



Research Note

An Analytical Model for Determining the Effective Thermal Conductivity Coefficient in a Honeycomb Network with Heat Dissipation from the Central Cylindrical Axis

Maryam Karimi*

Faculty of Photonic and Quantum Technology Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOL.

* corresponding author: (mykarimi@aeoi.org.ir)

Article Info

Article history:

Received: 16 October 2024

Revised: 23 February 2025

Accepted: 4 March 2025

Keywords:

Thermal conductivity coefficient,
honeycomb structure,
theoretical model,
thermal resistance.

Abstract

This paper presents an analytical model based on the thermal resistance network method to determine the effective thermal conductivity of a porous cylindrical lattice with a honeycomb structure, where heat flows radially outward from the central axis. The model offers a simple, software-independent solution for thermal analysis in applications like heat exchangers and photonic crystal fibers. The methodology involves a three-stage calculation: determining the thermal resistance of the unit cells (accounting for two types: with and without a fluid-filled hole), calculating the effective conductivity for each concentric layer by considering parallel resistances, and finally summing the series resistances of all layers to find the overall effective thermal conductivity. Applied to common materials like copper, aluminum, and stainless steel with water as the filler fluid, the model reveals that the unit cell's orientation to the heat flux has a negligible impact. Furthermore, the overall effective thermal conductivity stabilizes significantly with more than five layers, providing a key design insight for optimizing thermal performance and material usage.

Introduction

Porous media, characterized by interconnected pores, are crucial in industries ranging from aerospace to chemical processing due to their high surface area and excellent thermal-mechanical properties [1]. The honeycomb structure, inspired by nature, is particularly valued for its optimal strength-to-weight ratio and stability [2]. Accurately predicting the effective thermal conductivity of such composites is essential for designing efficient thermal systems like heat exchangers.

While analytical models exist for flat panel honeycomb structures [13, 14], models for cylindrical configurations with radial heat flow are less developed. Existing approaches, such as the one for a triangular lattice in [21], often assume one-dimensional heat transfer in Cartesian coordinates, which can introduce significant errors, especially when the base material has high thermal conductivity. This research addresses this gap by developing a comprehensive analytical model for a

cylindrical honeycomb network using the thermal resistance network method. The model improves upon [21] by properly accounting for radial heat flow in cylindrical coordinates and the unique cell composition of the honeycomb lattice, which features a mix of solid and fluid-filled unit cells.

The primary objectives are to establish a theoretical model for this specific geometry, calculate the effective thermal conductivity hierarchically (from unit cell to overall structure), and analyze the influence of key parameters like geometry and material properties. The model simplifies the problem by focusing solely on conductive heat transfer, a valid assumption for many solid-state and optical applications.

Methodology

The core of this research is the thermal resistance network method, applied in a three-step hierarchical process within a cylindrical coordinate system.

To Cite this article:

Karimi, M. 2025. An analytical model for determining the effective thermal conductivity coefficient in a honeycomb network with heat dissipation from the central cylindrical axis, Sharif Mechanical Engineering Journal, 41(1), 111-123. <https://doi.org/10.24200/ij40.2025.65427.1721>

First, the thermal resistance of the unit cells is determined. The honeycomb structure contains two-unit cell types: one with a hole (filled with a fluid like water) and one without (comprising only the base material), as shown in **Fig. 1a**. The complex "with-hole" cell is subdivided into five thermal resistances (**Fig. 1b**), and its equivalent circuit is analyzed (**Fig. 1c**). Its effective conductivity ($k_{\text{eff-cell}}$) is calculated using derived analytical formulas (Eq. 2-4) for specific orientations (angles of 0° , 15° , and 30° relative to the heat flux). A second-order polynomial then interpolates values for any angle. A critical finding is that this orientation has a minimal effect on $k_{\text{eff-layer}}$.

Second, the effective thermal conductivity for each concentric layer ($k_{\text{eff-layer}}$) is calculated. In this step, the unit cells within a single layer are treated as a parallel thermal resistance network. The composition of these layers varies periodically; for instance, the first layer contains only "with-hole" cells (**Fig. 2b**), while the second layer has a mix of "with-hole" and solid "without-hole" cells (**Fig. 3**), leading to different conductive properties per layer.

Finally, the overall effective thermal conductivity (k_{Total}) is determined. The layers are arranged in series along the radial direction of heat flow (**Fig. 2a**). The total thermal resistance is the sum of the individual layer resistances. Using the cylindrical shell resistance analogy [22, 23], k_{Total} for an n -layer structure is calculated. This approach corrects the error of previous Cartesian-based models by properly modeling the radial heat dissipation from the central axis, leading to more accurate results for cylindrical systems like heat exchangers and fibers.

Results and Discussion

The model was applied to a structure with up to seven layers, using copper, aluminum, and stainless steel as base materials and water as the filler fluid (**Table 1**).

At the unit cell level, the results showed that the thermal conductivity is highly sensitive to the filling factor (d/D , the ratio of tube diameter to inter-tube distance). A larger d/D (larger tubes) decreases conductivity as more volume is occupied by the lower-conductivity fluid. This relationship is detailed in **Fig. 6** for different materials. The cell's orientation to the heat flux was confirmed to have a negligible impact, as visually confirmed by the flat curves in **Fig. 5**.

At the layer level, the first layer exhibited the lowest thermal conductivity because it contained the highest volume of fluid. The second layer, with its specific geometry incorporating many solid cells, consistently showed the highest conductivity, as plotted in **Fig. 7** and **Fig. 8**.

For the overall structure, the effective thermal conductivity (k_{Total}) increases with the number of layers but exhibits diminishing returns. Crucially, for more than five layers, the change in k_{Total} becomes insignificant, converging to a constant value (**Fig. 9**, **Fig. 10**). Furthermore, for a fixed geometry, k_{Total} decreases as the filling factor increases, as the influence of the filler fluid becomes more dominant.

Conclusion

This study successfully developed an accurate analytical model for predicting the effective thermal conductivity of a cylindrical honeycomb structure. The model demonstrates that unit cell orientation is insignificant and that the thermal performance asymptotes with over five layers, a vital finding for optimizing design and cost. The hierarchical methodology effectively captures the complex geometry, providing a practical tool for engineers. While the model assumes pure conduction, its results offer critical insights for designing efficient thermal management systems, such as compact heat exchangers and photonic crystal fibers. Future work could enhance the model by incorporating convective heat transfer for applications involving fluid flow.

Funding: This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions: All authors contributed to the reported work for conceptualization, methodology, validation, writing-review and editing, and supervision.



مدل تحلیلی برای تعیین ضریب هدایت گرمایی مؤثر در شبکه‌ی لانه‌زنبور با انتشار گرما از مرکز محور استوانه‌ای

مریم کریمی*

پژوهشکده‌ی فوتونیک و فن‌آوری‌های کوانتومی، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران.

*نویسنده مسئول (mykarimi@aeoi.org.ir)

چکیده

در نوشتار حاضر، با استفاده از مدل شبکه‌های مقاومت حرارتی، یک رابطه‌ی تحلیلی برای تعیین ضریب هدایت گرمایی مؤثر در استوانه‌ی متخلخل با ساختار لانه‌زنبوری ارائه شده است. هدایت گرما در ساختار مذکور از محور مرکزی استوانه به سمت بیرون صورت می‌گیرد. با استفاده از مدل جدید پیشنهادی، بدون نیاز به نرم‌افزارهای تخصصی، می‌توان ضریب انتقال حرارتی در کل ساختار لانه‌زنبوری را در حجم داده‌ها تعیین کرد. برای این منظور، مدل جدید در مبدل گرمایی فرضی با مواد رایج استفاده شده در مبدل‌ها، مانند: مس، آلومینیوم، و فولاد ضدزنگ اعمال شد. برای محاسبه‌ی ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار، محاسبه‌ها در سه مرحله انجام شده‌اند: در گام اول، مقاومت گرمایی سلول‌های واحد تعیین شده است. برخلاف شبکه‌ی مثلثی، شبکه‌ی لانه‌زنبوری دو نوع سلول واحد دارد. با در نظر گرفتن شبکه‌ی مقاومت موازی سلول‌های واحد، می‌توان ضریب هدایت گرمایی در هر لایه را تعیین کرد. در مرحله‌ی نهایی، با جمع مقاومت گرمایی لایه‌ها، که به صورت سری در جهت شار گرمایی قرار گرفته‌اند، مقاومت گرمایی و در نهایت ضریب هدایت گرمایی مؤثر شبکه‌ی لانه‌زنبوری به دست آمده است.

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۲۵

تاریخ اصلاحیه: ۱۴۰۳/۱۲/۰۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۱۴

واژگان کلیدی:

ضریب هدایت گرمایی،

ساختار لانه‌زنبوری،

مدل تئوری،

مقاومت گرمایی.

۱. مقدمه

محیط‌های متخلخل به عنوان موادی با منافذ متعدد و اندازه‌های مختلف تعریف می‌شوند؛ که به دلیل ویژگی‌های جذاب خود، مانند سطح ویژه‌ی بالا، در زمینه‌های مختلفی مانند: کارخانه‌های شیمیایی، معماری، کشاورزی، محیط زیست، مراقبت‌های پزشکی، زیست‌شناسی، و غیره استفاده می‌شوند. این محیط‌ها در خنک کردن دستگاه‌های الکترونیکی، خنک‌کننده‌ی غوطه‌وری دو فاز و محفظه‌های بخار استفاده می‌شوند.^[۱] ساختارهای متخلخل، با ایده‌های الهام گرفته از طبیعت برای طراحی سیستم‌ها و مواد با کارایی بالا ارائه شده‌اند و طیف وسیعی از مقیاس‌ها، از سانتی‌متر تا نانو را پوشش می‌دهند.

ساختار لانه‌زنبوری از سلول‌های شش‌ضلعی منظم و دولایه با توزیع یکنواخت تشکیل شده است. هیلز^[۲] (۲۰۰۱) ثابت کرد که کندوی عسل ساخته شده توسط زنبورها، بیشینه‌ی فضای سلولی با استفاده از کمینه‌ی مقدار موم زنبور عسل را دارد، که نشان می‌دهد ساختار شش‌ضلعی، پایدارترین نوع شبکه در طبیعت است.^[۲] به همین دلیل، ساختار لانه‌زنبوری در مقیاس میکرو و نانو در طبیعت

به وفور دیده می‌شود. مثلاً، در بافت زنده، تجمع‌های سلولی و مولکولی مشاهده شده است.^[۳] از دهه‌ی ۸۰ میلادی، سازه‌های الهام گرفته از کندوهای عسل، کاربردهای گسترده‌ای در صنایع مختلف، شامل: معماری، حمل و نقل، مهندسی مکانیک با ساختارهای مقاوم در برابر خمش پیدا کرده‌اند.

همچنین در مهندسی شیمی نانو ساختارها و زیست-پزشکی، مانند آرایه‌های نانولوله در آلومینیوم آنودایز شده^[۲]، از ساختارهای لانه‌زنبوری استفاده می‌شود.^[۵] علاوه بر این، در صنایع هوافضا، سازه‌هایی که نیازمند مقومت مکانیکی و حرارتی بال هستند، از ساختار لانه‌زنبوری استفاده می‌کنند.^[۶] سایر کاربردها، شامل: آرایه‌های ریزمتخلخل در فیلم‌های نازک پلیمری، کربن فعال لانه‌زنبوری،^[۷] سازه‌های فلزی و سرامیکی،^[۸] و فیبرهای بلور فوتونی با ساختار لانه‌زنبوری،^[۹] هستند. چالش اساسی در حوزه‌ی اخیر، درک خواص منحصربه‌فرد سازه‌های لانه‌زنبوری است، که به هندسه‌ی ساختاری، مقیاس، و مواد استفاده شده در آن‌ها بستگی دارد.^[۱۰] ساختارهای لانه‌زنبوری از لحاظ مکانیکی نیز سازه‌های بسیار مستحکمی هستند. لذا، علی‌رغم وزن کم سازه‌ی لانه‌زنبوری، آن‌ها بدنه‌ی هواپیما و پهپادها را استحکام می‌بخشند.^[۱۱] سازه‌های لانه‌زنبوری به عنوان

² Anodized Alumina

¹ Hales

استناد به این مقاله:

کریمی، مریم، ۱۴۰۴. مدل تحلیلی برای تعیین ضریب هدایت گرمایی مؤثر در شبکه‌ی لانه‌زنبور با انتشار گرما از مرکز محور استوانه‌ای. مهندسی مکانیک شریف، ۴۱، (۱)، صص. ۱۱۱-۱۲۳.

<https://doi.org/10.24200/j40.2025.65427.1721>



خاص انسیس و آباکوس، می‌توان ضریب انتقال حرارت را در ساختارهای مذکور تعیین کرد.

۲. مدل تحلیلی برای تعیین ضریب هدایت گرمایی مؤثر در شبکه‌ی لانه‌زنبوری

سازه‌های با ساختار شبکه‌ی لانه‌زنبوری می‌توانند به‌عنوان یک مبدل گرمایی با ابعادی در حد متر و یا ادوات و افزاره‌هایی، که گرما در مرکز محور استوانه تولید می‌شود، به‌کار گرفته شوند. در این موارد، پوشش ساختار اطراف محور تولیدکننده‌ی گرما، ساختار شبکه‌ای لانه‌زنبوری دارد. لیزرها و تقویت‌کننده‌های فیبر نوری بلور فوتونی با ابعادی در حد میکرومتر، نمونه‌ای از موارد ذکرشده هستند. هر چند بیشتر مبدل‌های انتقال گرمایی بزرگ تجاری از ساختار مثلی بهره می‌برند، اما از آنجا که شبکه‌ی لانه‌زنبوری بنا بر مقاومت مکانیکی بیشتر می‌تواند در طراحی‌های خاص مبدل‌ها گرمایی استفاده شود؛ لذا، دو فرض اصلی در محاسبات مدل پیشنهادی، که حذف انتقال حرارت همرفت و تابشی است، صرف‌نظر شده‌اند. در مواردی که در مبدل‌های گرمایی برای خنک‌سازی از جریان رونده‌ی آب استفاده می‌شود، فرض اخیر می‌تواند تفاوت‌های قابل‌توجهی بین نتایج محاسباتی و آزمایشگاهی ایجاد کند. در این شرایط لازم است انتقال حرارت همرفت در مبدل‌های گرمایی به محاسبات اضافه شود. در مقابل، نبود انتقال حرارت تابشی برای مبدل‌های گرمایی و ادوات نوری، فرض درست محسوب می‌شود. برای محاسبه‌ی هدایت گرمایی مؤثر، مشابه آنچه کریمی (۲۰۲۰)^[۲۱] ارائه داده است، از سلول واحد شش‌گوش استفاده شده است. برای سلول‌هایی که حفره دارند، مطابق آنچه در نوشتار اخیر اشاره شده است، یک سلول واحد شش‌گوش با یک حفره در میان آن در نظر گرفته شده است. در ساختار لانه‌زنبوری، سلول‌های واحد به‌صورت دو نوع با حفره و بدون حفره هستند. سلول‌های بدون حفره، ساده و فقط یک مقاومت گرمایی، مقدار مقاومت گرمایی سازه‌ی اصلی است و مساحت کل سلول واحد $D^+ = \frac{\sqrt{3}}{2} S_r$ است، که فقط به فاصله‌ی بین حفره‌ها وابسته است. در شکل ۱-الف، سلول واحد حفره‌دار و بدون حفره مشاهده می‌شود.

سلول واحد حفره‌دار، دو نوع ماده شامل سازه‌ی اصلی و ماده‌ی پُرکننده‌ی حفره دارد؛ بنابراین، مقاومت گرمایی معادل آن باید تعیین شود. برای محاسبه‌ی ضریب هدایت گرمایی مؤثر سلول واحد حفره‌دار، که در شکل ۱-ب مشاهده می‌شود، سلول واحد به ۵ مقاومت گرمایی تقسیم می‌شود و مدار معادل آن مطابق شکل ۱-ج ترسیم می‌شود.

ضریب انتقال حرارتی در یک سلول مطابق رابطه‌ی ۱ تعیین می‌شود:^[۲۱]

$$\frac{L_{\text{eff-cell}}}{k_{\text{eff-cell}} S_{\text{cell}}} = \frac{2L_{m12}}{k_{m1} S_{m12}} + \frac{L_{m1m2}}{k_{m1m2} S_{m1m2}}, \quad (1)$$

که در آن، S_{m12} ، مساحت ناحیه‌ی مثلی‌شکل در قسمت بالا و پایین سلول واحد حفره‌دار است، که در شکل ۱-ب مشاهده می‌شود. S_{m12} و S_{cell} به ترتیب مساحت‌های ناحیه‌ی میانی (شکل ۱-ب) و مساحت کل سلول واحد حفره‌دار هستند. مساحت سلول S_{cell} واحد برابر $\sqrt{3} \Lambda^2 / 2$ و

پراکنده‌کننده‌ی حرارت در مبدل‌های حرارتی هسته‌ای به‌کار می‌روند و با چگالی سطح بالا، انتقال حرارت مؤثر را تسهیل می‌کنند.^[۱۲]

در ساختارهای پنلی، مدل‌های مختلفی برای تعیین ضریب انتقال حرارت، با درنظرگرفتن کسر حجمی و هدایت حرارتی مواد ارائه شده است.^[۱۳] در مراجع مختلف، ضریب رسانایی گرمایی مؤثر در سازه‌های پنلی مسطح فلزی با ساختار لانه‌زنبوری به‌صورت تحلیلی بررسی شده است؛^[۱۴ و ۱۵] که در بیشتر آن‌ها، آثار انتقال حرارت تابشی به دلیل کم‌اهمیت‌بودن، ناچیز فرض شده است.^[۱۵] با صرف‌نظر از انتقال حرارت همرفت و تابشی، فقط انتقال حرارت رسانشی محیط متخلخل مدنظر قرار می‌گیرد. یوان و لو^۱ (۲۰۲۰)^[۱۶]، خواص حرارتی سازه‌های ساندویچی لانه‌زنبوری فلزی را به‌صورت تجربی برای دمای متوسط و بالا اندازه‌گیری کرده و نشان داده‌اند که نتایج با معادله‌ی تجربی سوان پیتمن هم‌خوانی خوبی دارد.

شبکه‌های شش‌گوش^۲ در ساختارهای استوانه‌ای به سه دسته، شامل: شبکه‌ی سه‌ضلعی (مثلی^۳)، شبکه‌ی لانه‌زنبوری (شانه‌عسل^۴)، و کاگومی^۴ طبقه‌بندی می‌شوند.^[۱۷] ساختار کاگومی در فیزیک حالت‌جامد برای مواد مغناطیسی استفاده می‌شوند؛ که گاف نواری کوچکی نسبت به شبکه‌ی سه‌ضلعی دارند. ساختار لانه‌زنبوری با حذف یکی از لوله‌ها (حفره‌ها) در ساختار مثلی ایجاد می‌شود.^[۱۸] در بررسی گاف نواری در فیبرهای بلور فوتونی مغزی تهی با دو ساختار مثلی و لانه‌زنبوری مشاهده می‌شود که ساختار لانه‌زنبوری، شکاف باند انرژی بیشتری نسبت به ساختار مثلی دارد.^[۱۹ و ۲۰] با صرف‌نظر از انتقال حرارت تابشی و همرفت، پیش‌بینی رسانایی گرمایی مؤثر در ساختار لانه‌زنبوری با دو فاز ماده ساده است.

کریمی (۲۰۲۰)^[۲۱] برای اولین بار یک مدل تحلیلی برای تعیین ضریب انتقال حرارت در یک ساختار مثلی (زیرمجموعه‌ی ساختار شش‌گوش) با انتشار گرما از مرکز محور استوانه‌ای ارائه کرده است، که برای یک فیبر بلور فوتونی با غلاف اول دارای ساختار مثلی اعمال شده است. تغییرات ضریب هدایت گرمایی در فیبر بلور فوتونی برای بازه‌ی وسیعی از مقادیر اندازه‌ی حفره و فاصله‌ی بین آن‌ها محاسبه شده است.

در نوشتار حاضر، برای اولین بار یک مدل تحلیلی برای ساختار دیگری از مجموعه‌ی شش‌ضلعی، یعنی ساختار لانه‌زنبوری، در انتشار گرما از محور مرکزی استوانه ارائه شده است. مدل تحلیلی ذکرشده در یک مبدل گرمایی با ساختار مفروض لانه‌زنبوری اعمال و نتایج برای بازه‌ی وسیعی از ابعاد ساختار تعیین شده است.

در نوشتار پیشین، برای محاسبه‌ی مقاومت کل مؤثر ساختار حاصل از لایه‌های مختلف، یک مدل انتشار در صفحه‌ی قطبی ارائه شده بود، که در مبدل‌های گرمایی با مقاومت گرمایی کم، سبب خطای محاسباتی شده است. در نوشتار حاضر، در محاسبه‌ی ضریب هدایت گرمایی کل ساختار از مقاومت مؤثر لایه‌های استوانه‌ای و انتشار گرما در دو بُعد استفاده شده است. مدل قبلی به‌صورت قابل‌توجهی اصلاح و لذا نتایج دقیقی ارائه شده است. با استفاده از مدل ساده‌ی مذکور بدون نیاز به هیچ‌گونه نرم‌افزار تجاری، مانند نرم‌افزارهای

³ Triangular

⁴ Kagome

¹ Yuan & Lu

² Hexagonal

$$\frac{1}{k_{eff-cell-1}} = \quad (2)$$

$$\left(1 - \frac{d}{D}\right) \left(\frac{1}{1-f_i}\right) \frac{1}{k_{m1}} + \left(\frac{d}{D}\right) \left(\frac{1}{f_i}\right) \frac{1}{k_{m1m2,1}}, \left\{ \begin{array}{l} f_i = \frac{S_{m1m2,1}}{S_{cell}} = \frac{1}{3} \left(\frac{d}{D}\right) \left(4 - \frac{d}{D}\right), \\ S_{m1m2,1} = \frac{\sqrt{3}d(4D-d)}{6}, \end{array} \right.$$

مقاومت گرمایی مؤثر سلول واحد حفره‌دار در زاویه‌ی $\theta = \pi/6$ نسبت به شار گرمایی وابسته به اندازه‌ی حفره است و دو حالت آن مطابق رابطه‌ی ۳ تعیین می‌شود:

$$\frac{1}{k_{eff-eff2-i}} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}d}{2D}\right) \left(\frac{1}{1-f_{2-i}}\right) \frac{1}{k_{m1}} + \left(\frac{\sqrt{3}d}{2D}\right) \left(\frac{1}{f_{2-i}}\right) \frac{1}{k_{m1m2,2-i}}, \quad i=1 \text{ or } 2$$

$$d < \frac{\sqrt{3}}{3}D, \left\{ \begin{array}{l} f_{2-1} = \frac{S_{m1m2,2-1}}{S_{cell}} = \frac{2\sqrt{3}d}{2D}, \\ S_{m1m2,2-1} = dD, \end{array} \right.$$

$$d > \frac{\sqrt{3}}{3}D, \left\{ \begin{array}{l} f_{2-2} = \frac{S_{m1m2,2-2}}{S_{cell}} = 1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{d}{D}\right)^2, \\ S_{m1m2,2-2} = \frac{\sqrt{3}}{2}D^2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}D - \frac{d}{2}\right)^2, \end{array} \right. \quad (3)$$

در ردیف دوم ساختار شبکه، سلول‌های واحدی که وسط ردیف دوم قرار گرفته‌اند (مشابه شکل ۱)، در برابر شار گرمایی قرار دارند. در شکل ۲ و ردیف دوم سلول‌های واحد بدون حفره‌ی مذکور، مقاومت گرمایی آخرین وضعیت قرارگیری سلول واحد نسبت به شار گرمایی در زاویه‌ی $\theta = \pi/12$ در نظر گرفته شده است؛ که دلیل انتخاب آن، سادگی تعیین نسبی پارامترهای سلول واحد نسبت به زوایای دیگر است و سایر پژوهشگران در صورت یافتن زاویه‌ی محاسباتی با عملیات ریاضی ساده‌تر می‌توانند آن را جایگزین زاویه‌ی $\theta = \pi/12$ کنند.

مقاومت گرمایی مؤثر سلول واحد حفره‌دار در زاویه‌ی $\theta = \pi/12$ نسبت به شار گرمایی نیز وابسته به اندازه‌ی حفره است و سه حالت محاسباتی بسته به اندازه‌ی حفره‌ی سلول واحد متغیر است، که مطابق رابطه‌ی ۴ تعیین می‌شود:

$$\frac{1}{k_{eff-cell3-i}} = \quad i=1, 2 \text{ or } 3$$

$$\left(1 - \frac{(\sqrt{3}+1)d}{2\sqrt{2}D}\right) \left(\frac{1}{1-f_{3-i}}\right) \frac{1}{k_{m1}} + \frac{(\sqrt{3}+1)d}{2\sqrt{2}D} \left(\frac{1}{f_{3-i}}\right) \frac{1}{k_{m1m2,3-i}}, \quad (4)$$

$$i=1, d < \frac{3-\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}, \left\{ \begin{array}{l} f_{3-1} = \frac{S_{m1m2,3-1}}{S_{cell}} = \frac{4\sqrt{2}d}{3+\sqrt{3}D} \\ S_{m1m2,3-1} = \frac{2\sqrt{2}dD}{\sqrt{3}+1}, \end{array} \right.$$

$$i=2, \frac{3-\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}D < d < \frac{\sqrt{6}}{3}D,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{3-2} = \frac{S_{m1m2,3-2}}{S_{cell}} = \frac{4\sqrt{2}d}{3+\sqrt{3}D} - 2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{D} - \frac{3-\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}\right)^2 \\ S_{m1m2,3-2} = \frac{2\sqrt{2}dD}{\sqrt{3}+1} - \left(\frac{d}{2} - \frac{3-\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}D\right)^2 (3-\sqrt{3}), \end{array} \right.$$

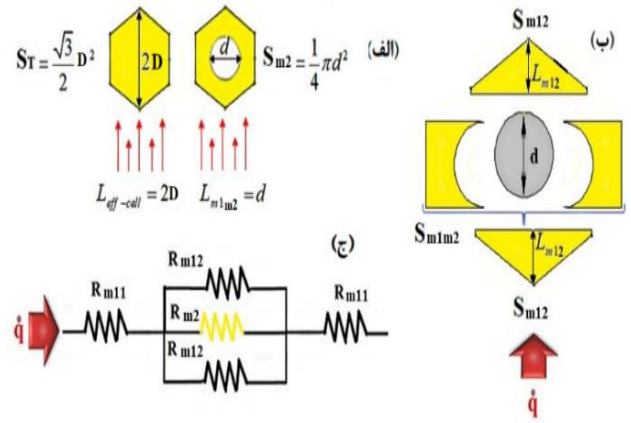


Figure 1. (a) Two types of unit cells, with and without holes, in the honeycomb structure; (b) Division of the holed unit cell into smaller sections; (c) Equivalent circuit of the holed unit cell.

شکل ۱. (الف) دو نوع سلول واحد حفره‌دار و بدون حفره برای ساختار لانه‌زنبوری؛ (ب) تقسیم اجرای سلول واحد حفره‌دار به بخش‌های کوچک؛ (ج) مدار معادل سلول واحد حفره‌دار.

مساحت ناحیه‌ی حفره‌دار S_{m1m2} برابر با $\frac{\sqrt{3}d(\pi D - d)}{6}$ برای حالتی است که شار گرمایی به صورت عمود به سلول وارد می‌شود. L_{m1m2} و $L_{eff-cell}$ به ترتیب طول ناحیه‌های S_{m1m2} ، ناحیه‌ی میانی برابر قطر حفره (d)، و طول مؤثر سلول واحد و وابسته به نحوه‌ی قرارگیری سلول واحد در مقابل شار گرمایی از مقدار D در زاویه‌ی صفر $\theta = 0$ و قرارگیری سلول واحد در مقابل شار گرمایی تا مقدار $\frac{2D}{\sqrt{3}}$ برای هنگامی که سلول واحد در زاویه‌ی $\theta = \pi/6$ نسبت به سلول واحد متغیر باشد. [۲۱] در شکل ۱، نحوه‌ی قرارگیری زاویه‌ی $\theta = \pi/6$ سلول واحد نسبت به شار گرمایی مشاهده می‌شود؛ که در آن، مقادیر L_{m1m2} ، L_{m1m2} و $L_{eff-cell}$ و همچنین جهت شار گرمایی وارد بر سلول واحد برای درک بیشتر نشان داده شده است. همچنین، k_{m1m2} ، k_{m1} و $k_{eff-cell}$ به ترتیب ضریب هدایت گرمایی: ماده‌ی اصلی، ناحیه‌ی حفره‌دار، و سلول واحد حفره‌دار هستند.

شار گرمایی در این ساختار استوانه‌ای، به صورت شعاعی متقارن خارج می‌شود. جهت تابش پرتو به جسم در شار خروجی گرما از آن جسم مؤثر است. راستای قرارگیری سلول‌های واحد در ردیف‌های مختلف متفاوت است. راستای جریان گرمایی به سلول واحد شش‌گوش به محل قرارگیری سلول مذکور در هر ردیف از شبکه وابسته است. در نوشتار کریمی (۲۰۲۰)، [۲۱] نشان داده شده است که با محاسبه‌ی مقاومت گرمایی در سه حالت یا سه زاویه نسبت به شار گرمایی و با استفاده از یک معادله‌ی درجه دوم می‌توان مقاومت گرمایی یک سلول را در هر زاویه‌ای تعیین کرد.

اگر سلول واحد نشان داده‌شده در شکل ۱، به اندازه‌ی $\pi/6$ چرخانده شود، حالت قرارگیری کلیه‌ی سلول‌های واحد ردیف اول ساختار نشان داده‌شده در شکل ۲ ایجاد می‌شود. در پژوهش حاضر، این حالت قرارگیری به‌طور قراردادی و دلخواه زاویه‌ی صفر درجه‌ی سلول واحد نسبت به شار گرمایی در نظر گرفته شده است. مقاومت گرمایی مؤثر سلول واحد حفره‌دار در زاویه‌ی $\theta = 0$ نسبت به شار گرمایی مطابق رابطه‌ی ۲ محاسبه می‌شود:

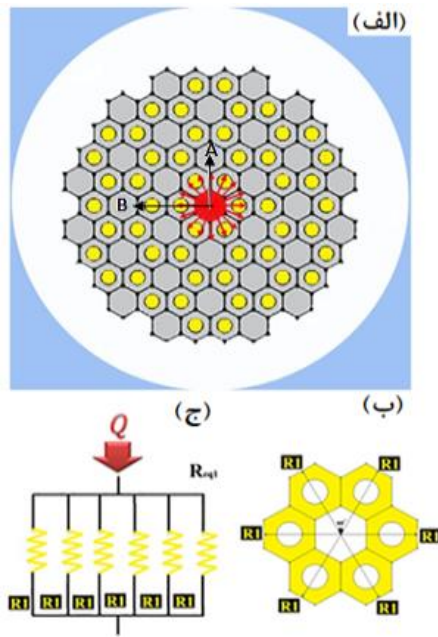


Figure 2. (a) Cross-section of the honeycomb network with five layers; (b) first row with six-unit cells containing holes; (c) Equivalent circuit of the first layer with six identical resistors.

شکل ۲. (الف) سطح مقطع شبکه‌ی لانه‌زنبوری با پنج لایه از ساختار شبکه؛ (ب) ردیف اول با شش سلول واحد حفره‌دار؛ (ج) مدار معادل لایه‌ی اول با شش مقاومت یکسان.

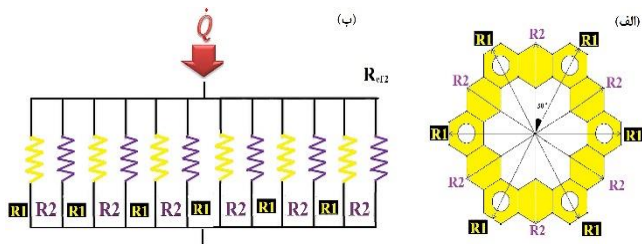


Figure 3. (a) Second layer of the honeycomb network, consisting of six-unit cells with holes and six-unit cells without holes; (b) Equivalent circuit of the second layer with 12 thermal resistors.

شکل ۳. (الف) لایه‌ی دوم شبکه‌ی لانه‌زنبوری با شش سلول واحد حفره‌دار و شش سلول واحد بدون حفره؛ (ب) مدار معادل لایه‌ی دوم با ۱۲ مقاومت گرمایی.

اخیر در یک مقدار مشخص اندازه‌ی حفره و فاصله‌ی بین حفره‌ها ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است. آنچه بیشتر در مقدار ضریب مقاومت گرمایی مؤثر است، اندازه‌ی شعاع حفره است و با بزرگ شدن آن، مقدار ضریب مقاومت گرمایی مؤثر به عدد مقاومت گرمایی ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی حفره نزدیک‌تر می‌شود؛ بنابراین، از آنجا که سلول واحد بدون حفره فقط از یک ماده‌ی به‌خصوص تشکیل شده است، می‌توان از تغییر ضریب هدایت گرمایی سلول واحد بدون حفره با تغییر راستای شار انتشار گرمایی نسبت به آن صرف‌نظر کرد و آن را ثابت و برابر ضریب هدایت گرمایی ماده‌ی اصلی ساختار در نظر گرفت.

هر ردیف شامل $6n$ سلول واحد است. در شبکه‌ی مثلثی، همه‌ی سلول‌ها حفره‌دار هستند؛ ولی در شبکه‌ی لانه‌زنبوری، ترکیبی از سلول واحد حفره‌دار

$$i = 3, d > \frac{\sqrt{6}}{3}D,$$

$$\begin{cases} f_{3-3} = \frac{S_{m1m2,3-3}}{S_{cell}} = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}+1}{(3-\sqrt{3})\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} \frac{d}{D} \right) \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} - \frac{d}{D} \right) \\ S_{m1m2,3-3} = \frac{\sqrt{3}}{2}D^2 - \left(\frac{(\sqrt{3}+1)D}{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}} - \frac{3d}{3-\sqrt{3}} \right) \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}D - \frac{d}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}D \right), \end{cases}$$

مقاومت گرمایی مؤثر سلول واحد حفره‌دار در هر زاویه‌ی دلخواه را می‌توان از رابطه‌ی $K_{cell}(\theta) = a\theta^2 + b\theta + c$ در عبارت اخیر به‌دست آورد؛ که در آن، $K_{cell}(\theta)$ مقاومت گرمایی مؤثر سلول در زاویه‌ی مدنظر و θ مقدار زاویه است، برای تعیین مقادیر ثابت (a, b, c) کافی است که مقاومت گرمایی مؤثر سلول واحد در سه نقطه یا سه زاویه معلوم باشد، آنگاه می‌توان به ضرایب مقادیر ثابت دست یافت.

در تعیین ضریب هدایت گرمایی سایر لایه‌ها در یک شبکه با ۶ لایه‌ی حفره‌ی هوا، زوایایی که در محاسبات وارد می‌شوند، شامل زوایای $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{15}$ هستند؛ که با استفاده از معادله‌ی درجه‌ی دوم به‌سادگی $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{15} \right)$ تعیین می‌شوند.

در شکل ۲-الف، سطح مقطع ساختار لانه‌زنبوری و راستای انتشار گرما از مرکز ساختار مشاهده می‌شود. همچنین، در شکل ۲، محل قرارگرفتن سلول واحد با زاویه‌ی صفر درجه با نماد B و سلول واحد با زاویه‌ی ۹۰ درجه با نماد A مشخص شده است.

مطابق شکل ۲ مشاهده می‌شود که مجموعه‌ی سلول‌های واحد در ردیف اول مشابه ساختار مثلثی است؛ ولی در ردیف دوم ساختار مذکور، به‌صورت یکی در میان، سلول واحد بدون حفره‌ی میانی جایگزین سلول واحد حفره‌دار شده است. در شکل ۲-ب، ردیف اول سلول‌های واحد و در شکل ۲-ج، مدار معادل مقاومت گرمایی ردیف اول مشاهده می‌شود. مقاومت گرمایی ردیف اول، شامل شش مقاومت گرمایی یکسان سلول واحد حفره‌دار است، که در زاویه‌ی صفر درجه نسبت به شار گرمایی قرار گرفته است. یک مدار، معادل شش مقاومت گرمایی یکسان است، که به‌صورت موازی با هم قرار گرفته‌اند.

در شکل ۳-الف، دومین ردیف و در شکل ۳-ب، مدار معادل ساختار لانه‌زنبوری در ردیف دوم مشاهده می‌شود. در ردیف دوم، شش سلول واحد حفره‌دار با زاویه‌ی صفر درجه نسبت به شار گرمایی به همراه شش سلول واحد بدون حفره با زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به شار گرمایی تشکیل شده است. مدار معادل، شامل دو نوع مقاومت گرمایی است، که به‌صورت موازی نسبت به هم قرار گرفته‌اند.

مقاومت گرمایی در عناصر موازی با هم مطابق رابطه‌ی ۵ تعیین می‌شود:

$$\frac{1}{R_{eff-layer(n)}} = \sum_{i=1}^{6n} \frac{1}{R_{eff-cell(i)}}, \quad (5)$$

که در آن، $R_{eff-cell-i}$ مقاومت گرمایی i آمین سلول واحد حفره‌دار است. در نوشتار کریمی (۲۰۲۰)، نشان داده شده است که با وجود حفره در سلول واحد و چرخش آن، ضریب مقاومت گرمایی تغییر می‌کند؛ اما مقدار تغییرات

محاسباتی را بر خروجی محاسبات اضافه خواهد کرد. برای اصلاح فرایند محاسباتی اخیر، به جای فرض انتشار گرما در لایه‌ی سطحی، انتشار گرما در لایه‌های استوانه‌ای با ضرایب انتشار گرمایی متفاوت در نظر گرفته شده است. مقاومت گرمایی در یک استوانه به طول L و شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 مطابق رابطه‌ی ۱۸ محاسبه می‌شود: [۲۲، ۲۳]

$$R_{Clyn} = \frac{Ln(r_2/r_1)}{2\pi K_{layer} L} \quad (۸)$$

با اعمال رابطه‌ی ۷ در رابطه‌ی ۸، وابستگی ضریب هدایت گرمایی ساختار لانه‌زنبوری به لایه‌های اطراف هسته‌ی مرکزی مطابق رابطه‌ی ۹ به‌دست می‌آید:

$$\frac{Ln(r_{Total}/r_1)}{2\pi K_{Total} L} = \frac{Ln(r_2/r_1)}{2\pi K_{eff_layer(1)} L} + \frac{Ln(r_3/r_2)}{2\pi K_{eff_layer(2)} L} + \dots + \frac{Ln(r_{n+1}/r_n)}{2\pi K_{eff_layer(n)} L} \quad (۹)$$

که در آن، L طول استوانه است، که از روابط اخیر حذف می‌شود. $r_i = i \times D$ ، $r_{Total} = (n+1)D$ است.

با ساده‌سازی روابط اخیر، ضریب هدایت گرمایی کل شبکه‌ی لانه‌زنبوری حول محور استوانه‌ای به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ خواهد بود:

$$k_{Total} = \left(\frac{1}{Ln(n+1)} \sum_{i=1}^n \frac{Ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{k_{eff_layer-i}} \right)^{-1} \quad (۱۰)$$

که در آن، n تعداد لایه‌های موجود حول هسته‌ی مرکزی منبع حرارتی است.

۳. تعیین مقادیر عددی هدایت مؤثر گرمایی در مبدل گرمایی با ساختار لانه‌زنبوری

مبدل‌های گرمایی به‌طور وسیع در صنایع نفت و گاز و پتروشیمی، پالایشگاه‌ها، تصفیه‌ی گازهای طبیعی، نیروگاه‌ها، یخچال‌ها، سیستم‌های گرمایش ساختمان‌ها، و تهویه مطبوع، و همچنین بازایی گرمای تلف‌شده در فرآیندهای شیمیایی استفاده می‌شوند. مبدل‌های حرارتی، گرما را از یک محیط جذب و به محیط دیگر منتقل می‌کنند. بدون مبدل‌های حرارتی، بسیاری از فرآیندهای صنعتی ممکن نیست. مبدل‌های پوسته-لوله، که اغلب برای دما و فشار بالا استفاده می‌شوند، حرارت یک سیال (مایع یا گازی) را به سیالی با دمای پایین‌تر منتقل می‌کنند. مبدل‌های مذکور، که معمولاً با هزینه‌ی متوسط یا کم ساخته می‌شوند، در صنایع گوناگون و به‌خصوص در نیروگاه‌ها کاربرد فراوانی دارند. در نوشتار حاضر، یک مبدل حرارتی استوانه‌ای با ساختار لانه‌زنبوری در اطراف آن فرض شده است. در بخش کنونی، هدف بررسی تغییرات ضریب شکست مؤثر سازه‌ی مفروض با تغییر مشخصات و اندازه‌ی لوله‌ها و مواد تشکیل‌دهنده‌ی آن است. هر چند در مبدل‌های گرمایی صنعتی، مجموعه یکپارچه نیست و بین لوله‌های محتوی سیال در بیشتر مواقع، لوله‌ها محتوی سیال حرارتی هستند به‌عبارت دیگر، منبع انتشار حرارتی فقط در مرکز مبدل حرارتی قرار ندارد؛ با این حال، چنین مدل فرضی برای مبدل گرمایی می‌تواند اطلاعات مفیدی برای سایر کاربردهای صنعتی آینده از ساختار لانه‌زنبوری در اختیار پژوهشگران این حوزه قرار دهد.

و بدون حفره قرار گرفته است. در تمام ردیف‌ها، کلیه‌ی سلول‌های واحد اعم از حفره‌دار و بدون حفره به‌صورت موازی با هم قرار دارند. محاسبه‌ی هدایت گرمایی ردیف i اُم وابسته به شماره‌ی ردیف است؛ در حالی که در شبکه‌ی مثلثی فقط یک حالت محاسباتی وجود دارد. در شبکه‌ی لانه‌زنبوری، سه حالت متفاوت بر حسب مقدار عددی n لایه محاسبه می‌شود. برای محاسبه‌ی ضریب هدایت گرمایی مؤثر لایه، سه حالت وجود دارد:

اگر شماره‌ی ردیف تحت بررسی $n+2$ مضربی از ۳ باشد، یا به‌عبارتی، برای $n = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, \dots\}$ ضریب هدایت گرمایی مؤثر مطابق رابطه‌ی ۶ تعیین خواهد شد:

$$n+2=3k \text{ or } n-1=3k$$

$$k_{eff_layer-n} = \frac{k}{n} k_{m1} + \sum_{i=1}^k \frac{2}{n} k_{cell} \left(\theta = \frac{t\pi}{3n} \right) + \frac{1}{n} k_{cell} (\theta=0),$$

$$t = 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots \quad (۶)$$

که در آن، t عدد حقیقی است. اگر شماره‌ی ردیف n مضربی از ۳ باشد؛ یا به‌عبارتی، برای $n = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \dots\}$ ضریب هدایت گرمایی مؤثر آنگاه مطابق رابطه‌ی ۶ به‌دست می‌آید، که در آن $t = 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots$ است.

اگر شماره‌ی ردیف $n+1$ مضربی از ۳ باشد، یا به‌عبارتی برای $n = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \dots\}$ آنگاه بیشینه‌ی مقدار جمع k با مقدار $k-1$ تعویض می‌شود و در آن، $t = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots$ است.

هر لایه، یک هدایت گرمایی مؤثر دارد. مقاومت گرمایی مؤثر کل شبکه از مجموع مقاومت‌های لایه‌های مختلف به‌دست می‌آید. درواقع، مطابق شکل ۴، ردیف‌های مختلف در راستای انتشار شار گرمایی به‌صورت سری نسبت به لایه‌ی دیگر قرار گرفته‌اند (مطابق رابطه‌ی ۷):

$$R_{Total} = \sum_{i=1}^n R_{eff_layer-i} \quad (۷)$$

که در آن، $R_{eff_layer-i}$ مقاومت گرمایی مؤثر لایه‌ی i اُم و R_{Total} مقاومت گرمایی مؤثر کل شبکه‌ی لانه‌زنبوری است. در نوشتار کریمی (۲۰۲۰)، [۲۱] ساختار یک‌بعدی و انتشار گرما در جهت شعاعی فرض شده است؛ بنابراین، در نوشتار اخیر، قانون فوریه برای سطوح استوانه‌ای در نظر گرفته نشده است. این کار در مقیاس کلان، خطای

$$R_{Clyn} = \frac{Ln(r_2/r_1)}{2\pi K_{layer} L}$$

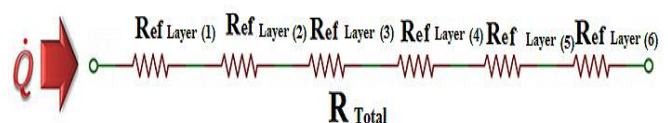


Figure 4. Total thermal resistance of different layers in honeycomb network.

شکل ۴. مقاومت گرمایی کل حاصل از لایه‌های مختلف شبکه‌ی لانه‌زنبوری.

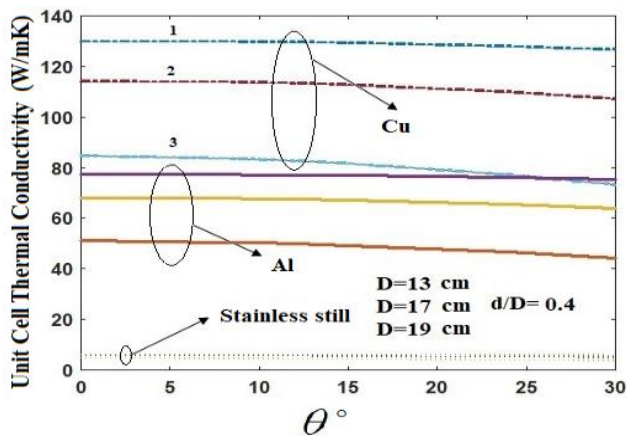


Figure 5. Unit cell thermal conductivity variations with respect to heat flux direction in copper, aluminum, and stainless steel.

شکل ۵. تغییرات ضریب هدایت گرمایی سلول واحد نسبت به زاویه‌ی انتشار گرمایی در مس، آلومینیوم، و فولاد ضدزنگ.

واحد، مقدار کوچک‌تری در یک مقدار ثابت d دارد. در این حالت، میزان ماده‌ی اصلی در یک حجم ثابت کمتر و ضریب هدایت آن ناحیه به سمت ماده‌ی پرکننده‌ی حفره‌ها نزدیک‌تر می‌شود. در شکل ۵، منحنی‌های ۱ الی ۳ به ترتیب برای D برابر: ۱۹، ۱۷، و ۱۳ سانتی‌متر است. برای سایر مواد نیز بالاترین منحنی مربوط به بزرگ‌ترین فاصله بین لوله‌هاست.

برای ضریب هدایت گرمایی سلول واحد در فولاد ضدزنگ با تغییر مقادیر مختلف D ، تغییر چندانی ایجاد نشده است. مطابق شکل ۵، تغییرات ضریب هدایت گرمایی سلول واحد فارغ از جنس و اندازه‌ی لوله و فاصله‌ی بین لوله‌ها نسبت به زاویه‌ی فرودی شار گرمایی کم است. کمترین مقدار ضریب هدایت گرمایی سلول واحد در زاویه‌ی ۳۰ درجه رخ داده است. نتایج نشان می‌دهند که نحوه‌ی قرارگیری سلول نسبت به شار گرمایی در ضریب هدایت گرمایی سلول واحد تأثیر ناچیزی دارد و این مورد مستقل از ماده‌ی سازنده‌ی ساختار است. همچنین برای مقادیر کوچک‌تر فاصله‌ی بین دو لوله (D)، اندازه‌ی تغییرات ذکرشده بیشتر بوده است. چنین نتایجی در فیبر بلور فوتونی و ماده‌ی اولیه‌ی شیشه نیز صدق می‌کند.^[۲۱]

در شکل ۶، تغییرات ضریب هدایت گرمایی سلول واحد بر حسب قطر لوله‌ها برای مقادیر مختلف فاصله‌ی بین لوله‌ها برای: (الف) مس، (ب) فولاد ضدزنگ، و (ج) آلومینیوم مشاهده می‌شود. هر چه فاصله‌ی بین لوله‌ها (D) کوچک‌تر و اندازه‌ی لوله (d) بزرگ‌تر بوده است، ضریب هدایت گرمایی سلول واحد کمتر و به مقدار ضریب هدایت گرمایی سیال موجود در لوله‌ها نزدیک‌تر شده است. در هر مقدار D ثابت، با افزایش اندازه‌ی لوله، مقدار ضریب هدایت گرمایی سلول واحد کوچک‌تر شده است. با بزرگ‌تر شدن مقدار D در هر d ثابت، مقدار ضریب هدایت گرمایی سلول واحد افزایش یافته است. مطابق شکل ۶ مشاهده می‌شود که هر چند نسبت افزایش فاصله‌ی بین لوله‌ها (حفره‌ها) ثابت و برابر ۲ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است، اما سرعت افزایش مقدار ضریب هدایت گرمایی سلول واحد نزولی بوده است.

بیشینه‌ی مقدار ضریب هدایت گرمایی سلول واحد، مقدار ضریب هدایت گرمایی ماده‌ی اصلی است. این مقدار هنگامی محقق می‌شود که قطر حفره صفر باشد.

جدول ۱. ضرایب هدایت گرمایی در مواد مختلف.

Table 1. Thermal conductivity coefficients in various materials.

علامت	مقدار	ماده
W/mk	273	آلومینیوم
W/mk	399	مس
W/mk	16.2	فولاد ضدزنگ ۳۰۴
W/mk	0.5918	آب در دمای ۲۰°

محاسبات در ساختار لانه‌زنبوری شامل سه مرحله است: ابتدا، باید هدایت مؤثر گرمایی سلول واحد در راستاهای مختلف تعیین شود. سپس، هدایت مؤثر گرمایی لایه‌ها، و در مرحله‌ی نهایی، هدایت مؤثر گرمایی ساختار کلی تعیین شوند.

در نوشتار حاضر، سه نوع ماده شامل: آلومینیوم، مس، و فولاد زد زنگ ۳۰۴ برای ساختار اصلی و آب به‌عنوان ماده‌ی داخلی لوله‌ها در نظر گرفته شده است. با استفاده از روابط ارائه‌شده در بخش تئوری نوشتار حاضر، مقدار ضریب هدایت گرمایی در سه مرحله برای سلول واحد، لایه‌ها، و نهایتاً در شبکه‌ی لانه‌زنبوری تعیین و با هم مقایسه شده‌اند. در جدول ۱، مقادیر ضرایب هدایت گرمایی مواد مختلف استفاده‌شده در نوشتار حاضر ارائه شده است.

۱.۳. محاسبه‌ی ضریب هدایت گرمایی سلول واحد

ضریب هدایت گرمایی سلول واحد با استفاده از روابط ۲ الی ۴ به‌دست می‌آید. در نوشتار کریمی (۲۰۲۰)،^[۲۱] جزئیات تعیین ضریب هدایت گرمایی در سلول واحد مفصلاً تشریح شده است. همچنین به‌صورت تئوری نشان داده شده است که چگونه با استفاده از معادله‌ی درجه‌ی دوم و تعیین ضریب هدایت گرمایی در شار گرمایی به سلول واحد در زوایای متفاوت می‌توان هدایت مؤثر گرمایی سلول واحد را در هر زاویه نسبت به شار گرمایی تعیین کرد. در نتایج محاسبات عددی، در ترکیب شیشه و هوا در اندازه‌های میکرونی مشخص شده است که میزان تغییر ضریب هدایت گرمایی در سلول واحد با پرخش در حد صدم درصد است و می‌توان در روابط دقیق معادله‌های ۲ تا ۴، مقادیر ضریب هدایت گرمایی سلول واحد را در یک زاویه‌ی مشخص ایجاد و خطای کوچک محاسباتی را جایگزین کرد.

در شکل ۵، تغییرات ضریب هدایت گرمایی سلول واحد براساس زاویه‌ی انتشار گرمایی ارائه شده است. محاسبات برای مس، آلومینیوم و فولاد ضدزنگ در کسر پرشدگی ۰/۴ از مواد داخل لوله‌ی آب در دمای ۲۰ درجه انجام شده است. کسر پرشدگی عبارت از نسبت فاصله بین دو لوله (یا حفره) بر اندازه‌ی قطر لوله است، که با d/D نشان داده می‌شود. مقادیر فاصله بین لوله‌ها (D) برابر با ۱۳، ۱۷، و ۱۹ سانتی‌متر فرض شده است. مطابق شکل ۵ مشاهده می‌شود که برای ساختار لانه‌زنبوری و ماده‌ی سازنده‌ی اصلی با ضریب شکست بالاتر، ضریب هدایت گرمایی سلول واحد بزرگ‌تر است. هر چه اندازه‌ی D کوچک‌تر باشد (لوله‌ها به هم نزدیک‌تر باشند)، ضریب هدایت گرمایی سلول

¹ Stainless Steel

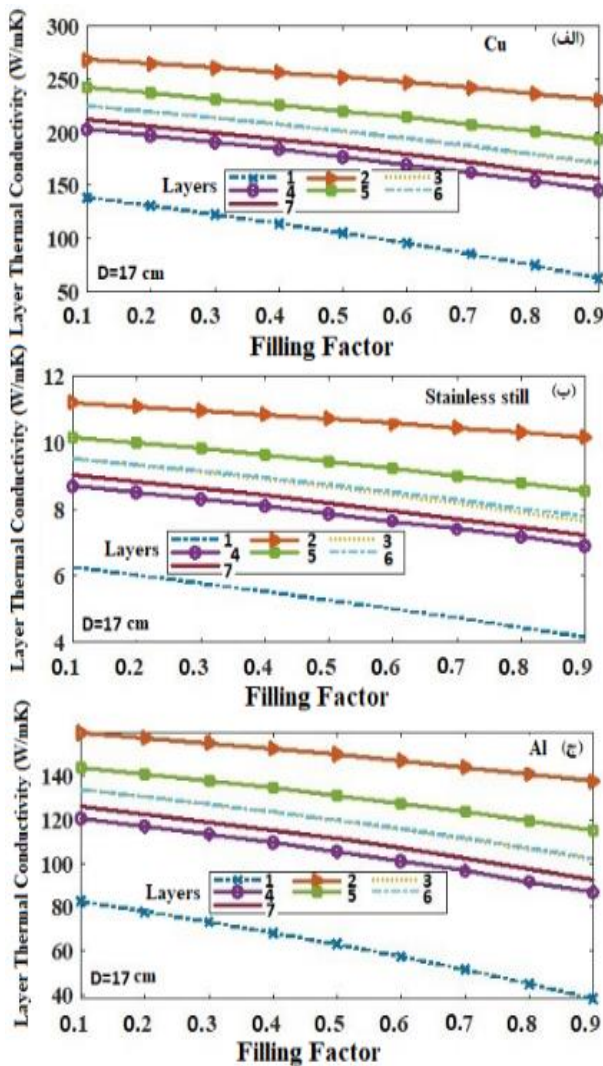


Figure 7. Layers thermal conductivity coefficient variations with respect to filling factor in: (a) Copper, (b) Stainless steel, (c) Aluminum.

شکل ۷. تغییرات ضریب هدایت گرمایی لایه‌ها بر حسب کسر پُرشدگی در: (الف) مس، (ب) فولاد ضدزنگ، و (ج) آلومینیوم.

همان‌طور که در شکل ۳-الف نشان داده شده است، نیمی از سلول‌های واحد در ردیف دوم بدون حفره هستند؛ در حالی که نسبت سلول‌های بدون حفره به سلول‌های حفره‌دار در سایر ردیف‌ها کمتر بوده است. به عبارت دیگر، نیمی از حجم سلول‌ها در ردیف دوم از ماده‌ی اصلی تشکیل شده‌اند و انتظار می‌رود که ضریب هدایت گرمایی لایه‌ی اخیر از سایر لایه‌ها بالاتر باشد. در مقایسه‌ی شکل‌های ۷ (الف، ب، و ج) مشاهده می‌شود که ترتیب ردیف‌ها از لحاظ بیشینه‌بودن مقدار ضریب هدایت گرمایی آن ردیف در هر سه مورد یکسان و شیب کاهشی ضریب هدایت گرمایی نسبت به کسر پُرشدگی در هر سه مورد یکسان بوده و فقط در مقدار اولیه‌ی ضرایب تفاوت داشته‌اند، که ترتیب بیشینه‌ی آن در مس، آلومینیوم، و فولاد ضدزنگ بوده است.

در شکل ۸، تغییرات ضریب هدایت گرمایی لایه‌ها بر حسب شماره‌ی لایه برای مس، فولاد ضدزنگ، و آلومینیوم در مقادیر مختلف اندازه‌ی لوله مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، فارغ از مقدار عددی d و D ، لایه‌ی اول، کمترین مقدار ضریب هدایت گرمایی و لایه‌ی دوم، بیشترین مقدار عددی ضریب هدایت گرمایی را داشته‌اند. در شکل اخیر مشاهده می‌شود که مقدار ضریب هدایت

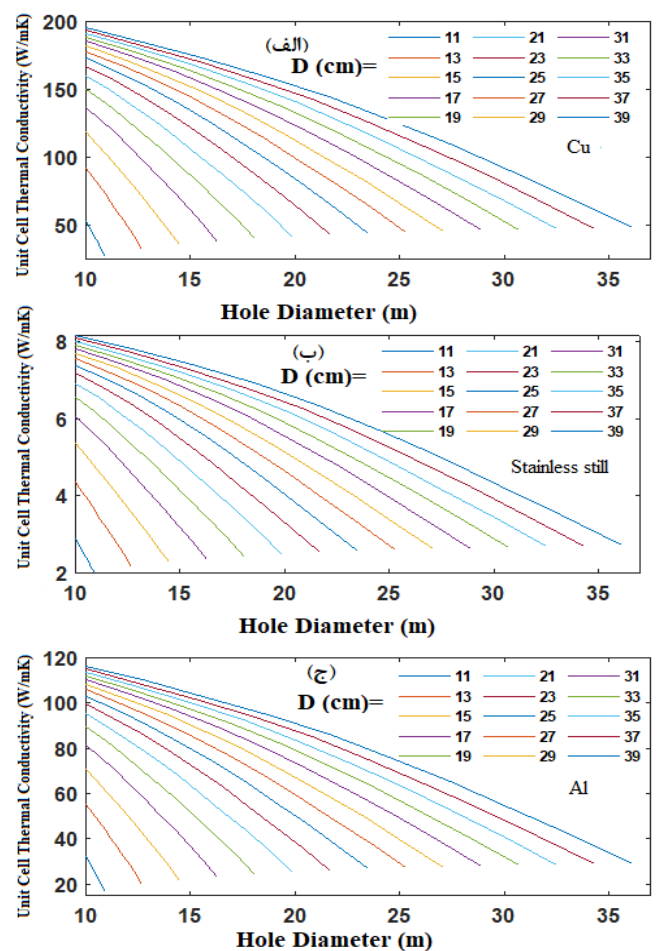


Figure 6. Unit cell thermal conductivity coefficient variations with respect to tubes diameter, (a) copper, (b) stainless steel, (c) aluminum.

شکل ۶. تغییرات ضریب هدایت گرمایی سلول واحد بر حسب قطر لوله‌ها: (الف) مس، (ب) فولاد ضدزنگ، (ج) آلومینیوم.

کمینه‌ی اندازه‌ی حفره، ۱۰ سانتی‌متر یا ۱/۱۰ فاصله بین دو لوله در نظر گرفته شده است؛ بنابراین انتظار می‌رود بلافاصله بین لوله‌ها مقدار ضریب هدایت گرمایی سلول واحد به یک مقدار عددی، که کمتر از ضریب هدایت گرمایی ماده‌ی اصلی است، میل کند.

۲.۳. محاسبه‌ی ضریب هدایت گرمایی مؤثر در لایه‌ها

پس از تعیین مقادیر ضریب هدایت گرمایی در سلول واحد و جایگزینی آن در روابط ۵ و ۶، ضریب هدایت گرمایی در هر لایه قابل محاسبه است. در شکل ۷، تغییرات ضریب هدایت گرمایی لایه‌ها بر حسب کسر پُرشدگی در مس، فولاد ضدزنگ، و آلومینیوم مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، با افزایش قطر لوله در یک فاصله‌ی ثابت مراکز لوله‌ها، مقدار ضریب هدایت گرمایی لایه کاهش یافته است، که نتیجه قابل انتظار بوده است. در هر سه ماده، لایه‌ی اول که با علامت d و لایه‌ی دوم، که با علامت D مشخص شده است، بالاترین مقدار ضریب هدایت گرمایی برای یک مقدار ثابت d و D را داشته‌اند؛ به این دلیل که لایه‌ی اول یکنانه لایه‌ای بوده است که همه‌ی سلول‌های واحد حفره داشته و نسبت به لایه‌های دیگر، بیشترین حجم از ماده‌ی دوم در آن لایه جای گرفته است. لایه‌ی دوم، بالاترین مقدار عددی ضریب هدایت گرمایی را نسبت به سایر لایه‌ها داشته است.

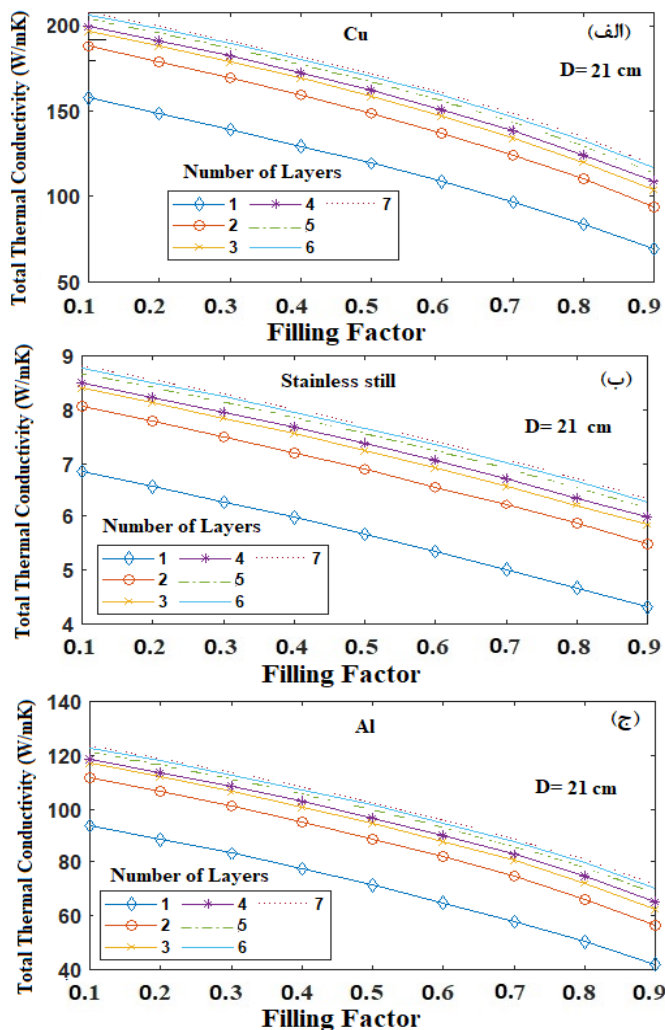


Figure 9. Effective thermal conductivity coefficient of the honeycomb structure with respect to filling factor: (a) copper, (b) stainless steel, (c) aluminum.

شکل ۹. تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر ساختار لانه‌زنبوری بر حسب کسر پرشدگی: (الف) مس، (ب) فولاد ضدزنگ، (ج) آلومینیوم.

کل لایه کاهش می‌یابد، که دلیل آن افزایش حجمی ماده با ضریب شکست کمتر در ساختار است.

۳.۳. محاسبه‌ی ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل شبکه‌ی لانه‌زنبوری

با استفاده از نتایج حاصل از لایه‌های مختلف و با استفاده از رابطه‌ی ۱۰، می‌توان ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل یک شبکه‌ی لانه‌زنبوری را محاسبه کرد. در نوشتار حاضر، بیشینه‌ی تعداد لایه‌ها برابر ۷ لایه در نظر گرفته شده است. در شکل ۹، تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار لانه‌زنبوری بر حسب کسر پرشدگی برای مس، فولاد ضدزنگ، و آلومینیوم محاسبه و ارائه شده است. در شبیه‌سازی شکل ۹، مقدار D برابر ۱۲ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است. ضریب هدایت گرمایی مؤثر ساختار لانه‌زنبوری با فقط یک لایه، کمترین مقدار عددی را داشته است. در شکل ۸ (الف، ب، و ج)، در هر سه ماده، شبکه‌ی تک‌لایه‌ای با رنگ آبی و علامت لوزی روی آن مشخص شده است. با افزایش تعداد لایه‌ها، مقدار ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار افزایش یافته است. مطابق شکل‌های مذکور، روند افزایش به صورت نزولی بوده

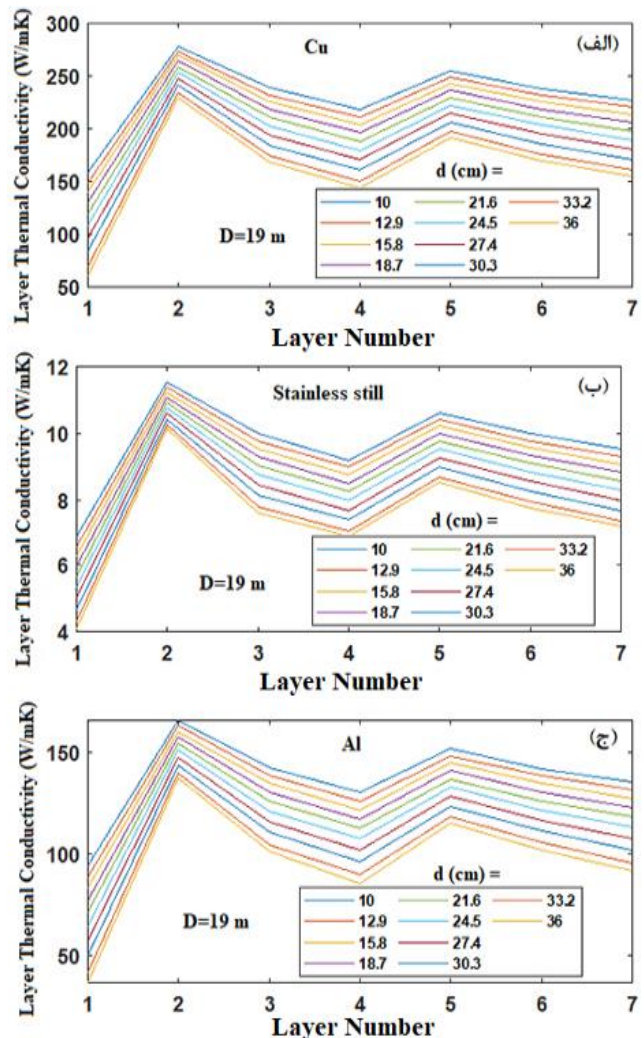


Figure 8. Effective thermal conductivity of layers with respect to layers index: (a) Copper, (b) Stainless steel, (c) Aluminum.

شکل ۸. تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر لایه‌ها بر حسب شماره‌ی لایه: (الف) مس، (ب) فولاد ضدزنگ، (ج) آلومینیوم.

گرمایی لایه‌ها در دو مرحله کاهش و در لایه‌ی بعد مقداری افزایش یافته است، که دلیل آن کاهش تعداد حفره‌ها هر سه لایه یک بار بوده است.

در ساختار مثلی در هر ردیف، ۶n حفره وجود دارد. در ساختار لانه‌زنبوری به جز ردیف اول، برخی از حفره‌ها با ماده‌ی اصلی پر می‌شوند. به‌طور کلی در ساختار لانه‌زنبوری تعداد حفره‌ها در هر ردیف از رابطه‌ی ۱۱ پیروی می‌کند:

$$\begin{cases} 4n & \text{if } n = 3k \\ 4n - 2 & \text{if } n = 3k - 1 \\ 4n + 2 & \text{if } n = 3k + 1 \end{cases} \quad (11)$$

که در آن، مقدار n نشانگر شماره‌ی ردیف و k عدد حقیقی است. همان‌طور که در عبارت اخیر مشاهده می‌شود، ترتیب افزایش تعداد حفره‌ها در ردیف‌ها هر سه مرتبه یکبار رخ می‌دهد. به عبارت دیگر، بعد از هر سه ردیف، تعداد حفره‌ها کاهش یا به عبارتی، ضریب هدایت گرمایی مؤثر لایه افزایش می‌یابد.

با افزایش تعداد لایه‌ها، میزان تغییرات ضریب هدایت گرمایی لایه‌ها کاهش و به سمت یک مقدار ثابت سوق می‌یابد. با افزایش قطر لوله‌ها، ضریب شکست

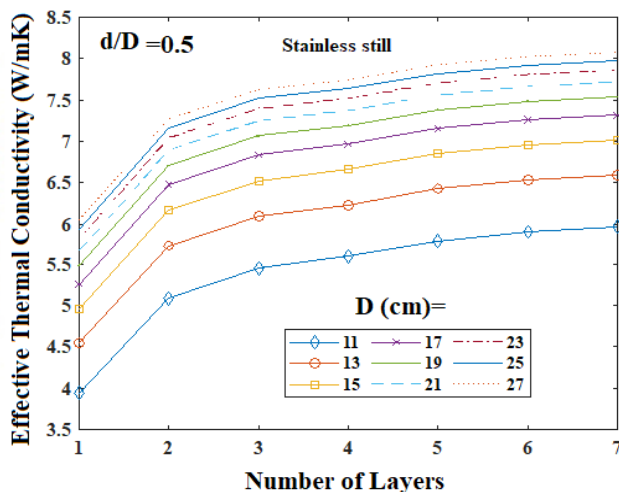


Figure 11. Effective thermal conductivity of honeycomb structure with respect to layers number at stainless steel for different D sizes.

شکل ۱۱. تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار لانه زنبوری بر حسب تعداد لایه‌ها فولاد ضد زنگ برای اندازه‌های D مختلف.

هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار افزایش یافته است. افزایش D، باعث افزایش مقدار حجم ماده‌ی اصلی می‌شود؛ لذا انتظار می‌رود ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل به سمت ضریب هدایت گرمایی ماده‌ی اصلی تشکیل‌دهنده‌ی ساختار میل کند. در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود که در یک D ثابت با تغییر مقدار d، تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار، به صورت پله‌ای و با روند ثابت تغییر کرده است. همچنین در شکل مذکور مشاهده می‌شود که با تغییر مقدار D، روند کسر پُرشدگی ثابت، روند تغییرات ثابت نبوده و با افزایش مقدار D، روند رشد ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل کاهش یافته است. در یک مقدار d و D ثابت با افزایش تعداد لایه‌ها، ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل با شیب مشابه شکل ۱۰ افزایش یافته و با افزایش بیش از ۵ لایه، مقدار ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل به سمت عدد ثابتی میل کرده است.

خطای محاسباتی این روش مشابه خطای محاسباتی شبکه‌ی مقاومت گرمایی است و به عوامل مختلفی بستگی دارد؛ از جمله: دقت داده‌های ورودی، نوع مواد، و شرایط مرزی.

اگر داده‌های مربوط به خواص مواد (ضریب هدایت گرمایی مواد) دقیق نباشند، نتایج نهایی نیز تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

در روش شبکه‌ی مقاومت گرمایی فرض می‌شود که مواد یکنواخت و خواص حرارتی در تمام نقاط یکسان است، در حالی که ممکن است تغییرات محلی وجود داشته باشد، ثانیاً فرض می‌شود که توزیع دما یکنواخت است؛ در حالی که ممکن است دما در نقاط مختلف یکسان نباشد. ثالثاً در روش اشاره شده فرض شده است که جریان‌های حرارتی جانبی وجود ندارند، به عبارت دیگر فرض می‌شود که انتقال حرارت در یک بُعد انجام می‌شود و جریان‌های حرارتی جانبی در نظر گرفته نمی‌شوند. همچنین فرض می‌شود که شرایط محیطی (مانند فشار و دما) ثابت هستند؛ در حالی که در واقع ممکن است پارامترهای اخیر تغییر کنند. در ضمن، آثار محیطی در روش شبکه‌ی مقاومت گرمایی در نظر گرفته نمی‌شود. ضمن آنکه ممکن است تغییرات ناگهانی در مواد در اثر تغییرات حرارتی وجود داشته باشد. به عنوان مثال، تحت جریان گرمایی، انبساط در اجسام باعث تغییر اندازه و همچنین ضریب انتقال حرارت مواد اولیه می‌شود،

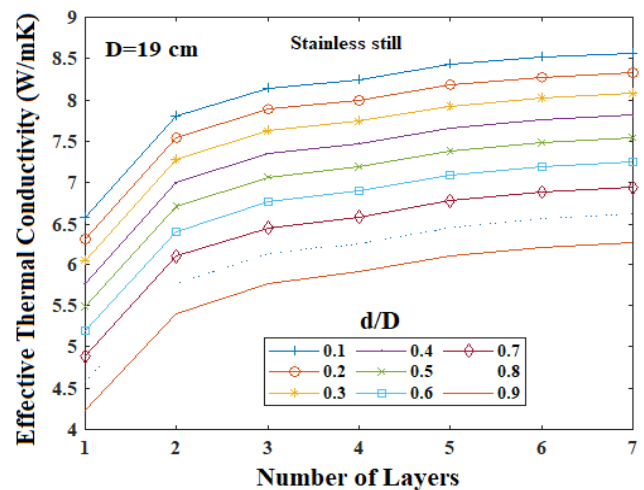


Figure 10. Effective thermal conductivity of honeycomb structure with respect to layers number in stainless steel for different filling fractions.

شکل ۱۰. تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار لانه زنبوری بر حسب تعداد لایه‌ها در فولاد ضد زنگ برای کسر پُرشدگی مختلف.

است؛ یعنی با افزایش تعداد لایه‌ها، تغییرات مقدار ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل به مقدار کمی افزایش یافته است.

با افزایش تعداد لایه‌ها در یک d و D ثابت، مقدار ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار لانه زنبوری به سمت عدد ثابت میل می‌کند. میزان تغییرات با افزایش تعداد لایه‌ها وابسته به ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی ساختار است. به عنوان مثال، مقدار تغییرات در ساختار لانه زنبوری با ماده‌ی اصلی فولاد ضد زنگ در حدود 1 W/mK بوده است؛ در حالی که، این مقدار در ساختار با ماده‌ی اصلی آلومینیوم تقریباً برابر 12 W/mK و در مس تقریباً برابر 25 W/mK بوده است. به عبارت دیگر، هر چه ضریب هدایت گرمایی ماده‌ی سازنده‌ی اصلی ساختار لانه زنبوری، بزرگ‌تر باشد، تغییرات مذکور نیز بزرگ‌تر است. روند تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل با تغییر تعداد لایه‌ها، وابستگی کمتری به کسر پُرشدگی ساختار مذکور دارد.

در شکل ۱۰، تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار لانه زنبوری بر حسب تعداد لایه‌ها در فولاد ضد زنگ در یک مقدار ثابت D و کسر پُرشدگی مختلف مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، در یک لایه‌ی ثابت با افزایش کسر پُرشدگی (d/D)، مقدار ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار کاهش یافته است؛ که مشخص است با بزرگ‌تر شدن اندازه‌ی حفره، ضریب هدایت گرمایی مؤثر به مقدار ضریب هدایت گرمایی ماده‌ی پُرکننده‌ی حفره نزدیک شده است. در هر d/D ثابت با افزایش تعداد لایه‌ها مقدار ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل افزایش می‌یابد. هنگامی که تعداد لایه‌ها بیشتر از ۵ باشد، تغییرات مذکور، کوچک است. به مفهوم دیگر، برای یک مقدار مشخص d و D، افزایش تعداد لایه‌ها بیشتر از ۵، تغییر زیادی در ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار ایجاد نمی‌کند. روند تغییرات در مس و آلومینیوم نیز مشابه فولاد ضد زنگ است؛ و فقط مقادیر خروجی در آن‌ها متفاوت است.

در شکل ۱۱، نمودار تغییرات ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار لانه زنبوری بر حسب تعداد لایه‌ها در فولاد ضد زنگ برای کسر پُرشدگی ثابت و مقادیر مختلف D مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، در نمودار اخیر، کسر پُرشدگی d/D برابر 0.5 در نظر گرفته شده است. با افزایش منظم مقدار عددی D، ضریب

نتایج محاسباتی نشان می‌دهند که هر چند چرخش سلول واحد در جهت شار گرمایی باعث تغییر ضریب هدایت گرمایی مؤثر سلول واحد می‌شود، ولی در محیطی که مقاومت گرمایی ماده‌ی سازنده، کم یا ضریب هدایت گرمایی آن بالا باشد، تأثیر چرخش سلول در راستای شار گرمایی کم و قابل صرف‌نظر کردن است.

در نوشتار حاضر نشان داده شده است که در ساختار لانه‌زنبوری برخلاف ساختار سه‌گوش، تغییرات ضریب هدایت گرمایی لایه‌ها منظم نیست و لایه‌ی اول چون بیشترین نسبت حجم حفره را دارد، پایین‌ترین ضریب هدایت گرمایی را نیز دارد. همچنین لایه‌ی دوم چون کمترین نسبت حجم حفره را دارد، بالاترین ضریب هدایت گرمایی را دارد. در یک ساختار مشخص، با افزایش تعداد لایه‌ها، ضریب هدایت گرمایی لایه به سمت یک مقدار ثابت سوق می‌یابد.

مقاومت گرمایی کل و در نتیجه ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل، که از سری شدن مقاومت گرمایی لایه‌ها به‌دست می‌آید، با افزایش تعداد لایه‌ها به سمت یک مقدار ثابت میل می‌کند. تعداد لایه‌های بیش از ۵، تغییرات قابل‌ملاحظه‌ای در نتیجه‌ی نهایی ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار ندارد.

که همه‌ی موارد اشاره‌شده می‌توانند خطای محاسباتی ایجاد کنند. به‌طور کلی، خطای محاسباتی شبکه‌ی مقاومت گرمایی در تعیین ضریب انتقال حرارت مؤثر طبق گزارش‌ها ۵ تا ۱۵ درصد متغیر است.

۴. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، یک مدل تئوری برای تعیین ضریب هدایت گرمایی یک شبکه‌ی لانه‌زنبوری حول محور استوانه‌ای بر پایه‌ی روش شبکه مقاومت گرمایی ارائه شده است.

برای مقاومت ضریب هدایت گرمایی مؤثر کل ساختار لانه‌زنبوری از لایه‌های مختلف اطراف هسته‌ی مرکز، مقاومت‌های سری در مختصات استوانه‌ای، جایگزین مقاومت‌های سری در مختصات قطبی شده است. فرض انتشار یک‌بعدی گرما برای مواردی که مقاومت اولیه‌ی مواد کوچک یا ضریب هدایت گرمایی ماده، بزرگ است؛ خطای محاسباتی بالایی در پاسخ نهایی ضریب هدایت گرمایی مؤثر اعمال می‌کند، لذا روش پیشنهادی قبل اصلاح شده است.

مدل پیشنهادی در یک مبدل گرمایی فرضی با ساختار لانه‌زنبوری و ۷ ردیف لایه‌ی حفره‌ی هوا استفاده و نتایج آن به تفصیل تشریح شده است.

References – منابع

1. Yuki, K., 2021. Heat transfer enhancement using unidirectional porous media under high heat flux conditions. In *Porous Fluids, Advances in Fluid Flow and Transport Phenomena in Porous Media. IntechOpen* (<https://doi.org/10.5772/intechopen.96594>).
2. Hales, T.C., 2001. The honeycomb conjectures. *Discrete Comput Geom.*, 25, pp. 1–22 (<https://doi.org/10.1007/s004540010071>).
3. Lecuit, T. and Lenne, P.F., 2007. Cell surface mechanics and the control of cell shape, tissue patterns and morphogenesis. *Nature Reviews Molecular Cell Biology*, 8, pp. 633–644 (<https://doi.org/10.1038/nrm2222>).
4. Pawi, G., Wong, K.L., Kwon, K.Y., and Bartels, L., 2006. A homo-molecular porous network at a Cu (111) surface. *Science*, 313, pp. 961–962.
5. Masuda, H. and Fukuda, K., 1995. Ordered metal nanohole arrays made by a 2-step replication of honeycomb structures of anodic alumina. *Science*, 268, pp. 1466–1468 (<https://doi.org/10.1126/science.1129309>).
6. Innocenti, P. and Scarpa, F., 2009. Thermal conductivity properties and heat transfer analysis of multi-re-entrant auxetic honeycomb structures. *Journal of Composite Materials*, 43, pp. 2419–2439 (<https://doi.org/10.1177/0021998309344636>).
7. Gadkaree, K.P., 1998. Carbon honeycomb structures for adsorption applications. *Carbon*, 36, pp. 981–989 ([https://doi.org/10.1016/S0008-6223\(97\)00230-3](https://doi.org/10.1016/S0008-6223(97)00230-3)).
8. Bardhan, P., 1997. Ceramic honeycomb filters and catalysts. *Current Opinion in Solid State and Materials Science*, 2, pp. 577–583.
9. Huang, H., Ning, Z.Y., Kariyado, T., Amemiya, T., and Hu, X., 2023. Topological photonic crystal fiber with honeycomb structure. *Optics Express*, 31, 27006 (<https://doi.org/10.1364/OE.496046>).
10. Zhang, Q., Yang, X., Li, P., Huang, G., Feng, S., Shen, C., Han, B., Zhang, X., Jin, F., Xu, F., and Lu, T.J., 2015. Bio-inspired engineering of honeycomb structure: Using nature to inspire human innovation. *Progress in Materials Science*, 74, pp. 332–400 (<https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2015.05.001>).
11. Chang, B., Wang, Z., and Bi, G., 2024. Study on the energy absorption characteristics of different composite honeycomb sandwich structures under impact energy. *Applied Sciences*, 14, 2832 (<https://doi.org/10.3390/app14072832>).
12. Ghosh, S., Senthilkumar, S., Deep, D., and Bharanitharan, K.J., 2020. A numerical approach to study the steady state heat transfer characteristics of an annular porous heat exchanger. In *3rd International*

- Conference on Advances in Mechanical Engineering (ICAME 2020)*, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, 912, 042030 (Doi:10.1088/1757-899X/912/4/042030. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/912/4/042030>
13. Boomsma, K. and Poulikakos, D., 2001. On the effective thermal conductivity of a three-dimensionally structured fluid-saturated metal foam. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44, pp. 827–836 (<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.08.023>).
14. Liu, H., Yu, Q.N., Zhang, Z.C., Qu, Z.G., and Wang, C.Z., 2016. Two-equation method for heat transfer efficiency in metal honeycombs: An analytical solution. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 97, pp. 201–210 (<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.01.020>).
15. Lu, T.J., 1999. Heat transfer efficiency of metal honeycombs. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 31, pp. 1920–1939 ([https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00306-8](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00306-8)).
16. Yuan, R. and Lu, S. 2020. Experimental and numerical study for effective thermal conductivity of metallic honeycomb sandwich structures. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, pp. 1–18 (<https://doi.org/10.1177/1099636220933534>
17. Gajić, R., Meisels, R., Kuchar, F., and Hingerl, K., 2006. All-angle left-handed negative refraction in Kagomé and honeycomb lattice photonic crystals. *Physical Review B*, 73, 165310 (<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.165310>).
18. Mortensen, N.A., Nielsen, M.D., Folkenberg, J.R., Jakobsen, C., and Simonsen, H.R., 2004. Photonic crystal fiber with a hybrid honeycomb cladding. *Optics Express*, 12, pp. 468–472 (<https://doi.org/10.1364/OPEX.12.000468>).
19. Xu, G., Zhang, W., Huang, Y., and Peng, J., 2006. Optical properties of solid core honeycomb photonic crystal fiber with different doping levels. In *Proceedings of SPIE ICO20: Optical Communication*, 6025, 602505-1 (<https://doi.org/10.1117/12.666985>).
20. Karimi, M., 2023. Theoretical study of hole structure and core size on the gap-map of hollow core photonic crystal fiber. *Scientific Journal of Applied Electromagnetics*, 11, pp. 95–105.
21. Karimi, M., 2020. Theoretical model to determine the effective thermal conductivity coefficient of the first clad region in photonic crystal fiber with a hexagonal structure. *Thermal Science and Engineering Progress*, 19, 100574 (<https://doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100574>).
22. Holman, J.P., 1989. Heat Transfer. McGraw-Hill.