t و d نشان‌دهنده ضخامت میکروورق و فاصله بین صفحه ثابت و میکروورق است. همچنین ورق از ماده متخلخل تشکیل گردیده است. برای توزیع غیریکنواخت تخلخل، از رابطه خاصیت فیزیکی در دو ماده با توزیع مدرج تابعی غیریکنواخت بهره گرفته می‌شود. که فرم خطی به صورت توزیع غیریکنواخت لحاظ می‌شود: [۲۳]

$$E(z) = E - \Phi E \left[1 - \frac{2}{h} \left(z - \frac{h}{2} \right) \right] \quad (1)$$

به طوریکه پارامتر Φ نسبت تخلخل، E مدول یانگ، h ضخامت ورق و z متغیر موقعیت در راستای ضخامت می‌باشد.

در این بخش، معادلات دیفرانسیل حرکت از طریق تئوری کوپل تنش اصلاحی



شکل ۱. میکرو ورق تحت میدان الکترواستاتیک.

با توجه به مقادیر به دست آمده تنش‌ها و کرنش‌های کلاسیک و مرتبه بالاتر، می‌توان انرژی کرنشی را با توجه به جبر تانسوری به دست آورد:

$$U = \int_V \frac{1}{2} [(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + m_{ij}\chi_{ij})] dV \quad (12)$$

$(i, j = 1, 2, 3)$

بنابراین، مطابق با رابطه فوق و تفکیک انتگرال‌های وارد بر سطح و ضخامت، تغییرات انرژی پتانسیل محاسبه می‌شود:

$$\delta U = \int_A \int_0^h [\sigma_{rr} [(z - z_0) \delta\varepsilon_{rr}^1] + \sigma_{\theta\theta} [(z - z_0) \delta\varepsilon_{\theta\theta}^1] + \sigma_{zz} (\delta\varepsilon_{zz}) + 2m_{r\theta} (\delta\chi_{r\theta})] dz r dr d\theta \quad (13)$$

با در نظر گرفتن تقارن محوری، تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی از طریق رابطه ۱۴ به دست می‌آید:

$$\delta U = 2\pi \int_r \int_0^h [\sigma_{rr} [(z - z_0) \delta\varepsilon_{rr}^1] + \sigma_{\theta\theta} [(z - z_0) \delta\varepsilon_{\theta\theta}^1] + \sigma_{zz} (\delta\varepsilon_{zz}) + 2m_{r\theta} (\delta\chi_{r\theta})] dz r dr \quad (14)$$

و با در نظر گرفتن بار گسترده شعاعی تکیه‌گاهی $P(r)$ و بار گسترده عرضی الکترواستاتیک $q(r, \theta)$ و تقارن محوری، کار مجازی از طریق رابطه ۱۵ تعیین می‌شود:

$$\delta W = 2\pi \int_r [-P(r) \left(\frac{dw}{dr}\right) \delta \left(\frac{dw}{dr}\right) + q(r, \theta) \delta w] r dr \quad (15)$$

به‌طوریکه δw تغییرات خیز را نشان می‌دهد. با ساده‌سازی و استفاده از ممان‌های خمشی، انرژی کرنشی به صورت زیر قابل بیان است:

$$\delta U = \int_r [M_{rr} \delta \varepsilon_{rr}^1 + \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta \varepsilon_{\theta\theta}^1 + 2\bar{M}_{r\theta} \delta \chi_{r\theta}] dr \quad (16)$$

با در نظر گرفتن تغییرات کرنش و انحنا برحسب جابجایی عرضی، رابطه ۱۷ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\delta U = \int_r \left[M_{rr} \delta \left(-\frac{dw}{dr} \right) + \frac{1}{r} M_{\theta\theta} \delta \left(-\frac{dw}{dr} \right) + \bar{M}_{r\theta} \delta \left(-\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right] dr \quad (17)$$

با ساده‌سازی و جایگزینی ممان‌های رابطه ۱۰ و لحاظ نمودن تقارن محوری در روابط ۱۵ و ۱۷، روابط زیر به دست می‌آید:

$$\delta U = 2\pi \left\{ -r M_{rr} \delta \left(\frac{dw}{dr} \right) \Big|_r + \frac{d(r M_{rr})}{dr} \delta w \Big|_r - M_{\theta\theta} \delta w \Big|_r - r \bar{M}_{r\theta} \delta \left(\frac{dw}{dr} \right) \Big|_r + \frac{d(r \bar{M}_{r\theta})}{dr} \delta w \Big|_r + \bar{M}_{r\theta} \delta w \Big|_r + \int_r \left[-\frac{d^2(r M_{rr})}{dr^2} + \frac{d(M_{\theta\theta})}{dr} - \frac{d^2(r \bar{M}_{r\theta})}{dr^2} - \frac{d(\bar{M}_{r\theta})}{dr} \right] \delta w dr \right\} \quad (18)$$

$$\delta W = 2\pi \left\{ -r P(r) \left(\frac{dw}{dr} \right) \delta w \Big|_r + 2\pi \int_r \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r P(r) \left(\frac{dw}{dr} \right)) + q(r) \right] \delta w r dr \right\} \quad (19)$$

در مدل حاضر، به دلیل نازک بودن ورق، از نظریه ورق کلاسیک استفاده می‌شود، این نظریه گسترش یافته تئوری تیر اویلر برنولی برای ورق می‌باشد. بنابراین، طبق ورق کلاسیک، میدان جابجایی برای مسئله متقارن محوری را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} u_r(r) &= -(z - z_0) \frac{dw(r)}{dr}, \\ u_\theta(r) &= 0, \quad u_z(r) = w(r) \end{aligned} \quad (5)$$

$w(r)$ جابجایی عرضی یک نقطه دلخواه است. با توجه به میدان جابجایی تعریف شده توسط معادله ۵، اجرای کرنش و تانسور انحنای متقارن را می‌توان با استفاده از روابط ۶ به دست آورد.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= (z - z_0) \varepsilon_{rr}^1 = -(z - z_0) \frac{d^2 w}{dr^2}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= (z - z_0) \varepsilon_{\theta\theta}^1 = -\frac{(z - z_0)}{r} \frac{dw}{dr}, \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{r\theta} = 0 \\ \chi_{r\theta} &= \chi_{\theta r} = \frac{1}{r} \left(-\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right), \\ \chi_{rr} &= \chi_{\theta\theta} = \chi_{zz} = \chi_{rz} = \chi_{\theta z} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

حال اجرای تنش کلاسیک و مرتبه بالاتر آن را می‌توان از طریق رابطه زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \\ m_{r\theta} &= m_{\theta r} = 2\mu l^2 \chi \end{aligned} \quad (7)$$

z مختصات صفحه خمشی است که با محاسبه برآیند بار شعاعی و بار محیطی ناشی از تنش‌های شعاعی و محیطی در مقطع ورق و تعادل این بارها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$z_0 = \frac{\int_0^h E(z) z dz}{\int_0^h E(z) dz} \quad (8)$$

در ادامه، ممان‌های خمشی و ممان حاصل از کوپل تنش از طریق رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} M_{rr} &= \int_0^h \sigma_{rr} (z - z_0) dz \\ M_{\theta\theta} &= \int_0^h \sigma_{\theta\theta} (z - z_0) dz \\ \bar{M}_{r\theta} &= \int_0^h m_{r\theta} dz \end{aligned} \quad (9)$$

با جایگزینی تنش‌ها و کرنش‌ها با میدان جابجایی مطابق با رابطه ۶، روابط ۱۰ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} M_{rr} &= \left[-D_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{12}}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ M_{\theta\theta} &= \left[-D_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{11}}{r} \frac{dw}{dr} \right] \\ \bar{M}_{r\theta} &= D_m \left(-\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

که ضرایب D_{11} ، D_{12} و D_m از طریق رابطه ۱۱ تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \int_0^h \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (z - z_0)^2 dz \\ D_{12} &= \int_0^h \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} \right) (z - z_0)^2 dz \\ D_m &= \int_0^h G l^2 dz \end{aligned} \quad (11)$$

که برای حل رابطه فوق، از روش سعی و خطا استفاده می‌شود. بدین منظور ابتدا اندیس m به بردارهای و نیرو به $\{F\}$ اختصاص داده می‌شود:

$$\begin{aligned} [K] \{a^{m+1}\} &= \{F^m(\{a\})\} \\ K_{ij} &= \frac{1}{Eh^2} (D_{11} + D_m) \\ &\times \int_r \left[\frac{d^2 \phi_i}{d\hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{d^2 \phi_i}{d\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{d^2 \phi_i}{d\hat{r}^2} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{d\phi_i}{d\hat{r}} \right] \phi_j \hat{r} d\hat{r} \\ &- \hat{P} \int_r \frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} \left(\hat{r} \left(\frac{d\phi_i}{d\hat{r}} \right) \right) \phi_j \hat{r} d\hat{r} \\ F_j^m &= \hat{V}^T \int_r \frac{\phi_j \hat{r} d\hat{r}}{(\sum_{i=1}^m \phi_i \{a\}^m)^T} \end{aligned} \quad (26)$$

به‌منظور استفاده از رابطه فوق، ابتدا برای $\{a\}^1$ به‌عنوان حدس اول مقداری در نظر گرفته می‌شود و مطابق با رابطه ۲۶، بردار $\{F\}^1$ تعیین شده و طبق رابطه مذکور، مقدار $\{a\}^2$ تعیین می‌شود. این روند ادامه پیدا کرده تا بردار $\{a\}^m$ همگرا شده و بیشینه میزان خیز ورق به یک مقدار مشخص همگرا گردد.

با محاسبه $\{a\}$ ، میزان جابجایی با در نظر گرفتن یک و چند تابع تقریب (تا همگرایی پاسخ) تعیین می‌شود.

در نزدیکی کمانش، شیب منحنی جابجایی برحسب مقادیر a بسیار بزرگ می‌گردد^[۱۳] و این انتظار وجود دارد که پس از تفکیک ماتریس $[K]$ ، به دو بخش شامل نیروی تکیه‌گاهی و بدون نیروی تکیه‌گاهی، تساوی $\frac{d\hat{P}}{da} = 0$ برقرار باشد. همچنین برای حالت ناپایداری کششی در اثر ولتاژ، تساوی $\frac{d\eta}{da} = 0$ ($\eta = \hat{V}^T$) برقرار است. بنابراین، با فرایند مشتق‌گیری از معادلات و حل آنها می‌توان بارکمانش و ولتاژ ناپایداری کششی را مطابق با تغییرات بزرگ جابجایی در محدوده ناپایداری محاسبه نمود.

۳. نتایج

در این بخش با توجه به روابط به‌دست آمده در بخش ۳، به بررسی نتایج مستخرج از مدل‌سازی و حل پرداخته می‌شود.

در جدول ۱، مشخصات میکرو ورق ذکر گردیده است. بر همین مبنا جابجایی و پایداری مجموعه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در شکل ۳ بر درصد تخلخل ۱۰، همگرایی بیشینه جابجایی، برحسب بار گسترده تکیه‌گاهی در یک ولتاژ بی بعد مشخص، $\hat{V} = 7$ برای تئوری کلاسیک بررسی گردیده است. با افزایش تدریجی بار، بیشینه جابجایی افزایش یافته تا این‌که در بار کمانش، شیب منحنی مذکور به مقدار بزرگی می‌رسد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با در نظر گرفتن پنج تابع تقریب، همگرایی نتایج روش گالرکین حتی تا محدوده ناپایداری رخ می‌دهد.

در شکل ۴، برای مقادیر بی بعد $\hat{V} = 7$ ، $\hat{P} = -2$ و پارامتر بی بعد مقیاس طول $\hat{l} = 0.2$ و درصد تخلخل مورد اشاره، نمودار جابجایی برحسب موقعیت با استفاده از روش تحلیلی با در نظر گرفتن تقریب‌های مختلف برای تئوری کوپل تنش اصلاحی ترسیم شده است. در این نمودار و نمودارهای بیشینه جابجایی برحسب

جدول ۱. مشخصات ورق.

r_a	r_b	h	\hat{l}	E	ν
۰/۵	۱	۰/۰۱	۰/۰۲	۱۵۰ (Gpa)	۰/۳۳

با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل و جایگزینی گشتاورهای کلاسیک و غیرکلاسیک از رابطه ۱، معادله حرکت استاتیکی و شرایط مرزی به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (D_{11} + D_m) \left[\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r P(r) \left(\frac{dw}{dr} \right) \right) \\ - q(r) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

به‌همراه شرایط مرزی زیر:

$$\begin{aligned} w(r_a) = w(r_b) = 0 \\ \frac{dw}{dr}(r_a) = \frac{dw}{dr}(r_b) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

به‌طوریکه بارگسترده عرضی با توجه به بار الکترواستاتیکی اعمال شده به ورق توسط رابطه ۲۲، تعیین می‌شود:

$$q(r) = - \frac{\varepsilon_0 V_d^2}{2(d-w)^2} \quad (22)$$

در رابطه فوق ε_0 ثابت گذردهی الکتریکی و V_d اختلاف پتانسیل مستقیم اعمالی بین ورق و الکتروود زیرین می‌باشد.

چنانچه در رابطه ۲۰، ضرایب مربوط به اثرات کوپل تنش و بار شعاعی اعمالی حذف گردد، همان معادله تغییر شکل استاتیکی ورق کلاسیک در میدان الکترواستاتیک به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} D_{11} \left[\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{1}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right] \\ - \frac{\varepsilon_0 V_d^2}{2(d-w)^2} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

۲.۲. معادلات حاکم بر مسئله

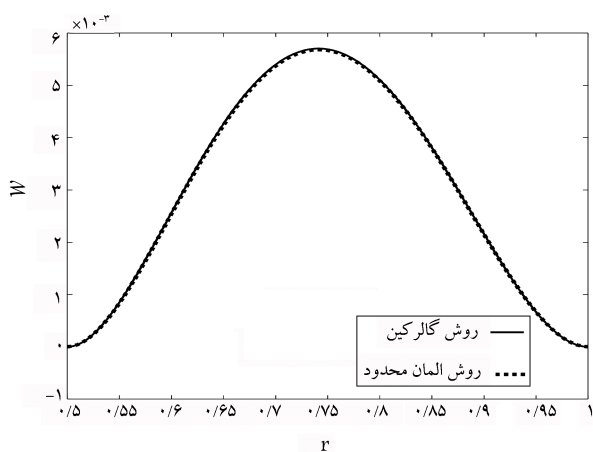
حال با در نظر گرفتن بارمحوری تکیه‌گاهی و براساس معادلات به‌دست آمده، تغییر شکل ورق دایره‌ای در میدان الکترواستاتیک بر مبنای تئوری کوپل تنش اصلاحی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. ابتدا با استفاده از توابع تقریب، پاسخ ورق به‌صورت ترکیبی از توابع تقریب نوشته می‌شود:

$$w = \sum_i a_i \phi_i(\hat{r}) \quad (24)$$

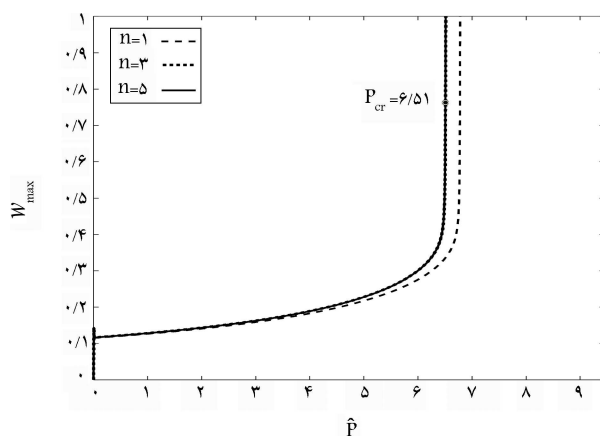
به‌طوریکه $\phi_i(r)$ توابع تقریبی هستند که شرایط مرزی را ارضا می‌نمایند. با توجه به تقارن محوری، از توابع شکل مود تیر دو سردگیر که شرایط مرزی را ارضا می‌نمایند، استفاده می‌شود. که a_i ثابت مجهول ضریب هر تابع می‌باشد که با تعیین آنها، میزان جابجایی ورق در ولتاژهای مختلف محاسبه می‌گردد.

با جایگزینی رابطه ۲۴ در معادله دیفرانسیل تعادل رابطه ۲۰ و ضرب تابع وزنی و انتگرال‌گیری روی ناحیه ورق، مطابق با روش گالرکین، معادله دیفرانسیل تعادل کاهش می‌یابد. رابطه به‌دست آمده یک معادله غیرخطی است و به فرم ماتریسی مطابق با رابطه ۲۵ بیان می‌شود:

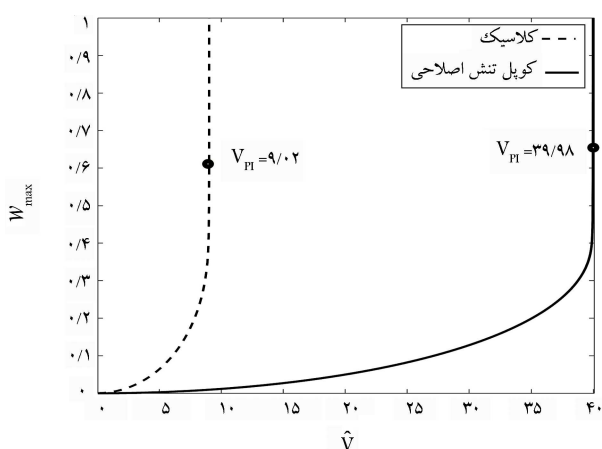
$$\begin{aligned} [K] \{a\} &= \{F(a_1, a_2, \dots)\} \\ K_{ij} &= \frac{1}{Eh^2} (D_{11} + D_m) \\ &\times \int_r \left[\frac{d^2 \phi_i}{d\hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{d^2 \phi_i}{d\hat{r}^2} - \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{d^2 \phi_i}{d\hat{r}^2} \right. \\ &\left. + \frac{1}{\hat{r}^2} \frac{d\phi_i}{d\hat{r}} \right] \phi_j \hat{r} d\hat{r} \\ &- \hat{P} \int_r \frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} \left(\hat{r} \left(\frac{d\phi_i}{d\hat{r}} \right) \right) \phi_j \hat{r} d\hat{r} \\ F_j &= \hat{V}^T \int_r \frac{\phi_j \hat{r} d\hat{r}}{(\sum_i a_i \phi_i)^T} \end{aligned} \quad (25)$$



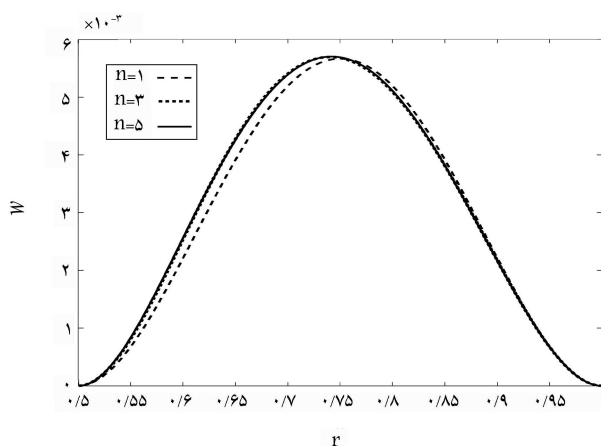
شكل ۶. همگرایی بیشینه جابجایی برحسب بار شعاعی تکیه‌گاهی برای تئوری کوپل تنش اصلاحی.



شكل ۳. همگرایی بیشینه جابجایی برحسب ولتاژ بی بعد برای تئوری کلاسیک.



شكل ۷. مقایسه بیشینه جابجایی برحسب ولتاژ بی بعد محاسبه شده از طریق تئوری های کلاسیک و کوپل تنش اصلاحی.

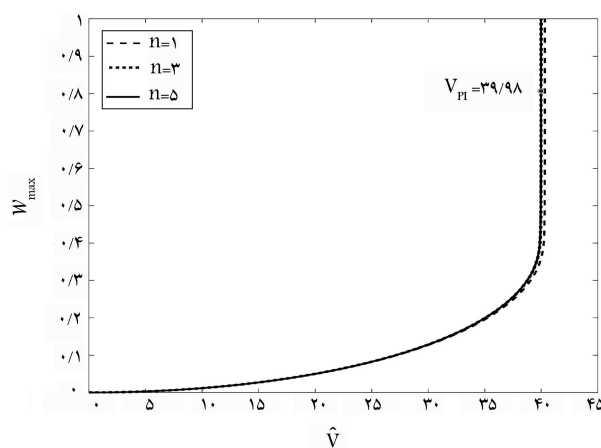


شكل ۴. همگرایی جابجایی برحسب بار شعاعی تکیه‌گاهی در تئوری کوپل تنش اصلاحی.

تماس برقرار می‌شود. به این پدیده ناپایداری کششی و ولتاژ متناظر با آن را ناپایداری کششی می‌گویند.

در شکل ۶ نتایج دو روش تحلیلی و المان محدود با یکدیگر مقایسه شده است. نتایج حاصل از روش تحلیلی بر مبنای روش گالركين و با در نظر گرفتن 10° تابع تقریب نتایج به دست آمده و در روش المان محدود از 50° برای محاسبات بهره گرفته شده است. در محاسبات صورت گرفته، میزان ولتاژ و بار بی بعد $\hat{V} = 7, \hat{P} = -2$ و برای تئوری کوپل تنش اصلاحی میزان پارامتر مقیاس طول بی بعد برابر با $\hat{I} = 0/02$ در نظر گرفته شده است. نتایج در محدوده ناپایداری محاسبه گردیده است و یک تطابق بسیار خوب در نمودار جابجایی برحسب موقعیت (حتی در محدوده قله) در دو روش ملاحظه می‌شود. بنابراین با در نظر گرفتن 10° تابع تقریب در روش تحلیلی و 50° المان در روش المان محدود، امکان پیش‌بینی دقیقی از تغییر شکل سازه و بررسی دقیق ناپایداری کششی و کمانش وجود دارد.

با توجه به پارامترهای ارائه شده در بخش‌های قبلی به مقایسه بیشینه جابجایی بر حسب ولتاژ در تئوری‌های کلاسیک و کوپل تنش اصلاحی پرداخته می‌شود. در نمودار شکل ۷، بیشینه جابجایی برحسب ولتاژ برای دو تئوری مذکور نشان داده شده است. مقایسه بین نتایج نشان می‌دهد که تئوری کلاسیک در مقایسه با کوپل تنش اصلاحی، جابجایی بزرگتری را پیش‌بینی می‌کند، این اختلاف به دلیل پیش‌بینی

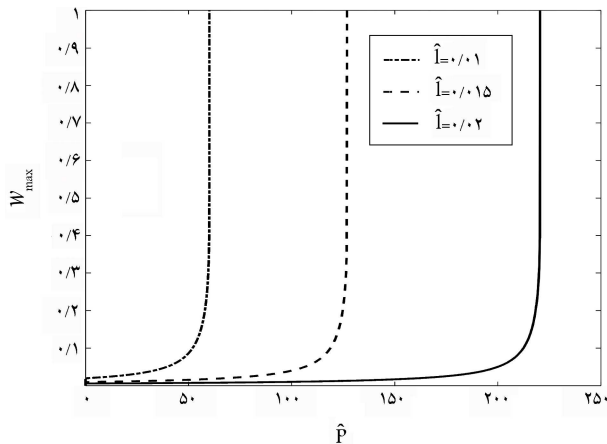


شكل ۵. همگرایی بیشینه جابجایی برحسب ولتاژ در تئوری کوپل تنش اصلاحی.

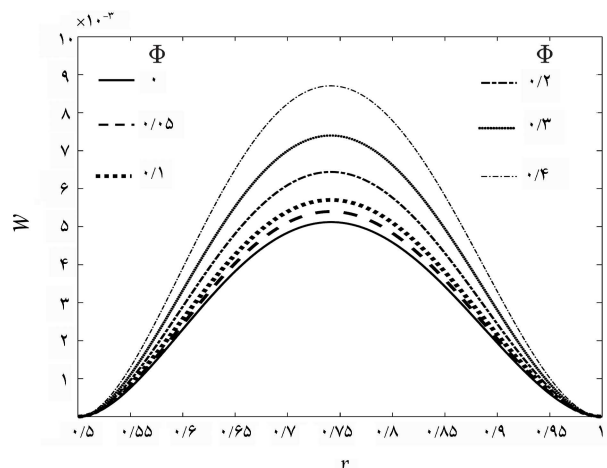
ولتاژ در شکل ۵ نیز ملاحظه می‌شود که در نظر گرفتن پنج تابع تقریب، می‌تواند منجر به همگرایی شود. به گونه‌ای که در بیشینه جابجایی‌های به دست آمده با استفاده از سه تابع تقریب و پنج تابع تقریب تفاوتی مشاهده نمی‌شود. همچنین، شکل مذکور نشان می‌دهد که با افزایش ولتاژ، بیشینه جابجایی و شیب آن افزایش یافته تا در یک ولتاژ مشخص، این شیب بسیار بزرگ شده و جابجایی به سمت عدد یک میل نماید. در این حالت میزان جابجایی و فاصله اولیه بین الکترودها باهم برابر شده و

جدول ۲. بار کماتش و ولتاژ ناپایداری کششی برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی بعد در تئوری کوپل تنش اصلاحی.

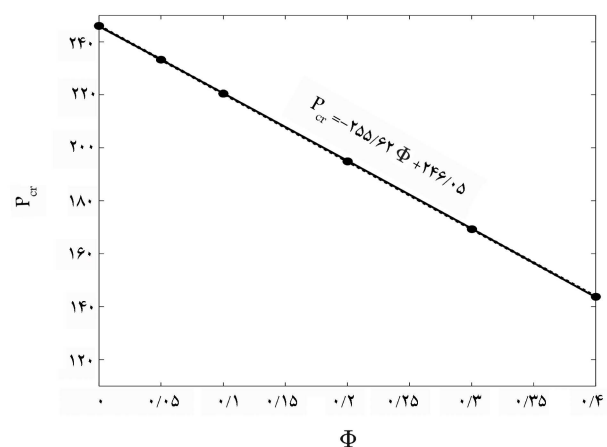
$\hat{l} = 0/02$		$\hat{l} = 0/015$		$\hat{l} = 0/01$		
همگرا	یک مود	همگرا	یک مود	همگرا	یک مود	
۲۲۰/۶	۲۲۸/۸	۱۲۷	۱۳۱/۶۲	۶۰/۱	۶۲/۲	P_{cr}
۳۹/۹۸	۴۰/۱۳	۳۰/۵۹	۳۰/۶۷۹	۲۱/۵	۲۱/۵	V_{PI}



شکل ۸. بیشینه جابجایی برحسب بار شعاعی در تئوری کوپل تنش اصلاحی برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول بی بعد.



شکل ۹. جابجایی برحسب موقعیت شعاعی در تئوری کوپل تنش اصلاحی برای مقادیر مختلف پارامتر نسبت تخلخل.



شکل ۱۰. بار کماتش برحسب میزان نسبت تخلخل.

سختی کوچکتر در تئوری کلاسیک می باشد که منجر به محاسبه جابجایی بزرگتر در این تئوری گردیده است. در این نمودار، تئوری کوپل تنش اصلاحی در مقایسه با تئوری کلاسیک، محدوده پایداری و ولتاژ ناپایداری بزرگتری را پیش بینی می نماید. به گونه ای که ولتاژ ناپایداری کششی در تئوری کوپل تنش اصلاحی $\hat{V}_{PI} = 39/97$ و در تئوری کلاسیک $\hat{V}_{PI} = 9/02$ می شود. بنابراین این مشاهدات، در مقیاس میکرو لزوم استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاحی به جای تئوری کلاسیک را بر جسته می نماید. زیرا تئوری کلاسیک منجر به پیش بینی سختی و محدوده پایداری کوچکتر و جابجایی بزرگتر از مقدار واقعی می شود.

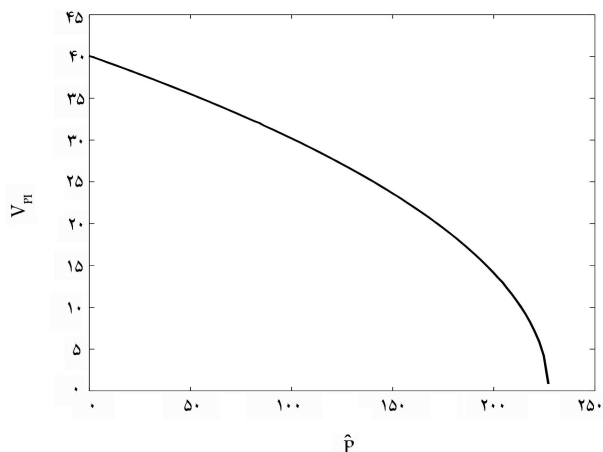
در ادامه با در نظر گرفتن پارامترهای $\hat{V} = 7$, $\hat{P} = -2$ ، محاسبات مربوط به تعیین جابجایی و بررسی پایداری برای مقادیر مختلف پارامتر بی بعد مقیاس طول انجام می پذیرد. این پارامتر بی بعد با ابعاد شعاعی نسبت عکس داشته و نقش اساسی و انحصاری در تأثیر تئوری کوپل تنش اصلاحی بر نتایج دارد و اگر این پارامتر در تحلیل نادیده گرفته شود، نتایج حاصل از تئوری کوپل تنش اصلاحی بر نتایج تئوری کلاسیک منطبق می شود. برای سه مقدار پارامتر مقیاس طول بی بعد شده ($\hat{l} = 0/01, 0/015, 0/02$)، در شکل ۸، تأثیر این پارامتر بر تغییر شکل استاتیکی و کماتش مورد بررسی قرار گرفته است. همان گونه که در نتایج مشاهده می شود، با افزایش این پارامتر، بیشینه جابجایی (در مقایسه با تئوری کلاسیک) با کاهش قابل ملاحظه ای همراه است و محدوده پایداری و بار کماتش بزرگتر می گردد. بنابراین با افزایش این پارامتر سازه سخت تر شده و شاهد افت شدید خیز خواهیم بود. در جدول ۲، بار کماتش و ولتاژ ناپایداری کششی در مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول محاسبه و نتایج آن با روش مشتق گیری اشاره شده در بخش قبل مقایسه گردیده است. نشان داده شده است که با تغییر پارامتر مقیاس طول به دو برابر، بار کماتش حدود $2/7$ برابر بزرگتر می شود. ولتاژ ناپایداری نیز با همین تغییر ۸۶ درصد بزرگتر می گردد. همچنین اختلاف کمی بین روش ارائه شده برای محاسبه ولتاژ ناپایداری و بار کماتش محاسبه شده توسط ابزار مشتق گیری با نتایج ناپایداری ایجاد شده در نمودارهای بیشینه جابجایی و ولتاژ و بیشینه جابه جایی بار وجود دارد. این اختلاف در ولتاژ ناپایداری به زیر $0/5$ درصد و برای بار کماتش به $3/5$ درصد می رسد. بنابراین روش ارائه شده مشتق گیری می تواند با دقت بالا برای محاسبه ولتاژ ناپایداری و با دقت مناسبی برای تخمین بار کماتش در تئوری کوپل تنش اصلاحی مورد استفاده قرار گیرد.

در ادامه تأثیر تخلخل در بار کماتش و ولتاژ ناپایداری بررسی می شود. نتایج این بخش برای پارامتر مقیاس طول بی بعد $\hat{l} = 0/02$ و میزان ولتاژ و بار شعاعی بی بعد $\hat{V} = 7$, $\hat{P} = -2$ برای مقادیر مختلف درصد تخلخل استخراج گردیده است. در شکل ۹ تغییرات جابجایی بر حسب موقعیت برای نسبت های مختلف تخلخل و در شکل ۱۰ تغییرات بار کماتش بر حسب نسبت تخلخل محاسبه شده است. به دلیل کاهش سختی سازه، با افزایش نسبت تخلخل، میزان جابجایی افزایش می یابد و کاهش محدوده پایداری و بار کماتش رخ می دهد.

مطابق با جدول ۳، تغییرات بار کماتش بر حسب نسبت تخلخل به صورت خطی است و از رابطه $\hat{P}_{cr} = -255/62 \Phi + 246/0.5$ تبعیت می کند. لازم به ذکر

جدول ۳. بار کمانش و ولتاژ ناپایداری کششی برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی بی بعد.

Φ	۰/۴	۰/۲	۰/۱	۰/۰۵
P_{cr}	۱۴۳/۵۶	۱۹۵/۱۲۵	۲۲۰/۵۷	۲۳۳/۲۳۵
V_{PI}	۳۲/۴۵۵	۳۷/۶۶	۳۹/۹۷۵	۴۱/۰۸



شکل ۱۱. ولتاژ ناپایداری بی بعد برحسب بار بی بعد.

است که منحنی بار کمانش برحسب نسبت تخلخل در مقایسه با رابطه ولتاژ ناپایداری نسبت تخلخل، به نمودار خطی نزدیک تر است. اما رابطه ولتاژ ناپایداری بر حسب نسبت تخلخل نیز با تقریب مناسبی از رابطه $\hat{V}_{PI} = -24/17\Phi + 42/312$ (با توجه به درون یابی انجام شده) پیروی می نماید.

در نمودار شکل ۱۱، ولتاژ ناپایداری کششی برحسب بار فشاری تکیه گاهی بی بعد محاسبه گردیده است. همان گونه که نتایج نشان می دهد، با افزایش بار تکیه گاهی، ولتاژ ناپایداری کششی کاهش می یابد. در محدوده ابتدای نمودار مشاهده می شود که ارتباط کاهش بین ولتاژ ناپایداری کششی و بار به صورت خطی است و به صورت یکنواخت با افزایش بار، ولتاژ ناپایداری کاهش پیدا می کند. اما از یک محدوده ای به بعد شیب این نمودار افزایش ناگهانی داشته تا در یک بار مشخص این شیب

بسیار بزرگ شده و ولتاژ ناپایداری کششی بسیار کوچک می شود. این بار یک بار بحرانی است. ملاحظه می گردد که در این بار بحرانی، برای ولتاژهای بسیار کوچک نیز ناپایداری رخ می دهد که این رویداد همان پدیده کمانش می باشد.

۴. نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله، با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاحی، رفتار استاتیکی، ناپایداری و کمانش در میکروورق های تحت میدان الکترواستاتیک مورد بررسی قرار گرفته است. در روش گالرکین همگرایی نمودارهای جابجایی و بیشینه آن با در نظر گرفتن پنج تابع تقریب، حتی تا محدوده ناپایداری، رخ می دهد و همچنین، یک تطابق بسیار خوب بین دو روش گالرکین و المان محدود مشاهده می شود.

نتایج همگرا شده (چند تابع تقریب) نسبت به نتایج روش مشتق گیری در ولتاژ ناپایداری کششی، مطابقتی با خطای کمتر از یک درصد برای ولتاژ ناپایداری و زیر چهار درصد برای کمانش دارد. مقایسه بین نتایج تئوری های کلاسیک و کوپل تنش اصلاحی نشان می دهد که تئوری کلاسیک در مقایسه با تئوری کوپل تنش اصلاحی، جابجایی بزرگ تری پیش بینی می کند که این اختلاف به دلیل پیش بینی سختی کوچک تر در تئوری کلاسیک است که منجر به بزرگ تر شدن جابجایی، کاهش محدوده ناپایداری و بار کمانش در این تئوری گردیده است. در ادامه، اثر تخلخل بر رفتار ورق مورد بررسی قرار گرفته است ملاحظه می گردد که با افزایش تخلخل جابجایی بزرگتر شده و ناحیه پایداری، ولتاژ ناپایداری و بار کمانش کاهش می یابد. همچنین تغییرات ولتاژ ناپایداری و بار کمانش برحسب نسبت تخلخل به صورت یکنواخت است، تغییرات ولتاژ برحسب نسبت تخلخل تقریباً به صورت شبه خطی و تغییرات بار کمانش برحسب نسبت تخلخل به صورت خطی می باشد که رابطه خطی آن نیز به دست آمده است. تغییرات ولتاژ ناپایداری کششی برحسب بار فشاری تکیه گاهی بی بعد نشان می دهد که با افزایش بار تکیه گاهی، ولتاژ ناپایداری کششی ابتدا به صورت خطی و یکنواخت کاهش می یابد. مطابق با نتایج حاصل، از یک محدوده ای به بعد، شیب این نمودار، افزایش ناگهانی داشته تا در یک بار مشخص، شیب مذکور بسیار بزرگ شده و ولتاژ ناپایداری کششی، بسیار کوچک می شود. این بار مشخص همان بار بحرانی کمانش است.

منابع (References)

- Saghir, S. and Younis, M.I., 2018. An investigation of the mechanical behavior of initially curved microplates under electrostatic actuation. *Acta Mechanica*, 229, pp.2909-2922. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2141-3>.
- Wang, Y.Q., Zhao, H.L., Ye, C. and Zu, J.W., 2018. A porous microbeam model for bending and vibration analysis based on the sinusoidal beam theory and modified strain gradient theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 10, pp.1850059. <https://doi.org/10.1142/S175882511850059X>.
- She, G.L., Yuan, F.G. and Ren, Y.R., 2018. On wave propagation of porous nanotubes. *International Journal of Engineering Science*, 130, pp.62-74. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.05.002>.
- Hong, J., Wang, S., Qiu, X. and Zhang, G., 2022. Bending and wave propagation analysis of magneto-electro-elastic functionally graded porous microbeams. *Crystals*, 12, p.732. <https://doi.org/10.3390/cryst12050732>.
- Liu, Z., Yang, C., Gao, W., Wu, D. and Li, G., 2019. Nonlinear behaviour stability of functionally graded porous arches with graphene platelets reinforcements. *International Journal of Engineering Science*, 137, pp.37-56. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.12.003>.
- Dang, V.H. and Do, Q.C., 2021. Nonlinear vibration and stability of functionally graded porous microbeam un-

- der electrostatic actuation. *Archive of Applied Mechanics*, 91, pp.2301-2329. <https://doi.org/10.1007/s00419-021-01884-7>.
7. Zhang, Y., Liu, B., Du, C. and Zhou, R., 2019. On the behaviors of porous shape memory alloy beam with gradient porosity under pure bending. *Journal of Materials Research*, 34, pp.282-289. <https://doi.org/10.1557/jmr.2018.423>.
 8. Heshmati, M. and Daneshmand, F., 2019. Vibration analysis of non-uniform porous beams with functionally graded porosity distribution. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part L: Journal of Materials: Design and Applications*, 233, pp.1678-1697. <https://doi.org/10.1177/146442071878090>.
 9. Jalaei, M. and Civalek, Ö., 2019. On dynamic instability of magnetically embedded viscoelastic porous FG nanobeam. *International Journal of Engineering Science*, 143, pp.14-32. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.013>.
 10. Xu, X., Karami, B. and Shahsavari, D., 2021. Time-dependent behavior of porous curved nanobeam. *International Journal of Engineering Science*, 160, p.103455. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2021.103455>.
 11. Amir, S., Soleimani-Javid, Z. and Arshid, E., 2019. Size-dependent free vibration of sandwich micro beam with porous core subjected to thermal load based on SSDBT. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 99, p.e201800334. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800334>.
 12. Farokhi, H. and Ghayesh, M.H., 2019. Modified couple stress theory in orthogonal curvilinear coordinates. *Acta Mechanica*, 230, pp.851-869. <https://doi.org/10.1007/s00707-018-2331-z>.
 13. Soleimani, I. and Beni, Y.T., 2018. Vibration analysis of nanotubes based on two-node size dependent axisymmetric shell element. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 18, pp.1345-1358. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2018.04.009>.
 14. Jiao, P., Alavi, A.H., Borchani, W. and Lajnef, N., 2018. Micro-composite films constrained by irregularly bilateral walls: a size-dependent post-buckling analysis. *Composite Structures*, 195, pp.219-231. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.04.046>.
 15. Hakamiha, S. and Mojahedi, M., 2017. Nonlinear analysis of microswitches considering nonclassical theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 9, p.1750113. <https://doi.org/10.1142/S1758825117501137>.
 16. Moradi, A., Yaghootian, A., Jalalvand, M. and Ghanbarzadeh, A., 2018. Magneto-Thermo mechanical vibration analysis of FG nanoplate embedded on visco Pasternak foundation. *Journal of Computational Applied Mechanics*, 49, pp. 395-407. <https://doi.org/10.22059/JCAMECH.2018.261764.300>.
 17. Bina, R. and Mojahedi, M., 2017. Static deflection, pull-in instability and oscillatory behavior of the electrostatically actuated microresonator with a distributed proof mass considering non-classical theory. *International Journal of Applied Mechanics*, 9, p.1750023. <https://doi.org/10.1142/S1758825117500235>.
 18. Mahinzare, M., Ranjbarpur, H. and Ghadiri, M., 2018. Free vibration analysis of a rotary smart two directional functionally graded piezoelectric material in axial symmetry circular nanoplate. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 100, pp.188-207. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.07.041>.
 19. Malikan, M. and Eremeyev, V.A., 2023. On time-dependent nonlinear dynamic response of micro-elastic solids. *International Journal of Engineering Science*, 182, p.103793. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103793>.
 20. Al-Furjan, M., Samimi-Sohrforozani, E., Habibi, M., won Jung, D. and Safarpour, H., 2021. Vibrational characteristics of a higher-order laminated composite viscoelastic annular microplate via modified couple stress theory. *Composite Structures*, 257, p.113152. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113152>.
 21. Arshid, E., Arshid, H., Amir, S. and Mousavi, S.B., 2021. Free vibration and buckling analyses of FG porous sandwich curved microbeams in thermal environment under magnetic field based on modified couple stress theory. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 21, pp.1-23. <https://doi.org/10.1007/s43452-020-00150-x>.
 22. Zandekarimi, S., Asadi, B. and Rahaeifard, M., 2018. Size dependent thermal buckling and postbuckling of functionally graded circular microplates based on modified couple stress theory. *Journal of Thermal Stresses*, 41, pp.1-16. <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1364612>.
 23. Shahrokhi, M., Jomehzadeh, E. and Rezaeizadeh, M., 2019. Size-dependent green's function for bending of circular micro plates under eccentric load. *Journal of Solid Mechanics*, 11, pp.14-25. <https://doi.org/10.22034/jsm.2019.664212>.
 24. Şimşek, M. and Aydın, M., 2017. Size-dependent forced vibration of an imperfect functionally graded (FG) microplate with porosities subjected to a moving load using the modified couple stress theory. *Composite Structures*, 160, pp.408-421. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.034>.
 25. Barati, M.R. and Shahverdi, H., 2017. Dynamic modeling and vibration analysis of double-layered multi-phase porous nanocrystalline silicon nanoplate systems. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 66, pp.256-268. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.07.010>.
 26. Hosseini, M., Mahinzare, M. and Ghadiri, M., 2018. Magnetic field effect on vibration of a rotary smart size-dependent two-dimensional porous functionally graded nanoplate. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 29, pp.2885-2901. <https://doi.org/10.1177/1045389X187810>.
 27. Sharifinsab, E. and Mojahedi, M., 2018. Nonlinear vibration of size dependent microresonators with an electrostatically actuated proof mass. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18, p.1850057.
 28. Mao, Y.H., Shang, Y., Cen, S. and Li, C.F., 2023. An efficient 3-node triangular plate element for static and dynamic analyses of microplates based on modified couple stress theory with micro-inertia. *Engineering with Computers*, 39, pp.3061-3084. <https://doi.org/10.1007/s00366-022-01715-5>.

29. Mosayyebi, M., Ashenai Ghasemi, F. and Aghaee, M., 2022. Modified couple stress theory for wave propagation in viscoelastic sandwich microplates with FG-GPLRC core and piezoelectric face sheets as sensor and actuator. *Waves in Random and Complex Media*, pp.1-44. <https://doi.org/10.1080/17455030.2022.2106387>.
30. Yu, X., Maalla, A. and Moradi, Z., 2022. Electroelastic high-order computational continuum strategy for critical voltage and frequency of piezoelectric NEMS via modified multi-physical couple stress theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 165, p.108373. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108373>.
31. Ke, L.L., Wang, Y.S., Yang, J. and Kitipornchai, S., 2012. Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory. *Journal of Sound and Vibration*, 331, pp.94-106. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.020>.
32. Park, S. and Gao, X.L., 2008. Variational formulation of a modified couple stress theory and its application to a simple shear problem. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 59, pp.904-917. <https://doi.org/10.1007/s00033-006-6073-8>.
33. Niknam, H. and Aghdam, M., 2015. A semi analytical approach for large amplitude free vibration and buckling of nonlocal FG beams resting on elastic foundation. *Composite Structures*, 119, pp.452-462. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.023>.