

طراحی کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری برای کنترل وضعیت یک ماهواره دارای سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف پذیر با تابع تبدیل مرتبه کسری

رضا صفائی (دانشجوی دکتری)

محسن فتحی جگرکندی* (دانشیار)

دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۴۰۳)
دوره ۴۰، شماره ۲، صص. ۱۴-۳، (پژوهشی)

در این مقاله، مدل تابع تبدیل مرتبه کسری یک ماهواره با سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف پذیر مبنای کار قرار گرفته است. برای کنترل این سیستم دینامیکی از روش مقاوم کنترل مود لغزشی استفاده شده است. برای توابع تبدیل نمی‌توان به صورت مستقیم کنترل کننده مود لغزشی طراحی کرد. به همین دلیل، در ابتدا از روی مدل تابع تبدیل مرتبه کسری، یک تحقق فضای حالت مرتبه کسری به دست آورده و سپس کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری طراحی شده است. در روند طراحی کنترل کننده مود لغزشی و اثبات پایداری آن از معادلات دینامیکی سیستم استفاده می‌شود و از آنجا که مدل فضای حالت از نوع مرتبه کسری است از سطح لغزش مرتبه صحیح نمی‌توان استفاده کرد؛ بنابراین، از سطح لغزش مرتبه کسری استفاده شده است. نتایج نشان می‌دهد که در شرایط وجود عدم قطعیت در هر کدام از چهار پارامتر سیستم، کنترل کننده قادر است تا سیگنالی تولید کند که در نهایت سیگنال مرجع به خوبی تعقیب گردد.

reza.safaei@sharif.edu
fathi@sharif.edu

واژگان کلیدی: کنترل مود لغزشی مرتبه کسری، تابع تبدیل مرتبه کسری، کنترل وضعیت ماهواره، سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف پذیر، عدم قطعیت.

۱. مقدمه

تفاوت‌ها به‌عنوان عدم قطعیت شناخته می‌شوند [۵]. در کارهای پژوهشی و عملی، یکی از موضوعات حائز اهمیت کنترل سیستم تحت شرایط وجود عدم قطعیت است. در روش‌های کنترل کلاسیک، به دلیل اینکه در روند طراحی کنترل کننده وجود عدم قطعیت در نظر گرفته نمی‌شود، تضمینی هم برای پایداری و عملکرد مناسب سیستم وجود ندارد. به همین دلیل، بهتر است که از روش‌های کنترل مقاوم استفاده شود.

از جمله روش‌های کنترل مقاوم، روش کنترل مود لغزشی^۱ است که در این تحقیق از آن استفاده شده است. نکته حائز اهمیتی که در اینجا وجود دارد این است که به دلیل استفاده از معادلات دینامیکی سیستم در روند طراحی و اثبات پایداری کنترل کننده مود لغزشی، در صورتی که دینامیک سیستم از نوع مرتبه کسری باشد، نمی‌توان از کنترل کننده مود لغزشی مرتبه صحیح استفاده کرد. دلیل این امر این است که در دینامیک مرتبه کسری از مشتق مرتبه کسری استفاده می‌شود که حالت تعمیم یافته و کلی تری نسبت به مشتق مرتبه صحیح است [۶]. بنابراین، اگر سیستم مرتبه کسری باشد، باید حتماً از سطح لغزش مرتبه کسری استفاده کرد که در این صورت به کنترل کننده موجود، کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری^۲ گفته می‌شود [۷].

یکی از مسائل مهم در کنترل بسیاری از سیستم‌های مکانیکی وجود اثرات سازه‌ای است که می‌تواند عملکرد کنترلی سیستم را دچار مشکل کند. تمامی اجسام در واقعیت الاستیک هستند، و صلب بودن فقط یک فرض در اجسام است که در برخی موارد هم نمی‌توان صرفاً از این فرض استفاده کرد. برای مثال، بال‌های یک هواپیما نسبت به بدنه هواپیما دارای نوسانات سازه‌ای قابل ملاحظه است. در یک مثال دیگر، بوم‌های گرادیان جاذبه و پنل‌های خورشیدی در یک ماهواره نسبت به بدنه ماهواره دارای نوسانات قابل توجهی هستند. همچنین پره‌های یک بالگرد نسبت به شفت موتور بالگرد دارای چنین حالتی است. به این قبیل سیستم‌ها، سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف پذیر گفته می‌شود [۴-۱]. در این موارد می‌توان یک قسمت که نوسانات سازه‌ای بیشتری دارد را به‌عنوان جسم الاستیک و قسمت دیگر را به‌عنوان جسم صلب در نظر گرفت.

همواره بین سیستم واقعی و سیستم مدل شده تفاوت‌هایی وجود دارد که این

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۰۲، تاریخ اصلاحیه: ۱۴۰۲/۰۷/۰۷، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۰۵.

استناد به این مقاله:

صفائی، رضا، فتحی جگرکندی، محسن، ۱۴۰۳. طراحی کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری برای کنترل وضعیت یک ماهواره با تابع تبدیل مرتبه کسری، مهندسی مکانیک شریف، ۴۰(۲)، صص. ۱۴-۳. DOI: 10.24200/j40.2023.62462.1684.

^۱ Sliding Mode Control (SMC)

^۲ Fractional Order Sliding Mode Control (FOSMC)

تاکنون پژوهش‌های زیادی در زمینه کنترل سیستم‌ها با استفاده از کنترل مود لغزشی مرتبه کسری صورت گرفته است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌شود. در سال ۲۰۱۰ میلادی، دلاوری و همکارانش^[۸] برای سیستم دینامیکی غیرخطی بازوی ربات دو درجه آزادی با دینامیک مرتبه صحیح و همچنین، سیستم دینامیکی غیرخطی مدل دو تانک با دینامیک مرتبه صحیح دو کنترل کننده مود لغزشی طراحی کردند که یکی دارای سطح لغزش مرتبه صحیح و دیگری دارای سطح لغزش مرتبه کسری است. نتایج نشان داد که این روش کنترلی در حضور تغییرات پارامترها و همچنین اغتشاش خارجی عملکرد بسیار مناسبی از خودش نشان می‌دهد. در سال ۲۰۱۲ میلادی، یینگان و همکارانش^[۹] برای سیستم ترمز ضد قفل^۱ که دارای غیرخطیت شدید است و در شرایط جاده‌ای، دارای تغییرات و عدم قطعیت در پارامترهایش است، یک کنترل کننده مود لغزشی با سطح لغزش تناسبی-مشتقی مرتبه کسری طراحی کردند. نتایج نشان داد که کنترل مود لغزشی مرتبه کسری از هم‌تای مرتبه صحیح خود عملکرد بهتری نشان می‌دهد. در سال ۲۰۱۵ میلادی، وانگ و همکارانش^[۱۰] برای کنترل موقعیت زاویه‌ای یک سرومکانیزم که تحت اثر بارهای آیرودینامیکی قرار می‌گیرد، از کنترل مود لغزشی مرتبه کسری فازی تطبیقی استفاده کردند. عملکرد این کنترل کننده در حضور عدم قطعیت‌های سیستم، اصطکاک غیرخطی و بارهای آیرودینامیکی مورد ارزیابی قرار گرفت. در این مقاله، از دو سطح لغزش مرتبه کسری تناسبی-مشتقی و تناسبی-انترگرالی و همچنین برای کاهش پدیده چترینگ^۲ از منطق فازی استفاده شد. تاثیر استفاده از روش کنترلی ارائه شده در مثال‌های موجود در مقاله نشان‌دهنده عملکرد مناسب این روش کنترلی است. در سال ۲۰۱۵ میلادی، ابراهیم‌خانی^[۱۱] دینامیک غیرخطی یک توربین بادی را به‌عنوان مرجع کارش در نظر گرفت و برای کنترل بهتر این سیستم در حضور نامعینی‌ها، از روش کنترل مود لغزشی مرتبه کسری و همچنین برای تخمین نامعینی‌ها از یک تخمینگر مرتبه کسری استفاده کرد. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده عملکرد مقاوم خوب کنترل کننده است. در سال ۲۰۱۷ میلادی، فرهادی و همکارانش^[۱۲] از کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری با سطح لغزش تناسبی-مشتقی با مرتبه α برای کنترل یک کوادکوپتر با مدل غیرخطی شش درجه آزادی استفاده کردند. با در نظر گرفتن پارامتر α در بازه صفر تا دو، بعد از اعمال قانون کنترلی روی مدل دینامیکی سیستم نتیجه گرفته شد که: حالت $\alpha = 1$ نشان‌دهنده یک کنترل کننده مود لغزشی مرتبه اول استاندارد است که برای دنبال کردن مسیر مطلوب کوادکوپتر سیگنال کنترل دچار نوسانات شدید می‌شود. در حالت $0 < \alpha < 1$ ، دامنه نوسان در ورودی کنترل از دامنه نوسان در کنترل مود لغزشی استاندارد بزرگتر می‌شود و نه تنها بهبودی در میزان چترینگ ندارد بلکه دامنه نوسانات نیز افزایش می‌یابد. در حالت $1 < \alpha < 2$ ، در دامنه نوسان سیگنال ورودی کنترل نسبت به حالت استاندارد بهبود حاصل می‌شود. در سال ۲۰۲۲ میلادی، یولا و همکارانش^[۱۳] برای کنترل آرایش‌بندی رهبر-پیرو برای تعدادی وسیله پرنده بدون سرنشین از کنترل مود لغزشی مرتبه کسری استفاده کردند. در این پژوهش، عدم قطعیت‌های پارامتری و تندباد در دو بخش طولی و عرضی دینامیک وسایل پرنده در نظر گرفته شد و عملکرد منطق کنترل مقاوم طراحی شده در این شرایط مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان‌دهنده عملکرد مناسب الگوریتم

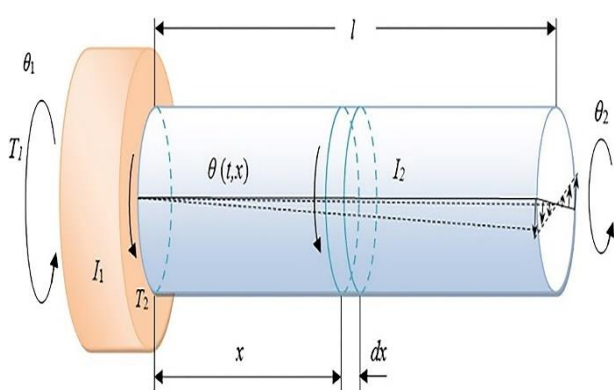
کنترلی طراحی شده است. در سال ۲۰۲۲ میلادی، شوانگی و همکارانش^[۱۴] برای رهگیری یک وسیله پرنده ابرصوت یک قانون هدایت با استفاده از کنترل مود لغزشی مرتبه کسری طراحی کردند. در این پژوهش، با استفاده از مفهوم صفر بودن نرخ چرخش خط دید هدف از دیدگاه موشک رهگیر یک قانون هدایت طراحی شد و برای بررسی عملکرد قانون هدایت برای هدف دو مانور بنگ-بنگ و مانور سینوسی در نظر گرفته شد. در نهایت سه الگوریتم هدایت ناوبری تناسبی^۳، هدایت مود لغزشی مرتبه صحیح و هدایت مود لغزشی مرتبه کسری با یکدیگر مقایسه شدند. نتایج نشان دادند که در صورت استفاده از ریاضیات مرتبه کسری در قانون هدایت، موشک رهگیر توانسته است در زمان رهگیری کمتر با مصرف انرژی کمتر به فاصله از دست‌دهی^۴ کمتری دست یابد.

در تحقیق حاضر، مدل تابع تبدیل مرتبه کسری یک ماهواره با سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف پذیر که دارای قسمت ویسکوالاستیک با رابطه مرتبه کسری است مرجع کار قرار گرفته است^[۴]. برای این سیستم، کنترل کننده مود لغزشی با سطح لغزش مرتبه کسری طراحی شده و از تقریب اوستالوپ^۵ برای شبیه‌سازی عددی استفاده شده است.

در ادامه در بخش ۲، نحوه استخراج مدل تابع تبدیل مرتبه کسری سیستم با توجه به مرجع^[۴] توضیح داده شده است. در بخش ۳، تئوری کنترل مود لغزشی مرتبه کسری و رابطه ریاضی سیگنال کنترلی حاصل، که در این پژوهش از آن استفاده شده، مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۴، فرم مناسب فضای شبه حالت مرتبه کسری که برای طراحی کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری ضروری است استخراج شده است. در نهایت در بخش ۵، حالت‌های مختلف عدم قطعیت در پارامترهای سیستم معرفی شده و نتایج شبیه‌سازی عددی ارائه گردیده است.

۲. مدل مرتبه کسری ماهواره

برای طراحی کنترل کننده هر سیستم دینامیکی، به یک مدل دینامیکی از سیستم مورد مطالعه نیاز است. یک مدل ساده برای بسیاری از مسائل دینامیک و کنترل ماهواره با سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف پذیر در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. مدل ایده آل پایه یک ماهواره با سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف پذیر^[۴].

تاکنون پژوهش‌های زیادی در زمینه کنترل سیستم‌ها با استفاده از کنترل مود لغزشی مرتبه کسری صورت گرفته است که در ادامه به برخی از آنها اشاره می‌شود. در سال ۲۰۱۰ میلادی، دلاوری و همکارانش^[۸] برای سیستم دینامیکی غیرخطی بازوی ربات دو درجه آزادی با دینامیک مرتبه صحیح و همچنین، سیستم دینامیکی غیرخطی مدل دو تانک با دینامیک مرتبه صحیح دو کنترل کننده مود لغزشی طراحی کردند که یکی دارای سطح لغزش مرتبه صحیح و دیگری دارای سطح لغزش مرتبه کسری است. نتایج نشان داد که این روش کنترلی در حضور تغییرات پارامترها و همچنین اغتشاش خارجی عملکرد بسیار مناسبی از خودش نشان می‌دهد. در سال ۲۰۱۲ میلادی، یینگان و همکارانش^[۹] برای سیستم ترمز ضد قفل^۱ که دارای غیرخطیت شدید است و در شرایط جاده‌ای، دارای تغییرات و عدم قطعیت در پارامترهایش است، یک کنترل کننده مود لغزشی با سطح لغزش تناسبی-مشتقی مرتبه کسری طراحی کردند. نتایج نشان داد که کنترل مود لغزشی مرتبه کسری از هم‌تای مرتبه صحیح خود عملکرد بهتری نشان می‌دهد. در سال ۲۰۱۵ میلادی، وانگ و همکارانش^[۱۰] برای کنترل موقعیت زاویه‌ای یک سرومکانیزم که تحت اثر بارهای آیرودینامیکی قرار می‌گیرد، از کنترل مود لغزشی مرتبه کسری فازی تطبیقی استفاده کردند. عملکرد این کنترل کننده در حضور عدم قطعیت‌های سیستم، اصطکاک غیرخطی و بارهای آیرودینامیکی مورد ارزیابی قرار گرفت. در این مقاله، از دو سطح لغزش مرتبه کسری تناسبی-مشتقی و تناسبی-انترگرالی و همچنین برای کاهش پدیده چترینگ^۲ از منطق فازی استفاده شد. تاثیر استفاده از روش کنترلی ارائه شده در مثال‌های موجود در مقاله نشان‌دهنده عملکرد مناسب این روش کنترلی است. در سال ۲۰۱۵ میلادی، ابراهیم‌خانی^[۱۱] دینامیک غیرخطی یک توربین بادی را به‌عنوان مرجع کارش در نظر گرفت و برای کنترل بهتر این سیستم در حضور نامعینی‌ها، از روش کنترل مود لغزشی مرتبه کسری و همچنین برای تخمین نامعینی‌ها از یک تخمینگر مرتبه کسری استفاده کرد. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده عملکرد مقاوم خوب کنترل کننده است. در سال ۲۰۱۷ میلادی، فرهادی و همکارانش^[۱۲] از کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری با سطح لغزش تناسبی-مشتقی با مرتبه α برای کنترل یک کوادکوپتر با مدل غیرخطی شش درجه آزادی استفاده کردند. با در نظر گرفتن پارامتر α در بازه صفر تا دو، بعد از اعمال قانون کنترلی روی مدل دینامیکی سیستم نتیجه گرفته شد که: حالت $\alpha = 1$ نشان‌دهنده یک کنترل کننده مود لغزشی مرتبه اول استاندارد است که برای دنبال کردن مسیر مطلوب کوادکوپتر سیگنال کنترل دچار نوسانات شدید می‌شود. در حالت $0 < \alpha < 1$ ، دامنه نوسان در ورودی کنترل از دامنه نوسان در کنترل مود لغزشی استاندارد بزرگتر می‌شود و نه تنها بهبودی در میزان چترینگ ندارد بلکه دامنه نوسانات نیز افزایش می‌یابد. در حالت $1 < \alpha < 2$ ، در دامنه نوسان سیگنال ورودی کنترل نسبت به حالت استاندارد بهبود حاصل می‌شود. در سال ۲۰۲۲ میلادی، یولا و همکارانش^[۱۳] برای کنترل آرایش‌بندی رهبر-پیرو برای تعدادی وسیله پرنده بدون سرنشین از کنترل مود لغزشی مرتبه کسری استفاده کردند. در این پژوهش، عدم قطعیت‌های پارامتری و تندباد در دو بخش طولی و عرضی دینامیک وسایل پرنده در نظر گرفته شد و عملکرد منطق کنترل مقاوم طراحی شده در این شرایط مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان‌دهنده عملکرد مناسب الگوریتم

⁴ Miss Distance

⁵ Oustaloup

¹ Antilock Braking System

² Chattering

³ Proportional Navigation Guidance

با استفاده از روابط (۴) و (۵)، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر حاصل می‌شود:

$$\rho J \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} = G_\beta J \left({}^c D_t^\beta \right) \left[\frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial x^2} \right] \quad (6)$$

در این رابطه، J و ρ به ترتیب ممان اینرسی قطبی و چگالی برای شفت ویسکوالاستیک است. معادله (۶)، معادله موج برای سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف‌پذیر با مواد ویسکوالاستیک با دینامیک مرتبه کسری است. شایان ذکر است که برخلاف روش‌های کلاسیک، در این معادله هیچ عبارت مستقلاً به‌عنوان میرایی وجود ندارد. درحقیقت، دینامیک مرتبه کسری موجود در این معادله نه‌تنها خاصیت الاستیک ذخیره شده در سازه منعطف بلکه خاصیت میرایی سازه انعطاف‌پذیر را نیز در برمی‌گیرد.

دو شرط مرزی برای این معادله وجود دارد که به‌صورت زیر هستند:

(۱) شرط پیوستگی در محل اتصال دیسک صلب و شفت انعطاف‌پذیر برقرار است:

$$\theta(t, x)|_{x=0} = \theta_1(t) \quad (7)$$

(۲) شفت انعطاف‌پذیر در انتها آزاد است و آزادانه بدون هیچ‌گونه اصطکاکی حرکت می‌کند.

$$\left. \frac{d\theta(t, x)}{dx} \right|_{x=l} = 0 \quad (8)$$

با اعمال تبدیل لاپلاس روی معادله (۶) و استفاده از تبدیل لاپلاس در شروط مرزی (۷) و (۸)، تابع تبدیل از ورودی گشتاور کنترلی T_1 به خروجی θ_1 به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$G(s) = \frac{1}{I_1 s^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \times \frac{\tanh \left(\frac{1}{\omega_{nf}} s^{1-\frac{\beta}{2}} \right)}{\left(\frac{1}{\omega_{nf}} s^{1-\frac{\beta}{2}} \right)}} \quad (9)$$

در این تابع تبدیل، s متغیر لاپلاس است. همچنین یک پارامتر جدید به نام فرکانس شبه‌طبیعی^۴ وجود دارد که مربوط به شفت ویسکوالاستیک با مدل مرتبه کسری است و عبارت است از:

$$\omega_{nf} = \sqrt{\frac{G_\beta J}{I_2}} \quad (10)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، تابع تبدیل ارائه شده، دارای دو قسمت است:

قسمت اول، ناشی از وجود دیسک صلب است و به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{I_1 s^2} \quad (11)$$

در این مدل، دو قسمت وجود دارد که به یکدیگر متصل هستند. قسمت اول مربوط به بدنه اصلی ماهواره می‌باشد که به‌صورت یک دیسک صلب با ممان اینرسی I_1 مدل شده است. قسمت دوم مربوط به سازه‌های انعطاف‌پذیر ماهواره است و به‌صورت یک میله انعطاف‌پذیر معادل با طول l ، ممان اینرسی I_2 و شعاع R مدل شده است. فرض بر این است که مواد موجود در هر دو قسمت ایزوتروپیک^۱ و همگن^۲ هستند. در شکل ۱، T_1 گشتاور کنترلی، T_2 گشتاور عکس‌عملی، θ_1 جابجایی دورانی دیسک صلب و $\theta(t, x)$ تغییر شکل دورانی میله انعطاف‌پذیر در زمان t و موقعیت x است.

قسمت انعطاف‌پذیر این ماهواره از جنس ماده ویسکوالاستیک است و از یک مدل مرتبه کسری برای مدول الاستیسیته برشی آن استفاده شده است. این مدول برشی به‌صورت زیر است:

$$G(t) = \frac{G_\beta}{\Gamma(1-\beta)} t^{-\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (1)$$

که $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما، G_β مدول برشی نامی، t زمان و β مشخصه ویسکوالاستیک مرتبه کسری است. شایان ذکر است که قانون هوک و قانون لزجت نیوتن مدل‌های ریاضی خطی برای توصیف رابطه بین تنش برشی و نرخ کرنش برشی به ترتیب برای جامدات الاستیک خالص و سیالات ویسکوز خالص هستند. در دنیای واقعی، جامد الاستیک خالص و سیال ویسکوز خالص وجود ندارند و اینها صرفاً یک مدل هستند و تمامی مواد دارای ویژگی‌هایی از هر دو مدل می‌باشند.

در رابطه (۱)، به ازای $\beta = 0$ داریم:

$$G(t) = G_\beta \quad (2)$$

که معرف مدول الاستیسیته یک ماده جامد الاستیک خالص است. همچنین به ازای $\beta = 1$ داریم:

$$G(t) = 0 \quad (3)$$

که معرف مدول الاستیسیته یک ماده سیال ویسکوز خالص است.

برای به‌دست آوردن یک مدل تابع تبدیل از ورودی کنترلی T_1 به خروجی θ_1 ، از دو رابطه و دو شرط مرزی می‌توان استفاده کرد. برای شفت انعطاف‌پذیر با سطح مقطع دایروی، رابطه گشتاور داخلی $T(t, x)$ و تغییر شکل دورانی $\theta(t, x)$ شفت به‌صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T(t, x) = G_\beta J {}^c D_t^\beta \left(\frac{\partial \theta(t, x)}{\partial x} \right) \quad (4)$$

در این رابطه، ${}^c D_t^\beta(\cdot)$ مشتق مرتبه کسری β در بازه زمانی 0 تا t بر طبق تعریف کپوتو^۳ است. همچنین، معادله تعادل پیچشی شفت انعطاف‌پذیر به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\rho J \frac{\partial^2 \theta(t, x)}{\partial t^2} = \frac{dT(t, x)}{dx} \quad (5)$$

³ Caputo

⁴ Pseudo-Natural Frequency

¹ Isotropic

² Homogeneous

در اینجا هدف از طراحی کنترل مود لغزشی این است که خروجی سیستم یعنی y ، سیگنال مرجع r را تعقیب کند. این بدین معناست که بردار متغیرهای شبه حالت \mathbf{x} ، بردار سیگنال مرجع \mathbf{r} را دنبال کند. بردار سیگنال مرجع به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r \\ D^\alpha r \\ D^{2\alpha} r \\ \vdots \\ D^{(n-1)\alpha} r \end{bmatrix} \quad (16)$$

همچنین، بردار سیگنال خطای ردیابی به صورت رابطه زیر است:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{r} = \begin{bmatrix} y - r \\ D^\alpha (y - r) \\ D^{2\alpha} (y - r) \\ \vdots \\ D^{(n-1)\alpha} (y - r) \end{bmatrix} \quad (17)$$

ایده اصلی در کنترل مود لغزشی مرتبه کسری این است که سیگنال کنترل u به گونه ای به دست آید که بردار متغیرهای شبه حالت به یک زیرفضا به نام سطح لغزش با رابطه مرتبه کسری همگرا شوند و در آنجا باقی بماند. با این کار، بردار سیگنال خطای ردیابی به سمت صفر همگرا می شود:

$$\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (18)$$

یک انتخاب متداول برای تابع سطح لغزش مرتبه کسری به صورت زیر است:

$$s = (D^\gamma + \lambda)^m e \quad (19)$$

در این رابطه، γ یک عدد حقیقی مثبت است؛ به طوری که نسبت $\frac{\alpha}{\gamma}$ باید یک عدد طبیعی باشد تا در روند اثبات پایداری کنترل کننده، دینامیک سیستم در روابط ظاهر شود. همچنین λ یک پارامتر است که باید توسط طراح کنترل تعیین شود. برای اینکه تمام مرتبه های مشتق گیری سیگنال های y و x (و به عبارتی e) در تابع سطح لغزش ظاهر شود، باید m به صورت زیر باشد:

$$m = (n-1) \frac{\alpha}{\gamma} \quad (20)$$

برای اثبات پایداری کنترل کننده مود لغزشی از روش پایداری لیاپانوف استفاده می شود. تابع لیاپانوف در این پژوهش به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$V = \frac{1}{2} s^2 \quad (21)$$

این تابع، یک تابع مثبت معین است. برای اینکه سطح لغزش دارای پایداری لیاپانوف باشد، باید مشتق زمانی تابع لیاپانوف منفی نیمه معین باشد. یعنی:

$$\frac{d}{dt} V \leq 0 \quad (22)$$

بنابراین، شرط لغزش را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

قسمت دوم، ناشی از اثر کوپلینگ بین دیسک صلب و شفت ویسکوالاستیک است:

$$1 + \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \times \frac{\tanh \left(\frac{1}{\omega_{nf}} s^{1-\frac{\beta}{2}} \right)}{\left(\frac{1}{\omega_{nf}} s^{1-\frac{\beta}{2}} \right)} \quad (12)$$

در این پژوهش، تابع تبدیل رابطه (9) مرجع کار قرار گرفته و برای آن کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری طراحی شده است.

3. کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری

روش کنترل مود لغزشی روشی است که در حالت کلی قابلیت استفاده برای کنترل سیستم های دینامیکی چند ورودی-چند خروجی و غیرخطی را دارد. حتی اگر سیستم دارای عدم قطعیت هایی هم باشد، باز هم این روش کنترلی قابل استفاده است و در صورت طراحی خوب، توانایی مقابله با عدم قطعیت ها را دارد. در حقیقت می توان گفت که کنترل مود لغزشی یک روش کنترل مقاوم است. مطالب این بخش، برای یک سیستم غیرخطی تک ورودی-تک خروجی با مرتبه همسان¹ بیان شده است که برای سیستم های خطی هم قابل استفاده است. این مطالب برای کنترل سیستم های خطی یا غیرخطی چند ورودی-چند خروجی با مرتبه همسان یا غیرهمسان هم قابل استفاده خواهند بود.

یک سیستم غیرخطی تک ورودی-تک خروجی از مرتبه همسان α با تعداد n متغیر شبه حالت را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D^\alpha x_1 = x_2 \\ D^\alpha x_2 = x_3 \\ \vdots \\ D^\alpha x_{n-1} = x_n \\ D^\alpha x_n = f_A + f_B u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (13)$$

که $\alpha > 0$ و تمام شرایط اولیه صفر در نظر گرفته می شوند. بردار متغیرهای شبه حالت به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ D^\alpha y \\ D^{2\alpha} y \\ \vdots \\ D^{(n-1)\alpha} y \end{bmatrix} \quad (14)$$

اگر از معادلات موجود در رابطه (13) استفاده شود، فرم مناسب معادله سیستم برای استفاده در طراحی کنترل مود لغزشی به صورت زیر به دست می آید:

$$D^{n\alpha} y = f_A + f_B u \quad (15)$$

¹ Commensurate Order

از جمله فرم کانونی کنترل‌پذیر، فرم کانونی مشاهده‌پذیر و فرم کانونی جردن معرفی شده‌اند. در مراجع [۱۵-۱۷] روش‌هایی برای به‌دست آوردن تحقق مینیمال فضای شبه حالت از روی تابع تبدیل مرتبه کسری پیشنهاد شده است. اما باید توجه کرد که این تبدیل را باید طوری انجام داد که در نهایت فرم فضای شبه حالت به گونه‌ای باشد که برای طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی مناسب باشد. هیچ‌کدام از روش‌های ذکر شده در مراجع، دارای چنین فرمی نیستند. بنابراین از هیچ‌کدام از آنها نمی‌توان برای این کار استفاده کرد؛ لذا از روش دیگری که در ادامه توضیح داده شده است، استفاده خواهد شد. همانطور که در تابع تبدیل ارائه شده در معادله (۷) ملاحظه می‌شود، وجود عبارت

$$\frac{\tanh\left(\frac{1}{\omega_{nf}} s^{1-\frac{\beta}{2}}\right)}{\left(\frac{1}{\omega_{nf}} s^{1-\frac{\beta}{2}}\right)} \quad (32)$$

باعث شده است تابع تبدیل سیستم از نوع مرتبه کسری باشد. ابتدا برای تابع تانژانت هیپربولیک موجود در تابع تبدیل مرتبه کسری باید تبدیری اندیشیده شود. برای سادگی در نمایش، تغییر متغیرهای زیر انجام می‌شود:

$$\alpha = 1 - \frac{\beta}{2}, \quad k = \frac{1}{\omega_{nf}} \quad (33)$$

بنابراین، معادله (۳۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\tanh(k s^\alpha)}{k s^\alpha} \quad (34)$$

برای تانژانت هیپربولیک در ریاضیات پایه عبارت زیر وجود دارد:

$$\tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad (35)$$

با استفاده از بسط سری تیلور حول نقطه $z = 0$ برای عبارت‌های نمایی موجود در تابع تانژانت هیپربولیک، رابطه (۳۴) به صورت رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\tanh(k s^\alpha)}{k s^\alpha} = \frac{\sum_{i=0, i=even}^N b_i s^{i\alpha}}{\sum_{i=0, i=even}^N a_i s^{i\alpha}} \quad (36)$$

به طوری که:

$$a_i = \frac{2k^i}{(i)!}, \quad b_i = \frac{2k^i}{(i+1)!}, \quad k = \frac{1}{\omega_{nf}} \quad (37)$$

است. شایان ذکر است که استفاده از رابطه (۳۶) زمانی معتبر است که فرض شود حالت اولیه سیستم تحت کنترل به سطح لغزش نزدیک باشد. در غیر این صورت برای لحظات زمانی بین شروع فرآیند کنترل تا رسیدن به سطح لغزش این رابطه قابل استفاده نخواهد بود. در این مقاله، در قسمت شبیه‌سازی عددی

$$\frac{d}{dt} V \leq -\eta |s| \quad (23)$$

که $\eta \in \mathbb{R}^+$ است که مقدار آن باید توسط طراح کنترل انتخاب شود. با قرار دادن رابطه (۲۱) در (۲۳) خواهیم داشت:

$$s \frac{ds}{dt} \leq -\eta |s| \quad (24)$$

از طرفی:

$$\frac{s}{|s|} = \text{sign}(s) \quad (25)$$

بنابراین رابطه (۲۴) به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{ds}{dt} \text{sign}(s) \leq -\eta \quad (26)$$

در معادله (۱۵)، در هر کدام از توابع f_B و f_A می‌تواند عدم قطعیت وجود داشته باشد. با توجه به نحوه استفاده از کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری در این پژوهش، فرض شده است که فقط در تابع f_A عدم قطعیت وجود دارد و $f_B = 1$ است. در این صورت فرض می‌شود که فقط یک تخمینی از تابع f_A به صورت \hat{f}_A و یک کران به صورت زیر وجود دارد:

$$\left| D^{1-\alpha} (f_A - \hat{f}_A) \right| < F \quad (27)$$

بنابراین طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری برای سیستم زیر انجام خواهد شد:

$$D^{n\alpha} y = \hat{f}_A + u \quad (28)$$

اثبات می‌شود [۷] که در این حالت، سیگنال کنترل عبارت است از:

$$u = -\hat{f}_A + D^{n\alpha} r - D^\alpha S - K D^{\alpha-1} \text{sign}(s) \quad (29)$$

در این رابطه، تابع S به صورت زیر تعریف شده است:

$$S = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \lambda^i D^{(m-i)\gamma} e \quad (30)$$

همچنین، عبارت زیر برای پارامتر کنترلی K پیدا می‌شود:

$$K \geq \eta + F \quad (31)$$

در این صورت، با اعمال سیگنال کنترلی رابطه (۲۹) به سیستم دینامیکی موجود در رابطه (۲۸)، می‌توان تضمین کرد که حتی با وجود عدم قطعیت در تابع f_A می‌توان سیستم را طوری کنترل کرد تا سیگنال مرجع r ردیابی شود.

۴. طراحی کنترل‌کننده

برای طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری، باید ابتدا مدل تابع تبدیل مرتبه کسری سیستم به مدل فضای شبه حالت مرتبه کسری تبدیل شود که به آن تحقق^۱ فضای حالت یک تابع تبدیل گفته می‌شود. در مراجع مختلف، راه‌های متفاوتی برای تبدیل از فرم تابع تبدیل مرتبه کسری به فرم فضای شبه حالت مرتبه کسری معرفی شده است. در مرجع [۷] فرم‌های کانونی مختلفی

^۱ Realization

برای سادگی، تغییر متغیر زیر انجام می‌شود:

$$\left(\frac{\sum_{i=0, i=even}^N d_i s^{i\alpha}}{s^2} \right) U(s) = W(s) \quad (46)$$

بنابراین:

$$\left(s^{N\alpha} + \sum_{i=0, i=even}^{N-2} c_i s^{i\alpha} \right) Y(s) = W(s) \quad (47)$$

با ضرب کردن $Y(s)$ در عبارت داخل پرانتز رابطه (47) داریم:

$$s^{N\alpha} Y(s) + \sum_{i=0, i=even}^{N-2} c_i s^{i\alpha} Y(s) = W(s) \quad (48)$$

با معکوس لاپلاس گرفتن از رابطه (48) و مرتب‌سازی داریم:

$$D^{N\alpha} y(t) = - \sum_{i=0, i=even}^{N-2} c_i D^{i\alpha} y(t) + w(t) \quad (49)$$

مشاهده می‌شود که عبارت رابطه (49) مشابه رابطه (28) است و فرم مناسبی برای طراحی کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری دارد. لازم به ذکر است که با توجه به معادله دیفرانسیل (49) وقتی کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری طراحی شود، خروجی این کنترل کننده سیگنال $w(t)$ است. با عبور دادن این سیگنال از تابع تبدیل رابطه زیر

$$\frac{U(s)}{W(s)} = \frac{s^2}{\sum_{i=0, i=even}^N d_i s^{i\alpha}} \quad (50)$$

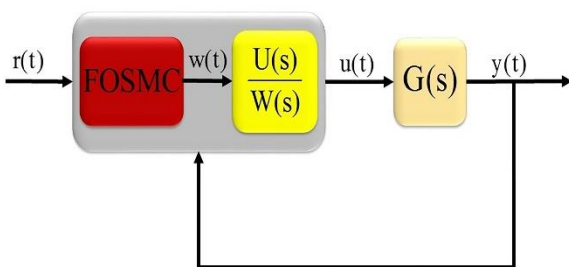
که برگرفته از رابطه (46) است، سیگنال کنترلی سیستم اصلی یعنی $u(t)$ به دست می‌آید و قابل اعمال به سیستم اصلی است.

در شکل ۲، دیاگرام بلوکی سیستم کنترل حلقه بسته را می‌توان مشاهده کرد.

در قسمت بعد، با توجه به روش گفته شده در این بخش، نتایج شبیه‌سازی عددی طراحی کنترل کننده برای سیستم دینامیکی مورد مطالعه ارائه شده است.

۵. شبیه‌سازی عددی و نتایج

در این قسمت، نتایج شبیه‌سازی کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری طراحی شده در هشت حالت مختلف برای سیستم دینامیکی ارائه شده است.



شکل ۲. دیاگرام بلوکی سیستم کنترل حلقه بسته.

در هفت حالت نیز از این فرض استفاده شده است. در یک حالت، شرایطی که در زمان اولیه متغیر تحت کنترل روی سطح لغزش نباشد مورد بررسی قرار گرفته است و جذب کننده بودن سطح لغزش در این حالت نیز به خوبی نمایان خواهد بود. رابطه (۳۶) در تابع تبدیل رابطه (۹) قرار داده می‌شود که پس از ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0, i=even}^N a_i s^{i\alpha}}{\sum_{i=0, i=even}^N (a_i I_1 + b_i I_2) s^{i\alpha}} \times \frac{1}{s^2} \quad (38)$$

برای اینکه ضریب بزرگترین توان موجود در مخرج یک شود، اولین عبارت موجود در مخرج را از سری خارج می‌کنیم:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0, i=even}^N a_i s^{i\alpha}}{(a_N I_1 + b_N I_2) s^{N\alpha} + \sum_{i=0, i=even}^{N-2} (a_i I_1 + b_i I_2) s^{i\alpha}} \times \frac{1}{s^2} \quad (39)$$

صورت و مخرج رابطه (39) را بر عبارت

$$a_N I_1 + b_N I_2 \quad (40)$$

تقسیم کرده و با انجام تغییر متغیر به صورت زیر:

$$\frac{a_i}{a_N I_1 + b_N I_2} = d_i, \quad \frac{a_i I_1 + b_i I_2}{a_N I_1 + b_N I_2} = c_i \quad (41)$$

می‌توان رابطه (39) را به صورت زیر نوشت:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0, i=even}^N d_i s^{i\alpha}}{s^{N\alpha} + \sum_{i=0, i=even}^{N-2} c_i s^{i\alpha}} \times \frac{1}{s^2} \quad (42)$$

برای به دست آوردن فرمی از فضای شبه حالت که قابل استفاده در روش طراحی کنترل مود لغزشی مرتبه کسری باشد، رابطه (42) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$G(s) = \frac{1}{s^{N\alpha} + \sum_{i=0, i=even}^{N-2} c_i s^{i\alpha}} \times \frac{\sum_{i=0, i=even}^N d_i s^{i\alpha}}{s^2} \quad (43)$$

با نوشتن تابع تبدیل فوق به صورت

$$\frac{1}{s^{N\alpha} + \sum_{i=0, i=even}^{N-2} c_i s^{i\alpha}} \times \frac{\sum_{i=0, i=even}^N d_i s^{i\alpha}}{s^2} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (44)$$

و با انجام ساده‌سازی داریم:

$$\left(s^{N\alpha} + \sum_{i=0, i=even}^{N-2} c_i s^{i\alpha} \right) Y(s) = \left(\frac{\sum_{i=0, i=even}^N d_i s^{i\alpha}}{s^2} \right) U(s) \quad (45)$$

پارامترهای سیستم و همچنین سایر پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی عبارتند از:

$$I_1 = 1, \hat{I}_1 = 0.8$$

$$I_2 = 2, \omega_{nf} = 2$$

$$\beta = 0.4, \alpha = 0.8$$

$$\gamma = 0.8, F = 80$$

در این حالت، در شکل ۳ سیگنال خروجی و در شکل ۴ سیگنال کنترلی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که در این حالت با اینکه ۲۰ درصد عدم قطعیت در پارامتر I_1 در نظر گرفته شده است اما کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری توانسته است به خوبی از پس این عدم قطعیت برآید و سیگنال مرجع سینوسی با دقت خوبی ردیابی شود. در شکل ۴ مشاهده می‌شود که نوسانات زیادی با فرکانس بالا در سیگنال کنترل وجود دارد. این نوسانات همان پدیده چترینگ هستند.

حالت دوم: عدم قطعیت در پارامتر I_2

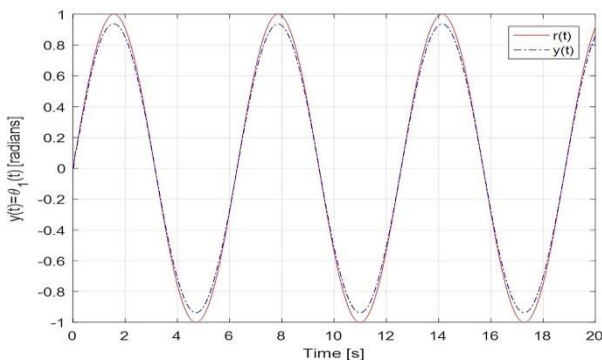
در حالت دوم، عدم قطعیت فقط در پارامتر I_2 در نظر گرفته شده و پارامترهای I_1, ω_{nf}, β معلوم و بدون عدم قطعیت هستند. مقدار عددی پارامترهای سیستم و همچنین سایر پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی عبارتند از:

$$I_2 = 3, \hat{I}_2 = 2.75$$

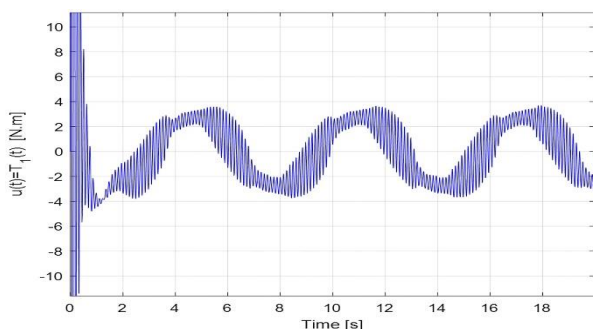
$$I_1 = 1.5, \omega_{nf} = 2.15$$

$$\beta = 0.3, \alpha = 0.85$$

$$\gamma = 0.85, F = 40$$



شکل ۳. سیگنال خروجی حالت اول (عدم قطعیت در پارامتر I_1).



شکل ۴. سیگنال کنترل حالت اول (عدم قطعیت در پارامتر I_1).

در هر حالت برای یک یا تعدادی از پارامترهای سیستم از مجموعه پارامترهای I_1, I_2, ω_{nf} و β عدم قطعیت در نظر گرفته شده است. همچنین پارامتر N ، که به نوعی پارامتری برای نشان دادن تعداد جملات بسط تیلور تابع نمایی است، برابر با ۴ فرض می‌شود. در تمامی حالت‌ها برای پارامترهایی که دارای عدم قطعیت هستند، از نماد $\hat{\cdot}$ استفاده شده است (برای مثال \hat{I}_1). مقدار عددی پارامترهای سیستم از روی مقاله مرجع [۴] انتخاب شده است. لازم به ذکر است که با توجه به پیشرفت‌های امروزی در محیط‌های آزمایشگاهی، دیگر عدم قطعیت‌هایی در حدود ۲۰ درصد برای پارامترهای یک سیستم دینامیکی قابل قبول نیست؛ اما در اینجا صرفاً برای بررسی عملکرد و توانایی کنترل‌کننده طراحی شده، عدم قطعیت‌های بزرگی برای پارامترها در نظر گرفته شده است. همچنین دینامیک عملگر ماهواره و دینامیک سنسورها، از نوع دینامیک مرتبه صفر^۱ در نظر گرفته شده است که این به مفهوم ایده‌آل بودن تابع تبدیل آنهاست و در نتیجه برابر با یک خواهد بود.

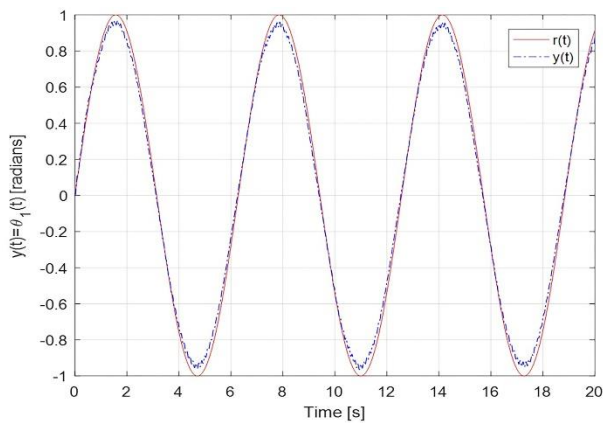
همچنین برای به دست آوردن پارامترهای کنترل‌کننده مثل λ و η از الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات^۲ با تابع هزینه میانگین مربعات خطای ردیابی استفاده شده است. لازم به ذکر است که در شبیه‌سازی عددی از تقریب اوستالوپ برای محاسبه مشتقات و انتگرال‌های مرتبه کسری استفاده شده است. لازم به ذکر است که در تمام شبیه‌سازی‌ها سیگنال خالص کنترلی ترسیم شده تا پدیده چترینگ در آنها مشاهده شود و بتوان عملکرد سیستم کنترل را بهتر مورد ارزیابی قرار داد. منظور از پدیده چترینگ نوسانات ناخواسته با فرکانس بالا در سیگنال کنترل است که به علت وجود تابع علامت در رابطه سیگنال کنترل بوجود می‌آید. وجود پدیده چترینگ باعث می‌شود که کنترل‌کننده قابلیت پیاده‌سازی نداشته باشد؛ اما با انجام اصلاحات ساده در سیگنال کنترل می‌توان این چالش را حل نمود. به این صورت که برای حذف پدیده چترینگ، از روش‌های متعددی مانند تقریب پیوسته‌ای از تابع علامت، استفاده از منطق فازی در تعیین دامنه لایه مرزی باریک در اطراف سطح لغزش، استفاده از تابع اشباع به جای تابع علامت می‌توان استفاده کرد. در این مقاله سیگنال کنترلی خالص کنترل‌کننده نشان داده شده است و در شبیه‌سازی‌ها پدیده چترینگ را حذف نکردیم تا این پدیده هم قابل نمایش باشد.

در ادامه، هشت حالت مختلف برای شبیه‌سازی عددی اعمال کنترل‌کننده مقاوم مود لغزشی مرتبه کسری روی سیستم دینامیکی ماهواره با سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف‌پذیر با تابع تبدیل مرتبه کسری معرفی شده است. در حالت‌های اول تا ششم، عدم قطعیت در هر کدام از پارامترهای سیستم مورد بررسی قرار گرفته است و برای بررسی عملکرد سیستم کنترل حلقه بسته، سیگنال مرجع به فرم سینوسی در نظر گرفته شده است. در حالت هفتم، خاصیت جذب‌کننده بودن سطح لغزش در حالتی که در زمان اولیه متغیر تحت کنترل روی سطح لغزش قرار ندارد مورد بررسی قرار گرفته و سیگنال مرجع به فرم پالسی در نظر گرفته شده است؛ و در حالت هشتم، دو سطح لغزش مرتبه صحیح و مرتبه کسری با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

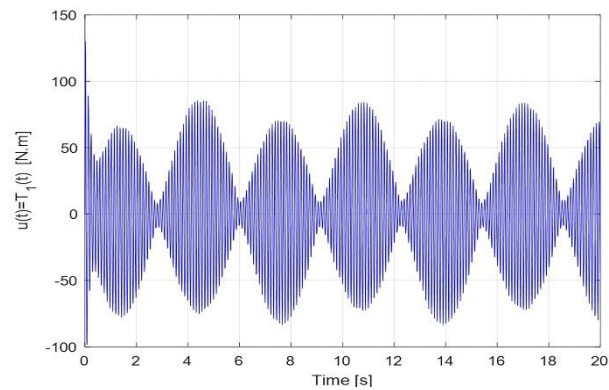
در حالت اول، عدم قطعیت فقط در پارامتر I_1 در نظر گرفته شده و پارامترهای I_2, ω_{nf}, β را معلوم و بدون عدم قطعیت فرض می‌کنیم. مقدار عددی

² Particle Swarm Optimization

¹ Zero Order Dynamic



شکل ۷. سیگنال خروجی حالت سوم (عدم قطعیت در پارامتر ω_{nff}).



شکل ۸. سیگنال کنترل حالت سوم (عدم قطعیت در پارامتر ω_{nff}).

سیگنال ردیابی مرجع صفر است مقدار سیگنال کنترل هم به حداقل خود می‌رسد و در حوالی صفر نوسان می‌کند و علت این نوسان هم همان پدیده چترینگ است. همچنین در لحظاتی که مقدار سیگنال ردیابی مرجع به حداکثر مقدار خود می‌رسد مقدار سیگنال کنترل هم بسیار زیاد شده و سیگنال کنترل دچار چترینگ بسیار زیادتری می‌شود. مشاهده می‌شود که در این حالت هم با توجه به اینکه عدم قطعیت بسیار زیادی برای پارامتر مورد مطالعه در نظر گرفته شد، کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری توانست به خوبی از پس این عدم قطعیت برآید و سیگنال مرجع سینوسی با دقت خوبی ردیابی شود.

حالت چهارم: عدم قطعیت در پارامترهای I_1 ، I_2 و ω_{nff}

در حالت چهارم، عدم قطعیت در پارامترهای I_1 ، I_2 و ω_{nff} در نظر گرفته شده و پارامتر β معلوم و بدون عدم قطعیت است. مقدار عددی پارامترهای سیستم و همچنین سایر پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی عبارتند از:

$$I_1 = 1.45, \hat{I}_1 = 1$$

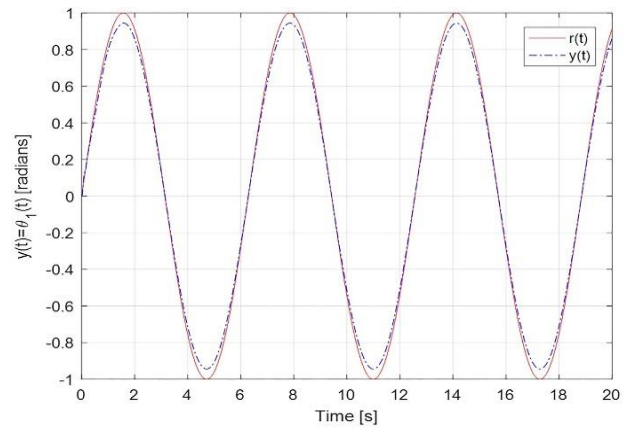
$$I_2 = 2.25, \hat{I}_2 = 1.9$$

$$\omega_{nff} = 2.41, \hat{\omega}_{nff} = 2$$

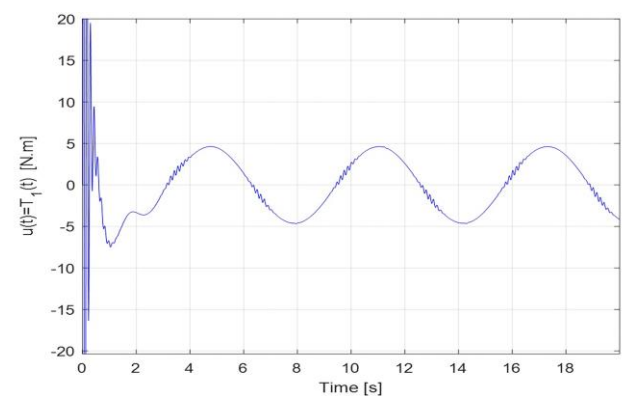
$$\beta = 0.01, \alpha = 0.995$$

$$\gamma = 0.995, F = 800$$

در این حالت، در شکل ۹ سیگنال خروجی و در شکل ۱۰ سیگنال کنترلی نشان داده شده است. در این حالت برای پارامتر I_1 عدم قطعیت ۳۱ درصدی



شکل ۵. سیگنال خروجی حالت دوم (عدم قطعیت در پارامتر I_2).



شکل ۶. سیگنال کنترل حالت دوم (عدم قطعیت در پارامتر I_2).

در این حالت، در شکل ۵ سیگنال خروجی و در شکل ۶ سیگنال کنترلی نشان داده شده است. در این حالت برای پارامتر I_2 عدم قطعیت ۸/۳ درصدی در نظر گرفته شد. مشاهده می‌شود که کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری توانسته است به خوبی از پس این عدم قطعیت برآید و سیگنال مرجع سینوسی با دقت خوبی ردیابی شود. با مقایسه دو شکل ۴ و ۶ مشاهده می‌شود که وجود عدم قطعیت در پارامتر I_2 منجر به چترینگ کمتری در سیگنال کنترل نسبت به وجود عدم قطعیت در پارامتر I_1 می‌شود.

حالت سوم: عدم قطعیت در پارامتر ω_{nff}

در حالت سوم، عدم قطعیت فقط در پارامتر ω_{nff} در نظر گرفته شده و پارامترهای I_1 ، I_2 و β معلوم و بدون عدم قطعیت هستند. مقدار عددی پارامترهای سیستم و همچنین سایر پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی عبارتند از:

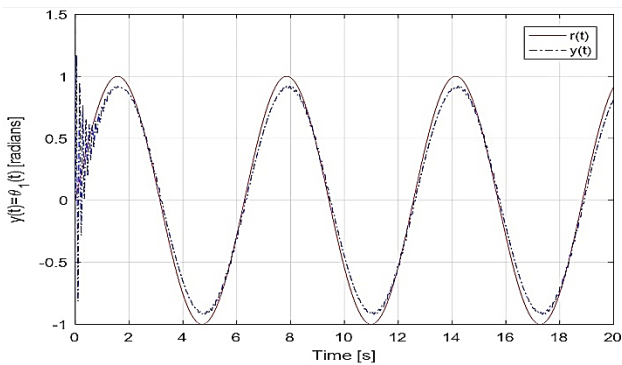
$$\omega_{nff} = 2, \hat{\omega}_{nff} = 2.7$$

$$I_1 = 1.3, I_2 = 2.4$$

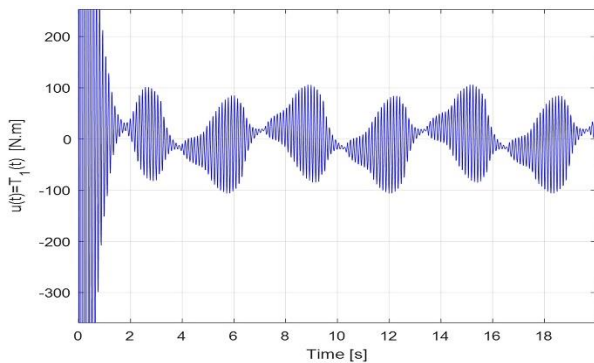
$$\beta = 0.45, \alpha = 0.775$$

$$\gamma = 0.775, F = 2500$$

در این حالت، در شکل ۷ سیگنال خروجی و در شکل ۸ سیگنال کنترلی نشان داده شده است. در این حالت برای پارامتر ω_{nff} عدم قطعیت ۳۵ درصدی در نظر گرفته شد. در شکل ۸ مشاهده می‌شود که در لحظاتی که مقدار



شکل ۱۱. سیگنال خروجی حالت پنجم (عدم قطعیت در پارامتر β).



شکل ۱۲. سیگنال کنترل حالت پنجم (عدم قطعیت در پارامتر β).

پایداری است. بنابراین در اینجا برای اینکه تاثیر وجود عدم قطعیت در پارامتر β بررسی کنیم، عدم قطعیت را در تمام مرتبه‌های مشتق‌گیری سیستم در نظر نمی‌گیریم، بلکه فقط در یکی از مشتق‌ها در نظر گرفته می‌شود که در نهایت عدم قطعیت در تابع f_A ظاهر شود.

در این حالت، در شکل ۱۱ سیگنال خروجی و در شکل ۱۲ سیگنال کنترلی نشان داده شده است. به دلیل اینکه وجود عدم قطعیت در پارامتر β را نمی‌توان به طور کامل در طراحی کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری در نظر گرفت، از کنترل‌کننده طراحی شده آن عملکرد بسیار خوبی که در صورت وجود عدم قطعیت در پارامترهای I_1, I_2 و ω_{nf} از خود نشان می‌دهد را دیگر نمی‌توان چندان انتظار داشت. اما با این وجود مشاهده می‌شود که باز هم این کنترل‌کننده توانسته است که تا حد نسبتاً خوبی از پس این عدم قطعیت برآید و منجر به ردیابی سیگنال مرجع سینوسی شود.

حالت ششم: عدم قطعیت در تمامی پارامترهای سیستم

در حالت ششم، عدم قطعیت در تمامی پارامترهای سیستم یعنی I_1, I_2, ω_{nf} و β در نظر گرفته شده است. مقدار عددی پارامترهای سیستم و همچنین سایر پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی عبارتند از:

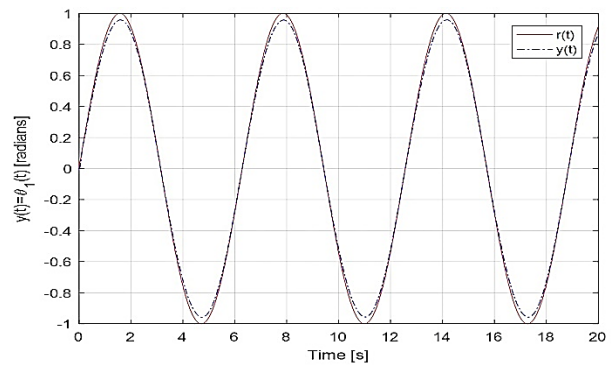
$$I_1 = 1.35, \hat{I}_1 = 1$$

$$I_2 = 2.2, \hat{I}_2 = 1.8$$

$$\omega_{nf} = 2.52, \hat{\omega}_{nf} = 2$$

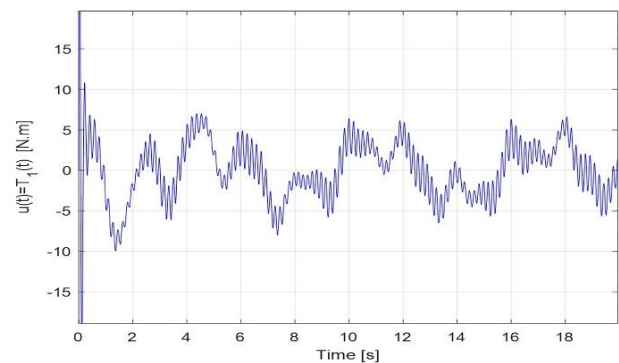
$$\beta = 0.2, \alpha = 0.9$$

$$\gamma = 0.9, F = 1500$$



شکل ۹. سیگنال خروجی حالت چهارم (عدم قطعیت در پارامترهای

$$I_2, I_1, \omega_{nf}).$$



شکل ۱۰. سیگنال کنترل حالت چهارم (عدم قطعیت در

$$I_2, I_1, \omega_{nf} \text{ پارامترهای}).$$

، برای پارامتر I_2 عدم قطعیت ۱۵/۵۵ درصدی و برای پارامتر ω_{nf} عدم قطعیت ۱۷ درصدی در نظر گرفته شد. مشاهده می‌شود که با وجود این عدم قطعیت‌های زیاد برای پارامترهای سیستم باز هم کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری توانسته است به خوبی از پس این عدم قطعیت‌ها برآید و سیگنال مرجع سینوسی با دقت خوبی ردیابی شود.

حالت پنجم: عدم قطعیت در پارامتر β

در حالت پنجم، عدم قطعیت فقط در پارامتر β در نظر گرفته شده و پارامترهای I_1, I_2 و ω_{nf} معلوم و بدون عدم قطعیت هستند. مقدار عددی پارامترهای سیستم و همچنین سایر پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی عبارتند از:

$$\beta = 0.4$$

$$I_1 = 1, I_2 = 2$$

$$\omega_{nf} = 2, \alpha = 0.8$$

$$\gamma = 0.8, F = 40$$

پارامتر β که مشخصه ویسکوالاستیک شفت انعطاف‌پذیر است، به پارامتر α که مرتبه مشتق‌گیری دینامیکی سیستم است مربوط می‌شود. بنابراین هرگونه عدم قطعیت در پارامتر β ، خودش را به صورت عدم قطعیت در مرتبه مشتق‌گیری سیستم نشان می‌دهد. نکته بسیار مهمی که وجود دارد این است که اگر بزرگترین مرتبه مشتق‌گیری سیستم دارای عدم قطعیت باشد، نمی‌توان به صورت تحلیلی اثبات کرد که کنترل‌کننده مود لغزشی مرتبه کسری دارای

همچنان صفر است ولی مقدار اولیه سیگنال مرجع غیر صفر می باشد. به عبارتی در این حالت هدف این است که جذب کننده بودن سطح لغزش را در لحظات بین زمان اولیه تا زمانی که متغیر حالت روی سطح لغزش قرار می گیرد بررسی شود. در این حالت، مقدار عددی پارامترهای سیستم و همچنین سایر پارامترهای مورد نیاز برای شبیه سازی دقیقاً همان مقادیر موجود در حالت ششم است.

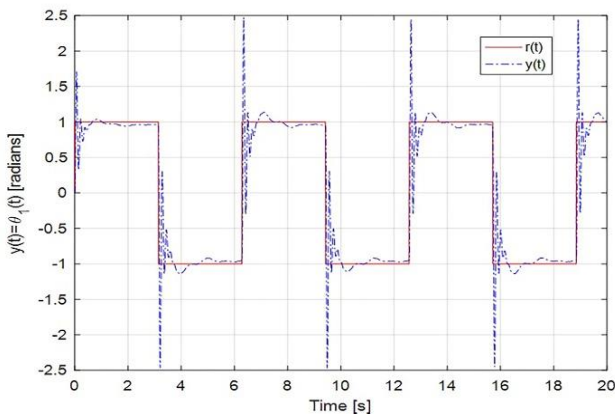
در این حالت، در شکل ۱۵ سیگنال خروجی و در شکل ۱۶ سیگنال کنترلی نشان داده شده است. نتایج شبیه سازی نشان می دهند که در این حالت هم با وجود عدم قطعیت های زیادی که برای پارامترهای سیستم در نظر گرفته شده است باز هم کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری توانسته به خوبی از پس این عدم قطعیت ها برآید و سیگنال مرجع سینوسی با دقت خوبی ردیابی شود. همچنین به دلیل اینکه در زمان شروع شبیه سازی مقدار اولیه سیگنال مرجع با مقدار اولیه متغیر تحت کنترل یکسان نیست، سطح لغزش طراحی شده به اندازه کافی خاصیت جذب کننده بودن را دارد. این خاصیت از آنجا که سیگنال مرجع به خوبی ردیابی شده است قابل استدلال می باشد.

حالت هشتم: مقایسه کنترل لغزشی مرتبه کسری و مرتبه صحیح
در هفت حالت قبل، برای سیستم دینامیکی مرتبه کسری در حالت های

در این حالت، در شکل ۱۳ سیگنال خروجی و در شکل ۱۴ سیگنال کنترلی نشان داده شده است. در این حالت برای پارامتر I_1 عدم قطعیت $25/9$ درصدی، برای پارامتر I_2 عدم قطعیت $18/18$ درصدی، برای پارامتر ω_{nf} عدم قطعیت $20/63$ درصدی و عدم قطعیتی هم برای پارامتر β در نظر گرفته شد. مشاهده می شود که در این حالت هم با وجود عدم قطعیت های زیادی که برای پارامترهای سیستم در نظر گرفته شده است باز هم کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری توانسته به خوبی از پس این عدم قطعیت ها برآید و سیگنال مرجع سینوسی با دقت خوبی ردیابی شود.

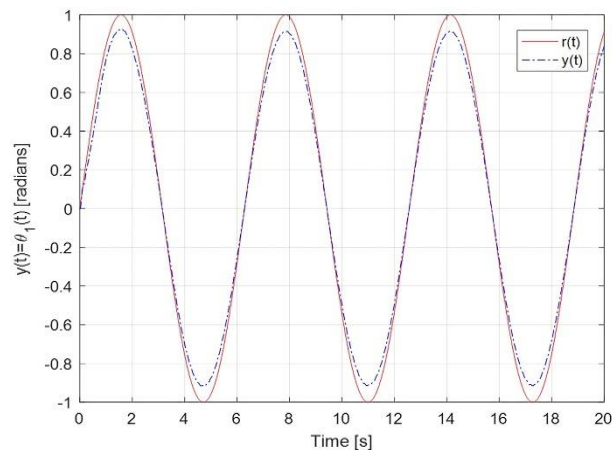
حالت هفتم: عدم قطعیت در تمامی پارامترهای سیستم با در نظر گرفتن سیگنال مرجع پالسی

در حالت هفتم، عدم قطعیت در تمامی پارامترهای سیستم یعنی I_1 ، I_2 ، ω_{nf} و β در نظر گرفته شده است. فرق این حالت با حالت قبل در این است که در اینجا سیگنال مرجع به صورت پالس در نظر گرفته شده است. شرط اولیه متغیر تحت کنترل در تمامی حالات قبل صفر در نظر گرفته شده بود و به دلیل آنکه سیگنال مرجع به صورت سینوسی در نظر گرفته شده بود، مقدار اولیه سیگنال مرجع هم صفر بود. یعنی به عبارتی در لحظه اولیه، متغیر حالت روی سطح لغزش قرار داشت. در این حالت شرط اولیه متغیر تحت کنترل



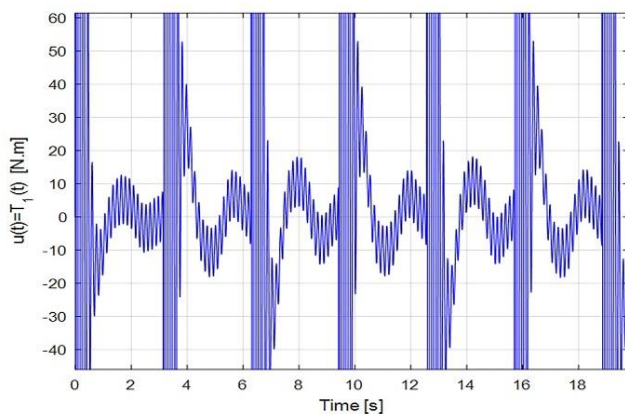
شکل ۱۵. سیگنال خروجی حالت هفتم

(عدم قطعیت در پارامترهای I_1 ، I_2 ، ω_{nf} و β با در نظر گرفتن سیگنال مرجع پالسی)



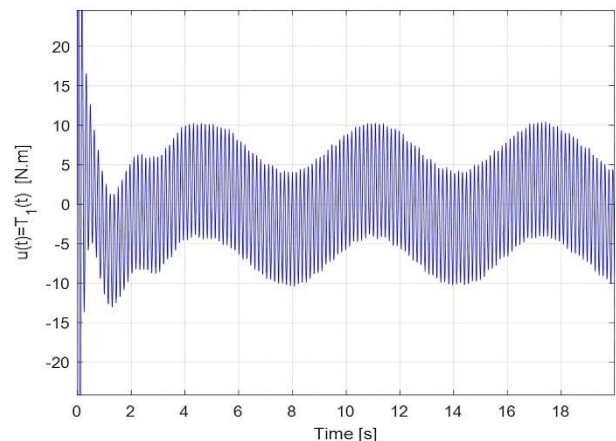
شکل ۱۳. سیگنال خروجی حالت ششم

(عدم قطعیت در پارامترهای I_1 ، I_2 ، ω_{nf} و β)



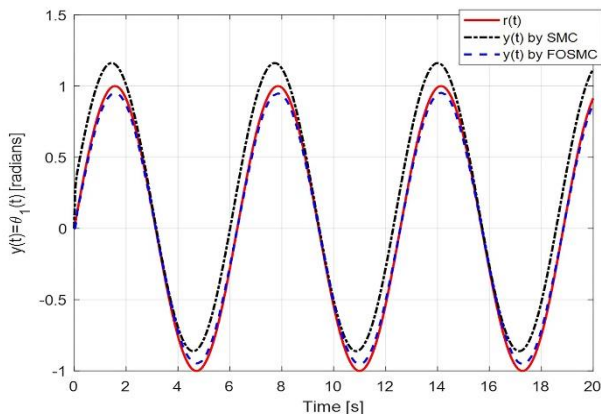
شکل ۱۶. سیگنال کنترل حالت هفتم

(عدم قطعیت در پارامترهای I_1 ، I_2 ، ω_{nf} و β با در نظر گرفتن سیگنال مرجع پالسی)

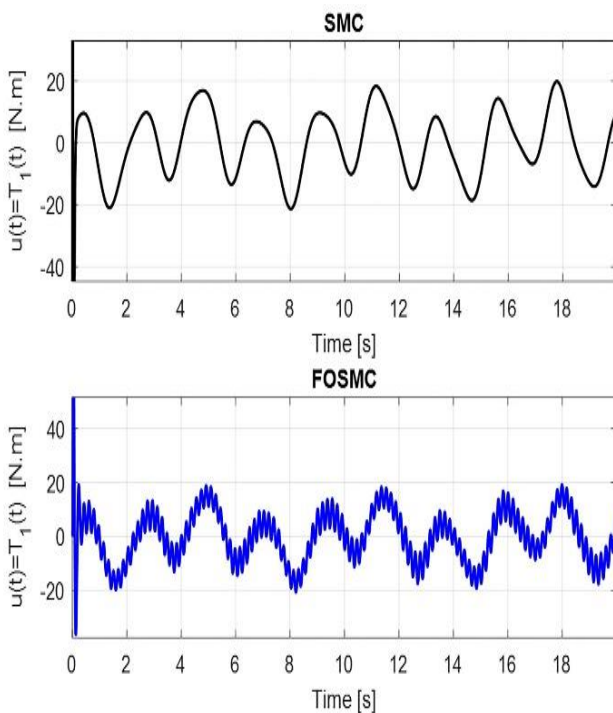


شکل ۱۴. سیگنال کنترل حالت ششم

(عدم قطعیت در پارامترهای I_1 ، I_2 ، ω_{nf} و β)



شکل ۱۷. سیگنال خروجی حالت هفتم (مقایسه سطح لغزش مرتبه صحیح و کسری)



شکل ۱۸. سیگنال کنترل حالت هفتم (مقایسه سطح لغزش مرتبه صحیح و کسری)

با سطح لغزش مرتبه کسری قادر است تا سیستم دینامیکی ماهواره با سازه‌های کوپل شده صلب-انعطاف‌پذیر با دینامیک مرتبه کسری را حتی با وجود عدم قطعیت در هر کدام از پارامترهای سیستم به خوبی کنترل کند. لازم به ذکر است که چون تمام دینامیک سیستم قابلیت تبدیل شدن به فرمی از فضای شبه حالت که کاملاً مناسب برای طراحی کنترل مود لغزشی مرتبه کسری باشد را نداشت، در این پژوهش فقط بخشی از کل دینامیک سیستم در روند طراحی کنترل کننده در نظر گرفته شد ولی در نهایت سیگنال کنترل روی سیستم اصلی اعمال شده است. با توجه به اینکه کل سیستم به فرم فضای شبه حالت مرتبه کسری تبدیل نشده است و همچنین عدم قطعیت‌های بزرگی برای مثال حتی تا حدود ۲۰ درصد در پارامترهای چهارگانه سیستم دینامیکی در نظر گرفته شد، اما نتایج شبیه‌سازی عددی نشانگر این است که کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری توانسته عملکرد خوب و قابل قبولی را حتی در مقایسه با کنترل مود لغزشی مرتبه صحیح از خود نشان دهد.

مختلف، عدم قطعیت در پارامترهای سیستم در نظر گرفته شد و نتایج کنترل کننده مود لغزشی با سطح لغزش مرتبه کسری ارائه شد. در این قسمت، عملکرد کنترل کننده مرتبه کسری و مرتبه صحیح با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

شایان ذکر است که برای یک سیستم با دینامیک مرتبه صحیح، هم می‌توان کنترل کننده مود لغزشی مرتبه صحیح و هم مرتبه کسری طراحی کرد؛ اما در صورتی که سیستم دارای دینامیک مرتبه کسری باشد، فقط می‌توان کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری برای آن طراحی کرد. علت این امر این است که در روند طراحی و اثبات پایداری کنترل کننده مود لغزشی از معادلات دینامیکی سیستم استفاده می‌شود. حال اگر سیستم مرتبه کسری باشد، در صورت استفاده از سطح لغزش مرتبه صحیح تمام مرتبه‌های مشتقگیری متغیر حالت تحت کنترل در روابط ریاضی مربوطه ظاهر نمی‌شود و این موضوع هم باعث می‌شود تا نتوان معادلات دینامیکی سیستم را به طور کامل ظاهر نمود و از آن برای طراحی کنترل کننده و اثبات پایداری آن استفاده کرد. بنابراین برای اینکه بتوان عملکرد سطح لغزش‌های مرتبه صحیح و مرتبه کسری را با یکدیگر مقایسه کرد، باید سیستم دینامیکی را به‌طور مرتبه صحیح در نظر گرفت. همانطور که در بخش معادله دینامیکی سیستم توضیح داده شد، عاملی که باعث مرتبه کسری شدن سیستم دینامیکی شده است، مشخصه ماده ویسوالاستیک با پارامتر β است. این پارامتر دارای مقداری بین صفر و یک است. اگر $\beta = 0$ باشد، قسمت منعطف سیستم به جای ویسکوالاستیک به‌صورت جامد الاستیک خالص می‌شود. در این صورت یک تابع تبدیل مرتبه صحیح به دست می‌آید. برای این سیستم دینامیکی مرتبه صحیح، یک کنترل کننده مود لغزشی مرتبه صحیح و یک کنترل کننده مود لغزشی مرتبه کسری طراحی می‌کنیم. در این حالت، عدم قطعیت را به‌طور هم‌زمان در هر سه پارامتر I_1, I_2 و ω_{nf} در نظر می‌گیریم. مقدار عددی پارامترهای سیستم و همچنین سایر پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی عبارتند از:

$$I_1 = 2.35, \hat{I}_1 = 2$$

$$I_2 = 3.98, \hat{I}_2 = 3.6$$

$$\omega_{nf} = 1.5, \hat{\omega}_{nf} = 1.8$$

$$\gamma = 1, F = 400$$

در این حالت برای پارامتر I_1 عدم قطعیت ۱۷/۵ درصدی، برای پارامتر ω_{nf} عدم قطعیت ۲۰ درصدی در نظر گرفته شده است. سیگنال مرجع را هم در این حالت به‌صورت سینوسی در نظر می‌گیریم. در شکل ۱۷ نتیجه اعمال سیگنال کنترل به سیستم قابل مشاهده است و می‌بینیم که در صورت استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری در مقایسه با سطح لغزش مرتبه صحیح، سیگنال مرجع با دقت بهتری ردیابی می‌شود. همچنین در شکل ۱۸، سیگنال کنترلی سیستم مشاهده می‌شود که در ابتدا دارای مقادیر زیادی است و باید در عمل قبل از اعمال به عملگر اشباع شود. همچنین در این شکل می‌بینیم که در صورت استفاده از سطح لغزش مرتبه صحیح، چترینگ کمتری نسبت به استفاده از سطح لغزش مرتبه کسری ایجاد می‌شود؛ اما حدوداً دامنه سیگنال کنترلی در هر دو حالت یکسان است.

۶. نتیجه‌گیری

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که استفاده از روش مقاوم کنترل مود لغزشی

References- منابع

- Zhendong, H. and Jiazhen, H., 1999. Modeling and analysis of a coupled rigid-flexible system. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 20 (10), pp. 1167-1174.
<https://doi.org/10.1007/BF02460335>.
- Lu, Y. h., Zeng, J., Wu, P. b. and Guan, Q. h., 2009. Modeling of rigid-flexible coupling system dynamics for railway vehicles with flexible bogie frame. *Fourth International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC), Kaohsiung, Taiwan*, pp. 1355-1360.
<https://doi.org/10.1109/ICICIC.2009.265>.
- Zhang, G., Lu, N. and Che, R., 2011. Dynamic analysis on rigid-flexible coupled multi-body system with a few flexible components. *International Conference on Quality, Reliability, Risk, Maintenance, and Safety Engineering, Xi'an*, pp. 1010-1015.
<https://doi.org/10.1109/ICQR2MSE.2011.5976775>.
- Sun, G. and Zhu, Z. H., 2015. Fractional-order dynamics and control of rigid-flexible coupling space structures. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 38 (7), pp. 1324-1330.
<https://doi.org/10.2514/1.G001046>.
- Taghirad, H., Fathi, M. and Zamani, F., 2018. Robust H-infinity control, *K. N. Toosi University of Technology Publication*, 3th Edition. [In Persian]
- Tavazoei, M. S. and Tavakoli, M., 2015. Fractional order systems and controllers, *K. N. Toosi University of Technology Publication*. [In Persian].
- Valério, D., 2013. An introduction to fractional control. *The Institution of Engineering and Technology (IET) Publication, London*.
- Delavari, H., Ghaderi, R., Ranjbar, A. and Momani, S., 2010. Fuzzy fractional order sliding mode controller for nonlinear systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15 (4), pp. 963-978.
<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.05.025>.
- Tang, Y., Zhang, X., Zhang, D., Zhao, G. and Guan, X., 2012. Fractional order sliding mode controller design for antilock braking systems, *Neurocomputing*, 111, pp. 122-130.
<https://doi.org/10.1016/j.neucom.2012.12.019>.
- Ullah, N., Shaoping, W., Khattak, M. I. and Shafi, M., 2015. Fractional order adaptive fuzzy sliding mode controller for a position servo system subjected to aerodynamic loading and nonlinearities. *Aerospace Science and Technology*, 43, pp. 381-387.
<https://doi.org/10.1016/j.ast.2015.03.020>.
- Ebrahimkhani, S., 2016. Robust fractional order sliding mode control of doubly-fed induction generator (DFIG)-based wind turbines. *ISA Transactions*, 63, pp. 343-354.
<https://doi.org/10.1016/j.isatra.2016.03.003>.
- Kamali, M., Farhadi, M. and Askari J., 2017. Fractional order sliding mode controller design for quadrotor system. *Modares Mechanical Engineering*, 17 (5), pp. 287-294. [In Persian]
- Liu, S., Yan, B., Zhang, X., Liu, W. and Yan, J., 2022. Fractional-order sliding mode guidance law for intercepting hypersonic vehicles. *Journal of Aerospace*, 9 (2).
<https://doi.org/10.3390/aerospace9020053>
- Ullah, N., Mehmood, Y., Aslam, J., Wang, S. and Phoungthong, Kh., 2022. Fractional order adaptive robust formation control of multiple quad-rotor UAVs with parametric uncertainties and wind disturbances. *Chinese Journal of Aeronautics*. 35 (8), pp. 204-220.
<https://doi.org/10.1016/j.cja.2021.10.012>.
- Tavakoli, M. and Haeri, M., 2010. The minimal state space realization for a class of fractional order transfer functions. *Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Control and Optimization*, 48 (7), pp. 4317-4326.
<https://doi.org/10.1137/090753048>.
- Tavakoli, M., Haeri, M. and Tavazoei, M. S., 2011. Notes on the state space realizations of rational order transfer functions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 58 (5), pp. 1099-1108.
<https://doi.org/10.1109/TCSI.2010.2090568>.
- Tavazoei, M. S. and Tavakoli, M., 2013. Minimal realizations for some classes of fractional order transfer functions. *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 3 (3), pp. 313-321.
<https://doi.org/10.1109/JETCAS.2013.2265798>.