



## Research Article

# Characterization of the Linear Viscoelastic Properties of Materials by the Results of Nanoindentation Test

Hossein Salami and Taha Goudarzi \*

Department of Mechanical Engineering of Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic), Tehran, Iran.

\* corresponding author: ([tgoudarzi@aut.ac.ir](mailto:tgoudarzi@aut.ac.ir))

## Article Info

### Article history:

Received: 24 November 2024

Revised: 1 February 2025

Accepted: 1 March 2025

### Keywords:

Nanoindentation,  
linear viscoelastic behavior,  
non-convex optimization,  
Genetic Algorithm (GA).

## Abstract

In this paper, the linear viscoelastic properties of materials are calculated using results from the nanoindentation test. The generalized standard linear solid (GSLs) viscoelastic models describe the material behavior, with the mechanical properties (model parameters) obtained by minimizing the error between the GSLs response and the experimental results under the same loading conditions. Since the test data are in the force-displacement not the stress-strain form, obtaining the material properties is less straightforward than the conventional tests (e.g., the tensile test) and requires analytical solutions. Specifically, the Hertzian contact theory and its closed-form solution for spherical indentation into a semi-infinite medium are employed. We fit the experimental results to the closed-form solutions, with error minimized via the least squares. This leads to a non-linear, constrained, and non-convex optimization problem, necessitating robust global optimization strategies beyond conventional local methods. Considering these challenges, the model coefficients—meaningful in the experiment time span—are computed using a genetic algorithm (GA) suited for the optimization. Several examples demonstrate ability of the method to accurately characterize the viscoelastic responses from nanoindentation test results, showing up to 50% difference compared with the values reported in the open literature.

## Introduction

The accurate determination of viscoelastic properties for many materials, like thin layers, and various biological tissues, is critical but often challenging due to limited availability or infeasibility of conventional tests like the tensile test. Non-destructive techniques, particularly nanoindentation, are widely employed to characterize the behavior of these materials. However, extracting viscoelastic properties from nanoindentation data requires solving a non-linear, constrained, and notably non-convex optimization problem. Despite extensive research over recent decades, many studies have overlooked the non-convex nature of the needed optimization, leading to limitations in accuracy and reliability.

Several prior works, including those by Bembey et al. [16] and Cheng et al. [19], utilized standard optimization tools such as Levenberg-Marquardt or the MATLAB `fmincon` to fit experimental data, but these methods are prone to local minima and may fail to find globally optimal solutions of non-convex problems. Even advanced methods such as inverse iterative finite element techniques [20] exhibit sensitivity to initial conditions and may converge to suboptimal solutions for an inherently non-convex problem.

The paper emphasizes the importance of recognizing the non-convex and constrained nature of the characterization problem. To address these challenges, a GA, known for its robustness in non-convex optimization, is employed. The study demonstrates that considering these critical aspects

## To Cite this article:

Salami, H. and Goudarzi, T. 2025. Characterization of the linear viscoelastic properties of materials by the results of nanoindentation test, Sharif Mechanical Engineering Journal, 41(1), 69-81. <https://doi.org/10.24200/ij40.2025.65594.1724>

substantially improves the accuracy of the linear viscoelastic property characterization from the results of the nanoindentation test.

## Methodology

The nanoindentation test can be conducted as load-controlled or displacement-controlled. This paper focuses on the load-controlled mode, wherein a specified force is applied to the sample at each moment, and the corresponding displacement is measured, i.e., the loading function is always known, and displacement is recorded over time.

Equation (16) serves as a basis for characterizing the linear viscoelastic properties of materials from nanoindentation results. Experimental data obtained from nanoindentation tests on materials exhibiting linear viscoelastic behavior under the ramp-hold loading with a spherical indenter, expressed as displacement versus time, are fitted to the behavior predicted by Equation (16), allowing calculation of the model constants  $B_i$  and  $\tau_i$ . Notably, since biological materials typically contain water, they are generally assumed incompressible (their Poisson's ratio considered near 0.5).

To characterize the behavior, Equation (16) is fitted to the nanoindentation data using the least squares method outlined in Equation (17), which requires minimizing an error function dependent on the mechanical properties. Although the relationships are non-linear with respect to the material parameters, having an explicit function form simplifies the optimization. Importantly, the mechanical properties must be constrained to remain positive to ensure physically meaningful results.

A significant challenge affecting the optimization process is the non-convexity of the error function. The non-convexity implies the presence of multiple local minima, making the solution sensitive to the initial guess. Conventional convex optimization methods may converge to local minima if the initial guess is close, potentially yielding suboptimal or physically invalid parameter values. Therefore, special treatment of the optimization approach is necessary to obtain reliable and meaningful viscoelastic properties.

## Results and Discussion

This section evaluates the effectiveness of the proposed framework for predicting the linear viscoelastic properties from the nanoindentation test results acquired from the literature. Nanoindentation results for cartilage properties

under the ramp-hold loading are reported in [11]. Using the ramp part from [11], the initial shear modulus is estimated at 0.252 MPa here versus 0.32 MPa reported, both within typical macroscopic range of 0.1–1 MPa.

Using the ramp loading data from [16], the initial shear modulus for PMMA was calculated as 1.29 GPa here, compared with 1.37 GPa in [16].

Nanoindentation results for PL\_1 polymer under four different ramp-hold tests at varying ramp times (20, 50, 100, 200 s) are reported in [28]. Curve fitting using a genetic algorithm shows that the experimental trend can easily be captured with different number of material parameters (Tables 2 and 3, Figure 7).

Extrapolating material behavior beyond the experimental time range caused notable errors in [28]. Applying the current method with the shortest ramp time (20 s) similarly fails to predict the behavior for longer times accurately (Figure 8), however, using the parameters computed at the longest ramp time (200 s) can accurately predict the response for the other studies (Figure 9). These findings emphasize that the characterization is reliable primarily within the experiment time span and not beyond that.

## Conclusion

This study presents a robust framework for characterizing the viscoelastic behavior of materials via the nanoindentation test results, addressing long-standing challenges in non-convex optimization. The proposed GA-based approach demonstrates superior accuracy and reliability compared with conventional methods.

Inherent to the nature of the optimization problem which is non-linear, constrained, and non-convex, mostly overlooked in prior studies a GA was used to solve the problem effectively, producing satisfactory results.

Recommendations include: using fewer material parameters for experiments over short times, using longer test times for better curve fitting and characterization. The characterized model parameters are only valid within the time span of the test; extrapolations may lead to significant errors. Due to the non-convexity, solutions are nonunique but valid when accurately follow the experimental results.

**Funding:** This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

**Conflicts of Interest:** The authors declare no conflict of interest.

**Author Contributions:** All authors contributed to the reported work for conceptualization, methodology, validation, writing-review and editing, and supervision.



## محاسبه‌ی خواص ویسکوالاستیک خطی مواد با استفاده از نتایج آزمایش نانوایندنتیشن

حسین سلامی و طه گودرزی\*

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)، ایران.

\*نویسنده مسئول (tgoudarzi@aut.ac.ir)

## چکیده

در نوشتار حاضر، به محاسبه‌ی خواص ویسکوالاستیک خطی مواد با استفاده از نتایج آزمایش نانوایندنتیشن پرداخته شده است. مدل‌های ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی توسعه‌یافته برای مدل‌سازی رفتار مواد مذکور استفاده می‌شود. از آنجا که نتایج آزمایش نانوایندنتیشن بر حسب نیرو-جابجایی است، به‌دست‌آوردن خواص از آن‌ها، نیازمند داشتن حل‌های تحلیلی مسئله است. برای این منظور از مسئله‌ی تماسی هرتزی و حل تحلیلی تماس یک کره با محیط نیمه‌بی‌نهایت استفاده شده است. کمینه‌سازی خطای برازش با استفاده از روش کمترین مربعات انجام شده است، که خود یک مسئله‌ی بهینه‌سازی مقید، غیرخطی، و غیرمحدب را نتیجه می‌دهد؛ که حل آن نیازمند تمهیدهای ویژه‌ای است. در نوشتار حاضر، ضرایب مدل‌های ویسکوالاستیک به‌صورت ضرایبی معنادار در بازه‌ی زمانی آزمایش، با استفاده از الگوریتم ژنتیک، که برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی مذکور مناسب است، محاسبه می‌شود. در مثال‌های متعدد، توانایی روش ارائه‌شده در نوشتار حاضر در مقایسه با روش‌های موجود در منابع برای مشخصه‌یابی رفتار ویسکوالاستیک خطی مواد نشان داده شده است، که در برخی موارد تفاوت‌هایی تا ۵۰٪ مشاهده شده است.

## اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۰۴

تاریخ اصلاحیه: ۱۴۰۳/۱۱/۱۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۲/۱۱

## واژگان کلیدی:

نانوایندنتیشن،

رفتار ویسکوالاستیک خطی،

بهینه‌سازی غیرمحدب،

الگوریتم ژنتیک.

## ۱. مقدمه

محاسبه‌ی خواص ویسکوالاستیک بسیاری از مواد که به مقدار زیاد در دسترس نیست و یا نمی‌توان آن‌ها را تحت آزمایش‌های مرسوم همانند آزمون کشش قرار داد، در بسیاری از کاربردها، اهمیت ویژه‌ای دارد. برای ذکر مثال‌هایی از مواد مذکور می‌توان به تومورها، چشم، پرده‌ی گوش، پوست، و دیگر اعضای بدن انسان و حیوان‌ها، لایه‌های نازک از مواد، و بسیاری موارد دیگر اشاره کرد. [۱-۱۰]

برای محاسبه‌ی خواص چنین موادی، باید از آزمایش‌های غیرمخرب استفاده کرد، که یکی از متداول‌ترین آن‌ها برای این منظور آزمایش نانوایندنتیشن است.

برای مشخصه‌یابی رفتار ویسکوالاستیک مواد با استفاده از نتایج آزمایش نانوایندنتیشن نیاز است تا یک مسئله‌ی بهینه‌سازی حل شود؛ که در بسیاری از موارد مقید، غیرخطی، و از همه مهم‌تر غیرمحدب است. مشخصات خاص مسئله‌ی بهینه‌سازی ذکرشده، استفاده از روش‌های بهینه‌سازی خاصی را برای حل آن و درنهایت، مشخصه‌یابی صحیح رفتار ویسکوالاستیک خطی می‌طلبد. [۱۰-۱۸]

با توجه به تلاش‌های انجام‌شده در چند دهه‌ی اخیر برای مشخصه‌یابی رفتار مواد از نتایج آزمایش نانوایندنتیشن، در بیشتر موارد نیاز به بهینه‌سازی

غیرمحدب مورد توجه نبوده است، که این امر خود موجب برخی کاستی‌ها شده است. در معدود نوشتارهایی که روش انجام بهینه‌سازی در آن‌ها به صراحت گزارش شده است، بی‌توجهی به این مورد مشهود است. مثلاً، بمبی<sup>۱</sup> و همکاران (۲۰۰۶)، [۱۶] از نرم‌افزار آرچین<sup>۲</sup> و یک بهینه‌سازی غیرخطی بازگشتی استفاده کرده‌اند. همچنین، چنگ<sup>۳</sup> و همکاران (۲۰۰۵)، [۱۹] از مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی سه المانی برای مدل‌سازی رفتار پلی‌استرین<sup>۴</sup> استفاده کرده‌اند. حلی تحلیلی با استفاده از روش معادله‌های تابعی<sup>۵</sup>، برای جسم نیمه‌بی‌نهایت ویسکوالاستیک به‌دست آمده است. برای محاسبه‌ی ضرایب مدل پیشنهادی که پارامترهای خواص ویسکوالاستیک ماده‌ی موردنظر هستند، معادله‌های مدل مذکور بر نتایج آزمایش‌های خزش و آسودگی برازش شده است. نتایج داده‌های تجربی آزمایش‌های خزش و آسودگی با روش بارگذاری پله‌ای<sup>۶</sup> تولید و برای برازش معادله‌ها به آن از زیربرنامه‌ی غیرخطی لونبرگ-مارکوات<sup>۷</sup> از برنامه‌ی KaleidaGraph<sup>TM</sup> استفاده شده است. این روش برای یافتن کمینه‌های محلی مناسب است؛ ولی در مسئله‌ی حاضر، که غیرمحدب است، روش مناسبی نیست. لیو<sup>۸</sup> و همکاران (۲۰۰۹)، [۲۰] برای حل مسئله‌ی شناسایی پارامترهای مدل ساختاری و تعیین خواص

5 Method of functional equations

6 Step loading

7 Nonlinear Levenberg-Marquardt Routine

8 Liu

1 Bembey

2 origin 6

3 Cheng

4 Polystyrene

استناد به این مقاله:

سلامی، حسین و گودرزی، طه، ۱۴۰۴. محاسبه‌ی خواص ویسکوالاستیک خطی مواد با استفاده از نتایج آزمایش نانوایندنتیشن. مهندسی مکانیک شریف، ۴۱(۱)، صص. ۶۹-۸۱

<https://doi.org/10.24200/j40.2025.65594.1724>

## ۲. نانوایندنتیشن

در بخش حاضر، به توضیح روش نانوایندنتیشن برای محاسبه‌ی خواص مکانیکی مواد با رفتار ویسکوالاستیک همراه با کارآمدی و محدودیت‌های آن پرداخته شده است.

### ۱.۲ کاربرد نانوایندنتیشن در محاسبه‌ی خواص مواد

دستگاه نانوایندنتیشن دارای یک سنجه<sup>۵</sup> با هندسه‌های نوک گوناگون است، که بر سطح نمونه قرار می‌گیرد و با اعمال نیرو و یا جابجایی در نمونه نفوذ می‌کند. پیشوند نانو بیشتر ناظر بر قابلیت سنجه برای جابجایی‌های نانومتری است، هر چند استفاده در مقادیر جابجایی بزرگ‌تر نیز بسیار مرسوم است. این جابجایی‌های کوچک باعث می‌شود استفاده از مدل ویسکوالاستیک خطی نیز با تقریب خوبی صحیح باشد. کوچک‌بودن جابجایی نسبی و نفوذ در مسئله به موارد دیگری نیز وابسته است، که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به هندسه‌ی نوک سنجه اشاره کرد. نوک سنجه در شکل‌های مختلف هرمی، مخروطی، استوانه‌ای، و کروی موجود است. شکل‌های هندسی با نوک تیز، مانند هرمی و مخروطی، باعث به‌وجود آمدن ناحیه‌ای پلاستیک بلافاصله پس از بارگذاری، در ناحیه‌ی زیرین نقطه‌ی بارگذاری می‌شود، که گرچه در مواد سخت‌تر مانند سرامیک‌ها، ناحیه‌ی مذکور کوچک‌تر است؛ ولی در مواد نرم مانند بسیاری از مواد زیستی، نامطلوب بوده و باعث تخطی از فرضیه‌های لازم برای مدل‌سازی خطی رفتار و در مواردی خرابی نمونه می‌شود. با توجه به موارد ذکرشده در بیشتر موارد برای مشخصه‌یابی رفتار مواد نرم از نوک‌های کروی استفاده می‌شود، هر چند برای نوک‌های کروی و مخروطی بارهای وارده، تابع خطی جابجایی‌ها نیستند.

مورد دیگری که باید به آن توجه شود، اثر اصطکاک بین سنجه و نمونه است، که به‌صورت رایج در حل‌های تحلیلی از آن صرف‌نظر می‌شود. نشان داده شده است که فرض اخیر برای ضرایب اصطکاک کوچک‌تر از ۰/۱۵، تقریب مناسبی است و برای سایر موارد می‌توان به سادگی از اصطکاک کلمب برای مدل‌سازی اصطکاک استفاده کرد.<sup>[۲۴]</sup>

خطا در اثر عواملی، از قبیل: اثر لایه‌ی زیرین، چسبیدگی نوک سنجه به ماده، واکنش شیمیایی ماده با نوک سنجه، و به‌وجود آمدن بارهای الکترواستاتیک بین نوک سنجه و نمونه می‌تواند ایجاد شود. حتی از آنجایی که ساختار و خواص مکانیکی بسیاری از مواد زیستی می‌تواند نسبت به درصد دی‌اکسیدکربن، اکسیژن، و ترکیب‌های هوای محیط حساس باشد، تنظیم شرایط محیطی نیز می‌تواند مهم باشد و در آزمایش ایجاد خطا کند. در صورت وجود، هر یک از موارد مذکور باید شناسایی شود و جهت بالابردن دقت آزمایش در صدد رفع خطای ناشی از آن برآمد.

در حالی که آزمون کشش، پاسخ مکانیکی را در تمام نمونه میانگین‌گیری می‌کند؛ یک آزمون تماسی، رفتار محلی در ناحیه‌ی تماس را اندازه‌گیری می‌کند؛ لذا نانوایندنتیشن برای کاوش ناهمگنی‌های محلی نیز ایده‌آل است و می‌تواند برای به‌دست آوردن نقشه‌ی ناهمگنی‌های محلی استفاده شود.<sup>[۲۵]</sup>

رفتار مکانیکی وابسته به زمان پلیمرها و بسیاری از مواد زیستی را می‌توان با مدل‌های ویسکوالاستیک مدل‌سازی کرد. برای به‌دست آوردن پاسخ

مکانیکی مجموعه‌ای از ژل‌های پلیمری کراتون<sup>۱</sup>، از روش المان محدود معکوس تکرارشونده<sup>۲</sup> استفاده کرده‌اند. تابع کمینه‌شده، مربع خطای بین منحنی نیرو-جابجایی شبیه‌سازی شده و نتایج آزمایش است، که به‌صورت شیب-ثابت-شیب بارگذاری و باربرداری انجام گرفته است. تابع fmincon در جعبه‌ابزار بهینه‌سازی نرم‌افزار متلب<sup>۳</sup> برای این منظور استفاده شده است، که کمینه‌ی یک تابع مقید را با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی مربعی دنباله‌ای<sup>۴</sup> تعیین می‌کند. حدود تقریبی بالایی و پایینی به‌کاررفته در الگوریتم مربوط به پارامترهای خواص مکانیکی ماده است و قیود را مشخص می‌کنند. تابع fmincon نیز کمینه‌های محلی را پیدا می‌کند و در مسئله‌ی غیرمحدب نمی‌تواند کارایی مناسبی از خود نشان دهد.

مشکل اساسی در روش‌های اخیر آن است که روش‌های مذکور، کمینه‌های محلی را پیدا می‌کنند و این در حالی است که مسئله‌ی موجود بیش از یک کمینه دارد و در نتیجه ممکن است تا الگوریتم‌های مذکور به جای کمینه‌ی سراسری در کمینه‌های محلی قرار گیرند و پاسخی با دقت نامطلوب یا فاقد اعتبار فیزیکی نتیجه دهند.

مشخصه‌یابی خواص مکانیکی با بهینه‌سازی خطای میان مدل ساختاری و آزمایش تجربی نه فقط در مدل‌های ویسکوالاستیک مورد بحث در نوشتار حاضر، بلکه در مدل‌های الاستیک غیرخطی نیز کاربرد فراوان دارد.<sup>[۲۱-۲۳]</sup> در نوشتار حاضر، تمرکز بر محاسبه‌ی خواص مکانیکی مواد ویسکوالاستیک با استفاده از نتایج آزمایش نانوایندنتیشن است، که منتهی به یک مسئله‌ی بهینه‌سازی شده است. مشخصه‌یابی رفتار خطی ویسکوالاستیک مواد از این آزمایش یک بهینه‌سازی غیرمحدب، غیرخطی و مقید است، که در مشخصه‌یابی‌های انجام‌شده در نوشتارهای مرتبط در دو دهه‌ی اخیر مورد غفلت بوده است. در نوشتار حاضر نشان داده شده است که بهینه‌سازی مورد نیاز از نوع غیرمحدب است. همچنین با توجه به این نکته که ثابت‌های مادی مدل‌های ویسکوالاستیک باید مثبت باشند، بهینه‌سازی مقید است. با توجه به وجود برخی ثابت‌ها در آرگومان تابع نمایی، بهینه‌سازی غیرخطی نیز است. در نوشتار حاضر، به منظور نشان دادن آنکه بهینه‌سازی بدون توجه به نکات فوق دقت مناسبی ندارد، با استفاده از الگوریتم ژنتیک که برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرمحدب مناسب است، خواص ویسکوالاستیک خطی محاسبه شده است.

مطالب مورد بحث در نوشتار حاضر بدین صورت ارائه شده است: در بخش دوم، روش نانوایندنتیشن به‌صورت اجمالی معرفی و کاربرد آن در محاسبه‌ی خواص مکانیکی مواد بیان شده است. در بخش سوم، پاسخ الاستیک و ویسکوالاستیک با استفاده از تنش‌های تماسی هرگز برای مسئله‌ی نانوایندنتیشن با سنجه‌ی کروی به‌دست آمده است. در بخش چهارم، مدل ویسکوالاستیک خطی استفاده‌شده برای حل مسئله معرفی و نرمی خزشی مدل اخیر محاسبه شده است. در بخش پنجم، جهت برازش رفتار تحلیلی به نتایج آزمایشگاهی و پیداکردن ثابت‌های ماده، یک مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول‌بندی و نشان داده شده است، که مسئله‌ی بهینه‌سازی مذکور، علاوه بر غیرخطی و مقیدبودن، غیرمحدب نیز بوده است، که برای حل آن از یک الگوریتم ژنتیک ساده استفاده شده است. در نهایت، در بخش آخر نتیجه‌گیری ارائه شده است.

که در آن  $\sigma$  تنش،  $\varepsilon$  کرنش و  $t$  زمان است.

پاسخ مسئله‌ی تماسی هرگز برای کره‌ی صلب و محیط نیمه‌بی‌نهایت الاستیک خطی مطابق رابطه‌ی ۳ است. مدول کاهش یافته، با فرض صلب بودن سنجه نسبت به جسم، برای نمونه‌ی همسانگرد به صورت رابطه‌ی ۵ است: [۱۶]

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2} = \frac{2G}{1-\nu} \quad (5)$$

که در آن  $E$  و  $\nu$  به ترتیب مدول الاستیک و ضریب پواسون محیط نیمه‌بی‌نهایت همسانگرد هستند. با جایگذاری رابطه‌ی ۵ در رابطه‌ی ۳، رابطه‌ی ۶ نتیجه می‌شود:

$$\delta^{\frac{3}{2}} = \frac{3(1-\nu)}{4\sqrt{R}} \frac{F}{2G} \quad (6)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۵) و تعویض  $F/2G$  با معادل ویسکوالاستیک آن و نیز با در نظر گرفتن جسم نیمه‌بی‌نهایت برای رابطه‌ی ۴ می‌توان رابطه‌ی ۶ را برای محیط نیمه‌بی‌نهایت ویسکوالاستیک به صورت رابطه‌ی ۷ نوشت: [۲۶]

$$\delta(t)^{\frac{3}{2}} = \frac{3(1-\nu)}{4\sqrt{R}} \int_{-\infty}^t J(t-t') \frac{dF(t')}{dt'} dt' \quad (7)$$

در نوشتار حاضر، از مدل جامد استاندارد خطی (SLS) سری برای محاسبه‌ی نرمی خزشی  $J(t)$  استفاده شده است.

#### ۴. مدل سازی رفتار خطی مواد براساس تئوری ویسکوالاستیک خطی

در بخش حاضر، به مدل سازی مسئله بر پایه‌ی مدل های ویسکوالاستیک پرداخته شده است.

##### ۱.۴. مدل جامد استاندارد خطی

رابطه‌ی ساختاری مدل جامد استاندارد خطی با سه پارامتر، که در آن از دو فنر خطی و یک میراگر خطی مطابق شکل ۱ استفاده شده است، مطابق رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید: [۸]

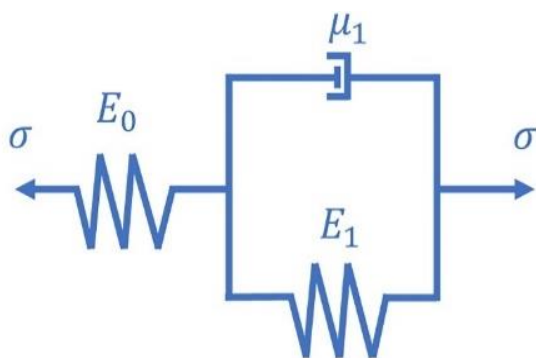


Figure 1. Schematic of the three-parameter standard linear solid.

شکل ۱. شماتیک مدل جامد استاندارد خطی سه پارامتری.

ویسکوالاستیک مسئله با انتقال معادله‌های حاکم به فضای لاپلاس می‌توان با استفاده از اصل تناظر<sup>۱</sup> و با محاسبه‌ی پاسخ الاستیک مسئله‌ی تماسی مورد نظر، پاسخ مسئله‌ی متناظر ویسکوالاستیک را به دست آورد. [۲۶]

#### ۳. تنش تماسی هرگز

در محل تماس سنجه با نمونه، تنش‌هایی از نوع تنش تماسی هرگز به وجود می‌آیند، که به شدت محلی هستند؛ یعنی در محل تماس مقادیر قابل ملاحظه‌ای دارند و با فاصله گرفتن از آن به شدت کاهش می‌یابند.

#### ۱.۳. جواب دقیق هرگز برای تنش تماسی نیم کره و محیط نیمه‌بی‌نهایت الاستیک

تئوری تماسی کلاسیک بر تماس بدون چسبندگی<sup>۲</sup>، که هیچ نیروی کششی در منطقه‌ی تماس اجازه‌ی رخ دادن ندارد، متمرکز است و اجسام تماس یافته بدون هیچ نیروی چسبندگی قابل جدا شدن هستند. فرض کوچک بودن کرنش‌ها و باقی ماندن رفتار در محدوده‌ی الاستیک برای تعیین پاسخ مسئله‌ی تماسی هرگز از فرض‌های ضروری است. زمانی که فرض مذکور نقض شود، پیچیدگی مسئله مضاعف می‌شود و چنین مسائل تماسی را معمولاً غیرهرتزی گویند. برای مدل سازی مسئله‌ی ایندنتیشن از آنجا که سنجه نسبت به ماده‌ی مورد نظر، که در نوشتار حاضر ماده‌ای نرم (مانند مواد زیستی) در نظر گرفته شده است، بسیار سفت تر است و از اثر لایه‌ی زیرین با فرض زیاد بودن ضخامت ماده صرف نظر شده است، می‌توان مسئله را به صورت تنش تماسی بین یک کره با یک جسم نیمه‌بی‌نهایت<sup>۳</sup> در نظر گرفت، که برای آن روابط ۱ الی ۳ صادق است: [۲۷]

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (2)$$

$$\delta = \left( \frac{9F^2}{16E^*R} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

که در آن  $\delta$  عمق ایندنتیشن در اثر نیروی  $F$ ، شعاع سنجه صلب کره‌ی،  $E^*$  مدول کاهش یافته،  $E_1$ ،  $E_2$  و  $\nu_1$ ،  $\nu_2$  مدول یانگ و ضریب پواسون دو جسم در حال تماس هستند. البته با در نظر گرفتن بسیار سفت تر بودن سنجه نسبت به ماده مورد آزمایش، مدول کاهش یافته‌ی  $E^*$  ساده شده و فقط تابع خواص ماده‌ی مورد آزمایش می‌گردد.

#### ۲.۳. پاسخ ویسکوالاستیک خطی مواد در آزمایش نانواپدنتیشن

با استفاده از نرمی خزشی  $J(t)$ ، که با توجه به مدل ویسکوالاستیک استفاده شده تعیین می‌شود، می‌توان رابطه‌ی کرنش- تنش ماده‌ی ویسکوالاستیک را به صورت رابطه‌ی ۴ بیان کرد: [۸]

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-t') d\sigma(t') = \int_{-\infty}^t J(t-t') \frac{d\sigma(t')}{dt'} dt' \quad (4)$$

در هر لحظه نیروی مشخصی به نمونه وارد و جابجایی و یا به عبارت دیگر، نفوذ سنج در نمونه اندازه‌گیری می‌شود. بدین ترتیب همواره تابع بارگذاری معلوم است و جابجایی در اثر آن در هر لحظه توسط دستگاه با دقت بسیار زیادی اندازه‌گیری می‌شود.

برای به دست آوردن روابط، تابع بارگذاری متناسب با شرایط مرسوم آزمایش به صورت شیب و یک مقدار ثابت<sup>۱</sup> پس از آن، به صورت رابطه‌ی ۱۵ در نظر گرفته می‌شود:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_{max}}{t_r} t & 0 \leq t \leq t_r \\ F_{max} & t \geq t_r \end{cases} \quad (15)$$

که در آن،  $t_r$  مدت زمان بارگذاری به صورت شیب است. با جایگذاری رابطه‌ی ۱۵ و رابطه‌ی نرمی خزشی (رابطه‌ی ۱۱) در رابطه‌ی ۷، رابطه‌ی بین جابجایی سنج و نیروی وارده بر حسب خواص ماده و هندسه‌ی سنج مطابق رابطه‌ی ۱۶ به دست می‌آید:

$$\delta(t)^{\frac{3}{2}} = \begin{cases} \frac{3(1-\nu)F_{max}}{4t_r\sqrt{R}} \left( B_0 t - \sum_{i=1}^n B_i \tau_i (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right) & 0 \leq t \leq t_r \\ \frac{3(1-\nu)F_{max}}{4t_r\sqrt{R}} \left( B_0 t_r + \sum_{i=1}^n B_i \tau_i e^{-\frac{t_r}{\tau_i}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_i}}) \right) & t \geq t_r \end{cases} \quad (16)$$

رابطه‌ی ۱۶ می‌تواند برای مشخصه‌یابی خواص مواد ویسکوالاستیک خطی از نتایج آزمون نانوایندنتیشن استفاده شود. بدین منظور نتایج آزمایشگاهی آزمون نانوایندنتیشن بر روی مواد با رفتار ویسکوالاستیک خطی تحت بارگذاری شیب-ثابت با سنجی کروی که به صورت داده‌های جابجایی بر حسب زمان است، با رفتار معادله‌ی ۱۶ برازش می‌شود و ثابت‌های  $B_i$  و  $\tau_i$  محاسبه می‌شوند. این تذکر لازم است که با توجه به وجود آب در مواد زیستی، معمولاً مواد مذکور، تراکم‌ناپذیر فرض می‌شوند و ضریب پواسون آن‌ها بسیار نزدیک به ۰/۵ در نظر گرفته می‌شود.

### ۵. بهینه‌سازی جهت مشخصه‌یابی رفتار

در بخش حاضر، به بهینه‌سازی جهت برازش معادله‌ی ۱۶ بر نتایج آزمایشگاهی آزمون نانوایندنتیشن جهت مشخص کردن خواص مکانیکی (ثابت‌های معادله‌ی ۱۶) و محدودیت‌های آن پرداخته شده است.

### ۱.۵. روش بهینه‌سازی

برای مشخصه‌یابی رفتار با برازش منحنی حاصل از معادله‌ی ۱۶ بر نتایج آزمایش نانوایندنتیشن از روش کمترین مربعات<sup>۲</sup> مطابق رابطه‌ی ۱۷ استفاده شده است:

$$Er(B_i, \tau_i) = \sum_{i=1}^n (\delta_{th}(t_i) - \delta_{exp}(t_i))^2 \quad (17)$$

که در آن،  $\delta_{th}(t_i)$  نفوذ تئوری در زمان  $t_i$  با استفاده از رابطه‌ی ۱۶ و  $\delta_{exp}(t_i)$  مقدار نفوذ حاصل از نتایج آزمایشگاهی در زمان

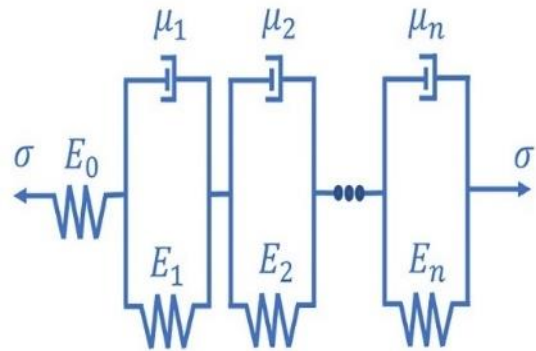


Figure 2. Schematic of the generalized standard linear solid model.

شکل ۲. شماتیک مدل جامد استاندارد خطی تعمیم‌یافته.

$$\sigma + \frac{\mu_1}{E_0 + E_1} \dot{\sigma} = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \varepsilon + \frac{\mu_1 E_0}{E_0 + E_1} \dot{\varepsilon} \quad (8)$$

که در آن  $E_0$ ،  $E_1$  مدول الاستیسیته،  $\mu_1$  ویسکوزیته بوده و علامت نقطه بالای متغیرها بیانگر مشتق زمانی است.

### ۲.۴. پاسخ مدل جامد استاندارد خطی به آزمایش خزش

در آزمایش خزش، تابع تنش به صورت رابطه‌ی ۹ تعریف می‌شود:

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \quad (9)$$

که در آن،  $H(t)$  تابع پله‌ی هویساید و  $\sigma_0$  تنش ثابت اولیه هستند. با جایگذاری رابطه‌ی ۹ در رابطه‌ی ۸ و حل معادله‌ی دیفرانسیل حاصل، نرمی خزشی به صورت رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \right) - \frac{1}{E_1} e^{-\frac{E_1 t}{\mu_1}} \quad (10)$$

برای مدل‌های با المان‌های بیشتر مطابق شکل ۲، رابطه‌ی ۱۱ به دست خواهد آمد:<sup>[۸]</sup>

$$J(t) = B_0 - \sum_{i=1}^n B_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (11)$$

که در آن ثوابت  $B_0$ ،  $B_i$  و  $\tau_i$  به صورت روابط ۱۲ الی ۱۴ تعریف می‌شوند:

$$B_0 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{E_k} \quad (12)$$

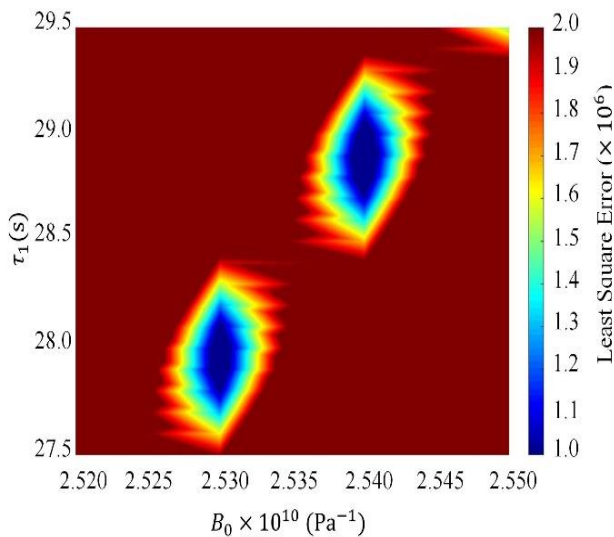
$$B_i = \frac{1}{E_i} \quad (13)$$

$$\tau_i = \frac{\mu_i}{E_i} \quad (14)$$

### ۳.۴. مشخصه‌یابی خواص ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی مواد

آزمایش نانوایندنتیشن در دو حالت بار کنترل‌شده یا جابجایی کنترل‌شده انجام می‌گیرد. در نوشتار حاضر، تمرکز بر حالت بار کنترل‌شده است. در این حالت،





**Figure 3. Representation of two local minima of the error in a limited range of the material parameters for the three-element model (the third material parameter is assumed to be constant for the sake of illustration).**

شکل ۳. نمایش دو کمینه‌ی محلی خطای بهینه‌سازی در یک بازه‌ی تغییرات محدود از ثابت‌های مادی برای یک مدل سه المانی (ثابت مادی سوم جهت نمایش ثابت فرض شده است).

$$x_2 : \quad B_0 = 2.55 \times 10^{-10}, \quad \tau = 30.1$$

که در شکل ۳ به عنوان کمینه به‌دست آمده‌اند و در نظر گرفتن  $t=0.5$  در رابطه‌ی ۱۸، نقطه‌ی میانی به این صورت نتیجه می‌شود:

$$x_3 : \quad B_0 = 2.54 \times 10^{-10}, \quad \tau = 29.15$$

با جایگذاری در رابطه‌ی ۱۷، خطای بی‌بُعدشده‌ی کمترین مربعات نقاط مذکور به این صورت به‌دست می‌آید:

$$Er(x_1) = 1.2305 \times 10^{-6}$$

$$Er(x_2) = 1.2068 \times 10^{-6}$$

$$Er(x_3) = 1.2331 \times 10^{-6}$$

برای محذب‌بودن رابطه‌ی ۱۷، باید نابرابری (رابطه‌ی ۱۹) به ازای تمامی مقادیر ورودی از دامنه از جمله مقادیر اخیر برقرار باشد:

$$\frac{Er(x_1)}{2} + \frac{Er(x_2)}{2} \geq Er(x_3)$$

$$\frac{1.2305 \times 10^{-6}}{2} + \frac{1.2068 \times 10^{-6}}{2} = 1.2187 \times 10^{-6} \not\geq 1.2331 \times 10^{-6}$$

در نتیجه شرط محذب‌بودن برای نقاط انتخابی فوق برقرار نیست و بنابراین تابع موردنظر غیرمحذب است.

لذا، مسئله‌ی بهینه‌سازی پیش رو جهت مشخص کردن ضرایب مادی در رابطه‌ی ۱۷، یک مسئله‌ی غیرمحذب، غیرخطی و مقید است. برای بهینه‌سازی

$t_i$  و  $Er(B_i, \tau_i)$  خطای کمترین مربعات هستند، که تابعی از پارامترهای خواص ماده یعنی ثابت‌های  $B_i$  و  $\tau_i$  است.

برای برازش منحنی باید تابع رابطه‌ی ۱۷، که برحسب خواص مکانیکی ماده است، کمینه شود. همان‌طور که از شکل روابط پیداست، به‌دلیل حضور برخی خواص مکانیکی ( $\tau_i$ ) در آرگومان تابع نمایشی، روابط مذکور نسبت به عبارت‌های خواص ماده، غیرخطی هستند. با این حال، وجود تابع به شکل صریح مزیت بهینه‌سازی ذکرشده است. نکته‌ی مهم دیگر این است که خواص مکانیکی ماده نمی‌تواند منفی باشد؛ بنابراین، بهینه‌سازی باید به مثبت‌بودن ثابت‌های مکانیکی مقید باشد، تا مقادیر به‌دست‌آمده از نظر فیزیکی معنادار باشند. یکی از مهم‌ترین عواملی که در روند حل مسئله‌ی بهینه‌سازی برای کمینه‌سازی خطا تأثیر می‌گذارد، غیرمحذب‌بودن تابع خطاست. غیرمحذب‌بودن تابع بدان معناست که تابع، کمینه‌های محلی دارد و در روند حل با روش‌های بهینه‌سازی محذب، اگر حدس اولیه در نزدیکی مقادیر کمینه‌ی محلی باشد، ممکن است پاسخ محدود به نقاط مذکور شود. غیرمحذب‌بودن مسئله باعث می‌شود که مسئله به حدس اولیه بسیار حساس شود، تا حدی که حدس نامناسب ممکن است به پاسخی منجر نشود و یا در کمینه‌های محلی قرار گیرد و پاسخ مطلوب به‌عنوان خروجی حاصل نشود.

## ۲.۵. غیرمحذب‌بودن بهینه‌سازی

برای مسئله‌ی بهینه‌سازی ذکرشده، محذب‌بودن یک تابع به صورت رابطه‌ی ۱۸ تعریف می‌شود: [۲۲]

با در نظر گرفتن تابع خطا به صورت  $f(x): (R^+)^N \rightarrow R^+$ ، اگر برای

هر دو ورودی دلخواه از دامنه‌ی تابع ( $x_1$  و  $x_2$ ) و  $0 \leq t \leq 1$ ، رابطه‌ی ۱۸ وجود داشته باشد:

$$x_3 = (1-t)x_1 + tx_2 \quad (18)$$

آنگاه در صورت برقراری شرط رابطه‌ی ۱۹، برای تمام ورودی‌های دلخواه، تابع محذب است.

$$f(x_1)(1-t) + tf(x_2) \geq f(x_3) \quad (19)$$

با تعریف اخیر، برای اثبات غیرمحذب‌بودن رابطه‌ی ۱۷ کافی است تنها برای دو ورودی مختلف نشان داده شود که رابطه‌ی ۱۹ برقرار نیست.

با استفاده از رسم معادله‌ی ۱۷ برای یک مدل جامد استاندارد خطی با سه ضریب مادی (یک ضریب جهت نمایش ثابت فرض شده است)، می‌توان نشان داد که تابع خطای مذکور بیش از یک کمینه‌ی محلی دارد. در شکل ۳ دو کمینه‌ی محلی آن مشاهده می‌شود.

در شکل ۳، محورهای افقی و عمودی بر حسب پارامترهای خواص ماده و کانتور رسم شده مقدار خطا یا مقدار نهایی رابطه‌ی ۱۷ تقسیم بر اندازه‌ی<sup>۱</sup> مقادیر ورودی<sup>۲</sup> است، تا خطای بی‌بُعدشده به‌دست آید.

با در نظر گرفتن نقاط  $x_1$  و  $x_2$  به این صورت:

$$x_1 : \quad B_0 = 2.53 \times 10^{-10}, \quad \tau = 28.2$$

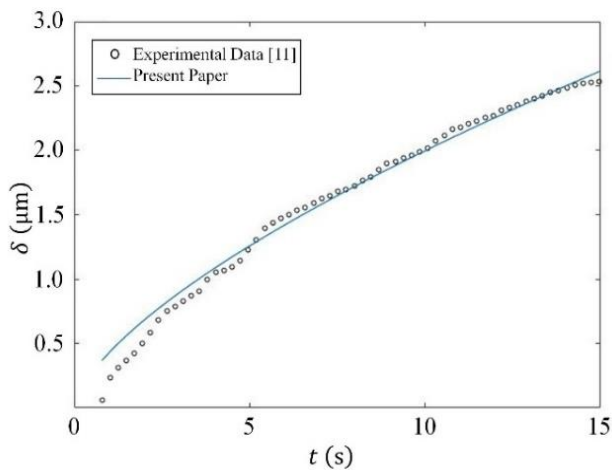


Figure 4. Curve fitting to the experimental results of [11] for cartilage with the 5-element model.

شکل ۴. برازش منحنی بر نتایج تجربی نوشتار اوین (۲۰۱۳)<sup>[۱۱]</sup> بر روی غضروف با مدل ۵ المانی.

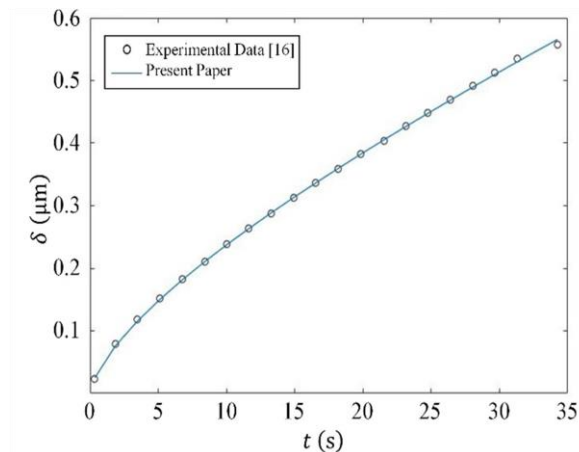


Figure 5. Curve fitting to the experimental results of [16] on PMMA sample with the 5-element model.

شکل ۵. برازش منحنی بر نتایج تجربی نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup> بر نمونه‌ی PMMA با مدل ۵ المانی.

جدول ۱. مقایسه‌ی نتایج گزارش شده در نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup> با نتایج نوشتار حاضر.

Table 1. Comparison of the results reported in [16] and those of the current paper.

| $G_0$ (GPa) [16] | $G_0$ (GPa) | material                           |
|------------------|-------------|------------------------------------|
| 2.18             | 1.63        | bone in ethanol 50% concentration  |
| 3.84             | 2.81        | bone in ethanol 70% concentration  |
| 4.62             | 3.01        | bone in ethanol 100% concentration |

شکل ۶. خط تو پُر مربوط به برازش انجام شده‌ی نوشتار حاضر برای محلول اتانول با غلظت ۱۰۰٪ و خط چین با استفاده از ضرایب ارائه شده در نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup> برای همان سری داده‌های تجربی رسم شده است.<sup>۲</sup>

مسئله‌ی ذکر شده، باید از روش‌های مناسب مانند الگوریتم ژنتیک استفاده شود. هر چند که روش‌های اخیر هیچگاه تضمینی برای ارائه‌ی کمینه‌ی مطلق نمی‌دهند. در ادامه، با استفاده از الگوریتم ژنتیک نرم‌افزار متلب، که برای این بهینه‌سازی مناسب است، به مشخصه‌یابی خواص خطی ویسکوالاستیک برخی مواد از نتایج آزمون‌های نانوایندنتیشن ارائه شده در برخی منابع، [۱۱، ۱۶، ۲۸] پرداخته شده و کیفیت مشخصه‌یابی با الگوریتم توسعه داده شده براساس شناخت از مسئله در مقابل روش‌های به کار برده شده در همان منابع ارزیابی شده‌اند.

### ۳.۵. تحلیل نتایج و مشخصه‌یابی رفتار

حال به بررسی کارآمدی ساختار ایجاد شده در نوشتار حاضر جهت پیش‌بینی و محاسبه‌ی خواص ویسکوالاستیک خطی مواد از نتایج آزمون نانوایندنتیشن پرداخته شده است. برای این منظور، نتایج تجربی آزمایش‌های نانوایندنتیشن گزارش شده در برخی منابع به‌عنوان داده‌ی خام ورودی استفاده شده است.

در نوشتار اوین<sup>۱</sup> (۲۰۱۳)<sup>[۱۱]</sup> برای مشخصه‌یابی خواص غضروف از آزمایش نانوایندنتیشن با بارگذاری شیب- ثابت استفاده شده است. با استفاده از قسمت شیب داده‌های آزمایشی موجود در این نوشتار، [۱۱] برای غضروف، نتایج موجود در شکل ۴ مشاهده می‌شود.

با کمک برازش اخیر، مقدار مدول اولیه برای آزمایش‌های اخیر با روش نوشتار حاضر، ۰/۲۵۲ (MPa) و در نوشتار اوین، ۰/۳۲ (MPa) به‌دست آمده است. مقدار مدول اولیه برای نمونه‌ی آزمایشی استفاده شده در نوشتار اوین، [۱۱] بیان نشده است؛ ولی با توجه به اندازه‌گیری‌های ماکروسکوپی این مقدار بین ۱-۰/۱ (MPa) بوده و مقدار به‌دست آمده‌ی حاصل از برازش انجام شده نیز در بازه‌ی اخیر قرار گرفته است.

در نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup> برای بررسی تأثیر وضعیت جذب آب در خواص مکانیکی استخوان از استخوان در محلول‌هایی با درصد‌های متفاوت از آب و اتانول استفاده شده است. همچنین، در همین نوشتار مشخصه‌یابی نمونه‌ی پلیمری PMMA انجام شده است. هر دو مورد ذکر شده، با استفاده از بارگذاری شیب- ثابت آزمایش نانوایندنتیشن انجام گرفته است. با استفاده از قسمت شیب داده‌های آزمایشی موجود در نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup> برای پلیمر PMMA نتایج موجود در شکل ۵ به‌دست آمده است.

با فرض ضریب پواسون برابر با ۰/۴ برای PMMA، مقدار مدول برشی اولیه‌ی حاصل از برازش اخیر برابر با ۱/۲۹ (GPa) است، که در نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup> این مقدار برابر با ۱/۳۷ (GPa) گزارش شده است.

با فرض ضریب پواسون ۰/۲۳ برای استخوان و با استفاده از قسمت شیب داده‌های آزمایشی موجود در نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup> نتایج موجود در جدول ۱ ارائه شده است، که در آن مقادیر موجود در ستون دوم، مقادیر به‌دست آمده توسط نوشتار حاضر و مقادیر ستون سوم مقادیر موجود در نوشتار بمبی و همکاران ارجاع کامل است.

این تذکر لازم است از آنجا که استخوان ماده‌ای ناهمسانگرد است، مقادیر اخیر، خواص ماده به حساب نمی‌آیند، بلکه سختی مؤثر هستند. در نمودار



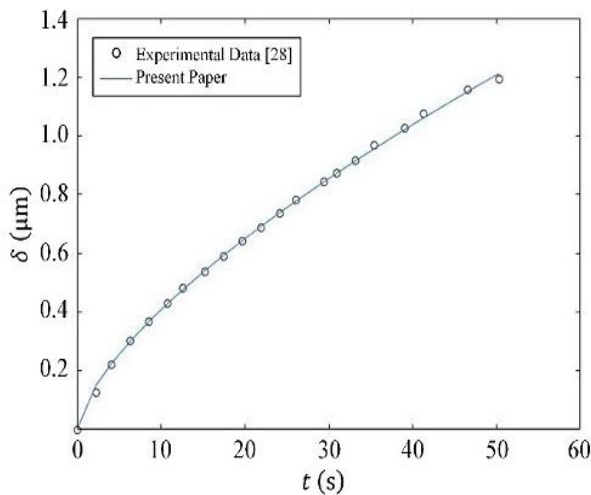


Figure 7. Curve fitting to the experimental results for the ramp loading in 50 seconds of [28] using the 3-element model.

شکل ۷. برازش منحنی بر نتایج تجربی بارگذاری شیب در زمان ۵۰ ثانیه‌ی نوشتار اوین (۲۰۰۵)<sup>[۲۸]</sup> با استفاده از مدل ۳ المانی.

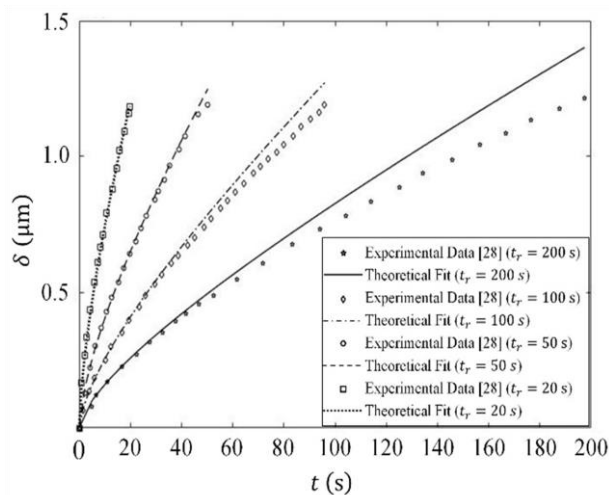


Figure 8. Predicting the behavior using the material parameters obtained from fitting the experimental results of [28] for the ramp loading in 20 seconds.

شکل ۸. پیش‌بینی نتایج با استفاده از برازش نتایج آزمایش نوشتار اوین (۲۰۰۵)<sup>[۲۸]</sup> با پارامترهای به‌دست‌آمده برای بارگذاری شیب در زمان ۲۰ ثانیه.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌جز نتیجه‌ی مربوط به خود آزمایش با زمان شیب ۲۰ ثانیه، سایر نمودارها هم‌پوشانی مناسبی با نتایج آزمایش‌ها برای زمان‌های بزرگ‌تر از ۲۰ ثانیه ندارند و دقت آن‌ها برای پیش‌بینی نتایج در بازه‌های زمانی بزرگ‌تر مناسب نیست.

حال اگر به جای استفاده از نتایج مربوط به آزمایش با زمان شیب ۲۰ ثانیه از خواص به‌دست‌آمده از بهینه‌سازی آزمایش با بیشترین زمان شیب، یعنی ۲۰۰ ثانیه، استفاده شود، خطا در پیش‌بینی سایر آزمایش‌ها به‌وجود نخواهد آمد. نتایج حاصل از این روند در شکل ۹ مشاهده می‌شود.

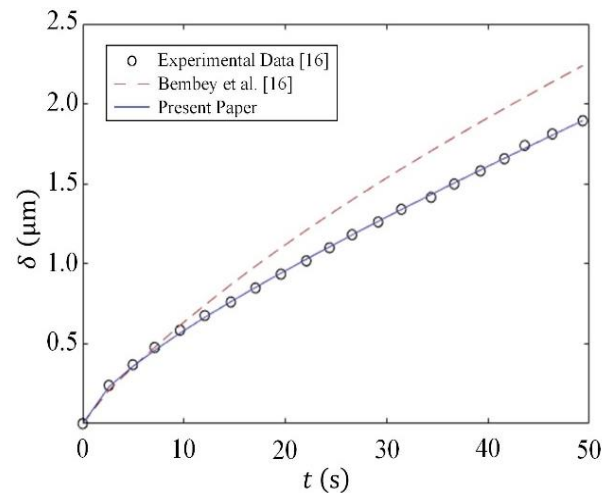


Figure 6. Fitting of this paper (solid line) and using the coefficients presented in [16] (dashed line) with the 5-element model corresponding to the experimental data of [16] for the bone in ethanol with 100% concentration.

شکل ۶. برازش انجام‌گرفته به روش نوشتار حاضر (خط توپُر) و با استفاده از ضرایب ارائه‌شده در نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup> (خط چین)، با مدل ۵ المانی مربوط به داده‌های تجربی مرجع اخیر برای استخوان در مجاورت اتانول با غلظت ۱۰۰٪.

در نوشتار اوین (۲۰۰۵)<sup>[۲۸]</sup> برای مشخصه‌یابی خواص مکانیکی پلیمر PL-1 از آزمایش نانواندنتیشن استفاده شده است. برای این منظور، از ۴ بارگذاری شیب- ثابت با قله‌های نیروی یکسان و زمان‌های شیب به ترتیب ۲۰، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ ثانیه برای آزمایش خزش استفاده شده است. در نوشتار حاضر، نتایج قسمت شیب بارگذاری استفاده شده است. نتایج به‌دست‌آمده با برازش منحنی بر داده‌های آزمایشگاهی نوشتار اوین (۲۰۰۵)<sup>[۲۸]</sup> برای زمان‌های شیب ( $t_r$ ) مختلف، با کمک روابط ذکرشده و استفاده از الگوریتم ژنتیک در جدول‌های ۲ و ۳ ارائه شده‌اند. یک نمونه‌ی منحنی برازش‌شده نیز در شکل ۷ مشاهده می‌شود.

همان‌طور که از نتایج پیداست، تمامی مدل‌ها پاسخ‌هایی را نتیجه داده‌اند که تقریباً با یکدیگر برابر هستند و خطای نسبی زیادی بین آن‌ها مشاهده نمی‌شود. همچنین، این تذکر لازم است که در نوشتار اوین (۲۰۰۵)<sup>[۲۸]</sup> اشاره‌ای به روش بهینه‌سازی نشده است.

در نوشتار اوین (۲۰۰۵)<sup>[۲۸]</sup>، همچنین، برای پیش‌بینی رفتار ویسکوالاستیک ماده در زمان‌هایی بیشتر از زمان آزمایشی که با آن خواص ماده محاسبه شده‌اند، استفاده و نتیجه‌ی آن با نتایج آزمایشگاهی (رفتار در بازه‌های زمانی بزرگ‌تر) مقایسه شده است، که این امر باعث به‌وجود آمدن خطای مشهود در تقریب رفتار ویسکوالاستیک در زمان‌های بزرگ‌تر شده است. برای بررسی این امر با روش موجود در نوشتار حاضر نیز همین روند انجام شده است، یعنی با استفاده از نتایج آزمایش با زمان شیب ۲۰ ثانیه بر نتایج سایر آزمایش‌ها، نموداری رسم شد که نتیجه‌ی آن در شکل ۸ مشاهده می‌شود.

در برخی مراجع، مانند نوشتار بمبی و همکاران (۲۰۰۶)<sup>[۱۶]</sup>، نتایج به‌دست‌آمده نشان‌دهنده‌ی تفاوت روش‌ها، اهمیت بالای خواص، و مغروضات در پاسخ بهینه‌سازی و در نتیجه، الزام بیان دقیق خواص نمونه‌ی موردآزمایش است.

جدول ۲. محاسبه‌ی پارامترهای مادی مدل‌های مختلف براساس نتایج تجربی نوشتار اوین (۲۰۰۵)،<sup>[۲۸]</sup> برای بارگذاری شیب با زمان ۵۰ ثانیه.

**Table 2. Calculation of material parameters for different models based on experimental results of [28] for the ramp loading in 50 seconds.**

| 3 elements | 5 elements | 7 elements | 9 elements | parameter                                              |
|------------|------------|------------|------------|--------------------------------------------------------|
| 4.57       | 4.57       | 4.60       | 4.57       | $B_0 \times 10^{10}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
| 4.96       | 2.15       | 2.05       | 0.90       | $B_1 \times 10^{11}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
| 49.06      | 40.78      | 102.11     | 78.97      | $\tau_1$ (s)                                           |
|            | 2.57       | 2.45       | 1.56       | $B_2 \times 10^{11}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
|            | 6.19       | 44.59      | 59.18      | $\tau_2$ (s)                                           |
|            |            | 0.47       | 2.63       | $B_3 \times 10^{11}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
|            |            | 21.32      | 6.95       | $\tau_3$ (s)                                           |
|            |            |            | 1.37       | $B_4 \times 10^{11}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
|            |            |            | 52.11      | $\tau_4$ (s)                                           |
| 1.23       | 1.22       | 1.22       | 1.27       | $G_0$ (GPa)                                            |
| 1.09       | 1.09       | 1.09       | 1.09       | $G_\infty$ (GPa)                                       |
| 5.03       | 5.00       | 5.01       | 4.89       | $\frac{\text{Error}}{\text{Norm}(\delta)} \times 10^6$ |

جدول ۳. محاسبه پارامترهای مادی مدل‌های مختلف بر اساس نتایج تجربی مرجع<sup>[۲۸]</sup> برای بارگذاری شیب با زمان ۲۰۰ ثانیه.

**Table 3. Calculation of material parameters of different models based on the experimental results of [28] for the ramp loading in 200 seconds.**

| 3 elements | 5 elements | 7 elements | 9 elements | parameter                                              |
|------------|------------|------------|------------|--------------------------------------------------------|
| 4.44       | 5.14       | 4.94       | 5.50       | $B_0 \times 10^{10}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
| 3.69       | 5.73       | 2.78       | 3.81       | $B_1 \times 10^{11}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
| 12.10      | 159.55     | 103.18     | 200.00     | $\tau_1$ (s)                                           |
|            | 3.50       | 3.71       | 0.94       | $B_2 \times 10^{11}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
|            | 183.56     | 167.05     | 67.86      | $\tau_2$ (s)                                           |
|            |            | 0.67       | 7.23       | $B_3 \times 10^{11}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
|            |            | 197.72     | 199.95     | $\tau_3$ (s)                                           |
|            |            |            | 1.20       | $B_4 \times 10^{11}$<br>(Pa <sup>-1</sup> )            |
|            |            |            | 200.00     | $\tau_4$ (s)                                           |
| 1.23       | 1.19       | 1.18       | 1.19       | $G_0$ (GPa)                                            |
| 1.13       | 0.97       | 1.01       | 0.91       | $G_\infty$ (GPa)                                       |
| 1.48       | 1.50       | 1.49       | 1.55       | $\frac{\text{Error}}{\text{Norm}(\delta)} \times 10^5$ |

توان منفی باعث می‌شود تا پس از طی شدن زمانی برابر ۳ یا ۴ ثابت زمانی، مقدار تابع نمایی به صفر میل کند؛ در صورتی که اگر در معادله‌ی مدل موردنظر تابع نمایی دیگری نباشد، نتیجه‌ی بهینه‌سازی با بارگذاری شیب، پس از گذشت زمان مشخصی به سمت یک ثابت میل می‌کند و دیگر توانایی دنبال کردن تغییرات را نخواهد داشت. لذا در حالت کلی، با افزایش زمان آزمایش، استفاده از مدل‌های با تعداد المان بیشتر مناسب‌تر خواهد بود.

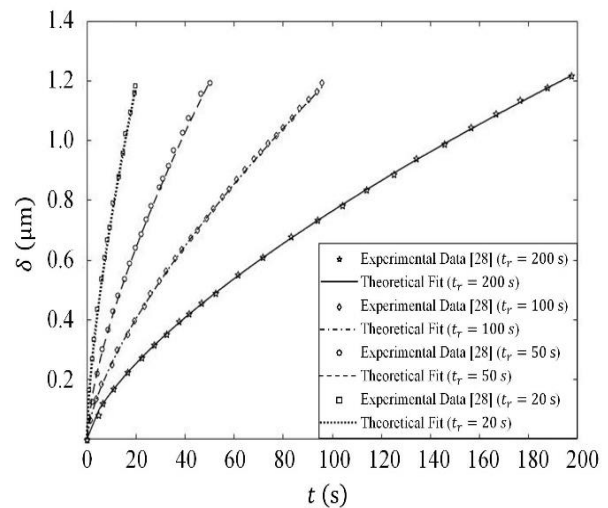
مسئله‌ی بهینه‌سازی موردنیاز برای محاسبه‌ی خواص ویسکوالاستیک مواد مواد به‌صورت کامل بررسی شد و نشان داد که علاوه بر مقید و غیرخطی بودن مسئله‌ی مذکور، مهم‌ترین نکته‌ای که در روند حل مسئله ایجاد مشکل می‌کند، غیرمحدب بودن مسئله‌ی بهینه‌سازی است، که در منابع موجود به آن اشاره نشده است. برای حل مؤثر مسئله‌ی بهینه‌سازی استفاده‌شده در محاسبه‌ی خواص ویسکوالاستیک با استفاده از نتایج آزمون ایندنتیشن، روش الگوریتم ژنتیک استفاده شد و نتایج مناسبی نیز به‌دست آمد.

در انتها، پیشنهادهایی برای مشخصه‌یابی رفتار ویسکوالاستیک مواد با استفاده از نتایج آزمایش نانوایندنتیشن می‌شود:

✓ استفاده از مدل‌های با المان‌های زیاد در تعیین خواص موادی که نتایج آزمایش در زمان کمی محاسبه شده است، مناسب نیست و در مواردی پاسخ منطقی نمی‌دهد. در حالت کلی، برای برازش منحنی بر نتایج آزمایش بهتر است از زمان‌های بیشتر استفاده کرد؛ که این امر نه فقط در عملکرد بهتر الگوریتم مؤثر است، بلکه در نتیجه‌ی آن، تعداد نقاط آزمایش نیز افزایش می‌یابد و برازش روان‌تری<sup>۲</sup> نتیجه خواهد داد.

✓ ثابت‌های به‌دست‌آمده فقط در بازه‌ی محاسبه‌شده معتبر هستند و برای بازه‌های زمانی بزرگ‌تر امکان ایجاد خطاهای زیاد در پیش‌بینی وجود دارد و از درجه‌ی اعتبار ساقط می‌شوند. در نتیجه، همواره لازم است تا مشخصه‌یابی برای بزرگ‌ترین بازه‌ی زمانی آزمایش انجام پذیرد.

✓ جواب‌های به‌دست‌آمده برای ثابت‌ها، به‌دلیل غیرمحدب بودن بهینه‌سازی، یکتا نیستند و به شرط پیش‌بینی مناسب نتایج آزمایشگاهی معتبر هستند.



**Figure 9. Predicting the behavior using the material parameters obtained from fitting the experimental results of [28] for the ramp loading in 200 seconds.**

شکل ۹. پیش‌بینی نتایج با استفاده از برازش نتایج آزمایش نوشتار اوین<sup>(۲۸)</sup>، با پارامترهای به‌دست‌آمده برای بارگذاری شیب در زمان ۲۰۰ ثانیه.

همان‌طور که از نتایج پیداست، می‌توان دریافت که مشخصه‌یابی فقط در بازه‌ی زمانی موردنظر جواب معتبر نتیجه می‌دهد و برای خارج از آن بازه‌ی زمانی، استفاده از نتایج مشخصه‌یابی با خطا همراه است.

## ۶. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، به بررسی نحوه‌ی محاسبه‌ی خواص ویسکوالاستیک مواد با استفاده از نتایج آزمون نانوایندنتیشن پرداخته شده است. مدل جامد استاندارد خطی، که توانایی خوبی در پیش‌بینی رفتار خطی ویسکوالاستیک جامدهای خطی دارد، استفاده شده است. اثر تعداد المان‌های مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی سری در محاسبه‌ی خواص مکانیکی مواد بررسی شده است. از آنجا که مدل‌های مذکور، جملاتی با ضرایب نمایی<sup>۱</sup> با توان‌های منفی دارند، این

## References – منابع

1. Ford, E.M. Hilderbrand, A.M. and Kloxin, A.M. 2024. Harnessing multifunctional collagen mimetic peptides to create bioinspired stimuli responsive hydrogels for controlled cell culture. *Journal of Materials Chemistry B*, 12(38), pp. 9600-9621, <https://doi.org/10.1039/D4TB00562G>
2. Kontomaris, S.V. Malamou, A. and Stylianou, A. 2024. A new method for AFM mechanical characterization of

heterogeneous samples with finite thickness. *Journal of Mechanics*, 40, pp.552-564, <https://doi.org/10.1093/jom/ufae047>

3. Cao, D. Malakooti, S. Kulkarni, V.N. Ren, Y. and Lu, H. 2021. Nanoindentation measurement of core-skin interphase viscoelastic properties in a sandwich glass composite. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 25, pp.353-363, <https://doi.org/10.1007/s11043-020-09448-y>

4. Arora, G. and Pathak, H. 2021. Nanoindentation characterization of polymer nanocomposites for elastic and viscoelastic properties: Experimental and mathematical approach. *Composites Part C: Open Access*, 4, p.100103, <https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2020.100103>
5. Hunnicutt, W.A. Struble, L.J. and Mondal, P. 2024. Nanoindentation methods for viscoelastic characterization of stiff porous materials. *Experimental Mechanics*, 64(8), pp.1357-1368. <https://doi.org/10.1007/s11340-024-01095-5>
6. Idkaidek, A. Agarwal, V. Jasiuk, I. 2017. Finite element simulation of reference point indentation on bone. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 65, pp.574-83, <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2016.08.031>
7. Christöfl, P. Czibula, C. Berer, M. Oreski, G. Teichert, C. and Pinter, G. 2021. Comprehensive investigation of the viscoelastic properties of PMMA by nanoindentation. *Polymer Testing*, 93, p.106978, <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2020.106978>
8. Brinson, H.F. and Brinson, L.C. 2008. *Polymer engineering science and viscoelasticity: An introduction*, 2nd Edn. Springer, New York, USA.
9. Dias, J.M. Ziebarth, N.M. 2013. Anterior and posterior corneal stroma elasticity assessed using nanoindentation. *Experimental Eye Research*, 115, pp.41-6, <https://doi.org/10.1016/j.exer.2013.06.004>
10. Daphalapurkar, N.P. Dai, C. Gan, R.Z. Lu, H. 2009. Characterization of the linearly viscoelastic behavior of human tympanic membrane by nanoindentation. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2(1), pp.82-92, <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2008.05.008>
11. Oyen, M.L. 2013. Nanoindentation of biological and biomimetic materials. *Experimental Techniques*, 37(1), pp.73-87, <https://doi.org/10.1111/j.1747-1567.2011.00716.x>
12. Oyen, M.L. Cook, R.F. 2009. A practical guide for analysis of nanoindentation data. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2(4), pp.396-407, <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2008.10.002>
13. Chua, W.K. Oyen, M.L. 2009. Viscoelastic properties of membranes measured by spherical indentation. *Cellular and Molecular Bioengineering*, 2(1), pp.49-56, <https://doi.org/10.1007/s12195-009-0049-7>
14. Oyen, M.L. Bushby, A.J. 2007. Viscoelastic effects in small-scale indentation of biological materials. *International Journal of Surface Science and Engineering*, 1(2-3), pp.180-97, <https://doi.org/10.1504/IJSURFSE.2007.015024>
15. Huang, G. Lu, H. 2006. Measurement of Young's relaxation modulus using nanoindentation. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 10(3), pp.229-43, <https://doi.org/10.1007/s11043-006-9020-3>
16. Bembey, A. Oyen, M.L. Bushby, A. Boyde, A. 2006. Viscoelastic properties of bone as a function of hydration state determined by nanoindentation. *Philosophical Magazine*, 86(33-35), pp.5691-703, <https://doi.org/10.1080/14786430600660864>
17. Cheng, Y-T, Cheng, C-M, 2004. Scaling, dimensional analysis, and indentation measurements. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 44(4), pp.91-149, <https://doi.org/10.1016/j.mser.2004.05.001>
18. Lu, H. Wang, B. Ma J. Huang, G. Viswanathan, H. 2003. Measurement of creep compliance of solid polymers by nanoindentation. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 7(3), pp.189-207, <https://doi.org/10.1023/B:MTDM.0000007217.07156.9b>
19. Cheng, L. Xia, X. Scriven, L.E. Gerberich, W.W. 2005. Spherical-tip indentation of viscoelastic material. *Mechanics of Materials*, 37(1), pp.213-26, <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.03.002>
20. Liu, K. VanLandingham, M.R. Ovaert, T.C. 2009. Mechanical characterization of soft viscoelastic gels via indentation and optimization-based inverse finite element analysis. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2(4), pp.355-63, <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2008.12.001>
21. Niestrawska, J.A. Viertler, C. Regitnig, P. Cohnert, T.U. Sommer, G. Holzapfel, G.A. 2016. Microstructure and mechanics of healthy and aneurysmatic abdominal aortas: Experimental analysis and modelling. *Journal of The Royal Society Interface*, 13(124), p.20160620, <https://doi.org/10.1098/rsif.2016.0620>
22. Ogden, R.W. 1997. *Non-linear elastic deformations*, Dover publications, New York, USA.
23. Ogden, R.W. Saccomandi, G. Sgura, I. 2004. Fitting hyperelastic models to experimental data. *Computational Mechanics*, 34, pp.484-502, <https://doi.org/10.1007/s00466-004-0593-y>
24. Broitman, E. 2016. Indentation hardness measurements at macro-, micro-, and nanoscale: a critical overview. *Tribology Letters*, 65(1), p.23, <https://doi.org/10.1007/s11249-016-0805-5>
25. Qu, M. Deng, F. Kalkhoran, S.M. Gouldstone, A. Robisson, A. VanVliet, K.J. 2011. Nanoscale visualization and multiscale mechanical implications of bound rubber interphases in rubber-carbon black nanocomposites. *Soft Matter*, 7(3), pp.1066-77, <https://doi.org/10.1039/C0SM00645A>

26. Lee, E.H. Radok J.R.M. 1960. The contact problem for viscoelastic bodies. *Journal of Applied Mechanics*, 27(3), pp.438-44, <https://doi.org/10.1115/1.3644020>
27. Hanaor, D.A. Gan, Y. Einav, I, 2015. Contact mechanics of fractal surfaces by spline assisted discretisation. *International Journal of Solids and Structures*, 59, pp.121-31, <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.01.021>
28. Oyen, M.L. 2005. Spherical indentation creep following ramp loading. *Journal of Materials Research*, 20(8), pp.2094-100, <https://doi.org/10.1557/JMR.2005.0259>