

ارائه یک مدل غیرخطی برای تحلیل ارتعاشات آکوستیک یک پوسته استوانه‌ای متحرک در عمق سیال

امیرحسین عرفا (دانشجوی دکتری)

محمد مهدی جلیلی* (دانشیار)

علیرضا فتوحی (دانشیار)

دانشکده ی مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۴۰۳)
دوره ی ۴۰، شماره ی ۲، صص. ۸۵-۹۶، (پژوهشی)

در این مقاله، ارتعاشات آکوستیک غیرخطی پوسته استوانه‌ای دو سر گیردار متحرک در راستای محوری در عمق سیال بررسی شده است. سطح بیرونی پوسته که در تماس با سیال است؛ در معرض موج صوتی تابشی از نوع تخت مورب قرار می‌گیرد. تئوری غیر خطی پوسته نازک دائل برای استخراج معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی پوسته استوانه‌ای برای ارتعاشات در راستای شعاعی استفاده می‌شود. همچنین از رابطه برنولی برای سیال غیر پایدار، فشار وارد بر پوسته استوانه‌ای محاسبه می‌شود. روش گالرکین برای تبدیل معادلات حرکت به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی غیرهمگن غیرخطی استفاده می‌شود. پس از آن با در نظر گرفتن هر دو شکل موده‌های تحریک شده و همراه، از روش مقیاس‌های چندگانه برای به دست آوردن پاسخ فرکانسی سیستم استفاده می‌شود. اثرات شدت صوت، زاویه برخورد موج تابشی و سرعت محوری پوسته بر پاسخ فرکانسی سیستم و افت توان صوتی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج شبیه‌سازی نشان داده است که در سرعت‌های پایین پوسته استوانه‌ای، پاسخ فرکانسی تحت تأثیر تحریک هر دو مود تحریک شده و همراه می‌باشد.

orafafa@stu.yazd.ac.ir
jalili@yazd.ac.ir
afotuhi@yazd.ac.ir

واژگان کلیدی: ارتعاشات آکوستیک غیرخطی، پوسته استوانه‌ای متحرک در سیال، افت توان صوتی، روش مقیاس‌های چندگانه.

۱. مقدمه

استوانه‌ای تقویت شده که در سیال جاری غوطه‌ور شده است پرداختند. گو و همکاران^[۱] یک روش تحلیلی برای تعیین پاسخ ارتعاشی یک پوسته استوانه‌ای محدود غوطه‌ور در عمق محدود آب پیشنهاد کردند. آنها با تقسیم سطح بیرونی پوسته استوانه‌ای محدود به تعدادی از عناصر چهار ضلعی، تابش صوتی میدان دور پوسته استوانه‌ای محدود غوطه‌ور را با استفاده از روش المان مرزی مورد مطالعه قرار دادند. وانگ و همکاران^[۲] از روش ماتریس انتقال دقیق برای تعیین ارتعاش پوسته و تشعشعات صوتی پوسته استوانه‌ای تقویت شده مغروق در زیر آب تحت نیرو و تحریک صوتی استفاده کردند. آنها نتایج نظری به دست آمده از پژوهش خود را با نتایج تجربی برای ارتعاشات آزاد، اجباری و پاسخ صوتی پوسته استوانه‌ای اعتبارسنجی کردند. با ساده‌سازی و مدل‌سازی ساختار بدنه زیردریایی غوطه‌ور به وسیله یک پوسته جفت شده مخروطی- استوانه‌ای- نیم‌کره‌ای با دیواره‌های تقویت شده به وسیله رینگ‌های تقویتی، جین و همکاران^[۳] رفتار ارتعاشی- آکوستیکی

بررسی رفتار ارتعاشات آکوستیکی پوسته‌های استوانه‌ای در انواع کاربردهای مهندسی مانند خودروهای ریلی، وسایل نقلیه زیر آبی، خطوط لوله زیردریایی، سازه‌های هوافضا و صنایع نفت و گاز مهم است. تحلیل ارتعاشات آکوستیک سازه‌های مغروق و بررسی اثر پارامترهای مختلف بر میزان جذب انرژی صوتی توسط آنها از اهمیت بالایی برخوردار است. در صورتی که بیشتر شدت صوت تابیده شده به سازه منتقل شود به علت بازتابش کمتر امکان شناسایی آن کاهش می‌یابد. به همین دلیل پژوهش‌های بسیاری به منظور بررسی رفتار آکوستیکی سازه‌های مغروق بخصوص پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل کاربرد بسیار آنها در خودروهای زیر آبی صورت گرفته است. به عنوان نمونه، تانگ و همکاران^[۱] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با در نظر گرفتن ارتعاشات درون صفحه و خارج از صفحه رینگ‌های تقویتی پوسته استوانه‌ای، به بررسی تشعشعات صوتی از پوسته

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۵/۰۷، تاریخ اصلاحیه: ۱۴۰۳/۰۷/۱۴، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۷.

استناد به این مقاله:

عرفا، امیرحسین، جلیلی، محمد مهدی، و فتوحی، علیرضا، ۱۴۰۳. ارائه یک مدل غیرخطی برای تحلیل ارتعاشات آکوستیک یک پوسته استوانه‌ای متحرک در عمق سیال. مهندسی مکانیک شریف، ۴۰(۲)، صص. ۸۵-۹۶. DOI: 10.24200/J40.2024.64818.1715

جرم- فنر- میراگر غیرخطی با تحریک صوتی با روش المان مرزی در حوزه زمان توسعه داده شد. همچنین پاسخ آکوستیکی و ارتعاشاتی غیرخطی یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده به‌همراه جاذب دینامیکی ارتعاشات که توسط فنرهای تعلیق دو مرحله‌ای و یک میراگر در یک محیط آکوستیک بی‌نهایت مدل شده‌اند توسط کو و همکارانش^[۱۷] تحلیل شدند. با استفاده از نظریه غیرخطی پوسته نازک دائل، عرفا و همکاران^[۱۸] به‌طور تحلیلی رفتار ارتعاشی-آکوستیکی غیرخطی پوسته استوانه‌ای تحریک شده توسط یک موج صوتی صفحه‌ای مورب را تحت تشدید اولیه بررسی کردند. همچنین آن‌ها^[۱۹] با استفاده از نظریه غیرخطی پوسته نازک دائل و در نظر گرفتن موده‌های همراه^۱ در کنار موده‌های تحریک^۲ شده ضریب اتلاف صوت عبوری^۳ را برای یک پوسته استوانه‌ای که تحت تابش یک موج صوتی بود محاسبه کردند.

در بین پژوهش‌هایی که به بررسی رفتار آکوستیک غیرخطی پوسته‌ها پرداخته‌اند، بررسی رفتار آکوستیکی سازه‌های زیر آب کمتر مورد توجه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال، یک سیستم نوسانگر جرم- فنر غیرخطی نصب شده در پایین یک پوسته کروی توسط ژو و همکاران^[۲۰] برای بررسی رفتار آکوستیکی زیر آب این سیستم در جذب امواج آکوستیک تابیده شده به پوسته مورد استفاده قرار گرفت.

همانطور که در بالا ذکر شد، عملکرد ارتعاشات آکوستیک غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای متحرک در عمق سیال به‌ندرت در مقالات منتشر شده بررسی شده است. هدف اصلی مطالعه حاضر، توسعه یک روش تحلیلی برای پیش‌بینی پاسخ‌های ارتعاشات آکوستیک پوسته‌های متحرک در عمق سیال است. به این منظور، افت توان صوتی پوسته استوانه‌ای دایره‌ای دو سر گیردار تحت تحریک موج صوتی تخت مورب مورد بررسی قرار می‌گیرد. تئوری غیرخطی پوسته نازک دائل برای به‌دست آوردن معادله غیرخطی حرکت پوسته استفاده می‌شود. روش مقیاس‌های چندگانه، برای حل معادلات غیر خطی و به‌دست آوردن یک رابطه تحلیلی برای افت توان صوتی پوسته استوانه‌ای استفاده می‌شود. در پایان، تأثیر مدل‌سازی غیرخطی بر تخمین پاسخ فرکانسی سیستم در مقایسه با مدل خطی پوسته استوانه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲. مدل‌سازی

در این بخش، ارتعاشات غیرخطی یک پوسته استوانه‌ای دوسرگیردار با طول محدود L و شعاع متوسط R که تحت بارگذاری آکوستیکی قرار داشته و در عمق ثابت آب و با سرعت ثابت حرکت می‌کند؛ بررسی می‌شود. شکل ۱، دستگاه مختصات (x, r, θ) را که بر روی پوسته مغروق نصب شده است، نشان می‌دهد. مطابق شکل، جابجایی طولی در جهت بردار x با u جابجایی در جهت شعاعی r با w و در جهت محیطی با v نشان داده می‌شود.

با استفاده از تئوری غیرخطی دائل^[۲۱] معادلات حرکت برای ارتعاشات غیرخطی عرضی این پوسته استوانه‌ای به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$D\nabla^4 w + ch\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (1)$$

این نوع از پوسته‌ها را به‌صورت تحلیلی بررسی کردند. با در نظر گرفتن تحریک محوری و عرضی نیروی پروانه، اثرات زیرساخت‌های غیر متقارن مانند پایه سیستم رانش و بلوک‌های جرمی بر روی رفتارهای ارتعاشی- آکوستیکی یک مخزن غوطه‌ور از طریق روش عددی و آزمایش تجربی توسط سو و همکاران^[۵] مورد مطالعه قرار گرفت. زی و همکاران^[۶] یک روش نیمه تحلیلی را برای پیش‌بینی پاسخ‌های ارتعاشی- آکوستیکی انواع پوسته‌های دورانی و ترکیبات آنها مانند پوسته‌های مخروطی، پوسته‌های استوانه‌ای، پوسته‌های کروی، پوسته‌های مخروطی-استوانه‌ای-کروی ترکیبی که در آب غوطه‌ور می‌باشند؛ ارائه کردند. با استفاده از تبدیل عدد موج و روش جداسازی متغیرها برای فشار صوت و بسط پاسخ بر اساس شکل موده‌ها برای حرکت پوسته، ژائو و همکاران^[۷] فشار صوتی تابش میدان دور یک پوسته استوانه‌ای محدود نیمه غوطه‌ور را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج تحلیلی مدل ارائه شده با نتایج عددی و تجربی برای اعتبارسنجی روش مقایسه شد. پان و همکاران^[۸] با در نظر گرفتن اثرات فشار هیدرواستاتیک و برهمکنش آکوستیک سازه، ویژگی ارتعاشی-آکوستیکی پوسته‌های استوانه‌ای مستغرق با حلقه‌های تقویتی را مورد بررسی قرار دادند. همچنین با در نظر گرفتن یک منبع صوتی داخلی در حفره پوسته استوانه‌ای، مارسیک و همکاران^[۹] اثر سطح آزاد دریا بر پاسخ ارتعاشی- آکوستیکی یک پوسته استوانه‌ای بی‌نهایت را بررسی کردند. یانگ و سونگ^[۱۰] با استفاده از معادلات پوسته فلوگ و معادله هلمهولتز برای بیان حرکات دیواره پوسته و میدان فشار صوتی در سیال بیرونی، اثرات ارتعاشات با طول محدود را بر بازده تابش صوتی یک استوانه تقویت شده مستغرق بررسی کردند. با استفاده از روش طیفی ریتز- لژاندر، یک راه حل نیمه تحلیلی برای پیش‌بینی پاسخ ارتعاشی- آکوستیکی پوسته‌های ترکیبی غوطه‌ور در اعماق مختلف توسط ژانگ و همکاران^[۱۱] ارائه شد. جیا و همکاران^[۱۲] اثرات زیرساخت‌های داخلی غیرمتقارن متعدد بر رفتارهای ارتعاشی- آکوستیکی بدنه زیردریایی را از طریق روش اجزای محدود بررسی کردند. برای تأیید نتایج تحلیلی، پاسخ‌های ارتعاشی- آکوستیک یک بدنه زیردریایی با مقیاس بزرگ با چندین زیرساخت داخلی به‌طور تجربی به‌دست آمد و با نتایج تحلیلی مقایسه شد. همچنین جیا و همکاران^[۱۳] از روش مبتنی بر موج و روش اجزای محدود برای مطالعه اثرات ساختارهای داخلی غیرمتقارن بر رفتارهای ارتعاشی- آکوستیکی پوسته‌های متقارن محوری استفاده کردند. آنها دقت روش حاضر را با مقایسه نتایج آن با روش‌های المان محدود و المان مرزی نشان دادند. ارتعاش زیر آب و تشعشعات صوتی پوسته استوانه‌ای تقویت شده که توسط یک نیروی مکانیکی تحریک شده است توسط گائو و همکارانش^[۱۴] به‌صورت عددی و تجربی مورد بررسی قرار گرفت. آنها صحت نتایج عددی به‌دست آمده با روش اجزای محدود و المان مرزی را با مقایسه با نتایج آزمایش تأیید کردند. پان و ژانگ^[۱۵] رفتار ارتعاشی- آکوستیکی پوسته‌های استوانه‌ای دو جداره غوطه‌ور تقویت شده به وسیله حلقه‌ها و صفحات حلقوی را تحلیل کردند.

در مقایسه با تحلیل خطی ارتعاشی- آکوستیکی پوسته‌های استوانه‌ای، مطالعات روی رفتار غیرخطی ارتعاشی- آکوستیکی این پوسته‌ها نسبتاً اندک است. به‌عنوان نمونه یک روش عددی توسط کو و همکاران^[۱۶] برای پیش‌بینی پاسخ‌های ارتعاشی و آکوستیک پوسته استوانه‌ای مجهز شده به یک سیستم

^۲ Transmission loss

^۱ Companion mode

^۲ Driven mode

خصوصی معادله و F_h جواب عمومی آن است.

$$F = F_h + F_p \quad (5)$$

به منظور تعیین جواب همگن معادله (۴) لازم است تا شرایط مرزی مسئله مشخص گردند:

$$\begin{aligned} w &= 0 \quad \text{at} \quad x=0; \quad x=L \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \quad \text{at} \quad x=0; \quad x=L \\ u &= v = 0 \quad \text{at} \quad x=0; \quad x=L \end{aligned} \quad (6)$$

تابع w در معادله (۳) به گونه‌ای تعریف شده است که در دو شرط مرزی اول در معادله (۶) صدق کند. همچنین برای شرط مرزی آخر می‌توان معادله را به صورت میانگین و به فرم زیر بیان نمود:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} dx R d\theta = 0 \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\partial v}{R \partial \theta} dx R d\theta = 0 \quad (8)$$

به علاوه شرط پیوستگی در جهت مختصه θ برقرار است. برای مثال در جهت v در هر مقطع پیوستگی به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{R \partial \theta} d\theta = v(x, 2\pi) - v(x, 0) = 0 \quad (9)$$

با انجام عملیات ریاضی، جواب عمومی معادله (۴) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} F_h &= \frac{1}{2} R^2 \theta^2 \bar{N}_x + \\ &\left\{ \frac{1}{2} x^2 \left[\bar{N}_\theta - \frac{1}{2\pi L} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\partial^2 F_h}{\partial x^2} dx d\theta \right] \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن \bar{N}_x و \bar{N}_θ تنش‌های درون صفحه‌ای محوری و محیطی هستند و با اعمال شرایط مرزی (۷) تا (۹) روابط کرنش-جابجایی پوسته استوانه‌ای به دست می‌آیند.

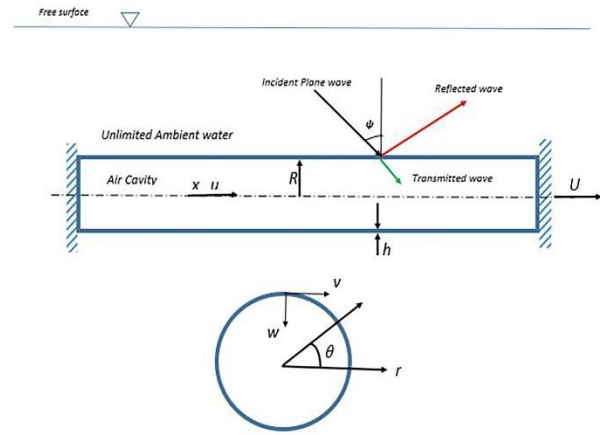
نیروی آکوستیکی f وارد بر استوانه که در معادله (۱) ظاهر شده است؛ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f = P_T^o + P_R^o - P_T^i \quad (11)$$

که در آن P_T^o موج تخت آکوستیکی برخوردی، P_R^o موج بازگشتی و P_T^i موج عبوری از پوسته استوانه‌ای است. بالانویس o در معادله فوق نشان‌دهنده این است که موج با سطح و محیط خارج پوسته در تماس است. همچنین بالانویس i نشان‌دهنده این است که موج از سطح داخلی پوسته انتشار می‌یابد. موج تخت آکوستیکی برخوردی در مختصات استوانه‌ای به صورت معادله زیر بیان می‌شود.

$$P_T^o = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-j)^n J_n(K_r^o r) \cos(n\theta) e^{j(\Omega t - K_x^o x)} \quad (12)$$

در معادله‌ی فوق J_n تابع بسل مرتبه اول و P_0 دامنه‌ی موج فشاری ورودی



شکل ۱. مدل پوسته استوانه‌ای متحرک در عمق سیال.

$$\begin{aligned} &+ \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ &= q + f + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \\ &\left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{R \partial \theta \partial x} \frac{\partial^2 w}{R \partial \theta \partial x} \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \right) \end{aligned}$$

در این رابطه $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$ سفتی خمشی پوسته است که در آن E مدول یانگ h ضخامت پوسته و ν ضریب پواسون می‌باشند. همچنین U سرعت حرکت استوانه، ρ چگالی و C ضریب میرایی است f و q به ترتیب نیروهای خارجی ناشی از برخورد موج صوتی و نیروهای ناشی از سیال هستند که در جهت شعاعی به پوسته وارد می‌شوند F تابع تنش است که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 F = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{R \partial x \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \theta^2} \quad (2)$$

جواب معادله (۱) را می‌توان به صورت بسط زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} w(x, \theta, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A_{mn}(t) \cos(n\theta) + B_{mn}(t) \sin(n\theta)) \varphi_m(x) \\ &+ \sum_{m=1}^{\tilde{N}} A_{2m-1,0}(t) \varphi_{2m-1}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

که در رابطه فوق تابع $\varphi_m(x)$ مربوط به شکل مود m ام یک تیر اویلر-برنولی دوسرگیردار است. با قراردادن $M = 1$ و $\tilde{N} = 2$ در معادله (۳) و جایگذاری این معادله در رابطه (۲)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} \nabla^4 F &= \\ &-\frac{1}{R} \{ [A_{1n}(t) \cos(n\theta) + B_{1n}(t) \sin(n\theta)] \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + \\ &A_{10}(t) \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + A_{30}(t) \frac{d^2 \varphi_3}{dx^2} \} + \\ &\frac{n^2}{R^2} \left[[-A_{1n}(t) \sin(n\theta) + B_{1n}(t) \cos(n\theta)] \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \right]^2 + \\ &\frac{n^2}{R^2} \left[[A_{1n}(t) \cos(n\theta) + B_{1n}(t) \sin(n\theta)] + A_{10}(t) \right] \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + A_{30}(t) \frac{d^2 \varphi_3}{dx^2} \\ &(A_{1n}(t) \cos(n\theta) + B_{1n}(t) \sin(n\theta)) \varphi_1 \end{aligned} \quad (4)$$

پاسخ معادله فوق را به شکل زیر می‌توان در نظر گرفت که در آن F_p جواب

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (22)$$

برای حل معادله فوق، پاسخ معادله به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\phi = \eta(r) \lambda(x) \zeta(\theta) \zeta(t) \quad (23)$$

با توجه به اینکه سرعت سیال در جهت شعاعی با سرعت پوسته در همین جهت یکسان است؛ در نتیجه شرایط مرزی برای حل معادله (22) به صورت زیر خواهد بود:

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad \text{at} \quad r = R \quad (24)$$

همچنین مقدار ϕ باید برای سیال خارجی در بینهایت محدود باشد.

با حل معادله (23) تابع ϕ به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \phi = & - \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^S \frac{b_{mj} K_n(k_m r)}{k_m K_n'(k_m R)} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \\ & \left(\dot{A}_{mn} \cos(n\theta) + \dot{B}_{mn} \sin(n\theta) \right) - \quad (25) \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^S \frac{b_{mj} K_n(k_m r)}{k_m K_n'(k_m R)} U \left(\frac{j\pi x}{L} \right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \\ & \left(A_{mn} \cos(n\theta) + B_{mn} \sin(n\theta) \right) \end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطه ی برنولی برای سیال غیر پایدار می توان مقدار فشار وارد بر پوسته را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} q = & \rho^o \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^S \frac{b_{mj} K_n(k_m r)}{k_m K_n'(k_m R)} \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \\ & \left(\ddot{A}_{mn} \cos(n\theta) + \ddot{B}_{mn} \sin(n\theta) \right) + \quad (26) \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^S \frac{2b_{mj} K_n(k_m r)}{k_m K_n'(k_m R)} U \left(\frac{j\pi x}{L} \right) \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \\ & \left(\dot{A}_{mn} \cos(n\theta) + \dot{B}_{mn} \sin(n\theta) \right) - \\ & \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^S \frac{b_{mj} K_n(k_m r)}{k_m K_n'(k_m R)} U^2 \left(\frac{j\pi x}{L} \right)^2 \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \\ & \left(\ddot{A}_{mn} \cos(n\theta) + \ddot{B}_{mn} \sin(n\theta) \right) \end{aligned}$$

که در آن، ϕ فشار وارد بر پوسته بر اثر ارتعاش پوسته می باشد و فشار کلی وارد بر پوسته با جمع این فشار با فشار استاتیک حالت پایدار وارد بر پوسته به دست می آید. با جایگذاری رابطه (3) در معادله (1) و اعمال روش گالرکین با توابع وزنی مناسب بر معادله حاصل و انتگرال گیری بر روی سطح میانی پوسته، چهار معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی به دست می آید. توابع وزنی مرتبط به شرح زیر است:

$$Z_s = \begin{cases} \cos(n\theta) \varphi_1(x) & s = 1 \\ \sin(n\theta) \varphi_1(x) & s = 2 \\ \varphi_1(x) & s = 3 \\ \varphi_3(x) & s = 4 \end{cases} \quad (27)$$

است. به ازای $n = 0$ مقدار ε_n برابر با 1 و برای سایر مقادیر n برابر با 2 است. همچنین در این معادله K_x^o و K_r^o عدد موج در راستای شعاعی و طولی است که از رابطه ی زیر محاسبه می شوند [23]:

$$K_r^o = \frac{\Omega}{c^o} \left(\frac{1}{1 + Ma \sin(\psi)} \right) \cos(\psi) \quad (13)$$

$$K_x^o = \frac{\Omega}{c^o} \left(\frac{1}{1 + Ma \sin(\psi)} \right) \sin(\psi) \quad (14)$$

که در آن، Ω فرکانس موج برخوردی ψ زاویه موج برخوردی، c سرعت صوت در فضای انتشار موج و Ma عدد ماخ است.

از طرفی پس از برخورد موج به استوانه، یک موج صوتی انعکاسی و یک موج صوتی عبوری ایجاد می شود. معادلات مربوط به موج بازگشتی و عبوری در مختصات استوانه ای به شکل معادلات (15) و (16) بیان می گردد.

$$P_R^o = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^2(K_r^o r) \left(P_r^n \cos(n\theta) + \tilde{P}_r^n \sin(n\theta) \right) e^{j(\Omega t - K_r^o x)} \quad (15)$$

$$P_T^i = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^1(K_r^i r) \left(P_r^n \cos(n\theta) + \tilde{P}_r^n \sin(n\theta) \right) e^{j(\Omega t - K_r^i x)} \quad (16)$$

K_x^i و K_r^i همچنین به ترتیب توابع هنکل مرتبه ی اول و دوم است. همچنین H_n^2 و H_n^1 عدد موج در راستای شعاعی و طولی است که از رابطه (17) محاسبه می شود.

$$K_x^i = K_x^o; K_r^i = \sqrt{\left(\frac{\Omega}{c^i} \right)^2 - (K_x^i)^2} \quad (17)$$

با استفاده از رابطه ی اوپلر، فشار و جابه جایی شعاعی پوسته استوانه ای به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial (P_T^o + P_R^o)}{\partial r} = \quad (18)$$

$$\rho^o \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \text{at} \quad r = R$$

$$\frac{\partial P_T^i}{\partial r} = \rho^o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{at} \quad r = R \quad (19)$$

در معادلات فوق ρ چگالی سیال در فضای انتشار موج صوتی است. برای مدل سازی تأثیر متقابل سیال و سازه پوسته، سیال غیرقابل تراکم، غیر لزج و غیر چرخشی در نظر گرفته می شود. از آنجایی که سیال غیر چرخشی و تراکم ناپذیر در نظر گرفته می شود، پتانسیل سرعت آن ψ در معادله لاپلاس صدق می کند.

$$\nabla^2 \psi(x, r, \theta, t) = 0 \quad (20)$$

برای حل معادله (20) تابع ψ به صورت زیر در نظر گرفته می شود [24]:

$$\psi = Ux + \phi \quad (21)$$

که در آن، عبارت اول مربوط به تغییرات پتانسیل بر اثر عبور سیال با سرعت U در جهت محور طولی پوسته و عبارت دوم مربوط به تغییرات پتانسیل بر اثر ارتعاش پوسته است. با جایگذاری معادله (21) در رابطه ی (20)، معادله ی لاپلاس در مختصات استوانه ای به فرم زیر بیان می شود [24]:

$$D_0^2 u_{42} + \omega_4^2 u_{42} = S_3 u_{11}^2 + S_3 u_{21}^2 + S_9 u_{31}^2 + S_{10} u_{31} u_{41} + S_{11} u_{41}^2 + \hat{S}_{13} u_{31} - 2D_0 D_1 u_{41}$$

ε^3 :

$$D_0^2 u_{33} + \omega_3^2 u_{33} = -2D_0 D_1 u_{32} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_{31} + \hat{R}_2 D_0 u_{31} + 2R_3 u_{11} u_{12} + 2R_3 u_{21} u_{22} + R_4 u_{11}^2 u_{31} + R_4 u_{21}^2 u_{31} + R_5 u_{41}^2 u_{31} + R_6 u_{41}^3 + R_7 u_{11}^2 u_{41} + R_7 u_{21}^2 u_{41} + R_8 u_{31}^3 + 2R_9 u_{31} u_{32} + R_{10} u_{31} u_{42} + R_{10} u_{32} u_{41} + 2R_{11} u_{41} u_{42} + R_{12} u_{31}^2 u_{41} + \hat{R}_{13} u_{42} + \hat{R}_{14} \cos(\Omega t + \phi_3)$$

$$D_0^2 u_{23} + \omega_{1n}^2 u_{23} = -2D_0 D_1 u_{22} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_{21} + \hat{Q}_2 D_0 u_{21} + Q_3 u_{32} u_{21} + Q_3 u_{22} u_{31} + Q_4 u_{21}^3 + Q_4 u_{11}^2 u_{21} + Q_5 u_{31}^2 u_{21} + Q_6 u_{21} u_{31} u_{41} + Q_7 u_{21} u_{41}^2 + Q_8 u_{21} u_{42} + Q_8 u_{22} u_{41} \quad (38)$$

$$D_0^2 u_{33} + \omega_3^2 u_{33} = -2D_0 D_1 u_{32} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_{31} + \hat{R}_2 D_0 u_{31} + 2R_3 u_{11} u_{12} + 2R_3 u_{21} u_{22} + R_4 u_{11}^2 u_{31} + R_4 u_{21}^2 u_{31} + R_5 u_{41}^2 u_{31} + R_6 u_{41}^3 + R_7 u_{11}^2 u_{41} + R_7 u_{21}^2 u_{41} + R_8 u_{31}^3 + 2R_9 u_{31} u_{32} + R_{10} u_{31} u_{42} + R_{10} u_{32} u_{41} + 2R_{11} u_{41} u_{42} + R_{12} u_{31}^2 u_{41} + \hat{R}_{13} u_{42} + \hat{R}_{14} \cos(\Omega t + \phi_3)$$

$$D_0^2 u_{43} + \omega_4^2 u_{43} = -2D_0 D_1 u_{42} - (D_1^2 + 2D_0 D_2) u_{41} + \hat{S}_2 D_0 u_{41} + 2S_3 u_{11} u_{12} + 2S_3 u_{21} u_{22} + S_4 u_{11}^2 u_{31} + S_4 u_{21}^2 u_{31} + S_5 u_{41}^2 u_{31} + S_6 u_{41}^3 + S_7 u_{11}^2 u_{41} + S_7 u_{21}^2 u_{41} + S_8 u_{31}^3 + 2S_9 u_{31} u_{32} + S_{10} u_{31} u_{42} + S_{10} u_{32} u_{41} + 2S_{11} u_{41} u_{42} + S_{12} u_{31}^2 u_{41} + \hat{S}_{13} u_{32} + \hat{S}_{14} \cos(\Omega t + \phi_4)$$

که در روابط فوق $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ است. همچنین $\omega_{1n} = \sqrt{P_1}$ ، $\omega_3 = \sqrt{R_1}$ و $\omega_4 = \sqrt{S_1}$ و فرکانس‌های طبیعی سیستم خطی هستند. در معادلات فوق به منظور بررسی اثر نزدیکی فرکانس تحریک (Ω) به فرکانس طبیعی سیستم خطی (ω_{1n})، فرکانس تحریک به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Omega = \omega_{1n} + \varepsilon^2 \sigma \quad (39)$$

با حل معادلات (۳۶) و (۳۷)، جایگذاری پاسخ در معادله (۳۸)، حذف ترم‌های نامحدود، جایگذاری فرم قطبی $X_i = 1/2 x_i e^{j\beta t}$ در معادله‌ی حاصل و جداسازی بخش‌های حقیقی و موهومی، معادلات زیر به دست می‌آیند:

همچنین معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل در زیر ارائه شده‌اند:

$$\ddot{A}_{1n} + P_1 A_{1n} = P_2 \dot{A}_{1n} + P_3 A_{1n} A_{10} + P_4 A_{1n}^3 + P_4 A_{1n} B_{1n}^2 + P_5 A_{1n} A_{10}^2 + P_6 A_{1n} A_{10} A_{30} + P_7 A_{1n} A_{30}^2 + P_8 A_{1n} A_{30} + P_9 \cos(\Omega t + \phi_1) \quad (28)$$

$$\ddot{B}_{1n} + Q_1 B_{1n} = Q_2 \dot{B}_{1n} + Q_3 B_{1n} A_{10} + Q_4 B_{1n}^3 + Q_4 B_{1n} A_{1n}^2 + Q_5 B_{1n} A_{10}^2 + Q_6 B_{1n} A_{10} A_{30} + Q_7 B_{1n} A_{30}^2 + Q_8 B_{1n} A_{30} \quad (29)$$

$$\ddot{A}_{10} + R_1 A_{10} = R_2 \dot{A}_{10} + R_3 A_{1n}^2 + R_3 B_{1n}^2 + R_4 A_{1n}^2 A_{10} + R_4 B_{1n}^2 A_{10} + R_5 A_{30}^2 A_{10} + R_6 A_{30}^3 + R_7 A_{1n}^2 A_{30} + R_7 B_{1n}^2 A_{30} + R_8 A_{10}^3 + R_9 A_{10}^2 + R_{10} A_{10} A_{30} + R_{11} A_{30}^2 + R_{12} A_{10}^2 A_{30} + R_{13} A_{30} + R_{14} \cos(\Omega t + \phi_3) \quad (30)$$

$$\ddot{A}_{30} + S_1 A_{30} = S_2 \dot{A}_{30} + S_3 A_{1n}^2 + S_3 B_{1n}^2 + S_4 A_{1n}^2 A_{10} + S_4 B_{1n}^2 A_{10} + S_5 A_{30}^2 A_{10} + S_6 A_{30}^3 + S_7 A_{1n}^2 A_{30} + S_7 B_{1n}^2 A_{30} + S_8 A_{10}^3 + S_9 A_{10}^2 + S_{10} A_{10} A_{30} + S_{11} A_{30}^2 + S_{12} A_{10}^2 A_{30} + S_{13} A_{10} + S_{14} \cos(\Omega t + \phi_4) \quad (31)$$

۳. روش حل معادلات

در این مقاله T از روش مقیاس‌های زمانی چندگانه برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی (۲۸) تا (۳۱) استفاده می‌شود. به این منظور، توابع زمانی موجود در این معادلات به صورت زیر بسط داده می‌شوند:

$$A_{1n} = \varepsilon u_{11}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{12}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{13}(T_0, T_1, T_2) \quad (32)$$

$$B_{1n} = \varepsilon u_{21}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{22}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{23}(T_0, T_1, T_2) \quad (33)$$

$$A_{10} = \varepsilon u_{31}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{32}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{33}(T_0, T_1, T_2) \quad (34)$$

$$A_{30} = \varepsilon u_{41}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{42}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon u_{43}(T_0, T_1, T_2) \quad (35)$$

که در معادلات فوق، $T_n = \varepsilon^n t$ است. در ادامه با جایگذاری معادلات (۳۲) تا (۳۵) در معادلات (۲۸) تا (۳۱) و جداسازی عبارت‌های ε با توان‌های یکسان؛ معادلات زیر حاصل می‌شوند.

$$\varepsilon^1: D_0^2 u_{11} + \omega_{1n}^2 u_{11} = 0 \quad (36)$$

$$D_0^2 u_{21} + \omega_{1n}^2 u_{21} = 0$$

$$D_0^2 u_{31} + \omega_3^2 u_{31} = 0$$

$$D_0^2 u_{41} + \omega_4^2 u_{41} = 0$$

ε^2 :

$$D_0^2 u_{12} + \omega_{1n}^2 u_{12} = P_3 u_{31} u_{11} + P_8 u_{41} u_{11} - 2D_0 D_1 u_{11} \quad (37)$$

$$D_0^2 u_{22} + \omega_{1n}^2 u_{22} = Q_3 u_{31} u_{21} + Q_8 u_{41} u_{21} - 2D_0 D_1 u_{21}$$

$$D_0^2 u_{32} + \omega_3^2 u_{32} = R_3 u_{11}^2 + R_3 u_{21}^2 + R_9 u_{31}^2 + R_{10} u_{31} u_{41} + R_{11} u_{41}^2 + \hat{R}_{13} u_{41} - 2D_0 D_1 u_{31}$$

$$\begin{aligned}
 & -8\omega_3 x_3 \beta_3' = \\
 & 2R_3 \left(\frac{P_3 x_1^2 x_3}{\omega_n^2 - (\omega_n + \omega_3)^2} + \frac{P_3 x_1^2 x_3}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_3)^2} + \right. \\
 & \left. \frac{Q_3 x_2^2 x_3}{\omega_n^2 - (\omega_n + \omega_3)^2} + \frac{Q_3 x_2^2 x_3}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_3)^2} \right) + \\
 & R_4 (2x_1^2 x_3 + 2x_2^2 x_3) + R_5 (2x_4^2 x_3) + \\
 & R_8 (3x_3^3) 2R_9 \left(\frac{2R_3 x_1^2 x_3}{\omega_3^2} + \frac{2R_3 x_2^2 x_3}{\omega_3^2} + \right. \\
 & \left. \frac{R_9 x_3^3}{-3\omega_3^2} + \frac{2R_9 x_3^3}{\omega_3^2} + \frac{2R_{11} x_4^2 x_3}{\omega_3^2} \right) + \\
 & R_{10} \left(\frac{2S_3 x_1^2 x_3}{\omega_4^2} + \frac{2S_3 x_2^2 x_3}{\omega_4^2} + \frac{S_9 x_3^3}{\omega_4^2 - 4\omega_3^2} + \right. \\
 & \left. \frac{2S_9 x_3^3}{\omega_4^2} + \frac{2S_{11} x_4^2 x_3}{\omega_4^2} + \frac{R_{10} x_4^2 x_3}{\omega_4^2 - (\omega_4 + \omega_3)^2} + \right. \\
 & \left. \frac{R_{10} x_4^2 x_3}{\omega_4^2 - (\omega_4 - \omega_3)^2} \right) + 2R_{11} \left(\frac{S_{10} x_4^2 x_3}{\omega_4^2 - (\omega_4 + \omega_3)^2} + \right. \\
 & \left. \frac{S_{10} x_4^2 x_3}{\omega_4^2 - (\omega_4 - \omega_3)^2} \right) + \frac{4\hat{R}_{13} \hat{S}_{13} x_3}{\omega_4^2 - \omega_3^2}
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$2\omega_3 x_3' = \hat{R}_2 x_3 \omega_3 \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
 & -8\omega_4 x_4 \beta_4' = \\
 & 2S_3 \left(\frac{P_8 x_1^2 x_4}{\omega_n^2 - (\omega_n + \omega_4)^2} + \frac{P_8 x_1^2 x_4}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_4)^2} + \right. \\
 & \left. \frac{Q_8 x_2^2 x_4}{\omega_n^2 - (\omega_n + \omega_4)^2} + \frac{Q_8 x_2^2 x_4}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_4)^2} \right) + \\
 & S_6 (3x_4^3) + S_7 (2x_1^2 x_4 + 2x_2^2 x_4) + \\
 & 2S_9 \left(\frac{R_{10} x_3^2 x_4}{\omega_3^2 - (\omega_4 + \omega_3)^2} + \frac{R_{10} x_3^2 x_4}{\omega_3^2 - (\omega_4 - \omega_3)^2} \right) + \\
 & S_{10} \left(\frac{2R_3 x_1^2 x_4}{\omega_3^2} + \frac{2R_3 x_2^2 x_4}{\omega_3^2} + \frac{2R_9 x_3^2 x_4}{\omega_3^2} + \right. \\
 & \left. \frac{2R_{11} x_4^3}{\omega_3^2} + \frac{R_{11} x_4^3}{\omega_3^2 - 4\omega_3^2} + \frac{S_{10} x_3^2 x_4}{\omega_4^2 - (\omega_4 + \omega_3)^2} + \right. \\
 & \left. \frac{S_{10} x_3^2 x_4}{\omega_4^2 - (\omega_4 - \omega_3)^2} \right) + 2S_{11} \left(\frac{2S_3 x_1^2 x_4}{\omega_4^2} + \right. \\
 & \left. \frac{2S_3 x_2^2 x_4}{\omega_4^2} + \frac{2S_9 x_3^2 x_4}{\omega_4^2} + \frac{S_{11} x_4^3}{-3\omega_4^2} + \frac{2S_{11} x_4^3}{\omega_4^2} \right) + \\
 & S_{12} (2x_3^2 x_4) + \frac{4\hat{R}_{13} \hat{S}_{13} x_4}{\omega_3^2 - \omega_4^2}
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$2\omega_4 x_4' = \hat{S}_2 x_4 \omega_4 \tag{47}$$

در معادلات (۴۰) تا (۴۳)، $\gamma_2 = \sigma T_2 - \beta_2$ و $\gamma_1 = \sigma T_2 - \beta_1$ هستند.

با توجه به این‌که در حالت ماندگار $x_1' = \beta_3' = \beta_4' = \gamma_1' = \gamma_2' = 0$ در نتیجه از معادله‌ی (۴۵) و (۴۷) می‌توان نتیجه گرفت که $x_3 = x_4 = 0$ ادامه پاسخ سیستم در دو حالت مختلف بررسی می‌شود.

$$\begin{aligned}
 8\omega_n x_1' &= 4\hat{P}_2 \omega_n x_1 + \frac{R_3 P_3 x_2^2 x_1}{\omega_3^2 - \omega_n^2} \sin(2(\gamma_1 - \gamma_2)) + \\
 & \frac{S_3 P_8 x_2^2 x_1}{\omega_4^2 - \omega_n^2} \sin(2(\gamma_1 - \gamma_2)) + P_4 x_2^2 x_1 \sin(2(\gamma_1 - \gamma_2)) + 4\hat{P}_9 \sin(\gamma_1 + \phi)
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 -8\omega_n x_1 \beta_1' &= P_3 \left(\frac{2R_3 x_1^3}{\omega_3^2} + \frac{2R_3 x_2^2 x_1}{\omega_3^2} + \right. \\
 & \left. \frac{R_3 x_1^3}{\omega_3^2 - 4\omega_n^2} + \frac{R_3 x_2^2 x_1}{\omega_3^2 - 4\omega_n^2} \cos(2(\gamma_1 - \gamma_2)) + \right. \\
 & \left. \frac{2R_9 x_3^2 x_1}{\omega_3^2} + \frac{2R_{11} x_4^2 x_1}{\omega_3^2} + \frac{P_3 x_3^2 x_1}{\omega_n^2 - (\omega_n + \omega_3)^2} + \right. \\
 & \left. \frac{P_3 x_3^2 x_1}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_3)^2} \right) + \\
 & P_4 (3x_1^3 + 2x_2^2 x_1 + x_2^2 x_1 \cos(2(\gamma_1 - \gamma_2))) + \\
 & P_5 (2x_3^2 x_1) + P_7 (2x_4^2 x_1) +
 \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}
 & P_8 \left(\frac{2S_3 x_1^3}{\omega_4^2} + \frac{2S_3 x_2^2 x_1}{\omega_4^2} + \frac{S_3 x_1^3}{\omega_4^2 - 4\omega_n^2} + \right. \\
 & \left. \frac{S_3 x_2^2 x_1}{\omega_4^2 - 4\omega_n^2} \cos(2(\gamma_1 - \gamma_2)) + \frac{2S_9 x_3^2 x_1}{\omega_4^2} + \right. \\
 & \left. \frac{2S_{11} x_4^2 x_1}{\omega_4^2} + \frac{P_8 x_3^2 x_1}{\omega_n^2 - (\omega_n + \omega_4)^2} + \right. \\
 & \left. \frac{P_8 x_3^2 x_1}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_4)^2} \right) + 4\hat{P}_9 \cos(\gamma_1 + \phi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -8\omega_n x_2 \beta_2' &= Q_3 \left(\frac{2R_3 x_2^3}{\omega_3^2} + \frac{2R_3 x_1^2 x_2}{\omega_3^2} + \right. \\
 & \left. \frac{R_3 x_2^3}{\omega_3^2 - 4\omega_n^2} + \frac{R_3 x_1^2 x_2}{\omega_3^2 - 4\omega_n^2} \cos(2(\gamma_2 - \gamma_1)) + \right. \\
 & \left. \frac{2R_9 x_3^2 x_2}{\omega_3^2} + \frac{2R_{11} x_4^2 x_2}{\omega_3^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{Q_3 x_3^2 x_2}{\omega_n^2 - (\omega_n + \omega_3)^2} + \frac{P_3 x_3^2 x_2}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_3)^2} \right) +
 \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
 & Q_4 (3x_2^3 + 2x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 \cos(2(\gamma_2 - \gamma_1))) + \\
 & Q_5 (2x_3^2 x_2) + Q_7 (2x_4^2 x_2) + \\
 & Q_8 \left(\frac{2S_3 x_2^3}{\omega_4^2} + \frac{2S_3 x_1^2 x_2}{\omega_4^2} + \frac{S_3 x_2^3}{\omega_4^2 - 4\omega_n^2} + \right. \\
 & \left. \frac{S_3 x_1^2 x_2}{\omega_4^2 - 4\omega_n^2} \cos(2(\gamma_2 - \gamma_1)) + \frac{2S_9 x_3^2 x_2}{\omega_4^2} + \right. \\
 & \left. \frac{2S_{11} x_4^2 x_2}{\omega_4^2} + \frac{Q_8 x_4^2 x_2}{\omega_n^2 - (\omega_n + \omega_4)^2} + \frac{Q_8 x_4^2 x_2}{\omega_n^2 - (\omega_n - \omega_4)^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8\omega_n x_2' &= 4\hat{Q}_2 x_2 \omega_n + \frac{R_3 Q_3 x_1^2 x_2}{\omega_3^2 - 4\omega_n^2} \sin(2(\gamma_2 - \gamma_1)) + \\
 & \frac{S_3 Q_8 x_1^2 x_2}{\omega_4^2 - 4\omega_n^2} \sin(2(\gamma_2 - \gamma_1)) + Q_4 x_1^2 x_2 \sin(2(\gamma_2 - \gamma_1))
 \end{aligned} \tag{43}$$

حالت اول $x_2 \neq 0$:

در این حالت از معادله‌ی (۴۲) و (۴۳) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\sin(2(\gamma_2 - \gamma_1)) = \frac{4\hat{Q}_2\omega_{in}}{\left(\frac{Q_3R_3}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + Q_4 + \frac{Q_8S_3}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2}\right)x_1^2} \quad (۴۸)$$

$$\cos(2(\gamma_2 - \gamma_1)) = \frac{\left(\frac{2Q_3R_3}{\omega_3^2} + 2Q_4 + \frac{2Q_8S_3}{\omega_4^2}\right)x_1^2 + 8\sigma\omega_{in}}{\left(\frac{Q_3R_3}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + Q_4 + \frac{Q_8S_3}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2}\right)x_1^2} \quad (۴۹)$$

$$\frac{\left(\frac{2Q_3R_3}{\omega_3^2} + \frac{Q_3R_3}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + 3Q_4 + \frac{2Q_8S_3}{\omega_4^2} + \frac{Q_8S_3}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2}\right)x_2^2}{\left(\frac{Q_3R_3}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + Q_4 + \frac{Q_8S_3}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2}\right)x_1^2}$$

با ترکیب دو معادله فوق و حذف عبارت $(\gamma_2 - \gamma_1)$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$x_2^2 = \frac{\left(\frac{2Q_3R_3}{\omega_3^2} + 2Q_4 + \frac{2Q_8S_3}{\omega_4^2}\right)x_1^2 - 8\sigma\omega_{in}}{\left(\frac{2Q_3R_3}{\omega_3^2} + \frac{Q_3R_3}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + 3Q_4 + \frac{2Q_8S_3}{\omega_4^2} + \frac{Q_8S_3}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2}\right)} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{Q_3R_3}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + Q_4 + \frac{Q_8S_3}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2}\right)^2 x_1^4 - (4\hat{Q}_2\omega_{in})^2}{\left(\frac{2Q_3R_3}{\omega_3^2} + \frac{Q_3R_3}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + 3Q_4 + \frac{2Q_8S_3}{\omega_4^2} + \frac{Q_8S_3}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2}\right)^2}} \quad (۵۰)$$

در ادامه با ترکیب دو رابطه ارائه شده در روابط (۴۰) و (۴۱) و حذف عبارت $(\gamma_1 + \phi_1)$ رابطه (۵۱) حاصل می‌شود که مقادیر $(\gamma_2 - \gamma_1)$ از روابط (۴۸) و (۴۹) و x_2^2 از رابطه (۵۰) محاسبه می‌گردد.

$$16\hat{P}_9^2 - x_1^2(4\hat{P}_2\omega_{in} + \frac{R_3P_3x_2^2}{\omega_3^2 - \omega_{in}^2} \sin(2(\gamma_1 - \gamma_2))) + \frac{S_3P_8x_2^2}{\omega_4^2 - \omega_{in}^2} \sin(2(\gamma_1 - \gamma_2)) + P_4x_2^2 \sin(2(\gamma_1 - \gamma_2))^2 - x_1^2(P_3(\frac{2R_3x_1^2}{\omega_3^2} + \frac{2R_3x_2^2}{\omega_3^2} + \frac{R_3x_1^2}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + \frac{R_3x_2^2}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} \cos(2(\gamma_1 - \gamma_2)))) + P_4(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_2^2 \cos(2(\gamma_1 - \gamma_2))) + P_8(\frac{2S_3x_1^2}{\omega_4^2} + \frac{2S_3x_2^2}{\omega_4^2} + \frac{S_3x_1^2}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2} + \frac{S_3x_2^2}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2} \cos(2(\gamma_1 - \gamma_2))) + 8\omega_{in}\sigma)^2 = 0 \quad (۵۱)$$

سیس با استفاده از روش نیوتن-رافسون^[۲۵] معادلات جبری (۵۰) و (۵۱) حل و مقادیر x_1 و x_2 به صورت تابعی از اختلاف فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی سیستم خطی $\mathcal{E}^2\sigma$ محاسبه می‌شوند.

حالت دوم $x_2 = 0$:

اگر معادله‌ی (۵۰) جواب نداشته باشد می‌توان نتیجه گرفت که مود ارتعاشی همراه وجود نخواهد داشت و در نتیجه $x_2 = 0$. در نتیجه معادله‌ی (۵۱) به شکل معادله‌ی زیر ساده می‌شود.

$$16\hat{P}_9^2 - x_1^2(4\hat{P}_2\omega_{in})^2 - x_1^2\left(\frac{2R_3P_3x_1^2}{\omega_3^2} + \frac{R_3P_3x_1^2}{\omega_3^2 - 4\omega_{in}^2} + 3P_4x_1^2 + \frac{2P_8S_3x_1^2}{\omega_4^2} + \frac{S_3P_8x_1^2}{\omega_4^2 - 4\omega_{in}^2} + 8\omega_{in}\sigma\right)^2 = 0 \quad (۵۲)$$

از معادله فوق می‌توان دامنه ارتعاشات پوسته را در حالت ماندگار در فرکانس-های تحریک مختلف، تعیین کرد.

۴. تحلیل پایداری

به منظور تحلیل پایداری پاسخ به دست آمده در بخش قبل، ابتدا معادلات (۴۰) تا (۴۳) به صورت معادله (۵۳) بازنویسی می‌گردد.

$$\begin{cases} x_1' = g_1(x_1, \gamma_1, x_2, \gamma_2) \\ \gamma_1' = g_2(x_1, \gamma_1, x_2, \gamma_2) \\ x_2' = g_3(x_1, \gamma_1, x_2, \gamma_2) \\ \gamma_2' = g_4(x_1, \gamma_1, x_2, \gamma_2) \end{cases} \quad (۵۳)$$

به منظور بررسی پایداری دستگاه معادلات (۵۳)، تغییرات حول نقطه‌ی تعادل به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma_1 \\ x_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \gamma_{10} \\ x_{20} \\ \gamma_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{11} \\ \gamma_{11} \\ x_{21} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} \quad (۵۴)$$

با جای گذاری معادله (۵۴) در معادله‌ی (۵۳) و بسط معادله فوق، رابطه زیر حاصل می‌شود.

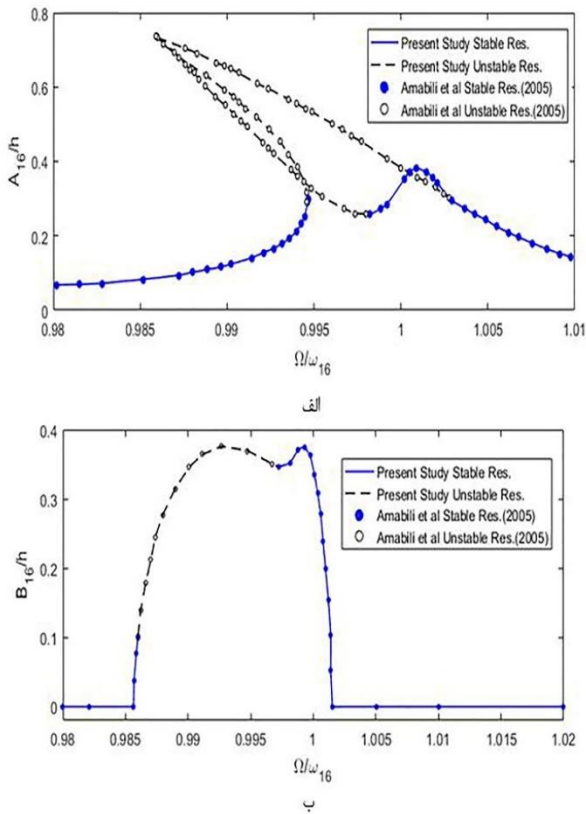
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \gamma_1 \\ x_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial g_4}{\partial x_1} & \frac{\partial g_4}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial g_4}{\partial x_2} & \frac{\partial g_4}{\partial \gamma_2} \end{pmatrix} (x_{10} \ \gamma_{10} \ x_{20} \ \gamma_{20}) \begin{pmatrix} x_{11} \\ \gamma_{11} \\ x_{21} \\ \gamma_{21} \end{pmatrix} \quad (۵۵)$$

تحلیل پایداری با محاسبه‌ی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین در معادله (۵۵) حاصل می‌شود. به منظور پایدار بودن سیستم لازم است تا بخش حقیقی مقادیر ویژه کوچکتر یا مساوی صفر باشد.

۵. اف تان صوتی

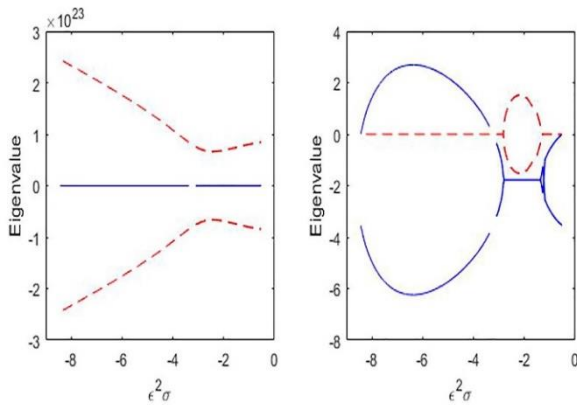
یکی از خواص آکوستیکی مورد مطالعه در سازه‌ها، ضریب اتلاف صوت عبوری است که به صورت نسبت توان صوت برخوردی به توان صوت منتقل شده و بر حسب دسیبل بیان می‌گردد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$TL = 10 \log_{10} \left(\frac{W^I}{\sum_{n=0}^{\infty} W_n^T} \right) \quad (۵۶)$$



شکل ۲. مقایسه نتایج با مرجع [۲۷] برای پوسته‌ی استوانه‌ای.

- (مود $n=6$ و $m=1$) الف) A_{16} بی بعد و ب) B_{16} بی بعد. — پاسخ پایدار نتایج پژوهش اخیر، • پاسخ ناپایدار پژوهش اخیر، ○ پاسخ پایدار نتایج آمابیلی [۲۷].



شکل ۳. تحلیل پایداری در اطراف فرکانس طبیعی برای پوسته‌ی در تماس با آب. — قسمت حقیقی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین، — قسمت موهومی مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین.

جدول ۲. پارامترهای پوسته استوانه‌ای مورد تحلیل [۲۸].

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
طول	۲۰۰ (GPa)	مدول الاستیسیته	۲۰۰۶ (m)
شعاع	۰.۲۸	ضریب پواسون	۰.۳ (m)
ضخامت	(Kg/m ³) ۷۸۵۰	چگالی	۱.۲۷ (mm)

در رابطه فوق، W^I توان موج ورودی و W_n^T توان موج صوتی عبوری مربوط به مود n ام است که از روابط زیر حاصل می‌شوند [۲۶]:

$$W^I = R \frac{P_0^2 \cos(\psi)}{\rho^o c^o} (1 + Ma \sin(\psi)) \quad (57)$$

$$W_n^T = 0.5 \int_0^{2\pi} \int_0^L P_T^i \frac{\partial w}{\partial t} dx R d\theta \quad (58)$$

۶. نتایج

به منظور بررسی صحت عملکرد مدل ارائه شده در این پژوهش، نتایج به دست آمده با استفاده از مدل حاضر با نتایج موجود در مرجع [۲۷] مقایسه می‌گردد. در این مرجع، آمابیلی و همکاران رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای با جریان سیال داخلی را که تحت تحریک نیروی هارمونیک قرار دارد؛ بررسی نمودند. در جدول ۱، پارامترهای مربوط به پوسته مورد بررسی، آورده شده است.

با استفاده از معادلات حرکت به دست آمده در این مقاله، پوسته با شرایط مشابه مورد تحلیل قرار گرفت. پاسخ سیستم مربوط به مود ارتعاشی $n=6$ و $m=1$ در شکل ۲ نشان داده شده است که این پاسخ شامل مدهای ارتعاشی تحریک شده و همراه است.

نتایج نشان داده شده در شکل ۲، دقت قابل قبول نتایج به دست آمده را در مقایسه با نتایج مرجع [۲۷] نشان می‌دهد. شکل ۳، نتایج حاصل از تحلیل پایداری با کمک معادله‌ی (۵۴) را نشان می‌دهد.

اولیازاده و همکاران [۲۸] رفتار پوسته‌ی استوانه‌ای تحت موج آکوستیک را به صورت تجربی بررسی نمودند. در جدول ۲، پارامترهای مربوط به پوسته مورد آزمون، آورده شده است.

در شکل ۴، مقایسه بین نتایج تجربی و نتایج حاصل از مدل به دست آمده در این پژوهش نشان داده شده است. نتایج دو روش شباهت زیادی از نظر مقدار پارامتر افت توان صوتی و همچنین فرکانس تشدید نشان می‌دهند؛ به طوری که خطای جذر میانگین مربعات در محاسبه افت توان صوتی نسبت به نتایج آزمایش ۸/۷٪ و خطای محاسبه فرکانس تشدید ۰/۰۷۴٪ می‌باشد. لازم به ذکر است که عدم تطابق کامل بین نتایج تجربی ارائه شده در مرجع [۲۸] و نتایج تئوری حاصل در پژوهش حاضر می‌تواند به دلیل خطاهای اندازه‌گیری، عدم

جدول ۱. پارامترهای پوسته استوانه‌ای مورد تحلیل [۲۷].

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
طول	۰.۵۲ (m)	مدول الاستیسیته	۱۹۸ (GPa)
شعاع	۰.۱۴۹ (m)	ضریب پواسون	۰.۳۱
ضخامت	۰.۵۱۹ (mm)	چگالی	(Kg/m ³) ۷۸۰۰

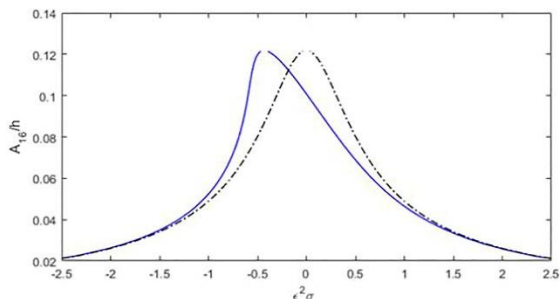
تطابق کامل شرایط مرزی و خطاهای موجود در ساخت دقیق پوسته از نظر ابعادی و جنس به وجود آمده باشد.

رفتار فرکانسی سیستم فقط تحت تأثیر مودهای تحریک شده می‌باشد. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، بیشینه دامنه پاسخ فرکانسی در تمام حالات هنگام کاهش فرکانس تحریک موج در مدل‌های خطی و غیرخطی یکسان است. اما در هنگام افزایش فرکانس موج برخوردی، بیشینه دامنه پاسخ مدل خطی از مدل غیرخطی بیشتر می‌باشد. این تفاوت در شدت موج برخوردی بالاتر افزایش می‌یابد. مقایسه نمودارهای ارائه شده در شکل ۵ نیز نشان می‌دهد که فرکانس تشدید پیش‌بینی شده توسط مدل خطی بیشتر از فرکانس تشدید به‌دست آمده از مدل غیرخطی می‌باشد. این امر به علت کاهش خمیدگی نمودار پاسخ فرکانسی با کاهش شدت موج برخوردی است.

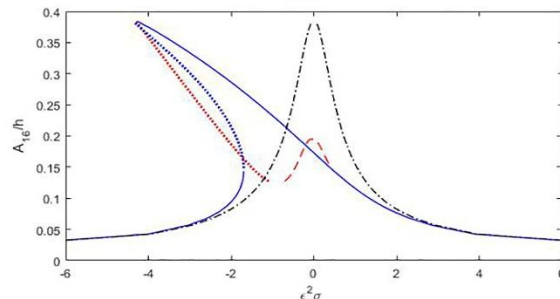
اثر زاویه برخورد موج تابشی به پوسته استوانه‌ای متحرک در عمق سیال بر پاسخ فرکانسی آن در شکل ۶ بررسی شده است. مطابق این شکل، با افزایش زاویه برخورد موج تابشی، خمیدگی منحنی پاسخ فرکانسی کاهش می‌یابد. در نتیجه رفتار سیستم به رفتار سیستم خطی نزدیک شده و فرکانس تشدید سیستم با دقت مناسبی توسط سیستم خطی تخمین زده می‌شود. همچنین،

در ادامه، به منظور بررسی میزان تأثیر مدل‌سازی غیرخطی بر دقت نتایج در مدل‌سازی ارتعاشات آکوستیکی پوسته استوانه‌ای، پاسخ فرکانسی ارتعاشات پوسته در دو حالت مدل‌سازی خطی و غیرخطی برای پارامترهای ورودی جدول ۳ با هم مقایسه می‌شوند. به این منظور ابتدا با حذف عبارت‌های غیرخطی در معادلات (۲۸) تا (۳۱) پاسخ خطی سیستم تحت اثر بار آکوستیکی اعمالی محاسبه و سپس با پاسخ فرکانسی به‌دست آمده از مدل غیرخطی ارائه شده در این مقاله مقایسه می‌گردد. در شکل ۵ تا شکل ۷ پاسخ فرکانسی سیستم در دو حالت خطی و غیرخطی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در این شکل‌ها به ترتیب اثر تغییر پارامترهای شدت موج برخوردی، زاویه برخورد موج صوتی و سرعت حرکت محوری پوسته بر میزان رفتار غیرخطی سازه نشان داده شده است.

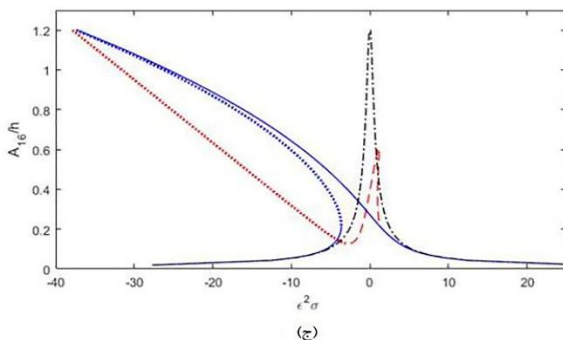
شکل ۵، اثر شدت موج آکوستیک تابیده شده به پوسته را بر پاسخ فرکانسی آن در حالت $m = 1$ و $n = 6$ نشان می‌دهد. در هر نمودار، پاسخ فرکانسی سیستم با استفاده از مدل غیرخطی ارائه شده در این مقاله در کنار پاسخ فرکانسی رسم شده با استفاده از مدل خطی‌سازی شده ارائه شده است. با توجه به این شکل در شدت موج برخوردی بالای ۲۰۰ دسیبل تحریک همزمان مودهای تحریک شده و همراه اتفاق می‌افتد ولی در شدت موج‌های پایین‌تر



(الف)

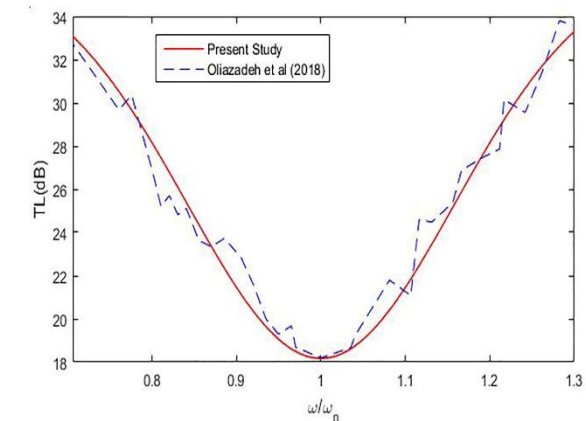


(ب)



(ج)

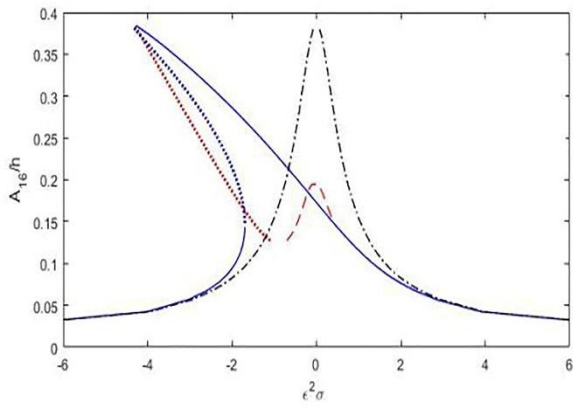
شکل ۵. مقایسه پاسخ فرکانسی نرمالیزه شده A_{16} برای دو سیستم خطی و غیرخطی با تغییر شدت صوت برخوردی: — ■ — پاسخ سیستم خطی، — ■ ■ ■ پاسخ ناپایدار سیستم غیرخطی تنها با لحاظ مودهای تحریک شده، — ■ ■ ■ پاسخ پایدار و — ■ ■ ■ پاسخ ناپایدار سیستم غیرخطی با در نظر گرفتن مودهای همراه؛ (الف) ۱۹۰، (ب) ۲۰۰، (ج) ۲۱۰



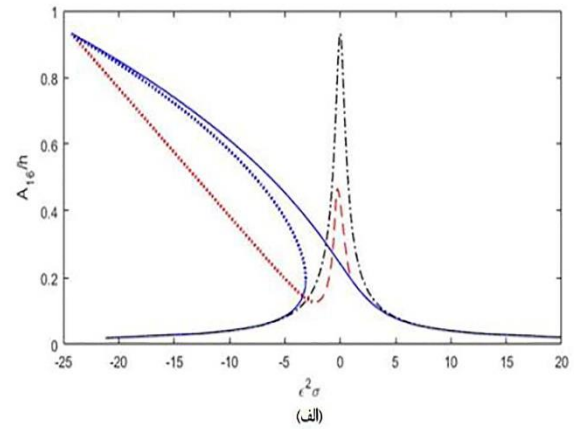
شکل ۴. مقایسه نتایج افت توان صوتی با اولیازاده [۲۸]: — ■ — نتایج پژوهش اولیازاده [۲۸]، — ■ — نتایج پژوهش اخیر.

جدول ۳. پارامترهای موج آکوستیک.

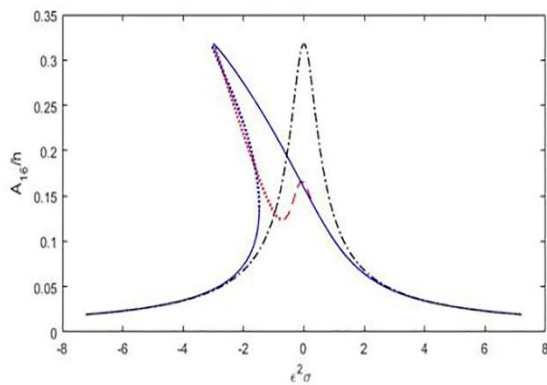
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
شدت صوت	۲۰۰ (dB)	زاویه برخورد	۴۵°
چگالی آب	۱۰۰۰ (Kg/m ³)	سرعت صوت در آب	۱۴۰۰ (m/s)
چگالی هوا	۱ (Kg/m ³)	سرعت صوت در هوا	۳۰۰ (m/s)
سرعت محوری	۰ (m/s)		



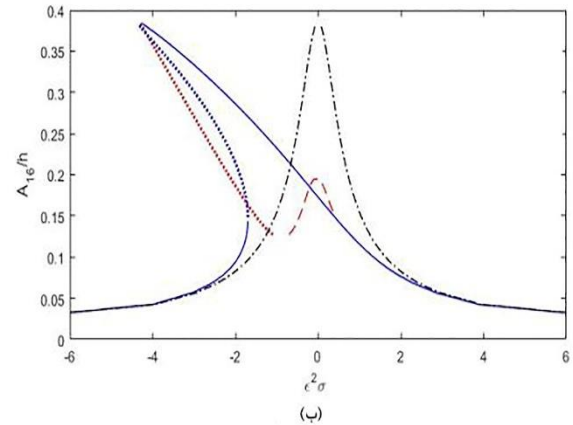
(الف)



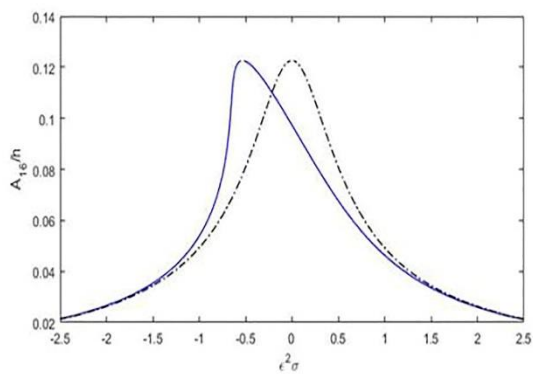
(الف)



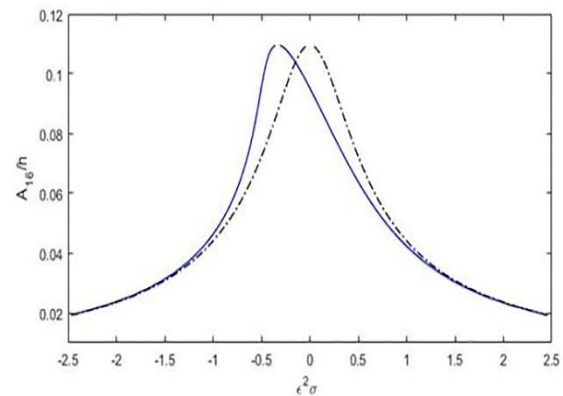
(ب)



(ب)



(ج)



(ج)

شکل ۷. مقایسه پاسخ فرکانسی نرمالیزه شده A_{16} برای دو سیستم خطی و غیرخطی سیستم با تغییر سرعت محوری پوسته: — پاسخ سیستم خطی، — پاسخ پایدار و ■ پاسخ ناپایدار سیستم غیرخطی تنها با لحاظ مودهای تحریک شده، — پاسخ پایدار و ■ پاسخ ناپایدار سیستم غیرخطی با در نظر گرفتن مودهای همراه: (الف) صفر، (ب) ۱۰، (ج) ۲۰ متر بر ثانیه.

یکی دیگر از پارامترهای مؤثر بر ارتعاشات آکوستیکی پوسته استوانه‌ای مغروق، سرعت حرکت محوری آن در سیال می‌باشد. شکل ۷، اثر سرعت حرکت پوسته را بر پاسخ فرکانسی ارتعاشات آن نشان می‌دهد. شبیه‌سازی در سه سرعت ۰، ۱۰ و ۲۰ متر بر ثانیه انجام شده و پاسخ فرکانسی سیستم در حالت $n = 6$ و برای مدل‌های خطی و غیرخطی رسم شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با افزایش سرعت محوری پوسته استوانه‌ای مغروق، دامنه پاسخ فرکانسی کاهش می‌یابد. این امر به این دلیل است که مطابق رابطه (۱)، با افزایش سرعت محوری پوسته، سفتی و میرایی سیستم افزایش می‌یابد.

شکل ۶. مقایسه پاسخ فرکانسی نرمالیزه شده A_{16} برای دو سیستم خطی و غیرخطی با تغییر زاویه موج برخوردی: — پاسخ سیستم خطی، — پاسخ پایدار و ■ پاسخ ناپایدار سیستم غیرخطی تنها با لحاظ مودهای تحریک شده، — پاسخ پایدار و ■ پاسخ ناپایدار سیستم غیرخطی با در نظر گرفتن مودهای همراه: (الف) ۳۵، (ب) ۴۵، (ج) ۵۵ درجه.

نتایج ارائه شده در شکل ۶ نشان می‌دهد که با کاهش زاویه موج برخوردی، تحریک همزمان مودهای تحریک شده و همراه اتفاق می‌افتد. همان‌طور که مقایسه نمودارهای پاسخ فرکانسی ارائه شده در این شکل نشان می‌دهد. افزایش زاویه موج برخوردی به پوسته استوانه‌ای مغروق در عمق سیال، موجب کاهش شدید دامنه ارتعاشات آکوستیکی پوسته می‌گردد. مقایسه نتایج مدل غیرخطی و خطی در این حالت نیز نشان می‌دهد که دامنه بیشینه ارتعاشات پایای سیستم در حالت کاهش فرکانس موج برخوردی در هر دو مدل یکسان می‌باشد.

پوسته در راستای شعاعی مورد استفاده قرار گرفته است که تحت تحریک موج تحت آکوستیکی قرار دارد. برای مدل‌سازی تأثیر متقابل سیال و سازه پوسته، سیال غیرقابل تراکم، غیر لزج و غیر چرخشی در نظر گرفته شده و با استفاده از رابطه برنولی برای سیال غیر پایدار، مقدار فشار وارد بر پوسته محاسبه شده است. معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی پوسته استوانه‌ای با استفاده از روش گالرکین به دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی غیرهمگن غیرخطی تبدیل و با بهره‌گیری از روش مقیاس‌های چندگانه پاسخ فرکانسی سیستم استخراج شده است. مقایسه پاسخ فرکانسی مدل غیرخطی ارائه شده در این مقاله با پاسخ فرکانسی مدل خطی‌سازی شده نشان می‌دهد که برای شدت بالا و زاویه کم صوت برخوردی به پوسته و همچنین، سرعت کم حرکت آن در عمق سیال، خطای مدل خطی در تعیین فرکانس تشدید و دامنه پاسخ پایای پوسته استوانه‌ای زیاد می‌باشد. برخلاف سرعت‌های بالای پوسته استوانه‌ای که در آن فقط مودهای تحریک شده بر پاسخ سیستم تأثیرگذارند، در سرعت‌های پایین آن، هم‌مودهای تحریک شده و هم‌مودهای همراه در پاسخ سیستم ظاهر می‌شوند.

افزایش سفتی و میرایی سیستم موجب کاهش دامنه ارتعاشات ناشی از تحریک صوتی می‌گردد. با کاهش دامنه ارتعاشات، رفتار سیستم به رفتار سیستم خطی نزدیک‌تر می‌شود. در نتیجه با افزایش سرعت محوری استوانه میزان خمیدگی نمودار کاهش یافته و در نتیجه پاسخ فرکانسی حاصل از دو مدل خطی و غیرخطی به هم نزدیک می‌شوند. در سرعت‌های پایین پوسته استوانه‌ای، پاسخ فرکانسی تحت تأثیر تحریک هر دو مود تحریک شده و همراه می‌باشد. این در حالی است که با افزایش سرعت محوری پوسته متحرک در عمق سیال، فقط مودهای تحریک شده بر پاسخ سیستم مؤثر می‌باشند.

۷. نتیجه‌گیری

بررسی ارتعاشات آکوستیکی پوسته‌های استوانه‌ای متحرک در سیال به دلیل کاربرد بسیار آن‌ها در سازه‌های دریایی مورد توجه پژوهشگران می‌باشد. در این مقاله، ارتعاشات آکوستیک یک پوسته استوانه‌ای متحرک در عمق سیال با استفاده از مدل غیرخطی برای ارتعاش پوسته بررسی گردید. به‌همین منظور تئوری غیر خطی پوسته نازک دائل برای مدل‌سازی ارتعاشات

References - منابع

- Tang, D., Yao, X., Jin, Y. and Pang, F., 2016. Acoustic radiation from shear deformable ring-stiffened laminated composite cylindrical shell submerged in flowing fluid. *Appl. Ocean Res*, 61, pp. 65-80. doi.org/10.1016/j.apor.2016.10.006
- Guo, W., Li, T., Zhu, X., Miao, Y. and Zhang, G., 2017. Vibration and acoustic radiation of a finite cylindrical shell submerged at finite depth from the free surface. *J Sound Vib*, 393, pp. 338-352. doi.org/10.1016/j.jsv.2017.01.003
- Wang, X., Chen, D., Xiong, Y., Jiang, Q. and Zuo, Y., 2018. Experiment and modeling of vibro-acoustic response of a stiffened submerged cylindrical shell with force and acoustic excitation. *Results Phys*, 11, pp. 315–324. doi.org/10.1016/j.rinp.2018.09.017
- Jin, G., Mab, X., Wang, W. and Liu, Z., 2018. An energy-based formulation for vibro-acoustic analysis of submerged submarine hull structures. *Ocean Eng*, 164, pp. 402-413. doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.06.057
- Sua, J., Lei, Z., Qu, Y. and Hu, H., 2018. Effects of non-axisymmetric structures on vibro-acoustic signatures of a submerged vessel subject to propeller forces. *Appl. Acoust*, 133, pp. 28-37. doi.org/10.1016/j.apacoust.2017.12.006
- Xie, K., Chen, M., Zhang, L., Li., W. and Dong, W., 2019. A unified semi-analytic method for vibro-acoustic analysis of submerged shells of revolution. *Ocean Eng*, 189, pp. 1-16. doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106345
- Zhao, K., Fan, J., Wang, B. and Tang, W., 2020. Analytical and experimental study of the vibro-acoustic behavior of a semi-submerged finite cylindrical shell. *J Sound Vib*, 482, pp. 1-20. doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115466
- Pan, C., Sun, X. and Zhang, Y., 2020. Vibro-acoustic analysis of submerged ring-stiffened cylindrical shells based on a symplectic wave-based method. *Thin Wall Struct*, 150, pp. 1-15. doi.org/10.1016/j.tws.2020.106698
- Marsick, A., Sharma, GS., Eggler, D., Maxit, L., Meyer, V. and Kessissoglou, N., 2021. On the vibro-acoustic response of a cylindrical shell submerged near a free sea surface. *J Sound Vib*, 511, pp. 1–15. doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116359
- Yang, H. and Seong, W., 2021. Acoustic radiation efficiency of a submerged periodic ring-stiffened cylindrical shell with finite vibration loading. *Appl. Acoust*, 171, pp. 1-8. doi.org/10.1016/j.apacoust.2020.107664
- Zhang, S., Li, T., Zhu, X., Yin, C. and Li, Q., 2022. Far field acoustic radiation and vibration analysis of combined shells submerged at finite depth from free surface. *Ocean Eng*, 252, pp. 1–14. doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111198
- Jia, W., Chen, M., Xie, K. and Dong, W., 2022. Experimental and analytical investigations on vibro-acoustic characteristics of a submerged submarine hull coupled with multiple inner substructures. *Ocean*

- Eng*, 259, pp. 1-20.
doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111960
13. Jia, W., Chen, M., Zhou, Z. and Xie, K., 2022. Effects of non-axisymmetric internal structures on vibro-acoustic characteristics of a submerged cylindrical shell using wavenumber analysis. *Thin Wall Struct*, 171, pp. 883-899. doi.org/10.1016/j.tws.2021.108758
 14. Gao, C., Zhang, H., Li, H., Pang, F. and Wang, H., 2022. Numerical and experimental investigation of vibro-acoustic characteristics of a submerged stiffened cylindrical shell excited by a mechanical force. *Ocean Eng*, 249, pp. 112-128. doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110913
 15. Pan, C. and Zhang, Y., 2022. Coupled vibro-acoustic analysis of submerged double cylindrical shells with stringers, rings, and annular plates in a symplectic duality system. *Thin Wall Struct*, 171, pp. 1-16. doi.org/10.1016/j.tws.2021.108671
 16. Qu, Y., Zhang, W., Peng, Z. and Meng, G., 2019. Nonlinear structural and acoustic responses of three-dimensional elastic cylindrical shells with internal mass-spring systems. *Appl. Acoust*, 149, pp.143-155. doi.org/10.1016/j.apacoust.2019.01.009
 17. Qu, Y., Xie, F. and Meng, G., 2019. Nonlinear dynamic and acoustic analysis of orthogonally stiffened composite laminated cylindrical shells containing piecewise isolators. *J Sound Vib*, 456, pp. 199-220. doi.org/10.1016/j.jsv.2019.05.023
 18. Orafa, A.H., Jalili, M.M. and Fotuhi, A.R., 2021. Nonlinear vibro-acoustic behavior of cylindrical shell under primary resonances. *Int J Non Linear Mech*, 130, pp. 1-21. doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103682
 19. Orafa, A.H., Jalili, M.M. and Fotuhi, A.R., 2023. Nonlinear analysis of sound transmission loss through cylindrical shell considering companion modes. *Int Journal of Vibration and Control*, 130, 1-21. https://doi.org/10.1177/10775463231203442
 20. Zou, M.S., Jiang, L.W. and Tang, H.C., 2022. Computational method of underwater acoustic radiation from a spherical shell coupled with nonlinear systems. *J Sound Vib*, 533, pp. 1-21. doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117020
 21. Amabili, M., Pellicano, F. and Paidoussis, M.P., 1998. Nonlinear vibrations of simply supported, circular cylindrical shells, coupled to quiescent fluid. *J Sound Vib*, 12, pp. 883-918. doi.org/10.1006/jfls.1998.0173
 22. Dowell, E.H. and Ventres, C.S., 1968. Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell. *International Journal of Solids and Structures*, 4, pp. 975-991. doi.org/10.1016/0020-7683(68)90017-6
 23. Daneshjou, K., Talebitooti, R. and Tarkashvand, A., 2016. Analysis of sound transmission loss through thick-walled cylindrical shell using three-dimensional elasticity theory. *Int J Mech Sci*, 106, pp. 286-296. doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.12.019
 24. White, F. M., 2011. Fluid Mechanics, 7th Edn., McGraw- Hill, New York, USA.
 25. Linge, S. and Langtangen, H.P., 2010. Programming for Computations – MATLAB/Octave, 1st Edn., Springer, Heidelberg, Germany.
 26. Talebitooti, R., Gohari, H.D. and Zarastvand, M.R., 2017. Multi objective optimization of sound transmission across laminated composite cylindrical shell lined with porous core investigating non-dominated sorting genetic algorithm. *Aerosp. Sci. Technol*, 69, pp. 269-280. doi.org/10.1016/j.ast.2017.06.008
 27. Karagiozis, K.N., Amabili, M., Paidoussis, M.P. and Misra A.K., 2005. Nonlinear vibrations of fluid-filled clamped circular cylindrical shells. *Journal of Fluids and Structures*, 21, pp. 579-595. doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.07.020
 28. Oliazadeh, P., Farshidianfar, A. and Crocker, M.J., 2019. Study of sound transmission through single-and double-walled plates with absorbing material: Experimental and analytical investigation. *Applied Acoustics*, 145, pp. 7-24. doi.org/10.1016/j.apacoust.2018.09.014