



## Research Article

# Experimental and Numerical Analysis of Hydrostatic Pressure in Ductile Fracture of AL-6061T6

Mohsen Mansouri and Mehdi Ganjiani\*

Faculty of Mechanical Engineering, University of Tehran, Iran.

\* corresponding author: ([ganjiani@ut.ac.ir](mailto:ganjiani@ut.ac.ir))

## Article Info

### Article history:

Received: 20 July 2025

Revised: 8 October 2025

Accepted: 20 October 2025

### Keywords:

Stress triaxiality,  
fracture strain,  
normalized lode angle,  
ductile fracture.

## Abstract

This study investigates the effects of stress triaxiality and the Lode angle parameter on the ductile fracture behavior of aluminum alloy 6061-T6 using experimental tests and numerical simulations. To analyze negative triaxiality conditions, compression tests were performed on specially designed specimens, including a standard dog-bone and rectangular samples with elliptical holes of varying curvature. The obtained negative triaxiality values ranged from  $-0.355$  to  $-0.555$ . A good agreement between experimental and numerical results confirms the reliability of the adopted approach. The fracture initiation zones coincide with regions of maximum plastic strain, strongly influenced by triaxiality and Lode angle. The results indicate that fracture strain depends nonlinearly on triaxiality: for positive triaxiality it first increases then decreases, while the reverse trend is observed under negative triaxiality. These findings enhance the understanding of how stress-state parameters influence ductile fracture mechanisms and can be applied to improve the design and durability of metallic components in engineering applications.

## Introduction

The use of high-strength aluminum alloys has expanded significantly due to their excellent strength-to-weight ratio and reliability in structural applications. These materials enhance mechanical performance by delaying inelastic deformation and reducing premature fracture under complex loading. Numerous models have been proposed to predict ductile fracture, generally categorized as coupled or uncoupled. Coupled models account for the interaction between plastic deformation and material degradation but require many difficult-to-calibrate parameters and high computational cost. Uncoupled models, though less physically explicit, are simpler to implement and widely applied in engineering practice.

Previous studies have emphasized the critical role of stress triaxiality and Lode angle in ductile fracture. However, most existing research focuses on positive triaxiality, with limited data in the compressive (negative triaxiality) regime. To address this gap, the present work explores the combined effects of negative stress triaxiality and Lode angle on ductile fracture in aluminum alloy 6061-T6. By designing specific

geometries—rectangular specimens with elliptical holes and controlled curvature radii, different levels of negative triaxiality are achieved under simple uniaxial loading, avoiding complex multiaxial setups. Complementary finite element simulations in Abaqus using a ductile damage model enable precise prediction of fracture initiation and propagation, providing valuable insight into failure mechanisms under compressive stress states.

## Methodology

The stress state influencing ductile fracture is characterized by two parameters: stress triaxiality ( $\eta$ ), the ratio of hydrostatic to equivalent von Mises stress, and the Lode angle parameter ( $\bar{\theta}$ ), which captures the effect of deviatoric stress. Together, these parameters provide a full representation of local stress conditions affecting fracture strain. To study these effects, uniaxial tensile and compression tests were conducted on aluminum 6061-T6 specimens. Since negative triaxiality was of interest, specimen geometries were optimized to produce compressive stress states without requiring complex

## To Cite this article:

Mansouri, M. and Ganjiani, M. 2025. Experimental and numerical analysis of hydrostatic pressure in ductile fracture of AL-6061T6, Sharif Mechanical Engineering Journal, 41(2), 77-92. <https://doi.org/10.24200/j40.2025.67305.1742>

multiaxial devices. Five rectangular specimens (M1–M5) containing elliptical holes with varying curvature radii were fabricated, measuring  $204 \times 45 \times 5$  mm, which are illustrated in figure 2. Curvature modification around the hole controlled the achieved stress triaxiality. All tests were performed at room temperature under quasi-static conditions using an Instron 8502 testing machine with a loading rate of 2 mm/min. No buckling or lateral instability was observed during compression, confirming stable deformation. Experimental results validated the expected ductile response of the alloy.

Finite element simulations were carried out in ABAQUS/Explicit using the ductile damage model to predict fracture initiation and propagation. The bottom surface of each specimen was fixed, while a displacement-controlled load was applied along the y-axis. The material's true stress–strain curve was obtained from the tensile test of the dog-bone specimen. Figure 4 displays the Finite element model of samples. C3D8R brick elements with 0.5 mm mesh size were used, with 18,800–74,000 elements per model. The clamped regions were modeled as rigid to reduce computational cost.

## Results and Discussion

Mechanical tests and simulations were performed on all specimen types. For the dog-bone specimen, the stress remained uniaxial ( $\eta = 0.33$ ), whereas the addition of curvature in other geometries induced multiaxial stress states, allowing a wide range of negative triaxiality values to be analyzed through uniaxial tests. Table 2 displays the stress triaxialities obtained from different geometries. Finite element analysis was used to determine local triaxiality values where analytical expressions were not valid. Experimental and numerical force–displacement curves showed excellent agreement, both exhibiting typical ductile fracture characteristics: elastic response, yielding, plastic hardening, necking, and failure.

Damage contour plots revealed that maximum plastic strain and stiffness degradation occurred around the elliptical notches. The predicted fracture locations matched experimental observations, confirming model accuracy. The effect of stress triaxiality and Lode angle on the fracture strain can be observed in figure 21. As triaxiality increased in the positive range, fracture strain decreased monotonically. For negative triaxiality, fracture strain first decreased (from  $\eta = -0.355$  to  $-0.497$ ) and then slightly increased ( $\eta = -0.555$ ). Figures 22 and 23 illustrate the contour maps of stress triaxiality, Lode angle, and damage parameters and it can be confirmed that their interaction controls fracture initiation and propagation. From an engineering standpoint, controlling triaxiality distribution in critical regions can significantly improve ductility, and enhance energy absorption capacity in metallic structures such as crash components and high-pressure vessels.

## Conclusion

This study investigates the influence of stress triaxiality and Lode angle parameter on the ductile fracture behavior of aluminum alloy 6061-T6 through experimental and numerical approaches. Six specimen types, including a dog-bone and rectangular samples with elliptical holes, generated triaxiality values from  $-0.355$  to  $-0.555$ . Experimental and simulation results showed good agreement in predicting fracture strain and load capacity. Fracture initiation and stiffness degradation concentrated near curved regions with high plastic strain. Fracture strain decreased with both higher positive and strongly negative triaxiality but slightly increased at the most compressive conditions. Hydrostatic pressure and Lode angle jointly define fracture mechanisms and improve the design and reliability of metallic structures in automotive and aerospace applications.

**Funding:** This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

**Conflicts of Interest:** The authors declare no conflict of interest.

**Author Contributions:** All authors contributed to the reported work for conceptualization, methodology, validation, writing-review and editing, and supervision.



## تحلیل تجربی و عددی تأثیر فشار هیدرواستاتیک در شکست نرم آلومینیوم T۶-۶۰۶۱

محسن منصوری و سید مهدی گنجیانی\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تهران، تهران.

\*نویسنده مسئول ([ganjiani@ut.ac.ir](mailto:ganjiani@ut.ac.ir))

## چکیده

در نوشتار حاضر از آزمون‌های تجربی و شبیه‌سازی عددی برای مطالعه‌ی سه‌محوره‌ی تنش، پارامتر زاویه‌ی لود، و تأثیر آن‌ها در رفتار شکست نرم آلومینیوم T۶-۶۰۶۱ استفاده شده است. برای مطالعه‌ی مقادیر سه‌محوره‌ی تنش منفی، به‌جای انجام آزمون دوجوره، از آزمون‌های تک‌محوره‌ی کششی و فشاری بر روی هندسه‌های خاص استفاده شده است؛ که شامل: نمونه‌ی دمبلی و نمونه‌های مستطیلی حاوی حفره‌ی بیضی با انحنا بوده‌اند. مقادیر سه‌محوره‌ی تنش منفی در بازه‌ی ۰/۳۵۵- تا ۰/۵۵۵- به‌دست آمده‌اند. با مقایسه‌ی نتایج آزمون‌های تجربی و شبیه‌سازی، می‌توان نتیجه گرفت که هر دو روش مقادیر کرنش شکست، مطابقت یکسانی را پیش‌بینی می‌کنند. براساس کانتورهای آسیب، ناحیه‌ای که شکست در آن آغاز شده است، با نواحی دارای بیشترین کرنش خمیری هم‌پوشانی داشته است، هر چند مقدار آن تحت تأثیر مقدار تنش سه‌محوره و زاویه‌ی لود بوده است. براساس داده‌های به‌دست‌آمده مشاهده شده است که در تنش سه‌محوره‌های مثبت، کرنش شکست ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته است، در حالی که در تنش سه‌محوره‌های منفی، این روند برعکس بوده و کرنش شکست، ابتدا کاهش و سپس افزایش پیدا کرده است.

## اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۲۹

تاریخ اصلاحیه: ۱۴۰۴/۰۷/۱۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۲۸

## واژگان کلیدی:

سه‌محوره‌ی تنش منفی،  
کرنش شکست،  
زاویه‌ی لود نرمالیزه‌شده،  
شکست نرم.

## ۱. مقدمه

استفاده از فلزات با کیفیت بالا، مانند انواع مختلف آلیاژهای آلومینیوم با استحکام بالا طی دهه‌های اخیر به طرز چشمگیری افزایش یافته است؛ که منجر به بهبود خواص مواد برای جلوگیری از محلی‌شدن زودرس کرنش‌های غیرکشسان و همچنین آسیب و شکست اجزاء سازه‌ای در شرایط بارگذاری پیچیده می‌شود. آسیب با تغییر شکل خمیری آغاز می‌شود و با شکست قطعه خاتمه می‌یابد. آسیب نرم به تخریب مواد فلزی تحت شرایط بارگذاری یکنواخت اشاره دارد. مشکلات ناشی از آسیب نرم، نقش کلیدی در صنعت دارند و با این حال، خرابی ناشی از شکست نرم، اجتناب‌ناپذیر است.<sup>[۱]</sup>

تلاش‌های قابل توجهی به مطالعه‌ی شکست شکل‌پذیر فلزات، با طیف گسترده-ای از مدل‌های شکست شکل‌پذیر پیشنهاد شده است. مدل‌های موجود را می‌توان به دو دسته‌ی کلی تقسیم کرد: (۱) مدل‌های شکست کوپل‌شده، و (۲) مدل‌های شکست کوپل‌نشده. مدل شکست کوپل‌شده، تأثیر آسیب انباشته در طول تغییر شکل خمیری را بر روی استحکام فلز به‌حساب می‌آورد؛ در حالی که مدل شکست کوپل‌نشده، تأثیر آسیب در استحکام فلز را قبل از شکست نهایی نادیده می‌گیرد.<sup>[۲]</sup> مدل‌های کوپل‌شده، آسیب‌های مرتبط با حالت خمیری دارند. سطح آسیب براساس تاریخچه‌ی بار و رابطه‌ی تنش-کرنش برآورد می‌شود، که در نتیجه با افزایش آسیب، کاهش می‌یابد. در مورد مدل‌های

کوپل‌نشده به همین ترتیب آسیب وارد می‌شود، اما حالت خمیری تحت تأثیر قرار نمی‌گیرد.<sup>[۳]</sup>

اگرچه مدل‌های شکست کوپل‌شده، مزایایی در توضیح مکانیزم‌های فیزیکی زیربنایی شکست نرم دارند، اما همچنان در کاربردهای مهندسی محدودیت‌هایی دارند: (۱) آن‌ها معمولاً پارامترهای مهم فیزیکی زیادی دارند، که به‌دست‌آوردن دقیق آن‌ها دشوار است.<sup>[۴]</sup> (۲) شبیه‌سازی با مدل‌های شکست کوپل‌شده در مقایسه با مدل‌های شکست کوپل‌نشده زمانبر است.<sup>[۵]</sup> با این حال، مدل‌های کوپل‌نشده، نقاط ضعفی نیز دارند و عموماً براساس داده‌های تجربی و به‌صورت پدیدارشناختی توسعه داده می‌شوند. به همین دلیل، پارامترهای به‌کاررفته در مدل‌های کوپل‌نشده، اغلب فاقد معنای فیزیکی مشخصی هستند و تفسیر مستقیم فیزیکی آن‌ها دشوار است. این موضوع باعث می‌شود که کاربرد پارامترهای مذکور در شرایط مختلف یا برای مواد متفاوت همراه با ابهام باشد.<sup>[۶]</sup> همچنین، مدل‌های کوپل‌نشده فرض می‌کنند که ماده همواره در ناحیه‌ی سخت‌شدگی باقی می‌ماند. علاوه بر این، فرض می‌شود که مدل‌های اخیر به هیچ متغیر حالت داخلی وابسته نیستند و فقط از کرنش خمیری استفاده می‌کنند.<sup>[۷]</sup>

به‌دلیل سادگی ساختاری، در سال‌های اخیر تعداد زیادی از مدل‌های کوپل‌نشده با فرضیه‌ها و روش‌های آزمایشگاهی مختلف توسعه یافته‌اند. مدل کوپل‌نشده‌ی

استناد به این مقاله:

منصوری، محسن و گنجیانی، سیدمهدی، ۱۴۰۴. تحلیل تجربی و عددی تأثیر فشار هیدرواستاتیک در شکست نرم آلومینیوم T۶-۶۰۶۱. مهندسی مکانیک شریف، ۴۱(۲)، صص. ۷۷-۹۲.  
<https://doi.org/10.24200/j40.2025.67305.1742>



مبتنی بر انرژی، اولین بار توسط فرودنتال<sup>۱</sup> (۱۹۵۰) معرفی شده است.<sup>[۸]</sup> ایشان بیان کرده است که شکست نرم زمانی رخ می‌دهد که کار خمیری در هر واحد حجم ماده از یک آستانه عبور کند و نتیجه گرفته است که شکست نرم همیشه در ناحیه‌ای با اولین تنش اصلی رخ می‌دهد. در ادامه، کاکرافت<sup>۲</sup> (۱۹۶۸)، یک مدل شکست ارائه کرده است که براساس اولین تنش اصلی استوار بوده است.<sup>[۹]</sup>

در مقایسه با مدل‌های کوپل‌شده، نمونه‌های کوپل‌نشده به دلیل سادگی در ساختار و شناسایی نسبتاً آسان پارامترهای آن‌ها، بیشتر برای کاربردهای صنعتی ترجیح داده می‌شوند.<sup>[۱۰]</sup> فرایند کالیبراسیون آسان‌تر، یک مزیت اساسی مدل‌های کوپل‌نشده است، که برای آن می‌توان کالیبراسیون پاسخ خمیری و کالیبراسیون آسیب‌های نرم را جدا کرد. در صورت استفاده از مدل مواد کوپل‌نشده، کالیبراسیون به‌وضوح آسان‌تر است.

در بسیاری از آزمایش‌ها نشان داده شده است که وابستگی حالت تنش به فرایندهای شکست برای مواد مختلف متفاوت است. بریچمن<sup>۳</sup> (۱۹۶۴)،<sup>[۱۱]</sup> تغییر شکل و رفتار شکست میله‌های استوانه‌ای ۲۰ نوع مختلف فولاد نرم را در آزمایش‌هایی با فشار هیدرواستاتیک بین ۰ تا ۲۷۰۰ مگاپاسکال بررسی و مشاهده کرده است که همه‌ی نمونه‌ها شکسته نشده‌اند و نتیجه گرفته است که شکست، بستگی زیادی به فشار هیدرواستاتیک دارد. نتایج تجربی بریچمن توسط بائو و وبرزبیک<sup>۴</sup> (۲۰۰۵)،<sup>[۱۲]</sup> تجدیدنظر شده است. ایشان استوانه‌های کوتاه را با نسبت ابعاد مختلف فشرده کرده و دریافته‌اند که شکل محل شکست، مستقل از مواد است. آن‌ها همچنین به‌صورت تجربی مقدار قطع ثابت سه‌محوره‌ی تنش ۰/۳۳- را به‌دست آورده‌اند. علاوه بر این، ژنگ<sup>۵</sup> و همکاران (۱۹۹۳)،<sup>[۱۳]</sup> آزمایش‌های فشار را با نمونه‌های لوله‌ی نازک انجام داده و سه‌محوره‌ی تنش منفی کوچک تا ۰/۱۴- را به‌دست آورده‌اند تا معادله‌ی تکامل آسیب‌شان را تأیید کنند. علاوه بر این، خان و لیو<sup>۶</sup> (۲۰۱۲)،<sup>[۱۴]</sup> آلیاژ آلومینیوم را در آزمایش‌های فشار دوجوری بررسی کرده‌اند؛ که در آن، کمترین میزان سه‌محوره‌ی تنش ۰/۴۹۶- بوده است، که هنوز شکست نرم در آن رخ می‌دهد است. کوبیک<sup>۷</sup> و همکاران (۲۰۱۶)،<sup>[۱۵]</sup> نمونه‌های تازه طراحی‌شده برای آزمایش‌های فشار تک‌محوری را پیشنهاد کرده‌اند. سیلندرهای آن‌ها با فرورفتگی کروی اجازه می‌دهد تا برای آلیاژهای آلومینیوم تا سه‌محوره‌ی تنش منفی تا ۰/۴۷۳- برسند. علاوه بر این، لو<sup>۸</sup> و همکاران (۲۰۱۴)،<sup>[۱۵]</sup> نتایج تجربی آزمایش‌های فشار تک‌محوری و کرنش صفحه‌ای را با دو نمونه‌ی مختلف برای بررسی وابستگی پارامتر لود به مقدار قطع سه‌محوره‌ی تنش ارائه داده‌اند. با این حال، آزمایش‌های اخیر فقط برای نمونه‌های گرفته‌شده از نمونه‌های مواد ضخیم امکان‌پذیر بوده است؛ در حالی که برای نمونه‌های مسطح، که از ورقه‌های نازک گرفته شده‌اند، باید یک برنامه‌ی آزمایشی جایگزین تهیه می‌شد، که برونینگ<sup>۹</sup> و همکاران (۲۰۱۸)،<sup>[۱۶]</sup> به آن پرداخته‌اند.

کوبیک و همکاران (۲۰۱۶)،<sup>[۱۷]</sup> به مقدار متوسط سه‌محوره‌ی تنش کمتر از ۰/۳۳- در محل شروع ترک رسیده‌اند. پنگ<sup>۱۰</sup> و همکاران (۲۰۲۱)،<sup>[۱]</sup> با بررسی

وابستگی شکست نرم به پارامترهای نوردای اول تانسور تنش و نوردای دوم تانسور تنش انحرافی و زاویه‌ی لود و سه‌محوره‌ی تنش، یک مدل کوپل‌نشده‌ی جدید معرفی کرده‌اند تا بتوانند شکست نرم فلزات را در محدوده‌ی وسیعی از سه‌محوره‌ی تنش خصوصاً در سه‌محوره‌ی تنش بالا پیش‌بینی کنند. گنجیانی (۲۰۲۰)،<sup>[۱۷]</sup> یک مدل شکست در چارچوب مکانیک آسیب پیوسته ارائه کرده است؛ که از سطح تسلیم خمیری فون میسز و یک سطح تسلیم آسیب بهره می‌گیرد و به تنش سه‌محوری و پارامتر زاویه‌ی لود بستگی دارد. وانگ<sup>۱۱</sup> و همکاران (۲۰۱۹)،<sup>[۱۸]</sup> برای بررسی اثر سه‌محوره‌ی تنش و نرخ کرنش روی کرنش شکست  $Ti6Al4V$ ؛ قطعاتی در ابعاد مختلف را طراحی کرده و سپس بارگذاری با نرخ کم را به‌صورت متعارف و بارگذاری با نرخ بالا را به کمک میله‌ی فشار هاپکینسون انجام داده و دریافته‌اند که کرنش شکست با افزایش سه‌محوره‌ی تنش و یا افزایش نرخ کرنش، کاهش می‌یابد. هونگ<sup>۱۲</sup> و همکاران (۲۰۲۳)، با مطالعه بر روی رفتار شکست لوله‌های اکستروده‌شده از جنس آلومینیوم T6-۶۰۶۱ با سه‌محوره‌های تنش مختلف، مشاهده کرده‌اند که سه‌محوره‌ی تنش به‌تدریج با افزایش شعاع بریدگی نمونه، بریدگی آلیاژ آلومینیوم کاهش یافته و سه‌محوری تنش در مرکز شکاف بیشتر از سه‌محوری تنش در ریشه‌ی شکاف بوده است.<sup>[۱۹]</sup> لیو<sup>۱۳</sup> و همکاران (۲۰۲۴)، تغییر شکل و رفتار آلومینیوم تحت سه‌محوره‌ی تنش‌های مختلف توسط آزمون کشش را مطالعه و اثر ضخامت و شعاع انحنا در نمونه‌های دمبلی را بررسی کرده‌اند. رفتار شکست در نمونه‌های ضخیم‌تر، تدریجاً ولی تغییر شکل، یکنواخت‌تر بوده است. ضخامت بیشتر نمونه، تغییر شکل یکنواخت را در جهت ضخامت تضمین می‌کند. در این شرایط، کرنش سطحی اندازه‌گیری‌شده نمونه‌های ضخیم برای بیان خواص ماده استفاده می‌شود.<sup>[۲۰]</sup> گائو<sup>۱۴</sup> و همکاران (۲۰۲۳)، به‌صورت تجربی نشان داده‌اند که سه‌محوره‌ی تنش و زاویه‌ی لود در رفتار خمیری آلیاژهای آلومینیوم اکستروده‌شده اثر قابل‌توجهی دارد. به همین دلیل، یک مدل ساختاری مناسب ارائه کرده‌اند که شامل یک معیار تسلیم جدید بوده است. با مقایسه‌ی مدل ایشان با نتایج عددی، مشخص شد که مدل مذکور، توانایی پیش‌بینی رفتار آلومینیوم در وضعیت تنش متفاوت را دارد.<sup>[۲۱]</sup>

در سال‌های اخیر، پژوهش‌های متعددی به بررسی رفتار شکست در آلیاژهای مختلف اختصاص یافته‌اند. اثر تنش سه‌محوره‌ی مثبت در شکست نرم آلیاژهای آلومینیوم AW۵۷۵۴ (با استحکام متوسط) و AW۶۰۸۲ (با استحکام بالا) در نرخ‌های کرنش شبه‌استاتیکی مطالعه شده است.<sup>[۲۲]</sup> شبیه‌سازی‌های عددی با نرم‌افزار آباکوس<sup>۱۵</sup> انجام و نتایج حاصل با داده‌های تجربی نیرو-جابجایی اعتبارسنجی شده است؛ تا مقادیر تنش سه‌محوره و کرنش خمیری معادل در لحظه‌ی شکست تعیین شود. برای برازش بهینه‌ی منحنی تنش سه‌محوره از تابع نمایی استفاده شده و نتایج نشان داده‌اند که آلیاژ AW۵۷۵۴ حساسیت بیشتری نسبت به نرخ کرنش در محدوده‌های کرنش پایین از خود نشان داده است.

<sup>9</sup> Brünig  
<sup>10</sup> Peng  
<sup>11</sup> Wang  
<sup>12</sup> Hong  
<sup>13</sup> Liu  
<sup>14</sup> Guo  
<sup>15</sup> ABAQUS

<sup>1</sup> Freudenthal  
<sup>2</sup> Cockcroft  
<sup>3</sup> Bridgman  
<sup>4</sup> Bao & Wierzbicki  
<sup>5</sup> Zheng  
<sup>6</sup> Khan & Liu  
<sup>7</sup> Kubik  
<sup>8</sup> Lou

آزمون‌های تک‌محوره‌ی فشاری فراهم شده است. بنابراین، در روش ارائه‌شده، نیازی به استفاده از آزمون‌های چندمحوره‌ی پیچیده و پرهزینه وجود ندارد و می‌توان رفتار شکست نرم را با دقت بالا و در شرایط کنترل‌شده ارزیابی کرد. مدل‌های هندسی مختلف، مانند دمبلی و نمونه‌های مستطیلی حاوی حفره‌ی بیضی طراحی شده‌اند، تا مقادیر مختلف سه‌محوره‌ی تنش به‌دست آیند. آزمون‌های انجام‌شده توسط نرم‌افزار المان محدود آباکوس شبیه‌سازی شده‌اند. برای شبیه‌سازی نمونه‌ها نیز از مدل آسیب نرم استفاده شده است. کرنش شکست به‌ازاء سه‌محوره‌ی تنش و زاویه‌ی لود مختلف به روش‌های تجربی و عددی، محاسبه و رفتار شکست نرم آلومینیوم بررسی شده است.

## ۲. تعریف حالت تنش

### ۱.۲. تحلیل تئوری

حالت تنش را می‌توان با استفاده از سه‌محوره‌ی تنش و پارامتر زاویه‌ی لود توصیف کرد. مفهوم فضای تنش برای تعیین اثر حالت تنش در کرنش شکست مواد معرفی شده است. برای مواد همسانگرد، رفتار مکانیکی مستقل از جهت مکانی است؛ بنابراین، سه مقدار مشخصه‌ی تانسور تنش، یعنی تنش‌های اصلی  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  را می‌توان در فضای تنش اصلی سه‌بعدی در نظر گرفت. در همین حال، فضای تنش اصلی متعامد را می‌توان به‌طور معادل در مختصات لود با یک سیستم مختصات استوانه‌ای که در آن تنش هیدرواستاتیکی محور تقارن است، دوباره تعریف کرد. مختصات لود را می‌توان از نسخه‌ی مقیاس‌شده‌ی سه متغیر تنش  $(p, q, r)$  به‌صورت روابط ۱ الی ۳ تعریف کرد:

$$p = -\sigma_m = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (1)$$

$$q = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S : S} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3J_2} \quad (2)$$

$$r = \left[ \frac{27}{2} \det(S) \right]^{1/3} = \left[ \frac{27}{2} (\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m) \right]^{1/3} = \left[ \frac{27}{2} J_3 \right]^{1/3} \quad (3)$$

که در آن‌ها،  $S$ ، تانسور تنش انحرافی و معادل  $I, S = \sigma - pI$ ، همانی،  $\sigma$ ، تانسور تنش، و  $\sigma_m$  و  $\bar{\sigma}$  به ترتیب تنش هیدرواستاتیکی و تنش معادل فون میزس هستند.  $J_2$  و  $J_3$  نیز دومین و سومین ناوردای تنش انحرافی هستند. سه‌محوره‌ی تنش، یک پارامتر مهم برای ارزیابی شکست خمیری و در مدل آسیب خمیری در نظر گرفته شده است، که به‌عنوان نسبت تنش هیدرواستاتیکی به تنش معادل فون میزس به‌صورت رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود:

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \quad (4)$$

بسیاری از مشاهدات تجربی و مطالعات عددی نشان داده‌اند که اثر حالت تنش در رفتار شکست نمی‌تواند کاملاً توسط سه‌محوره‌ی تنش به‌تنهایی در ایجاد معادله‌ی سازنده‌ی آسیب مواد انعطاف‌پذیر منعکس شود. بنابراین، سه‌محوره‌ی تنش برای توصیف کامل حالت تنش کافی نیست و پارامتر زاویه‌ی لود مربوط به حالت تنش انحرافی باید به‌طور مشترک استفاده شود. زاویه‌ی لود ( $\theta$ ) از طریق تنش انحرافی سوم نرمال‌شده ( $\bar{\sigma}$ ) مطابق رابطه‌ی ۵ تعریف می‌شود:

گونزالس<sup>۱۶</sup> و همکاران (۲۰۲۴)،<sup>[۲۳]</sup> تأثیر تنش سه‌محوره را در تکامل آسیب در نمونه‌های کششی استوانه‌ای آلیاژ آلومینیوم Al-۲۰۲۴ بررسی کرده‌اند. در پژوهش اخیر، مدل‌های آسیب کوپل‌شده و غیرکوپل‌شده، که وابسته به تنش سه‌محوره بوده‌اند، با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نتایج عددی نشان داده است که مدل‌های غیرکوپل‌شده در شرایط مختلف تنش سه‌محوره، کرنش شکست بالاتری را نسبت به مدل‌های کوپل‌شده پیش‌بینی کرده‌اند. همچنین تکامل تنش سه‌محوره تحلیل شده است تا تأثیر آن در انباشتگی آسیب ارزیابی شود. در ادامه، برای بهبود انطباق مدل، یک توسعه‌ی دوخطی از مدل کوپل‌شده‌ی لمایتر پیشنهاد شده است تا هم‌پیوستگی بین سخت‌شوندگی و آسیب به‌صورت دقیق‌تر بازنمایی شود.

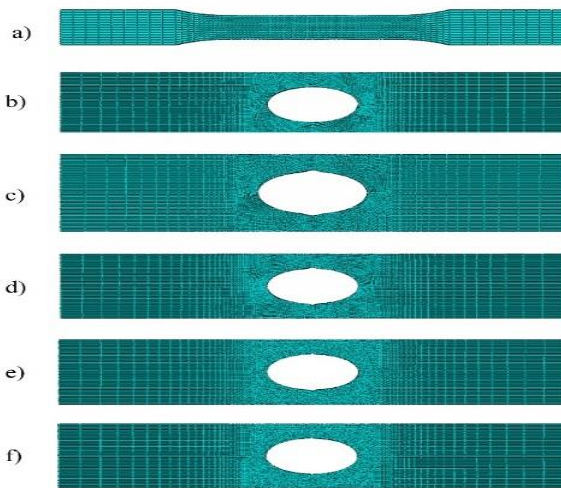
رفتار مکانیکی و مکانیسم‌های شکست نرم آلیاژ تیتانیوم TC۴ نیز در بازه‌ی گسترده‌ای از شرایط تنش سه‌محوره (از ۰/۲۳ تا ۰/۵۹) بررسی شده است.<sup>[۲۴]</sup> ویژگی‌های شکست نرم، نظیر: جوانه‌زنی، رشد و هم‌جوشی حفره‌های میکروسکوپی بسته به حالت تنش تغییر یافته‌اند. در مطالعه‌ی اخیر، مدل شکست DF۲۰۱۶ برای تحلیل خمیری و شبیه‌سازی عددی استفاده شده است، تا پیش‌بینی دقیقی از شکست در مقادیر مختلف تنش سه‌محوره حاصل شود. همچنین مدل شکست نرم DF۲۰۱۲ برای آلیاژ Ti۶Al۴V در نرخ‌های کرنش بالا استفاده شده است.<sup>[۲۵]</sup> آزمون‌های کشش با سرعت بالا نشان داده‌اند که پارامترهای مدل ثابت نبوده و با نرخ کرنش، تغییر محسوسی داشته‌اند. به‌منظور توصیف رفتار اخیر، توابع وابسته به نرخ کرنش جدیدی بر پایه‌ی تحلیل آماری مورفولوژی حفره‌ها پیشنهاد و مدل اصلاح‌شده‌ی DF۲۰۱۲ از طریق آزمون‌های ضربه‌ای هاپکینسون اعتبارسنجی شده است. مدل اخیر توانسته است جابجایی شکست را با خطایی کمتر از ۱۰٪ در نرخ‌های کرنش بالا پیش‌بینی کند.

وانگ و همکاران (۲۰۲۵)،<sup>[۲۶]</sup> روش آزمایشگاهی جدیدی را معرفی کرده‌اند، که در آن از یک نمونه‌ی پروانه‌ای شکل و دستگاه بارگذاری چندمحوره برای ایجاد پیوسته‌ی حالت‌های مختلف تنش به‌کار برده شده است؛ که با استفاده از آن و روش تصویربرداری همبستگی دیجیتال، اثر بازه‌ی گسترده‌ای از تنش‌های سه‌محوره (از ۰/۶۰۸ تا ۰/۵۹۴) در رفتار شکست آلیاژ منیزیم AZ۳۱ بررسی شده و نتایج نشان داده است که با افزایش مقدار تنش سه‌محوره، مکانیزم شکست از نوع برشی به نوع کششی تغییر یافته است.

چنگ<sup>۱۷</sup> و همکاران (۲۰۲۵)،<sup>[۲۷]</sup> رفتار شکست فولاد ضدزنگ ۰Cr۱۷Ni۴Cu۴Nb را مطالعه کرده و مدل‌های غیرکوپل‌شده‌ی مختلفی را در یک چارچوب ترکیبی از تحلیل‌های تجربی و عددی با یکدیگر مقایسه کرده و دریافته‌اند که معیار Lou-Yoon بهترین عملکرد کلی را داشته است؛ هر چند در بالاترین مقادیر تنش سه‌محوره، کرنش شکست را بیش از مقدار واقعی پیش‌بینی کرده است. در نتیجه، مدل لو-یوون اصلاح‌شده‌ای پیشنهاد کرده‌اند که شامل تابع وزن‌دهی وابسته به تنش سه‌محوره بوده است، تا دقت پیش‌بینی شکست بهبود یابد.

در مطالعه‌ی حاضر، آزمون‌های کشش و فشار بر روی آلومینیوم در سه‌محوره‌ی تنش مختلف صورت گرفته و با طراحی هندسه‌های خاص (شامل نمونه‌های مستطیلی با انحناها و حفره‌های بیضی با شعاع‌های انحنا متفاوت)، امکان دستیابی به مقادیر مختلفی از تنش سه‌محوره‌ی منفی فقط از طریق





**Fig. 4. Finite element model of samples: (a) Dog-bone, (b) M1, (c) M2, (d) M3, (e) M4, and (f) M5.**

شکل ۴. مدل المان محدود نمونه‌ها: (الف) دمبلی، (ب) M1، (ج) M2، (د) M3، (ه) M4، و (و) M5.

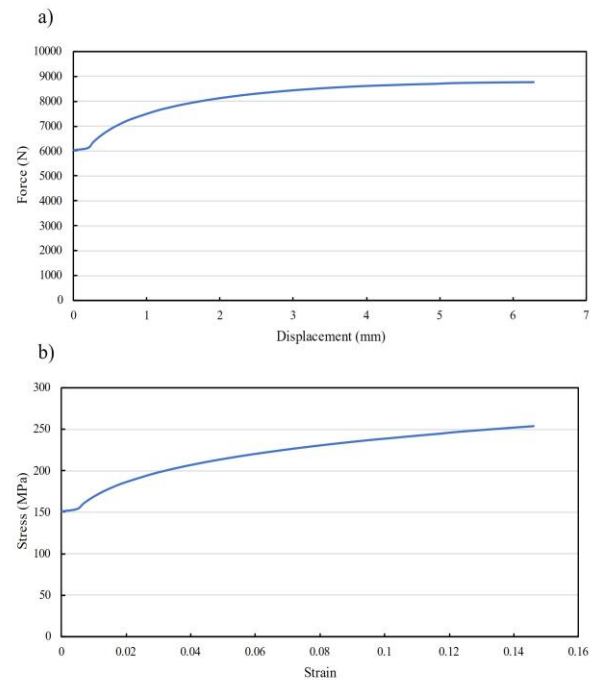
نحوه‌ی شبکه‌بندی به‌نوعی انجام شده است که تعداد المان بیشتری در مرکز قرار بگیرند، تا دقت شبیه‌سازی افزایش یابد. اندازه‌ی مش ۰/۵ میلی‌متر انتخاب شده است، تا دقت کافی برای نتایج تجربی صورت گیرد. تعداد المان ایجادشده برای نمونه‌های: دمبلی: ۱۸۸۰۰، M1: ۶۴۲۴۰، M2: ۵۶۲۷۰، M3: ۶۳۲۴۰، M4: ۷۴۲۲۰ و M5: ۷۲۰۲۰ بوده است. شرایط مرزی و نوع بارگذاری برای هر نمونه با شرایط آزمایشی سازگار بوده است. بدین منظور، نمونه‌ها در قسمت پایینی ثابت و بار به صورت جابجایی به قسمت بالایی نمونه‌ها وارد شده است. در نمونه‌ها قسمتی که در فک دستگاه قرار دارد، به‌صورت جسم صلب مدل شده است، تا هزینه‌ی محاسباتی کاهش یابد.

### ۳. تفسیر نتایج

در بخش کنونی، نتایج آزمون‌های مکانیکی انجام‌شده برای نمونه‌ها به تفکیک ارائه شده است. نتایج برای نمونه‌های دمبلی، M1، M2، و M3 به دو طریق، شامل: داده‌های خروجی دستگاه (بار و جابجایی) و داده‌های به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی و برای نمونه‌های M4 و M5 نیز نتایج به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی مطابق شکل ۴ گزارش شده‌اند.

### ۱.۳. تنش سه‌محوره‌ی منفی

با توجه به اینکه تنش در نمونه‌ی دمبلی تحت آزمون کشش به‌صورت تک‌محوری باقی می‌ماند، طبق رابطه‌ی ۴، مقدار تنش سه‌محوره برابر با ۰/۳۳ بوده است. به‌منظور بررسی بازه‌ی وسیع‌تری از مقادیر سه‌محوره‌ی تنش، از آزمون‌های چندمحوری استفاده می‌شود، که نیازمند طراحی و تهیه‌ی تجهیزات خاص و همچنین در نظر گرفتن ملاحظات پیچیده حین انجام آزمون است. از دیگر پیچیدگی‌های آزمون‌های چندمحوره می‌توان به آماده‌سازی نمونه‌ها، دقت در رعایت هم‌راستایی نمونه‌ها و فک‌ها، و همچنین تفسیر نتایج و درک درست رفتار ماده اشاره کرد. وجود انحنای در هندسه‌ی نمونه‌ها باعث تغییر حالت تنش از تک‌محوری به چندمحوری می‌شود. به همین دلیل، نمی‌توان از رابطه‌ی ۴ برای هندسه‌های منحنی استفاده کرد و از روش اجزاء محدود<sup>۲۰</sup> برای محاسبه‌ی تنش سه‌محوره در هندسه‌های مختلف استفاده می‌شود.



**Fig. 3. (a) Displacement- Force diagram, (b) Stress-Strain diagram used in the simulation.**

شکل ۳. (الف) نمودار نیرو- جابجایی، (ب) نمودار تنش- کرنش استفاده شده در شبیه‌سازی.

اطمینان حاصل شده است که کماتش در هیچ‌یک از نمونه‌ها رخ نداده است. شکل شکست نمونه‌ها نیز با مکانیزم‌های فشاری موردانتظار تطابق داشته و هیچ نشانه‌ای از ناپایداری یا تغییر شکل جانبی مشاهده نشده است.

### ۴.۲. تحلیل عددی

شبیه‌سازی‌های عددی برای همه‌ی نمونه‌ها با استفاده از نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس انجام شده است. بار خارجی به‌صورت جابجایی در راستای Y اعمال و در سایر جهات، جابجایی مقید شده است. منحنی تنش- کرنش خمیری واقعی ماده‌ی استفاده‌شده برای شبیه‌سازی از آزمایش کشش بر روی نمونه دمبلی به‌دست آمده است (شکل ۳). پارامترهای سه‌محوره‌ی تنش ( $\eta$ )، پارامتر زاویه‌ی لود ( $\theta$ )، و کرنش شکست ( $\epsilon_f$ ) برای همه‌ی نمونه‌ها به‌دست آمده‌اند. به‌منظور اضافه‌کردن آسیب در شبیه‌سازی، از مدل آسیب نرم در نرم‌افزار آباکوس مطابق رابطه‌ی ۷ استفاده شده است:<sup>[۲۸]</sup>

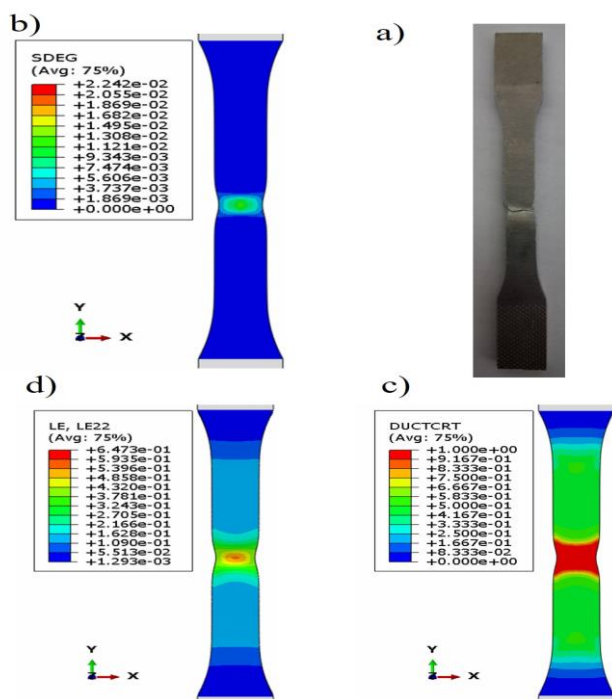
$$D = \int_0^{\bar{\epsilon}_f} \frac{d\bar{\epsilon}_p}{\bar{\epsilon}_f(\eta, \bar{\theta})} \quad (7)$$

که در آن،  $D$  شاخص آسیب و  $\bar{\epsilon}_f$  کرنش خمیری معادل هستند. در مدل اخیر، هنگامی که پارامتر  $D$  به ۱ برسد، شکست شروع می‌شود.

برای شبیه‌سازی آزمون‌های انجام‌شده، از پارامترهای جدول ۱ و نیز از نمودارهای شکل ۳ برای خواص خمیری استفاده شده است. برای مدل آسیب نرم آباکوس از کرنش‌های به‌دست‌آمده از آزمون‌های تجربی و نیز از حلگر Dynamic explicit برای اجرای شبیه‌سازی‌ها استفاده شده است. در شکل ۴، مدل اجزاء محدود و مش برای هر نمونه مشاهده می‌شود، که در آن المان مکعبی هشت‌گره‌ای<sup>۱۹</sup> (C3D8R) برای شبکه‌زدن نمونه‌ها استفاده شده است.

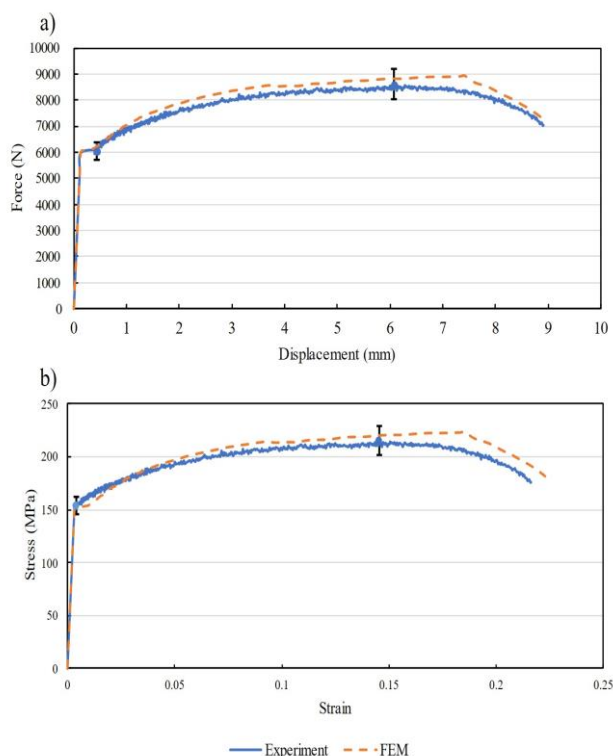
<sup>20</sup> Finite Element Method (FEM)

<sup>19</sup> Eight-node brick element



**Fig. 5. Dog-bone specimen: (a) after tensile test, (b) stiffness degradation parameter contour, (c) damage onset parameter contour, and (d) strain in the y direction.**

شکل ۵. نمونه‌ی دمبلی: (الف) پس از آزمون کشش، (ب) کانتور ضریب افت سفتی، (ج) کانتور پارامتر شروع آسیب، و (د) کرنش در راستای y.



**Fig. 6. Comparison of results obtained by experimental and FEM methods for the dog-bone sample: (a) force-displacement diagram and (b) stress-strain diagram.**

شکل ۶. مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده به روش‌های تجربی و FEM برای نمونه‌ی دمبلی: (الف) نمودار بار-جابجایی، و (ب) نمودار تنش-کرنش.

جدول ۲. مقادیر تنش سه‌محوره‌ی به‌دست‌آمده برای نمونه‌های مختلف.

**Table 2. Stress triaxiality values obtained for different samples.**

| sample       | stress triaxiality values |
|--------------|---------------------------|
| Dog-bone     | 0.33                      |
| M1(tensile)  | 0.353                     |
| M1(pressure) | -0.355                    |
| M2(tensile)  | 0.370                     |
| M2(pressure) | -0.381                    |
| M3(pressure) | -0.448                    |
| M4(pressure) | -0.497                    |
| M5(pressure) | -0.555                    |

البته باید به این نکته اشاره کرد که وجود انحنا در نمونه‌ها و محدودیت استفاده از روابط تئوری نه فقط به‌عنوان یک نقطه‌ی ضعف به‌شمار نمی‌آید، بلکه قابلیت جایگزین کردن آزمون دومحوره با آزمون تک‌محوره را در پی دارد. با توجه به توضیحات اخیر، در پژوهش حاضر، با استفاده از هندسه‌های مختلف و وجود انحنا، بازه‌ی گسترده‌ای از سه‌محوره‌ی تنش با استفاده از آزمون‌های تک‌محوره‌ی کشش و فشار بررسی شده‌اند. هندسه‌های مذکور به‌نوعی تعریف شده‌اند که هم امکان آزمون کشش و هم آزمون فشار بر روی آن‌ها امکان‌پذیر باشد. در روش عددی، ابتدا خواص کشسان و خمیری نمونه‌ها طبق بخش شبیه‌سازی عددی اعمال و بارگذاری انجام شده است. سپس، تنش سه‌محوره با استفاده از خروجی میدان نرم‌افزار اندازه‌گیری شده است. تغییرات تنش سه‌محوره در جابجایی‌های مختلف محاسبه و در نقطه‌ای که این مقدار به عدد ثابتی رسیده است، به‌عنوان تنش سه‌محوره‌ی نمونه‌ها انتخاب شده است. مقادیر تنش سه‌محوره در نواحی میانی نمونه و همچنین در بخش‌هایی از هندسه که ناچ یا انحنا داشته‌اند، استخراج شده است. به‌منظور راستی‌آزمایی مقادیر گزارش‌شده، روند تغییرات تنش سه‌محوره در طول تحلیل بررسی و فقط مقادیری ارائه شده‌اند که پس از نوسان‌های اولیه به مقدار پایدار رسیده بودند. بدین ترتیب، داده‌های گزارش‌شده بیانگر شرایط واقعی تنش در نواحی بحرانی نمونه هستند. نتایج به‌دست‌آمده برای نمونه‌های مختلف در جدول ۲ ارائه شده‌اند.

### ۲.۳. نمونه‌ی دمبلی

تصور نمونه‌ی تحت آزمایش پس از انجام آزمون کشش و نحوه‌ی شکست آن در شکل ۵- الف مشاهده می‌شود. همچنین مقادیر ضریب افت سفتی (SDEG)<sup>۲۱</sup>، که عبارت از مقدار کاهنده‌ی ماتریس سفتی ماده پس از شروع آسیب و همچنین پارامتر شروع آسیب (DUCTCRT)<sup>۲۲</sup> است، در شکل‌های ۵ (ب و ج) مشاهده می‌شوند.

مطابق کانتورهای اخیر، با گذر مقادیر پارامتر شروع آسیب از مقدار ۱، المان‌های مرتبط دچار آسیب و ماده دچار افت خواص شده است، که تأثیر از طریق پارامتر ضریب افت سفتی در ماتریس سفتی نمایان می‌شود. از دیگر نکات قابل‌ذکر، یکسان‌بودن نحوه‌ی شکست نمونه‌ی دمبلی در دو روش تجربی و عددی است. کانتور کرنش در راستای y در شکل ۵- د مشاهده می‌شود. در شکل‌های ۶ (الف و ب) به ترتیب، نمودارهای بار-جابجایی و تنش-کرنش نمونه‌ی دمبلی به دو روش تجربی و عددی مشاهده می‌شوند. در هر دو نمودار، نتایج

### ۲.۳.۳. فشار

فرم شکست نمونه‌ی M1 تحت بار فشاری در شکل ۹- الف و مقادیر ضریب افت سفتی و پارامتر شروع آسیب در شکل های ۹ (ب و ج) مشاهده می‌شوند. همچنین، کانتور کرنش در راستای Y برای نمونه‌ی M1 تحت بار فشاری در شکل ۹ د مشاهده می‌شود. همچنین، در شکل ۱۰ نیز نمودار بار- جابجایی نمونه‌ی M1 حاصل از آزمون فشار و تطابق قابل قبول نتایج دو روش تجربی و عددی نمایش داده شده است.

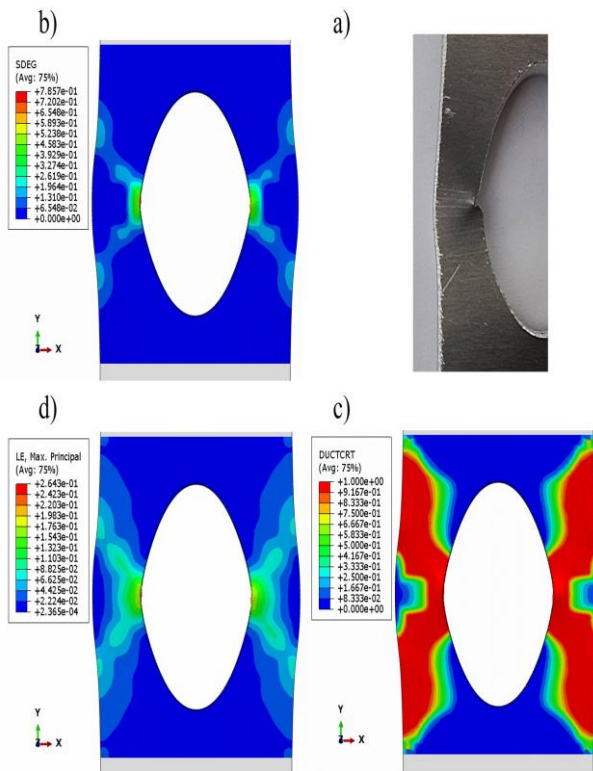


Fig. 9. Specimen M1: (a) after compression test, (b) stiffness degradation parameter contour, c) damage onset parameter contour, and (d) strain in the y direction.

شکل ۹. نمونه‌ی M1: (الف) پس از آزمون فشار، (ب) کانتور ضریب افت سفتی، (ج) کانتور پارامتر شروع آسیب، و (د) کرنش در راستای Y.

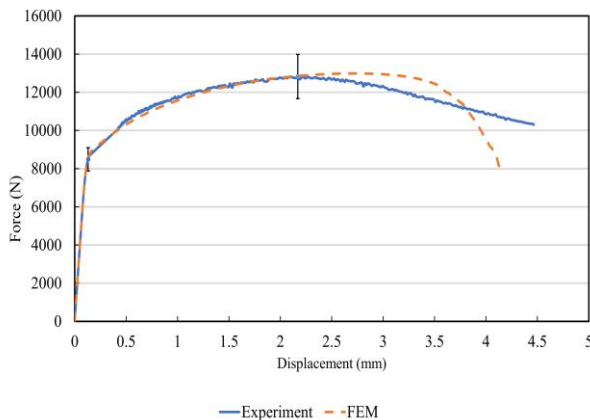


Fig. 10. Force-displacement diagram of sample M1 in compression test by two experimental and numerical methods.

شکل ۱۰. نمودار بار- جابجایی نمونه‌ی M1 در آزمون فشار به دو روش تجربی و عددی.

به‌دست آمده از هر دو روش با یکدیگر تطابق دارند. با توجه به شکل نمودارها، رفتار شکست ماده به‌صورت شکست نرم بوده است.

### ۳.۳. نمونه‌ی M1

#### ۱.۳.۳ کشش

در شکل ۷ (الف تا د)، به ترتیب نحوه‌ی شکست نمونه‌ی M1 تحت بار کششی، کانتور ضریب افت سفتی، پارامتر شروع آسیب، و کانتور کرنش در راستای Y مشاهده می‌شوند. علاوه بر این، در شکل ۸، نمودار بار- جابجایی نمونه‌ی M1 تحت آزمون کشش به دو روش تجربی و عددی مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، تطابق بین دو روش به‌خوبی ملاحظه می‌شود.

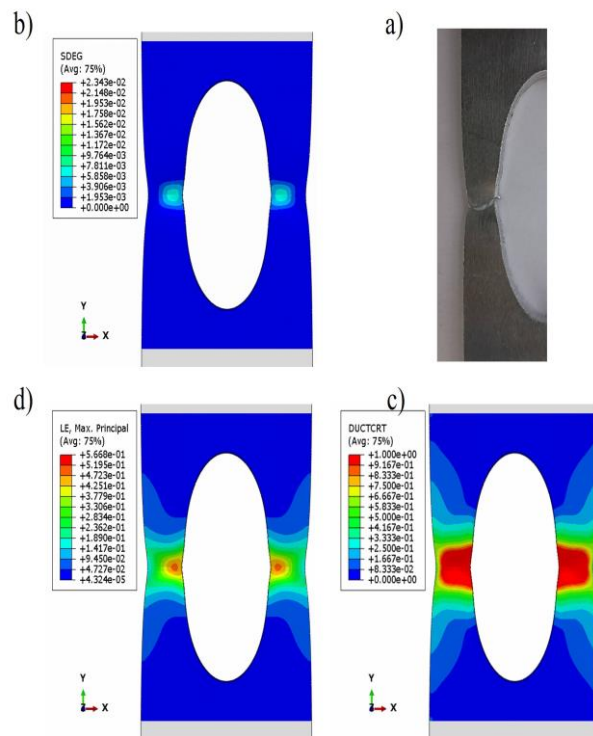


Fig. 7. Specimen M1: (a) after tensile test, (b) Stiffness degradation parameter contour, (c) damage onset parameter contour, and (d) strain in the y direction.

شکل ۷. نمونه‌ی M1: (الف) پس از آزمون کشش، (ب) کانتور ضریب افت سفتی، (ج) کانتور پارامتر شروع آسیب، و (د) کرنش در راستای Y.

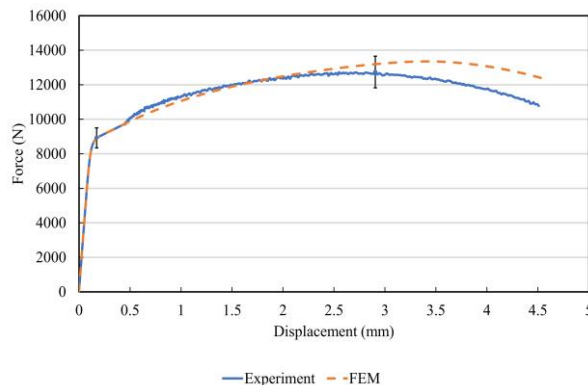


Fig. 8. Force-displacement diagram of sample M1 in tensile test using two experimental and numerical methods.

شکل ۸. نمودار بار- جابجایی نمونه‌ی M1 در آزمون کشش به دو روش تجربی و عددی.

### ۴.۳. نمونه‌ی M۲

#### ۱.۴.۳ کشش

در شکل ۱۱ (الف تا د)، به ترتیب نحوه‌ی شکست نمونه‌ی M۲ تحت بار کششی، کانتور ضریب افت سفتی، پارامتر شروع آسیب، و کانتور کرنش در راستای Y مشاهده می‌شوند. علاوه بر این، در شکل ۱۲، نمودار بار-جابجایی نمونه‌ی M۲ تحت آزمون کشش به دو روش تجربی و عددی نشان داده شده است، که طبق آن، تطابق خوبی بین دو روش ذکر شده مشاهده می‌شود.

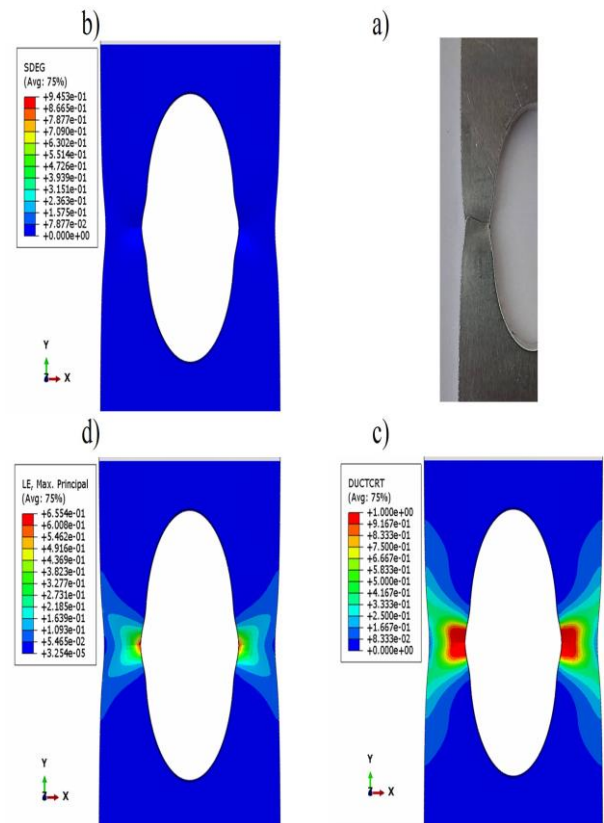


Fig. 11. Specimen M2 a) after tensile test, (b) stiffness degradation parameter contour, (c) damage onset parameter contour, and (d) strain in the y direction.

شکل ۱۱. نمونه‌ی M۲: (الف) پس از آزمون کشش، (ب) کانتور ضریب افت سفتی، (ج) کانتور پارامتر شروع آسیب، و (د) کرنش در راستای Y.

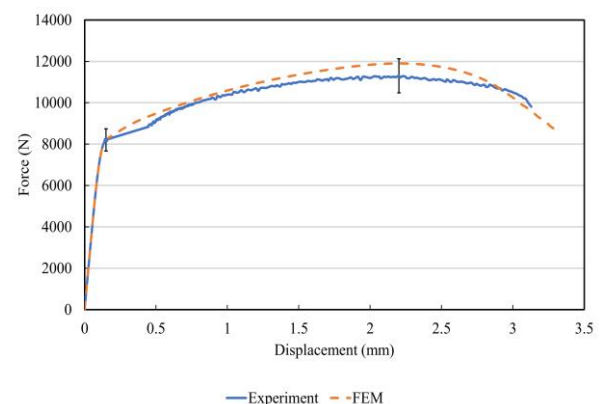


Fig. 12. Force-displacement diagram of sample M2 in tensile test using two experimental and numerical methods.

شکل ۱۲. نمودار بار-جابجایی نمونه‌ی M۲ در آزمون کشش به دو روش تجربی و عددی.

### ۱.۴.۳ فشار

فرم شکست نمونه‌ی M۲ تحت بار فشاری در شکل ۱۳- الف و مقادیر ضریب افت سفتی و پارامتر شروع آسیب در شکل های ۱۳-ب و ج) نشان داده شده‌اند. همچنین، کانتور کرنش در راستای Y برای نمونه‌ی M۲ تحت بار فشاری در شکل ۱۳-د مشاهده می‌شود. در شکل ۱۴ نیز نمودار بار-جابجایی نمونه‌ی M۲ حاصل از آزمون فشار و تطابق قابل قبول نتایج دو روش تجربی و عددی ملاحظه می‌شود.

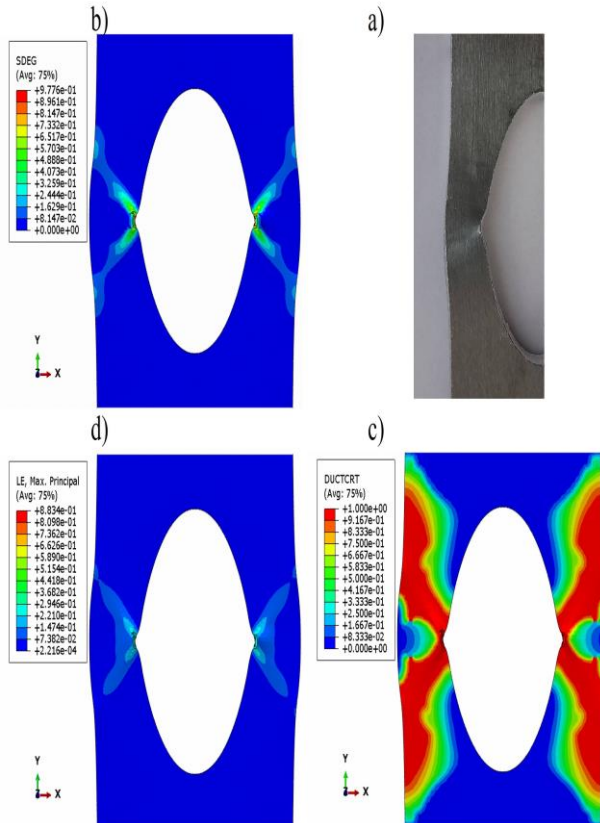


Fig. 13. Specimen M2: (a) after compression test, (b) stiffness degradation parameter contour, (c) damage onset parameter contour, and (d) strain in the y direction.

شکل ۱۳. نمونه‌ی M۲: (الف) پس از آزمون فشار، (ب) کانتور ضریب افت سفتی، (ج) کانتور پارامتر شروع آسیب، و (د) کرنش در راستای Y.

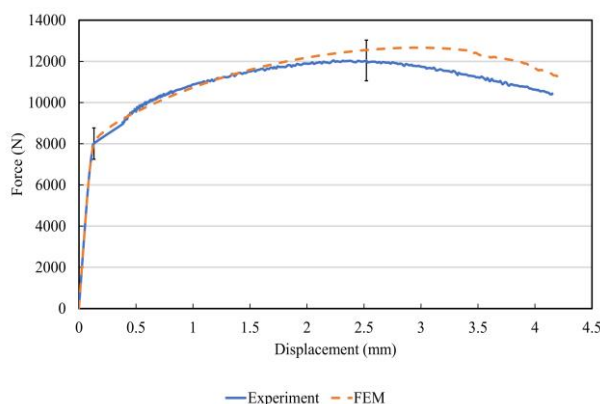
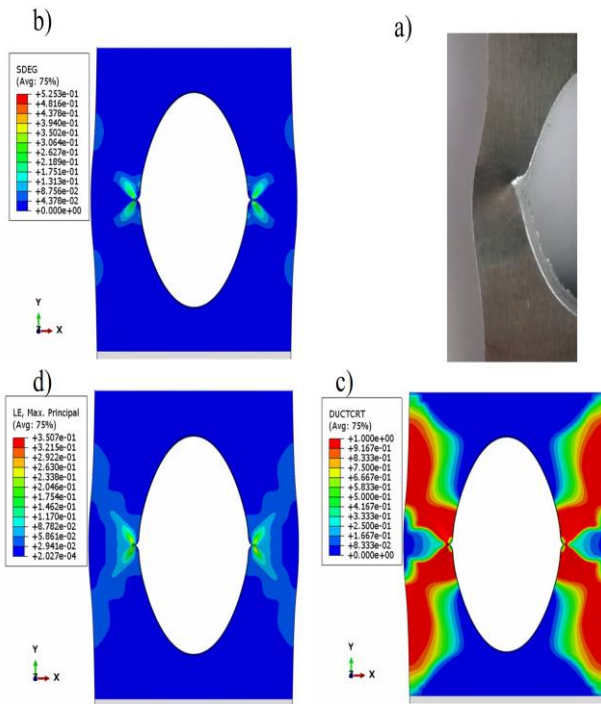
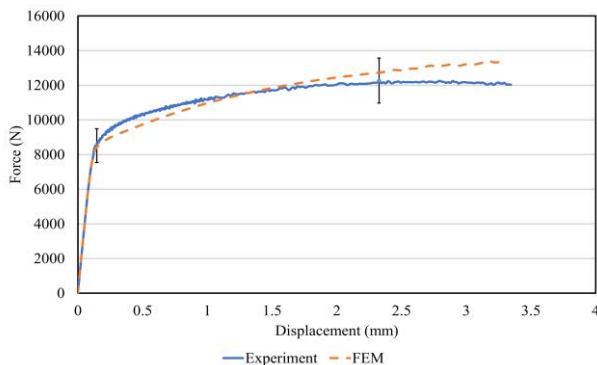


Fig. 14. Force-displacement diagram of sample M2 in compression test by two experimental and numerical methods.

شکل ۱۴. نمودار بار-جابجایی نمونه‌ی M۲ در آزمون فشار به دو روش تجربی و عددی.



**Fig. 17. Specimen M4:** (a) after compression test, (b) stiffness degradation parameter contour, (c) damage onset parameter contour, and (d) strain in the y direction.  
شکل ۱۷. نمونه‌ی M۴: (الف) پس از آزمون فشار، (ب) کانتور ضریب افت سفتی، (ج) کانتور پارامتر شروع آسیب، و (د) کرنش در راستای y.



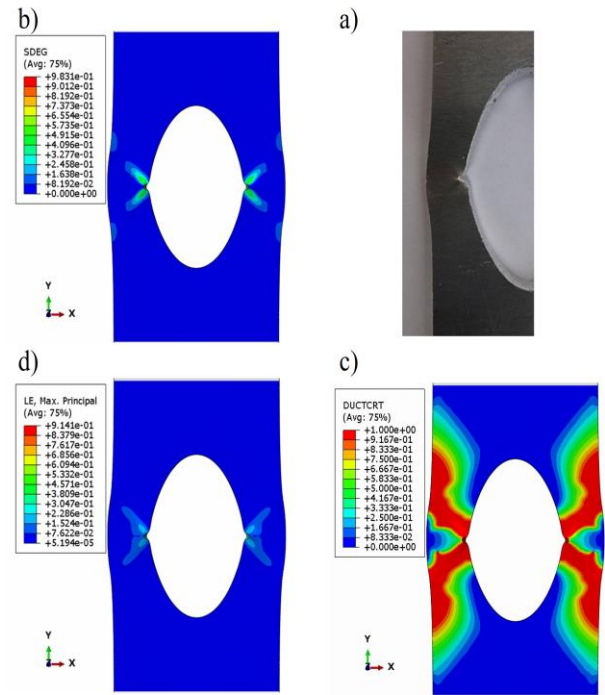
**Fig. 18. Force-displacement diagram of sample M4 in compression test by experimental and numerical methods.**

شکل ۱۸. نمودار بار-جابجایی نمونه‌ی M۴ در آزمون فشار به دو روش تجربی و عددی.

نشان داده شده‌اند. علاوه بر این، کانتور کرنش در راستای y برای نمونه‌ی M۴ تحت بار فشاری در شکل ۱۷-د و نمودار بار-جابجایی حاصل از روش تجربی و عددی در شکل ۱۸ ملاحظه می‌شوند.

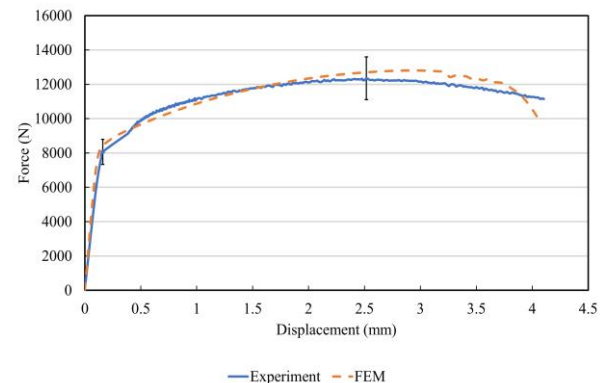
### ۸.۳. نمونه‌ی M۵

فرم شکست نمونه‌ی M۵ تحت بار فشاری در شکل ۱۹-الف مشاهده می‌شود. در شک‌های ۱۹ (ب و ج)، مقادیر ضریب افت سفتی و پارامتر شروع آسیب نشان داده شده‌اند. علاوه بر این، کانتور کرنش در راستای y برای نمونه‌ی M۵ تحت بار فشاری در شکل ۱۹-د و همچنین، نمودار بار-جابجایی حاصل از دو روش تجربی و عددی در شکل ۲۰ مشاهده می‌شوند.



**Fig. 15. Specimen M3:** (a) after compression test, (b) stiffness degradation parameter contour, (c) damage onset parameter contour, and (d) strain in the y direction.

شکل ۱۵. نمونه‌ی M۳: (الف) پس از آزمون فشار، (ب) کانتور ضریب افت سفتی، (ج) کانتور پارامتر شروع آسیب، و (د) کرنش در راستای y.



**Fig. 16. Force-displacement diagram of sample M3 in compression test using two experimental and numerical methods.**

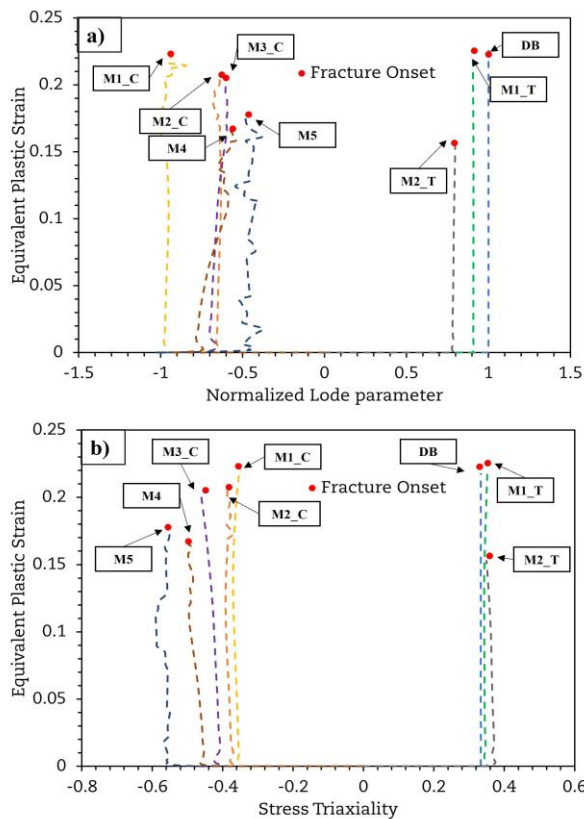
شکل ۱۶. نمودار بار-جابجایی نمونه‌ی M۳ در آزمون فشار به دو روش تجربی و عددی.

### ۵.۳. نمونه‌ی M۳

فرم شکست نمونه‌ی M۳ تحت بار فشاری در شکل ۱۵-الف و مقادیر ضریب افت سفتی و پارامتر شروع آسیب در شکل‌های ۱۵ (ب و ج) مشاهده می‌شوند. همچنین، کانتور کرنش در راستای y برای نمونه‌ی M۳ تحت بار فشاری در شکل ۱۵-د قابل ملاحظه است. در شکل ۱۶ نیز نمودار بار-جابجایی نمونه‌ی M۳ حاصل از آزمون فشار و تطابق قابل قبول نتایج دو روش تجربی و عددی مشاهده می‌شود.

### ۷.۳. نمونه‌ی M۴

فرم شکست نمونه‌ی M۴ تحت بار فشاری در شکل ۱۷-الف مشاهده می‌شود. در شکل‌های ۱۷ (ب و ج)، نیز مقادیر ضریب افت سفتی و پارامتر شروع آسیب



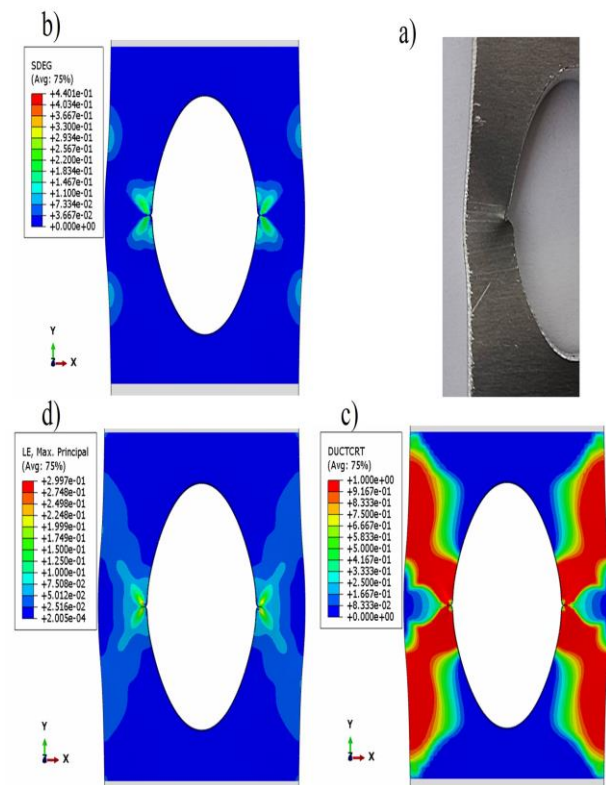
**Fig. 21. Strain diagram at the moment of failure in terms of: (a) normalized node angle, (b) negative stress triaxiality.**

شکل ۲۱. نمودار کرنش در لحظه‌ی شکست، برحسب: (الف) زاویه‌ی لود نرمالیزه‌شده، (ب) سه‌محوره‌ی تنش منفی.

محدود است، که کارایی محاسباتی و دشواری همگرایی را افزایش می‌دهد. همچنین اجتناب‌ناپذیر بودن برخی از عیوب فنی، مانند: رعایت نکردن ابعاد هندسی و آسیب‌های در هنگام ساخت، می‌توانند در اختلاف میان نتایج مؤثر باشند.

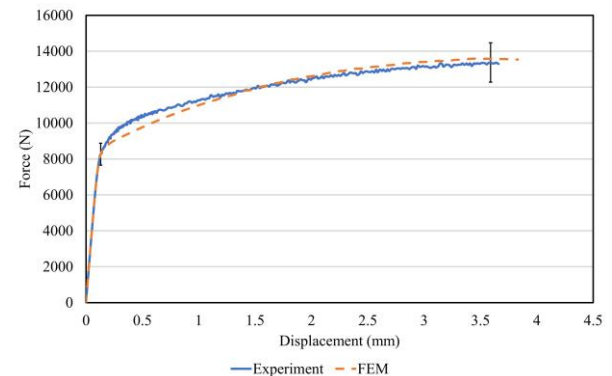
در تصاویر بخش ۳، برای نمونه‌های دمبلی،  $M_1$ ،  $M_2$ ، و  $M_3$  نحوه‌ی تغییر شکل و شکست به دو روش تجربی و عددی نشان داده شده‌اند. در هر دو روش تجربی و عددی، شکل شکست یکسان بوده است. در آزمون‌های کشش، کاهش سطح مقطع، نشانگر شکست نرم و بخش غالب تغییر شکل مربوط به نواحی مرکزی بوده است. مشابه آزمون کشش، در آزمون فشار نیز بیشترین میزان تغییر شکل در قسمت مرکزی و به‌ویژه در ناحیه‌ی دارای انحنای اتفاق افتاده است. این موضوع از مقادیر موجود در کانتورهای ضریب افت سفتی و پارامتر شروع آسیب نمونه‌ها نیز مشاهده می‌شود. با مقایسه‌ی مقادیر جابجایی لحظه‌ی شکست نمونه‌های  $M_1$  و  $M_2$  در هر دو آزمون کشش و فشار می‌توان نتیجه گرفت که وجود انحنای سبب ایجاد تمرکز تنش در نمونه‌ی  $M_2$  و نهایتاً کاهش جابجایی لحظه‌ی شکست نمونه‌ی اخیر نسبت به نمونه‌ی  $M_1$  شده است. این روند با نوک تیز شدن ناحیه‌ی انحنای در نمونه‌های  $M_3$ ،  $M_4$ ، و  $M_5$  نسبت به نمونه‌ی  $M_1$  نیز مشاهده می‌شود.

سابقه‌ی شکست نمونه‌ها با سه‌محوره‌ی تنش‌های مختلف در شکل ۲۱-الف و سابقه‌ی شکست نمونه‌ها برای زاویه‌ی لودهای مختلف در شکل ۲۱-ب مشاهده می‌شوند. در نمونه‌ی دمبلی، با توجه به ساده‌بودن شکل هندسی نمونه،



**Fig. 19. Specimen M5: (a) after compression test, (b) stiffness degradation parameter contour, (c) damage onset parameter contour, and (d) strain in the y direction.**

شکل ۱۹. نمونه‌ی  $M_5$ : (الف) پس از آزمون فشار، (ب) کانتور ضریب افت سفتی، (ج) کانتور پارامتر شروع آسیب، و (د) کرنش در راستای  $y$ .



**Fig. 20. Force-displacement diagram of sample M5 in compression test by experimental and numerical methods.**

شکل ۲۰. نمودار بار-جابجایی نمونه‌ی  $M_5$  در آزمون فشار به دو روش تجربی و عددی.

### ۹.۳ بحث

با مشاهده‌ی نمودارهای بار-جابجایی می‌توان نتیجه گرفت که فرم کلی تمامی نمودارها از نظر کیفی مشابه یکدیگر است و شامل یک رفتار کشسان اولیه و به دنبال آن ناحیه‌ی تسلیم، ناحیه‌ی خمیری، گلوپی شدن، و در انتها شکست نهایی می‌شوند. مطابق نتایج به دست آمده، تمام حالت‌های شکست نمونه‌ها، شکست نرم بوده‌اند. همچنین تطابق قابل قبولی میان نتایج حاصل از دو رویکرد تجربی و عددی مشاهده می‌شود. تفاوت ناچیز میان نتایج تجربی و عددی ناشی از موارد مختلفی، شامل تفاوت نادیده گرفتن برخی جزئیات نمونه در مدل المان

زاویه‌ی لود نرمالیزه‌شده، مقدار کرنش شکست با کاهش زاویه‌ی لود نرمالیزه‌شده افزایش یافته است.

در شکل‌های مرتبط با آزمون فشار با نمونه‌ها مشاهده می‌شود که تغییر شکل و شکست عمدتاً در ناحیه‌ی میانی و اطراف انحناء بیضوی و بیشترین مقدار آسیب در نواحی اطراف حفره متمرکز شده‌اند. این توزیع آسیب کاملاً با ماهیت تنش سه‌محوره‌ی منفی و شرایط بارگذاری فشاری سازگار بوده است. علاوه بر این، در نواحی بالا و پایین حفره، که تنش از حالت فشاری به حالت ترکیبی فشاری-برشی تغییر کرده است، پارامتر آسیب افزایش یافته است. با مشاهده‌ی نمونه‌ها بعد از آزمون فشار می‌توان نتیجه گرفت که آسیب بیشتر در نواحی نزدیک انحناء رخ داده است. این تطابق میان نتایج تجربی و عددی نشان می‌دهد که توزیع آسیب در نمونه‌ی مذکور صحیح بوده و نقش هندسه‌ی ناچ به‌عنوان متمرکزکننده‌ی تنش در فرآیند آغاز و تکامل آسیب به‌درستی در مدل اجزاء محدود بازتولید شده است.

کانتورهای زاویه‌ی لود، تنش سه‌محوره، و آسیب برای تمامی نمونه‌ها در شکل‌های ۲۲ و ۲۳ رسم شده‌اند. بررسی کانتورهای ذکر شده نشان می‌دهد

سه‌محوره‌ی تنش دچار تغییر خاصی نشده است. در حالی که سایر نمونه‌ها، پس از چند نوسان اولیه در کرنش‌های ابتدایی، به مقدار پایدار رسیده‌اند.

با افزایش مقدار سه‌محوره‌ی تنش مثبت، روند تغییرات کرنش شکست به‌صورت نزولی بوده است؛ به‌طوری که مقدار کرنش شکست به روش عددی در سه‌محوره‌ی تنش  $0/333$ ، برابر با  $0/22$  و در سه‌محوره‌ی تنش  $0/370$  برابر با  $0/16$  بوده است؛ در حالی که مقادیر مذکور به روش تجربی به ترتیب برابر با  $0/22$  و  $0/15$  بوده‌اند. روند تغییرات کرنش شکست در سه‌محوره‌ی تنش منفی متفاوت و به این صورت بوده است که در نمونه‌های  $M1$  الی  $M4$  با کاهش مقدار سه‌محوره‌ی تنش از  $-0/355$  تا  $-0/497$ ، کرنش شکست عددی از  $0/23$  تا  $0/16$  کاهش یافته و سپس در نمونه‌ی  $M5$ ، مقدار کرنش شکست عددی با افزایش اندکی ( $0/18$ ) روبه‌رو بوده است. این تذکر لازم است که مقادیر کرنش شکست حاصل از روش تجربی برای نمونه‌های  $M1$ ،  $M2$  و  $M3$ ، به ترتیب برابر با  $0/22$ ،  $0/20$  و  $0/19$  بوده است، که مؤکد روند نزولی مذکور است. در مقادیر مثبت زاویه‌ی لود نرمالیزه‌شده، کرنش شکست با افزایش مقدار زاویه‌ی لود نرمالیزه‌شده، روند صعودی داشته است. در مقابل و به ازاء مقادیر منفی

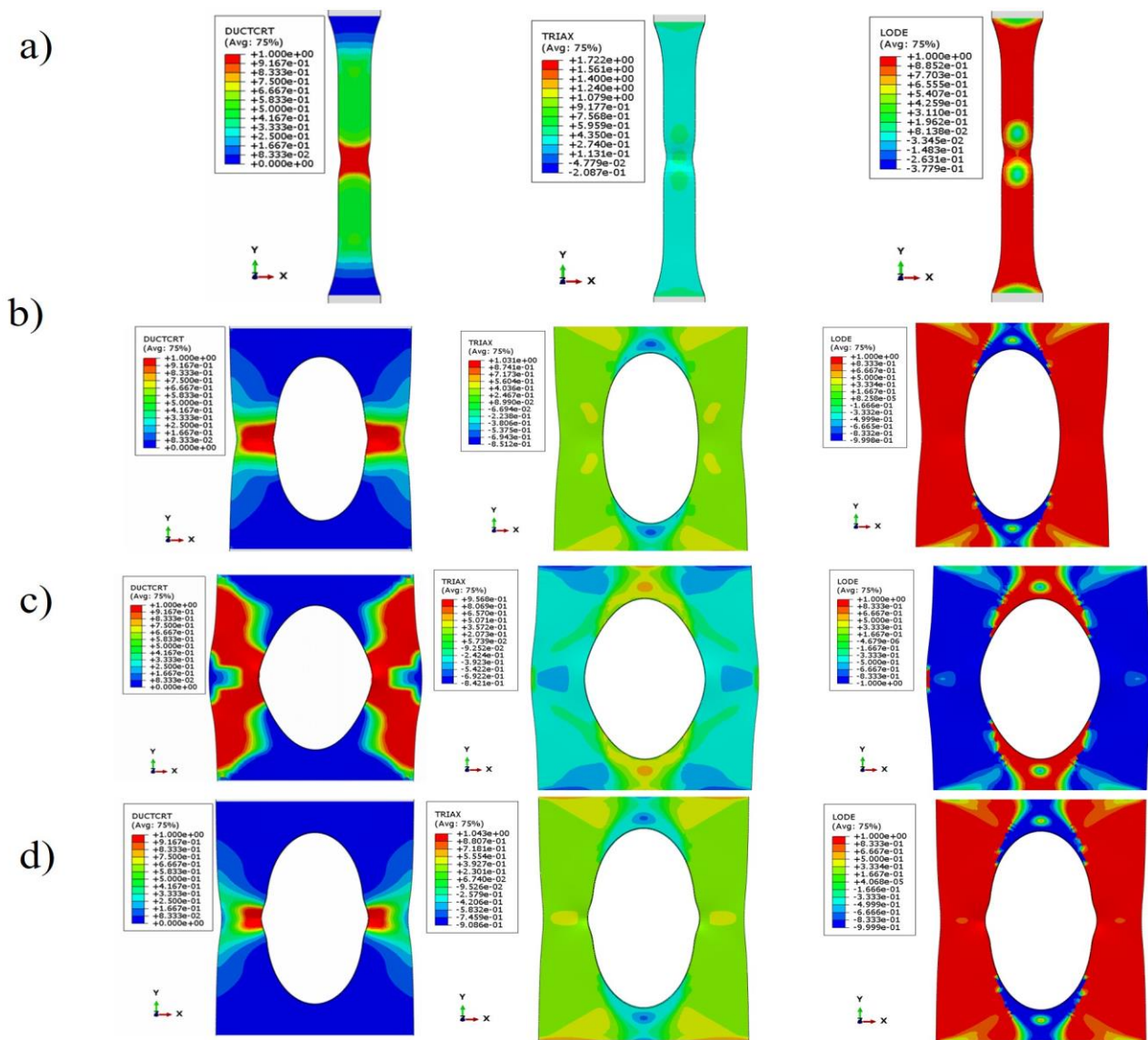


Fig. 22. Lode angle, stress triaxiality and damage contours for a) Dog-bone, b) M1 tensile, c) M1 compression and d) M2 tensile.

شکل ۲۲. کانتورهای زاویه لود، تنش سه‌محوره و آسیب برای نمونه‌های الف (دمبلی، ب)  $M1$  کششی، ج)  $M1$  فشاری و د)  $M2$  کشش.

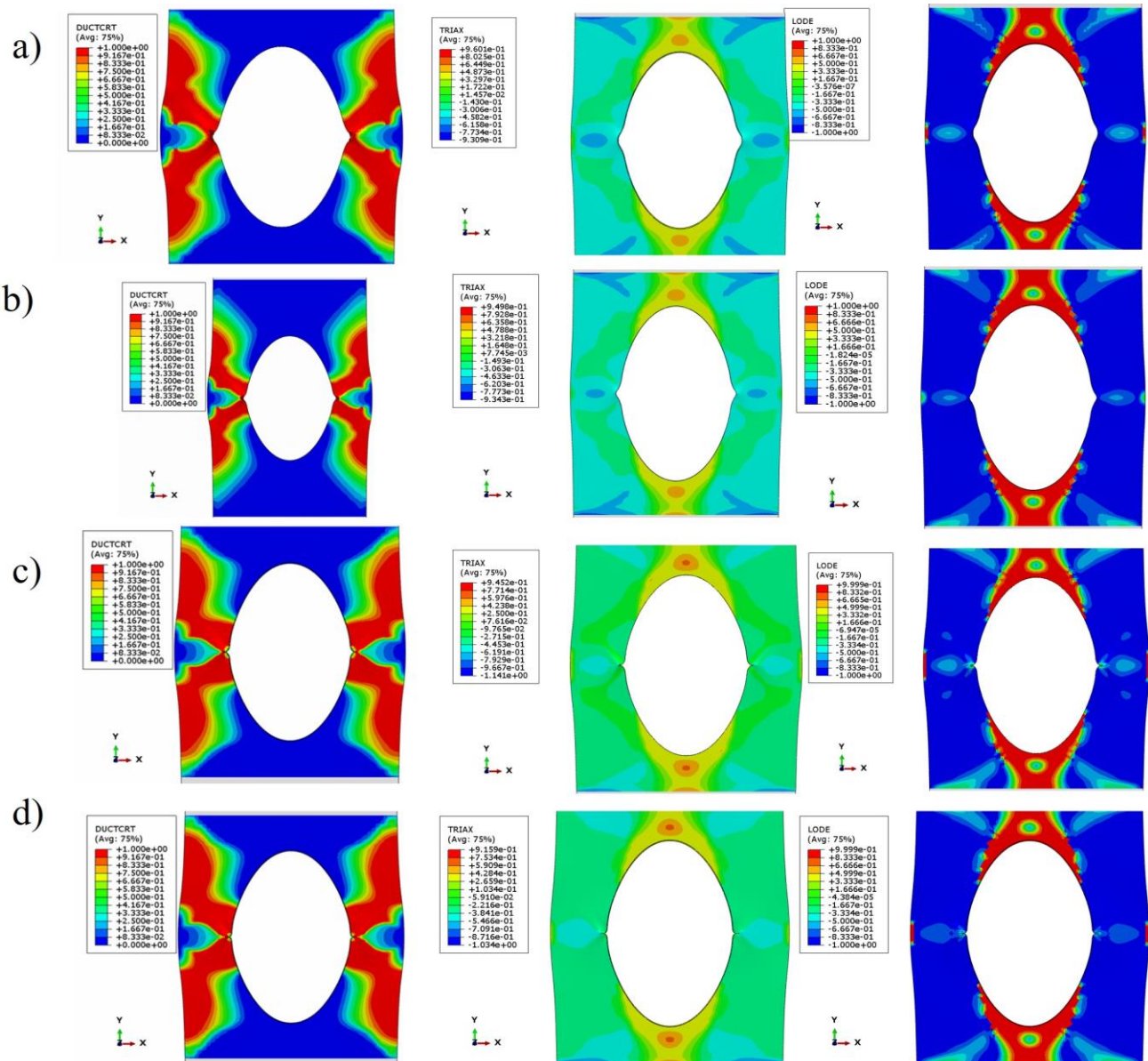


Fig. 23. Lode angle, stress triaxiality and damage contours for a) M12 compression, b) M3, c) M4 and d) M5.

شکل ۲۳. کانتورهای زاویه لود، تنش سه محوره و آسیب برای نمونه های الف) M2 فشار، ب) M3، ج) M4 و د) M5.

درک اثر تنش سه محوره در کرنش شکست از دیدگاه مهندسی و صنعتی اهمیت بسیاری دارد. در بسیاری از سازه های فلزی، به ویژه در صنایع خودروسازی و هوافضا، قطعات تحت ترکیبی از تنش های کششی، فشاری، و برشی قرار دارند، که میزان تنش سه محوره در نواحی مذکور، رفتار شکست را تعیین می کند. به عنوان مثال، در اجزاء جذب کننده انرژی، مانند قاب خودروها، سپرها، و سازه های جذب ضربه، کنترل میزان تنش سه محوره در نواحی بحرانی می تواند به تأخیر در آغاز شکست و افزایش توان جذب انرژی منجر شود. در مقابل، در قطعات تحت فشار بالا مانند لوله ها، اتصال ها، و مخازن، افزایش بیش از حد فشار هیدرواستاتیکی می تواند کرنش شکست را کاهش دهد و منجر به گسیختگی زود هنگام شود. نتایج پژوهش حاضر نشان می دهد که کنترل و تنظیم توزیع تنش سه محوره می تواند به افزایش چقرمگی، تأخیر در آغاز شکست، و بهبود توان جذب انرژی سازه منجر شود. لذا، یافته های حاضر می توانند در طراحی بهینه هندسه و مسیر بارگذاری قطعات فلزی استفاده شوند، تا احتمال وقوع شکست نرم کاهش و دوام و ایمنی سازه افزایش یابد.

تنش های سه محوره مثبت و منفی، اثر متفاوتی در نوع آسیب ایجاد شده داشته اند. در تنش سه محوره مثبت، آسیب در نواحی مرکزی و ناحیه ی نزدیک انحنای به وجود آمده است. در حالی که در تنش سه محوره منفی، قسمت های بالایی و پایینی انحنای نیز آسیب دیده اند. نکته ی حائز اهمیت دیگر این است که نوع توزیع تنش سه محوره با افزایش شعاع انحنای تغییر یافته است. تغییر توزیع در این نواحی ممکن است منجر به افزایش سهم تنش هیدرواستاتیکی، تمرکز تنش، و رشد حفره های ریز تسریع و منجر به تجمع کرنش خمیری و در نهایت آغاز شکست نرم شود.

به طور کلی، نتایج نشان می دهند که رقابت بین اثر تنش سه محوره و زاویه ی لود، نقش تعیین کننده ای در مکان و شدت ناحیه ی آسیب دارد؛ به گونه ای که در نواحی با تنش سه محوره مثبت و زاویه ی لود نزدیک به ۱، شکست زودتر آغاز می شود و ماهیت کششی دارد؛ در حالی که در نواحی با تنش سه محوره منفی و زاویه ی لود منفی، آسیب در نواحی بزرگتری از انحنای رخ می دهد.

## ۴. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، با استفاده از روش‌های تجربی و عددی، اثر پارامترهای سه‌محوره‌ی تنش و زاویه‌ی لود در شکست نرم بررسی شده‌اند. طراحی هندسه‌های مطالعه‌شده به نحوی انجام شده است که امکان بررسی سه‌محوره‌ی تنش منفی با استفاده از آزمون تک‌محوره در دو حالت کشش و فشار به‌جای آزمون دوماحوره‌ی مرسوم فراهم شده است.

شش نوع هندسه‌ی مختلف، شامل نمونه‌ی دمبلی و پنج نمونه‌ی مستطیلی به همراه حفره‌ی بیضوی انتخاب شده‌اند. همچنین بر روی حفره‌ی بیضوی، انحنا با شعاع‌های مختلف ایجاد شده است تا مقادیر مختلف سه‌محوره‌ی تنش به‌دست آیند. مقادیر سه‌محوره‌ی تنش منفی نمونه‌های طراحی‌شده در بازه‌ی  $0/355$  تا  $0/555$  - به‌دست آمده‌اند.

نمونه‌ها از جنس آلومینیوم ۶۰۶۱-T۶ ساخته شده‌اند. آزمون‌های کشش و فشار بر روی نمونه‌ها انجام و نتایج شبیه‌سازی با نتایج تجربی مقایسه شده است. مقایسه‌ی منحنی‌های نیرو-جابجایی اندازه‌گیری‌شده و شبیه‌سازی‌شده نشان می‌دهد که نتایج در پیش‌بینی مقادیر کرنش شکست و بیشینه‌ی نیرو مطابقت خوبی با یکدیگر داشته‌اند. بیشترین مقدار کرنش شکست برای نمونه‌های دمبلی و  $M1$  فشاری به‌دست آمده است، که برابر با  $0/23$  (به‌ازاء سه‌محوره‌ی تنش  $0/333$  و  $0/353$  -) و کمترین مقدار کرنش شکست برای

نمونه‌های  $M2$  کششی و  $M4$  فشاری  $0/16$  (به‌ازاء سه‌محوره‌ی تنش  $0/370$  و  $0/497$  -) بوده است.

براساس کانتورهای آسیب حاصل از روش عددی، در نواحی منتهی به انحنا، بیشترین مقدار پارامتر شروع آسیب و ضریب افت سفتی مشاهده شده است. همچنین با توجه به کانتور کرنش، بیشترین مقدار کرنش نیز در نواحی دارای انحنا موجود بوده است. مطابق نتایج به‌دست آمده، روند تغییرات کرنش شکست در سه‌محوره‌های تنش مثبت (با افزایش مقدار سه‌محوره‌ی تنش) و در سه‌محوره‌های تنش منفی (با کاهش مقدار سه‌محوره‌ی تنش) به‌صورت کاهشی بوده است. تغییرات کرنش شکست به‌ازاء زاویه‌ی لود نرمالیزه‌شده، روندی مشابه داشته است؛ به‌طوری که هم در مقادیر مثبت و هم منفی، زاویه‌ی لود نرمالیزه‌شده، روند افزایشی داشته است.

نتایج نشان می‌دهند که فشار هیدرواستاتیکی، نقش کلیدی در مکانیزم شکست داشته است. فشار هیدرواستاتیکی باعث تغییر ناحیه‌ی آسیب و تغییر کرنش شکست در نمونه‌ها شده است. همچنین وجود فشار هیدرواستاتیک باعث تشکیل تنش‌های ترکیبی شده است، که بر روی کرنش شکست اثرگذار بوده است. نتایج اخیر می‌توانند در طراحی و بهینه‌سازی قطعات فلزی تحت بارگذاری‌های ترکیبی استفاده شوند، به‌ویژه در صنایعی مانند خودروسازی و هوافضا، که کنترل شکست نرم برای افزایش ایمنی و دوام سازه‌ها، اهمیت بسیاری دارد.

## References – منابع

- Peng, Z., Zhao, H. & Li, X., 2021. New ductile fracture model for fracture prediction ranging from negative to high stress triaxiality. *International Journal of Plasticity*, 145, pp. 103057. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2021.103057>
- Yu, R., Li, X., Yue, Z., Li, A., Zhao, Z., Wang, X., Zhou, H. & Lu, T. J., 2022. Stress state sensitivity for plastic flow and ductile fracture of 1907a low-alloy marine steel: From tension to shear. *Materials Science and Engineering: A*, 835, pp. 142689. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2022.142689>
- Kubík, P., Šebek, F., Hůlka, J. & Petruška, J., 2016. Calibration of ductile fracture criteria at negative stress triaxiality. *International Journal of Mechanical Sciences*, 108, pp. 90-103. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.02.001>
- Wang, C., Liu, X.-g., Gui, J.-t., Xu, Z.-f. & Guo, B.-f., 2019. Influence of inclusions on matrix deformation and fracture behavior based on gurson–tvergaard–needleman damage model. *Materials Science and Engineering: A*, 756, pp. 405-416.
- <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.04.056>
- Lou, Y. & Yoon, J. W., 2017. Anisotropic ductile fracture criterion based on linear transformation. *International Journal of Plasticity*, 93, pp. 3-25. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.04.008>
- Li, W., Jing, Y., Zhou, T. & Xing, G., 2022. A new ductile fracture model for structural metals considering effects of stress state, strain hardening and micro-void shape. *Thin-Walled Structures*, 176, pp. 109280. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.109280>
- Torki, M. & Benzerga, A. A., 2022. Ductile fracture in plane stress. *Journal of Applied Mechanics*, 89, pp. 011001. <https://doi.org/10.1115/1.4052106>
- Freudenthal, A. M., 1950. The inelastic behavior of engineering materials and structures. *John Wiley & Sons, Inc.*
- Cockcroft, M., 1968. Ductility and workability of metals. *J. of Metals*, 96, pp. 2444.

10. Li, R., Zheng, Z., Zhan, M., Zhang, H., Cui, X. & Lei, Y., 2022. Fracture prediction for metal sheet deformation under different stress states with uncoupled ductile fracture criteria. *Journal of Manufacturing Processes*, 73, pp. 531-543.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2021.11.023>
11. Bridgman, P. W. 1964. *Studies in large plastic flow and fracture: With special emphasis on the effects of hydrostatic pressure*, Harvard University Press.
12. Bao, Y. & Wierzbicki, T., 2005. On the cut-off value of negative triaxiality for fracture. *Engineering fracture mechanics*, 72, pp. 1049-1069.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2004.07.011>
13. Zheng, M., Hu, C., Luo, Z. & Zheng, X., 1993. Further study of the new damage model by negative stress triaxiality. *International journal of fracture*, 63, pp. R15-R19.  
<https://doi.org/10.1007/BF00053322>
14. Khan, A. S. & Liu, H., 2012. A new approach for ductile fracture prediction on al 2024-t351 alloy. *International Journal of Plasticity*, 35, pp. 1-12.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.01.003>
15. Lou, Y., Yoon, J. W. & Huh, H., 2014. Modeling of shear ductile fracture considering a changeable cut-off value for stress triaxiality. *International Journal of plasticity*, 54, pp. 56-80.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2013.08.006>
16. Brünig, M., Gerke, S. & Schmidt, M., 2018. Damage and failure at negative stress triaxialities: Experiments, modeling and numerical simulations. *International Journal of Plasticity*, 102, pp. 70-82.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2017.12.003>
17. Ganjiani, M., 2020. A damage model for predicting ductile fracture with considering the dependency on stress triaxiality and lode angle. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 84, pp. 104048.  
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2020.104048>
18. Wang, B., Xiao, X., Astakhov, V. P. & Liu, Z., 2019. The effects of stress triaxiality and strain rate on the fracture strain of ti6al4v. *Engineering Fracture Mechanics*, 219, pp. 106627.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2019.106627>
19. Hong, T., Ding, F., Chen, F., Zhang, H., Zeng, Q. & Wang, J., 2023. Study on the fracture behaviour of 6061 aluminum alloy extruded tube during different stress conditions. *Crystals*, 13, pp. 489.  
<https://doi.org/10.3390/cryst13030489>
20. Liu, H., Jin, T., Su, B., Qiu, J. & Shu, X., 2024. Deformation responses and fracture behaviors of aa6061 under different stress triaxialities. *Advanced Engineering Materials*, pp. 2301805.  
<https://doi.org/10.1002/adem.202301805>
21. Guo, X., Zong, S., Zhang, J. & Fang, Y., 2023. Modified plasticity constitutive model for extruded aluminum alloys. *Journal of Building Engineering*, 73, pp. 106717.  
<https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2023.106717>
22. Haskul, M. & Arslan, E., 2025. Fracture initiation in aluminum alloys under multiaxial loading at various low strain rates. *Metals*, 15, pp. 785.  
<https://doi.org/10.3390/met15070785>
23. González, Á., Celentano, D., Cruchaga, M. & Ponthot, J.-P., 2024. The triaxiality effect on damage evolution in al-2024 tensile samples. *Metals*, 14, pp. 1103.  
<https://doi.org/10.3390/met14101103>
24. Feng, R., Chen, M. & Xie, L., 2024. Constitutive relationship and fracture mechanism for wide stress triaxiality of titanium alloy. *Engineering Fracture Mechanics*, 295, pp. 109804.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2023.109804>
25. Liu, B., Chang, M., Ren, Y., Dong, Y., Zhou, H. & Zhao, S., 2025. Parameter modification of ti6al4v df2012 ductile fracture model under wide range strain rate and analysis based on micro fracture mechanism. *Engineering Fracture Mechanics*, pp. 111446.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111446>
26. Wang, H., Jia, W., Ma, L., Huang, Z., Zhang, J., Ning, F. & Lei, J., 2025. Fracture behavior of az31 magnesium alloy under continuously variable stress triaxiality. *Engineering Failure Analysis*, 169, pp. 109177.  
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2024.109177>
27. Cheng, X., Wang, R., Zhou, Z., Yang, Y., Chen, X., Wu, H., Chen, X. & Xu, W., 2025. Characterization of uncoupled ductile fracture criteria for 0cr17ni4cu4nb stainless steel under different stress states. *Journal of Materials Research and Technology*, 36, pp. 5985-6003.  
<https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2025.04.225>
28. Bai, Y. & Wierzbicki, T., 2010. Application of extended mohr–coulomb criterion to ductile fracture. *International journal of fracture*, 161, pp. 1-20.  
<https://doi.org/10.1007/s10704-009-9422-8>