

تحلیل خمش استاتیکی در نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با استفاده از تئوری پوسته‌ها و تئوری الاستیسیته غیرموضعی

مهدی باباخانی^۱، عیسی احمدی^{۲*}

۱- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان

پست الکترونیکی نویسندگان:

۱- mahdibabakhani95@gmail.com

۲- i_ahmadi@znu.ac.ir

چکیده:

خمش استاتیکی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با استفاده از تئوری پوسته‌ها و تئوری الاستیسیته غیرموضعی تحلیل شده است. در این مقاله معادلات حاکم بر رفتار استاتیکی نانولوله با بهره‌گیری از تئوری پوسته لاو استخراج شده و شرایط مرزی مناسب در نظر گرفته شده است. حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاصل برای نانولوله، با روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی انجام شده است و تغییر شکل استاتیکی نانولوله استخراج شده است. در قسمت نتایج عددی تأثیر پارامترهای مختلف نظیر پارامتر غیرموضعی، شرایط مرزی و ابعاد هندسی و نوع بار وارده بر پاسخ خمش نانولوله بررسی شده است. نتایج عددی با نتایج مدل‌سازی نانولوله با تئوری تیرها مقایسه شده است و اختلاف نتایج دو تئوری در پیش‌بینی خمش بوجود آمده در نانولوله مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن اثرات غیرموضعی منجر به افزایش خیز پیش‌بینی شده برای نانولوله‌ها می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که در نظر گرفتن تئوری غیرموضعی، اختلاف پیش‌بینی تئوری پوسته‌ها با تئوری تیرها حتی برای نانولوله‌های بلند افزایش می‌یابد و اهمیت مدل‌سازی نانولوله‌ها با تئوری پوسته‌ها مشهود است.

واژگان کلیدی:

خمش استاتیکی نانولوله‌ها، نانولوله‌های تک‌جداره، تئوری پوسته‌ها، تئوری الاستیسیته غیرموضعی، روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی (GDQM).

* عیسی احمدی، دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک- دانشگاه زنجان.

ایمیل: i_ahmadi@znu.ac.ir (نویسنده مسئول مقاله)

Static bending analysis of single walled carbon nanotubes using shell theory and nonlocal elasticity

Mahdi Babakhani¹, Isa Ahmadi^{2*}

1- MSc., Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran

2- Associate Prof., Advanced Materials and Computational Mechanics Lab., Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran, i_ahmadi@znu.ac.ir

Abstract:

Carbon nanotubes (CNTs), owing to their exceptional mechanical, thermal, and electrical properties such as high strength, large elastic modulus, and remarkable chemical stability, have attracted considerable attention in a wide range of applications, including nanosensors, heat transfer systems, and composite reinforcements. Understanding their mechanical behavior, particularly in terms of deformation, vibration, and buckling, plays a crucial role in the design and development of advanced nanostructure-based devices. In this study, the static bending behavior of single-walled carbon nanotubes (SWCNTs) is analyzed using Love's shell theory in combination with the nonlocal elasticity theory. To more accurately represent nanoscale effects, the nonlocal elasticity approach is employed, which considers the dependence of stress on the strains of neighboring points. The governing equations are derived based on Love's shell theory, and appropriate boundary conditions are applied. The resulting partial differential equations are solved using the generalized differential quadrature method (GDQM). The effects of various parameters, such as the nonlocal length scale, boundary conditions, geometric dimensions of the nanotube, and the type of applied load, on the bending response are examined.

The numerical results are compared with those obtained from modeling the nanotube using beam theory, and the differences between the two approaches in predicting the bending behavior are evaluated. The findings indicate that nonlocal effects lead to a reduction in the bending stiffness of nanotubes, highlighting the importance of shell theory for accurate modeling of their behavior. The results of the shell model are further compared with those of the beam model, showing that, when nonlocal effects are taken into account, the discrepancy between shell theory and beam theory predictions of deflection increases even for long nanotubes. Therefore, the use of beam theory for modeling nanotube deflection can result in considerable errors. The effect of various parameters and loading on the bending deflection of carbon nanotube is investigated in the numerical results.

Keywords: Bending of nanotubes, single walled nanotube, shell theory, nonlocal elasticity theory, generalized differential quadrature method (GDQM)

۱ - مقدمه و تاریخچه تحقیقات

نانولوله‌های کربنی (CNTs) به دلیل ویژگی‌های مکانیکی، حرارتی و الکتریکی منحصر به فرد خود، مانند استحکام بالا، مدول الاستیسیته بالا و پایداری شیمیایی مطلوب، در حوزه‌های مختلفی همچون نانوحسگرها، سامانه‌های انتقال حرارت و تقویت‌کننده‌های کامپوزیت مورد توجه قرار گرفته‌اند. بررسی رفتار مکانیکی این سازه‌های نانومقیاس، به‌ویژه در زمینه تحلیل تغییر شکل، ارتعاشات و کمانش آنها اهمیت زیادی در طراحی و توسعه کاربردهای این نانوسازه دارد. یکی از روش‌های قدرتمند برای مدلسازی رفتار این سازه‌ها استفاده از تئوری دینامیک مولکولی است [۱-۲]. با این حال استفاده از روش دینامیک مولکولی مخصوصاً برای سازه‌های بزرگ در مقیاس نانو نیاز به حجم محاسبه بسیار بالایی دارد و بعضاً مقرون به صرفه نیست. روش مکانیک مولکولی که بر مبنای مدل کردن برهمکنش‌های بین مولکولی بصورت فنرهای کششی، خمشی و پیچشی و بهره‌گیری از روش المان محدود می‌باشد برای مدلسازی رفتار نانوساختارها استفاده شده است [۳-۴]. با این حال مدل‌های بر مبنای مکانیک محیط پیوسته نیز برای مدلسازی رفتار این سازه‌های در اندازه نانو مورد استفاده گسترده قرار گرفته است. ولی به علت ابعاد کوچک برهم کنش بین اتمی در مقیاس نانو قابل صرف‌نظر نیست و تئوری کلاسیک الاستیسیته به دلیل نادیده گرفتن اثرات مقیاس کوچک - که تنش در هر نقطه را تابعی از کرنش در همان نقطه در نظر می‌گیرد - در مدل‌سازی رفتار نانوسازه‌ها دارای محدودیت است. در این راستا تئوری‌های برای در نظر گرفتن اثر اندازه در تحلیل نانوسازه‌ها با تئوری مکانیک محیط پیوسته رایج شده است که تئوری غیرموضعی الاستیسیته که نخستین بار توسط ارینگن معرفی شد [۵]، یکی از مناسب‌ترین رویکردها برای لحاظ کردن اثرات اندازه‌ای در تحلیل نانوساختارهاست. این تئوری با در نظر گرفتن وابستگی تنش هر نقطه به کرنش در آن نقطه و نقاط مجاور، موجب بهبود دقت نتایج در تحلیل رفتار خمش و ارتعاش نانوتیرها می‌شود.

تئوری تیرها توسط محققان برای مدلسازی اثر اندازه کوچک مورد استفاده قرار گرفته است. مخصوصاً در مورد نانولوله‌ها کربنی، به علت نسبت طول به قطر بالا، برای ساده سازی فرمولبندی از تئوری تیرها در کنار تئوری پیوسته‌ها برای مدل‌سازی رفتار مکانیکی نانولوله‌ها استفاده شده است. در تئوری تیر از تغییرات در راستای محیطی نانولوله صرف‌نظر می‌شود و فرض می‌شود که نانولوله یک سازه یک بعدی (طولی) است. تحقیقات متعددی در

زمینه مدلسازی نانولوله‌ها با مدل تیر و با استفاده از تئوری ارینگن انجام شده است. ردی [۶]، ردی و پلنگ [۷] و آیدوگلو [۸] با استفاده از مدل تیرها و تئوری غیرموضعی ارینگن، مدل تیر غیرموضعی را برای بررسی رفتار مکانیکی نانولوله‌ها شامل خمش، ارتعاشات آزاد و کمانش ارایه کردند. پرادهان [۹] و الشورباقی و همکاران [۱۰] روش المان محدود برای تحلیل نانولوله‌ها (نانوتیرها) با استفاده از تئوری غیرموضعی تیرها برای بررسی خمش در نانوتیرها ارایه کردند. پادیکار و پرادهان [۱۱]، جیوالک و دمیر [۱۲]، هادی و همکاران [۱۳] و ابومندور و همکاران [۱۴] از تئوری تیرها و الاستیسیته غیرموضعی و روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی^۲ (GDQ) برای بررسی خمش و ارتعاشات و یا کمانش در نانولوله‌ها استفاده کردند. نژاد و همکاران [۱۵] از فرم انتگرالی تئوری الاستیسیته غیرموضعی و تئوری تیراویلر-برنولی برای بررسی خمش نانوتیرها استفاده نمود. نجفی و احمدی [۱۶، ۱۷] با استفاده از تئوری غیرموضعی ارینگن و یک روش بر مبنای تئوری لایه‌ای، روش جدیدی برای بررسی خمش و ارتعاشات نانوتیر با دقت بالاتر ارایه نمودند. کوچکیان فرد و علی‌بیگلو [۱۸] ارتعاشات غیرموضعی نانوتیر دوار با بستر ویسکوالاستیک را با در نظر گرفتن اثر سطحی مورد بررسی قرار دادند. احمدی و همکاران [۱۹] رفتار خمش گذرای نانوتیر را در اثر برخورد نانوذر با روش بدون المان و تئوری غیرموضعی مورد بررسی قرار دادند. دانش و همکاران [۲۰] یک مطالعه مقایسه‌ای بین روش غیرموضعی انتگرالی تیر تیموشینکو و روش دوبعدی انتگرالی الاستیسیته غیر موضعی برای بررسی خمش در نانوسازه انجام دادند. احمدی و همکاران [۲۱، ۲۲] از روش بدون المان و تئوری غیرموضعی تیر تیموشینکو برای بررسی کمانش و ارتعاشات نانوتیرهای چندگانه استفاده کردند.

از سوی دیگر استفاده از تئوری پیوسته برای مدلسازی نانولوله‌ها به دلیل در نظر گرفتن هندسه واقعی نانولوله و تنش‌های طولی و محیطی نسبت به مدل تیر پیچیده‌تر بوده و ابزار قدرتمندتری برای مدل‌سازی دقیق‌تر رفتار نانولوله‌ها محسوب می‌شود و ترکیب این تئوری با مدل غیرموضعی می‌تواند مدل مناسب‌تری برای در نظر گرفتن اثرات هندسه و اندازه کوچک باشد و در تحلیل نانولوله‌های کربنی نقش مهمی ایفا کند. از آنجا که معادلات دیفرانسیل حاکم بر نانولوله‌ها معمولاً بمراتب پیچیده‌تر از معادلات حاکم بر تیرها می‌باشند لذا حل این معادلات مخصوصاً برای شرایط لبه‌ای مختلف پیچیدگی‌های دارد. برای حل معادلات حاکم حاصل از این مدل‌ها، روش‌های عددی پیشرفته نظیر روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی کاربرد وسیعی یافته‌اند. روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی به دلیل

همگرایی سریع و دقت بالا در تقریب مشتقات، گزینه‌ای مناسب برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است و توسط محققان برای تحلیل نانو سازه‌ها استفاده شده است.

حسینی هاشمی و ایلخانی [۲۳] با ترکیب تئوری پوسته لاو و مدل غیرموضعی، ارتعاشات آزاد نانولوله‌های دوار را تحلیل کردند. ونگ و وارادان [۲۴] تئوری پوسته و الاستیسیته غیرموضعی را در تحلیل انتشار موج در نانولوله‌ها به کار بردند. ونگ و یانگ [۲۵] از تئوری پوسته‌ها برای بررسی کماتش و ناپایداری نانولوله دوجداره استفاده کرد. ونگ و همکاران [۲۶] از تئوری پوسته برای بررسی کماتش خمشی نانولوله‌ها کرنی چند دیواره استفاده کردند. شعبان و علی بیگلر [۲۷] از تئوری الاستیسیته سه بعدی برای بررسی خمش و ارتعاشات نانولوله‌ها همراه با تئوری غیرموضعی استفاده کردند. محققان دیگری نیز از تئوری پوسته دانل یا فلوگه برای بررسی فرکانس‌های طبیعی نانولوله‌ها استفاده کرده‌اند. انصاری و همکاران [۲۸، ۲۹] ارتعاشات آزاد نانولوله‌ها را با تئوری پوسته فلوگه مورد بررسی قرار دادند. سلیم و همکاران [۳۰] ارتعاشات پیچشی نانولوله‌های کرنی تک‌داره با هندسه نامنظم را با شرایط مرزی تکیه‌گاه الاستیک، با استفاده از تئوری پوسته‌ای فلوگه و رویکرد انتشار موج بررسی کردند. استروزی و همکاران [۳۱] در سال ۲۰۲۳ مقایسه‌ای بین سه تئوری کلاسیک پوسته‌ای شامل تئوری‌های دانل سندرز و فلوگه در ارزیابی فرکانس‌های طبیعی نانولوله‌های کرنی تک‌داره انجام دادند.

مرور ادبیات فوق نشان می‌دهد که هرچند که از تئوری تیرها همراه با تئوری غیرموضعی به طور گسترده برای تحلیل خمش و خیز در نانو سازه‌ها و نانولوله‌ها استفاده شده است، استفاده از تئوری پوسته‌ها برای بررسی خمش استاتیکی در نانولوله‌ها بسیار محدود و موارد مشاهده شده در منابع به طور عمده در مورد ارتعاشات و ناپایداری نانولوله‌ها می‌باشد. استفاده هم‌زمان از تئوری پوسته لاو و مدل غیرموضعی الاستیسیته به همراه روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی ابزاری قدرتمند برای تحلیل رفتار مکانیکی نانولوله‌ها خواهد بود. با وجود پیشرفت‌های قابل توجه، هنوز تحلیل جامع خیز و خمش نانولوله‌ها تحت بارگذاری‌های جانبی و شعاعی مختلف، با در نظر گرفتن شرایط مرزی متنوع و اثرات مقیاس کوچک، نیازمند تحقیقات بیشتری است که پژوهش حاضر درصدد پر کردن این شکاف پژوهشی است. در این مقاله با استفاده از تئوری پوسته‌های لاو تحلیل خمش و خیز در نانولوله‌های کرنی تحت بارگذاری مختلف و شرایط مرزی مختلف انجام شده است. برای بررسی اثر اندازه از تئوری غیرموضعی اربنگن استفاده شده است. با استفاده از ترکیب تئوری غیرموضعی اربنگن و تئوری پوسته لاو، مدلی برای

بررسی خمش نانولوله‌ها ارایه شده است. برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله در شرایط مرزی مختلف با توجه به کارایی بالای روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی، برای حل معادلات دیفرانسیل از روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی استفاده شده است و معادلات دیفرانسیل برای شرایط مرزی مختلف حل شده است و میدان جابجایی نانولوله برای بارگذاری‌های مختلف استخراج شده است. نتایج بدست آمده برای خیز حداکثر نانولوله با نتایج حاصل از تئوری تیر مقایسه شده است و نشان داده شده است که در چه محدوده‌ای می‌توان از تئوری تیر برای تحلیل جابجایی و خمش در نانولوله‌ها استفاده کرد. اثر پارامتر غیرموضعی در راستای طولی و محیطی نانولوله در نظر گرفته شده است و نشان داده شده است که در نظر گرفتن اثراندازه در تئوری پوسته و تئوری تیر اثرات متفاوتی در پیش‌بینی خمش در نانولوله دارد. بدون در نظر گرفتن اثر اندازه برای L/R های بزرگ پیش‌بینی تئوری تیر و پوسته برای خیز حداکثر تطابق بالایی دارد ولی با در نظر گرفتن اثر اندازه حتی برای L/R های بزرگ پیش‌بینی تئوری پوسته با تئوری تیر انطباق ندارد و لذا با در نظر گرفتن اثر اندازه حتی برای نانولوله‌های بلند انطباق بین پیش‌بینی تئوری پوسته و تیرها وجود ندارد.

۲- مدل‌سازی

برای مدل‌سازی خمش و تغییر شکل نانولوله از تئوری پوسته‌های نازک استفاده شده است. شکل شماتیک پوسته‌ای از نانولوله کرنی تک‌داره در شکل (۱) نشان داده شده است. طول نانولوله برابر با L و شعاع متوسط آن برابر با R در نظر گرفته شده است و محورهای مختصات $xr\theta$ برای نانولوله در نظر گرفته شده است که محور x بر محور نانولوله منطبق است و r مختصه شعاعی و θ مختصه محیطی است. همچنین فرض شده است که بار خارجی گسترده $q_z(x, \theta)$ و $q_\theta(x, \theta)$ در راستای شعاعی و محیطی و محوری بر نانولوله وارد می‌شود. در مدل‌سازی رفتار مکانیکی نانولوله، برای بیان تغییر شکل نانولوله، میدان جابجایی نانولوله در راستای طولی، محیطی و شعاعی به ترتیب با $\bar{u}$ ، $\bar{v}$ و $\bar{w}$ مشخص می‌شود. رابطه مولفه‌های جابجایی پوسته برحسب مولفه‌های مختصات و جابجایی صفحه میانی بصورت زیر بیان می‌شود [۳۲].

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, \theta, z) &= u(x, \theta) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ \bar{v}(x, \theta, z) &= v(x, \theta) - z \left(\frac{\partial w}{R \partial \theta} + \frac{v}{R} \right) \\ \bar{w}(x, \theta, z) &= w(x, \theta)\end{aligned}\quad (1)$$

که $u(x, \theta)$ ، $v(x, \theta)$ و $w(x, \theta)$ مولفه‌های جابجایی صفحه میانی پوسته است. قابل ذکر است که بر اساس فرضیات استفاده شده در مدل پوسته جدار نازک و به علت ضخامت کم جداره نانولوله، از

نقطه تأثیر می‌پذیرد، که برخلاف فرض تئوری کلاسیک، به‌طور دقیق‌تری رفتار مواد در مقیاس نانو را مدل‌سازی می‌کند. بمنظور اجتناب از درگیر شدن با معادلات انتگرالی، در منابع مختلف از فرم دیفرانسیلی معادله استفاده می‌شود. معادله ساختاری غیرموضعی در فرم دیفرانسیلی بصورت زیر بیان می‌شود [۵].

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4)$$

که در معادله فوق، $\mu = (e_0 a)^2$ پارامتر اندازه کوچک در تئوری الاستیسیته غیرموضعی می‌باشد. این پارامتر برای هر ماده خاص با استفاده از آزمایشات مناسب تعیین می‌شود. با توجه به اینکه از کرنش‌های در راستای ضخامت صرف‌نظر شده است، رابطه ساختاری برای رابطه تنش و کرنش در تئوری غیرموضعی بر اساس رابطه (۵) بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

که در معادله فوق E مدول یانگ، ν ضریب پواسون، σ_x و σ_θ و $\sigma_{x\theta}$ برترتیب تنش عمودی محوری (طولی) و تنش محیطی و تنش برشی درون صفحه‌ای می‌باشند.

برای استخراج معادلات حاکم بر نانولوله از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل استفاده شده است. با توجه به اینکه از کرنش‌های برون صفحه‌ای ε_z ، γ_{xz} و $\gamma_{\theta z}$ صرف‌نظر شده است، انرژی پتانسیل کرنشی پوسته را می‌توان بصورت زیر بیان کرد [۳۲].

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta} \gamma_{x\theta}) dV \quad (6)$$

با جایگذاری روابط تنش و کرنش در رابطه (۶) و انتگرال‌گیری روی حجم نانولوله، رابطه زیر حاصل خواهد شد:

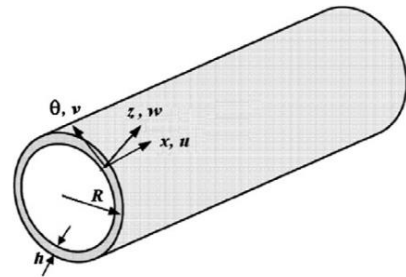
$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ N_{xx} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) + N_{\theta\theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{\delta w}{R} \right) \right. \\ \left. + N_{x\theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - M_{xx} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + \right. \\ \left. + M_{\theta\theta} \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial \delta v}{R^2 \partial \theta} \right) \right. \\ \left. + M_{x\theta} \left(-\frac{2}{R} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta \partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right\} R dx d\theta \quad (7) \end{aligned}$$

که در تئوری پوسته، متجه‌های تنش استفاده شده در رابطه (۷) براساس مؤلفه‌های تنش بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}) dz \\ (M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}) z dz \end{aligned} \quad (8)$$

کار نیروهای خارجی وارده بر نانولوله از رابطه زیر بدست می‌آید.

مؤلفه کرنش در راستای شعاعی پوسته (ε_z) و کرنش‌های برشی در راستای ضخامت (γ_{xz} و $\gamma_{\theta z}$) ناچیز در نظر گرفته شده است.



شکل ۱. مدل پوسته‌ای از یک نانولوله تک جداره
Fig.1 Shell model of a single-walled nanotube

مؤلفه‌های کرنش در پوسته از رابطه (۲) بدست می‌آید [۳۲]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) - z \frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{x\theta} &= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{1}{R} \left(-\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

در این مقاله بمنظور در نظر گرفتن اثر اندازه کوچک در مدل‌سازی رفتار نانولوله از تئوری الاستیسیته غیرموضعی [۵] استفاده شده است. تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک موضعی و تئوری الاستیسیته غیرموضعی در تعریف تنش است. در نظریه کلاسیک موضعی، بین تنش در یک نقطه و کرنش در همان نقطه یک تناظر یک به یک برقرار است. بدین معنی که تنش در یک نقطه فقط تابعی منحصر به فرد از کرنش در همان نقطه است، ولی در تئوری الاستیسیته غیرموضعی، تنش در یک نقطه، تابعی از کرنش در تمام نقاط همسایگی آن نقطه در جسم است. رابطه ساختاری در تئوری الاستیسیته غیرموضعی به شکل انتگرالی آن به صورت زیر است [۵].

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\Omega} \psi(|x' - x|, \tau) C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x') dV(x') \quad (3)$$

که در آن σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش در نقطه x مؤلفه‌های تانسور کرنش، C_{ijkl} تانسور خواص ماده (ثوابت الاستیسیته) است، و ψ تابع هسته غیرموضعی است که میزان تأثیر تنش در نقطه x را از کرنش نقاط همسایگی آن مشخص می‌کند، Ω دامنه جسم مورد نظر است که انتگرال‌گیری بر روی آن انجام می‌شود. همچنین τ پارامتر مشخصه غیرموضعی است و نقش مهمی در تعیین گستره تأثیر کرنش یا تنش نقاط اطراف بر نقطه مورد نظر دارد. این پارامتر معمولاً به صورت بدون بعد و با رابطه $\tau = e_0 a / L$ تعریف می‌شود در این رابطه، e_0 یک ثابت تجربی بدون بعد است که مقدار آن در محدوده 0.3 تا 0.5 در نظر گرفته می‌شود. پارامتر a معرف فاصله بین‌اتمی یا اندازه ویژگی‌های ساختاری در مقیاس نانو است و L نیز طول مشخصه هندسی جسم است که ابعاد کلی سازه را در مقیاس ماکرو نمایش می‌دهد. این رابطه نشان می‌دهد که پاسخ تنش در یک نقطه، به‌طور جمعی از اطلاعات کرنش در محیط اطراف آن

با توجه به اینکه در بسیاری از کاربردها نانولوله در محیط خلا نبوده و در داخل یک محیط الاستیک قرار گرفته است و همچنین برای جامعیت بخشیدن به فرمولبندی در این مقاله نیز مانند بسیاری از مقالات دیگر فرض می‌شود که نانولوله درون بستر الاستیک قرار دارد. اثر سفتی الاستیک و سفتی برشی برای این بستر با مدل بستر وینکلر-پاسترناک مدل شده است. لذا بار خارجی شعاعی وارد بر نانولوله دارای دو قسمت است که یک قسمت بار وارده توسط بستر و قسمت دیگر بار وارده خارجی است. لذا بار وارده شعاعی را می‌توان بصورت زیر نوشت.

$$\bar{q}_r = q_r(x, \theta) - K_w w + K_p \nabla^2 w \quad (14)$$

که $q_r(x, \theta)$ بار شعاعی خارجی وارد بر نانولوله بجز نیروی بستر است. بار خارجی نیز بصورت زیر بسط فوریه داده می‌شود.

$$q_r(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) \cos n\theta \quad (15)$$

حال با استفاده از رابطه (۱۲) تا (۱۵)، روابط (۱۰) برای مولفه‌های جابجایی بصورت رابطه (۱۶) قابل بیان است.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \\ W(x) \end{Bmatrix}_n = (1 - \mu \nabla^2) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_n(x) \end{Bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

که در رابطه (۱۶)، L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی و بصورت زیر است.

$$\begin{aligned} L_{11} &= K \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (-n^2) \left(\frac{1-\nu}{2R^2} \right) \right), \\ L_{12} &= (-n)K \left(\frac{1+\nu}{2R} \right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{13} &= + \left(\frac{\nu K}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{21} &= (n)K \left(\frac{1+\nu}{2R} \right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{22} &= K \left(\frac{1-\nu}{2} \right) + \frac{2D}{R^2} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{K}{R^2} + \frac{2D}{R^4} \right) (-n^2), \\ L_{23} &= - \left(\frac{D}{R^2} \right) (-n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{K}{R} \right) (n) - \left(\frac{D}{R^4} \right) (-n^3), \\ L_{31} &= - \left(\frac{\nu K}{R} \right) \frac{\partial}{\partial x}, \\ L_{32} &= \left(\frac{D}{R^2} \right) (-n) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \left(\frac{K}{R} \right) (-n) + \left(\frac{D}{R^4} \right) (n^3), \\ L_{33} &= -D \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{2D}{R^2} (-n^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{D}{R^4} (n^4) - \frac{K}{R^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

از روابط (۱۷) مشخص می‌شود که مشتق U و V تا مرتبه دوم و مشتق W تا مرتبه چهارم در معادله حاکم ظاهر شده و مشتق سوم W در معادلات ظاهر نشده است. حال برای حل معادلات یک

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^L (q_r w + q_\theta v + q_x w) R dx d\theta \quad (9)$$

که در رابطه فوق، q_r و q_θ و q_x بترتیب نیروی خارجی وارد بر نانولوله در راستای شعاعی و محیطی و طولی است. با بکار بردن انتگرال گیری جزء به جزء برای انرژی پتانسیل کرنشی و با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل، معادله حاکم بر نانولوله بر حسب نتیجه‌های تنش بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x(x, \theta) &= 0 \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + q_\theta(x, \theta) &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + q_r(x, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

همچنین شرایط مرزی در لبه‌های نانولوله بصورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} N_{xx} \delta u &= 0 \\ (N_{x\theta} + \frac{1}{R} M_{x\theta}) \delta v &= 0 \\ M_{xx} \delta w_{,x} &= 0 \quad \text{at } x = 0, x = L \\ (M_{xx,x} + \frac{2}{R} M_{x\theta,\theta}) \delta w &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

حال برای بدست آوردن معادلات تعادل بر حسب مولفه‌های جابجایی، با استفاده از روابط (۵) و (۸)، نتیجه‌های نیرو بر حسب مولفه‌های جابجایی بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} N_{xx} - (e_0 a)^2 \nabla^2 N_{xx} &= K \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \right) \\ N_{\theta\theta} - (e_0 a)^2 \nabla^2 N_{\theta\theta} &= K \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \right) \\ N_{x\theta} - (e_0 a)^2 \nabla^2 N_{x\theta} &= K \left(\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ M_{xx} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{xx} &= D \left(-\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \left(\frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) \right) \\ M_{\theta\theta} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{\theta\theta} &= D \left(-\nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) \right) \\ M_{x\theta} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{x\theta} &= D \left(\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1}{R} \left(-\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

که در رابطه فوق $K = Eh/(1-\nu^2)$ سفتی غشایی جداره و $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ صلبیت خمشی جداره می‌باشد.

برای استخراج معادلات حرکت پوسته بر حسب مولفه‌های جابجایی، میدان جابجایی نانولوله بصورت سری فوریه زیر بر حسب مختصه محیطی θ بسط داده شده و بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} u(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) \sin n\theta \\ v(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) \cos n\theta \\ w(x, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x) \sin n\theta \end{aligned} \quad (13)$$

ماتریس ستونی $\{X\}_{10 \times 1}$ که شامل توابع مجهول جابجایی و مشتقات آن که در رابطه (۱۶) ظاهر شده است بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{X(x)\}_n = \{\{U(x)\}_n^T, \{V(x)\}_n^T, \{W(x)\}_n^T\}^T \quad (18)$$

که در رابطه فوق ماتریس‌های $\{U\}_n$ ، $\{V\}_n$ و $\{W\}_n$ ماتریس‌های ستونی هستند که شامل جابجایی و مشتقات آنها بصورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} \{U(x)\}_n &= \{U(x), U^{(1)}(x), U^{(2)}(x)\}_n^T \\ \{V(x)\}_n &= \{V(x), V^{(1)}(x), V^{(2)}(x)\}_n^T \\ \{W(x)\}_n &= \{W(x), W^{(1)}(x), W^{(2)}(x), W^{(4)}(x)\}_n^T \end{aligned} \quad (19)$$

که در رابطه (۱۹) بالانویس داخل پرانتز (k) به معنی مشتق مرتبه k ام می‌باشد و بعنوان مثال $U^{(2)}(x) = U_{,xx}(x)$ با استفاده از روابط (۱۸) و (۱۹)، معادلات حاکم را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$[R]_n \{X\}_n = -\left(1 + \mu \frac{n^2}{R^2} - \mu \partial_x^2\right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_n \end{Bmatrix} \quad (20)$$

که در معادله (۲۰) ماتریس $[R]$ ماتریس ضرایب با ابعاد 3×10 می‌باشد و بطور مثال بعضی مولفه‌های آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_{1,1} = -n^2 K \left(\frac{1-\nu}{2R^2} \right), \quad R_{1,3} = K, \quad (21)$$

$$R_{1,5} = -nK \left(\frac{1+\nu}{2R} \right), \quad R_{1,8} = \left(\frac{\nu K}{R} \right),$$

در این مقلله، برای حل معادلات حاکم از روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی استفاده شده است. لذا برای گسسته‌سازی معادلات حاکم، تعداد N گره در امتداد طولی استوانه در نظر گرفته می‌شود بطوریکه گره i ام در نقطه x_i قرار دارد. مقادیر گره‌ای برای گره i ام در نقطه x_i بترتیب با $U_i = U(x_i)$ ، $V_i = V(x_i)$ و $W_i = W(x_i)$ نشان داده می‌شود. با استفاده از روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی، مشتق مرتبه k از یک تابع مثلاً $U(x)$ ، $V(x)$ و $W(x)$ در نقطه x_i را می‌توان بصورت گسسته بر حسب مقادیر گره‌ای بصورت ماتریسی زیر نوشت [۳۳].

$$\begin{aligned} U_n^{(k)}(x_i) &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} U_n(x_j) = \{C\}_i^{(k)} \{U\}_n \\ V_n^{(k)}(x_i) &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} V_n(x_j) = \{C\}_i^{(k)} \{V\}_n \\ W_n^{(k)}(x_i) &= \sum_{j=1}^N C_{ij}^{(k)} W_n(x_j) = \{C\}_i^{(k)} \{W\}_n \end{aligned} \quad (22)$$

که در رابطه (۲۲)، ماتریس‌های $\{U\}_n$ ، $\{V\}_n$ و $\{W\}_n$ ماتریس‌های ستونی شامل مقادیر گره‌ای می‌باشند و $\{C\}_i^{(k)}$ ماتریس ضرایب مربوط به مشتق مرتبه k ام در روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی است که با تکنیک‌های ارایه شده در این روش قابل استخراج است [۳۳]. بطور مثال $\{U\}_n$ ماتریس مقادیر گره‌ای در جمله n ام سری فوریه است و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{U\}_n = \{U_1, U_2, U_3, \dots, U_N\}_n^T \quad (23)$$

سپس ماتریس ستونی $\{d\}_n$ شامل تمام مقادیر گره‌ای که یک ماتریس $3N \times 1$ است بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\{d\}_n = \{\{U\}_n^T, \{V\}_n^T, \{W\}_n^T\}^T \quad (24)$$

آنگاه با استفاده از گسسته‌سازی به روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی که در (۲۲) آمده است می‌توان ماتریس $\{X\}$ را که در رابطه (۱۸) تعریف شد در نقطه x_i بصورت ضریبی از مقادیر گره‌ای مانند رابطه زیر نوشت.

$$\{X(x_i)\}_n = [G_i] \{d\}_n \quad (25)$$

حال با استفاده از معادله (۱۴)، (۱۹) و (۲۰) معادله حاکم در نقطه x_i بصورت زیر گسسته می‌شود.

$$[k_i]_n \{d\}_n = \{0, 0, Q_n(x_i)\}_n^T \quad (26)$$

که در رابطه فوق $[k_i]_{3 \times 3N} = ([R]_{3 \times 10})([G_i]_{10 \times 3N})$ می‌باشد. با اعمال معادله (۲۶) برای تمامی N گره در طول نانولوله، دستگاه $3N$ معادله با $3N$ مجهول مانند زیر بدست می‌آید.

$$[K]_n \{d\}_n = \{F\}_n \quad (27)$$

که ماتریس $\{F\}_n$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\{F\}_n = \{\{0\}_n^T, \{0\}_n^T, \{Q_n(x_i)\}_n^T\}^T \quad (28)$$

و در رابطه فوق $\{0\}_n = \{0, 0, 0, \dots, 0\}_{1 \times N}$ ، یک ماتریس سطری صفر با N ستون می‌باشد و همچنین

$$\{Q_n(x_i)\}_n = \{Q_n(x_1), Q_n(x_2), \dots, Q_n(x_N)\}_n^T \quad (29)$$

سپس با حل معادله (۲۷)، مقدار $\{d\}_n$ که مربوط به n مین جمله از سری فوریه است بدست می‌آید و با تکرار فرایند مقادیر گره‌ای از سری فوریه (۱۳) بدست می‌آید.

۳- نتایج عددی

نتایج عددی مربوط به بررسی تغییر شکل و جابجایی نانولوله‌ها تحت بارهای خارجی در این بخش ارائه شده است. برای نانولوله‌های کربنی، مقادیر نسبتاً متفاوتی برای ضخامت و مدول الاستیسیته در منابع مختلف گزارش شده است، اما صلبیت کششی جداره $C = Eh$ و صلبیت خمشی جداره کربنی $D = Eh^3 / (12(1-\nu^2))$ به عنوان کمیت‌های ثابتی برای نانولوله‌ها در نظر گرفته می‌شوند که با مقادیر مربوط به گرافن بسیار نزدیک است. در این پژوهش، مقادیر این کمیت‌ها به ترتیب $C = 360 \text{ N/m}$ و $D = 0.85 \text{ eV}$ و ضریب پواسون $\nu = 0.19$ انتخاب شده است [۳۴]. نتایج عددی برای نانولوله کربنی دسته‌سندلی با عدد چیرال $(35, 35)$ که دارای قطر $D = 4.746 \text{ nm}$ آمده است؛ مگر در مواردی که به‌طور مشخص بیان شده باشد.

از آنجا که در منابع پیشین عمدتاً از تئوری تیرها برای مدل‌سازی رفتار نانولوله‌ها استفاده شده است، در این پژوهش به‌منظور درک اهمیت استفاده از تئوری پوسته در محاسبه تغییر شکل نانولوله‌ها، خیز نانولوله به‌صورتی بی‌بعد تعریف شده است تا تفاوت یا تطابق پیش‌بینی‌های تئوری پوسته با پیش‌بینی‌های مدل تیر اوپلر-برنولی

$$w_{EB}^* = (1 + \mu(\frac{\pi}{L})^2), \quad S-S \quad (35)$$

$$w_{EB}^* = (1 - \frac{\pi}{4})(1 + \mu(\frac{\pi}{L})^2), \quad C-C$$

ملاحظه می‌شود که تاثیر شرط مرزی دوسرگیردار نسبت به شرایط مرزی دوسر ساده برای حداکثر خیز در تئوری تیر اوایلر-برنولی برابر ضریب $(1 - \pi/4 = 0.215)$ است. شایان ذکر است که تئوری تیر اوایلر-برنولی از اثر کرنش برشی در تیر صرفنظر می‌کند و به این علت نتایج این تئوری برای تیرهای نازک با نسبت طول به ضخامت بزرگ $(L/h > 20)$ قابل قبول می‌باشد ولی خطای پیش‌بینی این تئوری برای L/h کوچک افزایش می‌یابد.

قابل ذکر است که بار وارده بر نانولوله بستگی به کاربرد خاص آن دارد و برای هر کاربرد باید بار وارده مشخص شود. باید توجه شود که برای حل مساله بارگذاری اعمال شده باید نسبت به راستای محیطی (مختصه θ) بسط فوریه داده شود. در ادامه در این مقاله نتایج عددی برای خیز نانولوله برای دو نوع بارگذاری ارایه شده است. در بارگذاری نوع اول نیمه پایین نانولوله $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ تحت بارگذاری قرار دارد و نیمه بالایی تحت بار قرار ندارد که در رابطه (۳۶) آمده است. این بارگذاری برای حالتی که نانولوله مثلاً به عنوان سنسور استفاده می‌شود و از یک طرف تحت بار قرار دارد قابل فرض است. این بارگذاری باید در راستای محیطی بسط فوریه داده شود. بارگذاری نوع دوم نیز در رابطه (۳۹) آمده است که در راستای محیطی و طولی مثلثاتی بوده و نیاز به بسط فوریه ندارد و به عنوان بارگذاری نمونه (Benchmark) انتخاب شده است.

۳-۱- بارگذاری نوع اول

در این حالت فرض شده است که بار شعاعی تنها به نیمه پایین نانولوله $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ وارد می‌شود و توزیع بار نسبت به طول نانولوله دارای توزیع سینوسی است. این بارگذاری که بارگذاری نوع یک نامگذاری شده است به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$q = \begin{cases} q_0 \sin(\frac{\pi x}{L}) \cos \theta, & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \theta < -\frac{\pi}{2} \text{ or } \frac{\pi}{2} < \theta \end{cases} \quad (36)$$

شکل شماتیک از محورهای مختصات کارتزین انتخاب شده به نانولوله که محور X منطبق بر محور نانولوله است، مبدأ اندازه‌گیری زاویه θ و همچنین بار وارده بر مقطعی از نانولوله در بارگذاری نوع اول طبق رابطه (۳۶) و در شکل ۲ آمده است.

آشکار گردد. برای این منظور، خیز حداکثر تیر اوایلر-برنولی با شرایط مرزی دو سر ساده و بدون در نظر گرفتن اثر اندازه $(\mu=0)$ به عنوان معیار انتخاب شده است. بصورتی که خیز حاصل از تئوری پوسته بر حداکثر خیز به دست آمده از تئوری اوایلر-برنولی تقسیم شده و نسبت به عنوان خیز بی بعد معرفی می‌شود. خیز حداکثر تیر اوایلر-برنولی با الاستیسیته موضعی با شرایط مرزی دو سر ساده برای بارگذاری با توزیع سینوسی در راستای طول $q(x) = q_0 \sin(\pi x/L)$ بصورت زیر است.

$$w_{EB} = \frac{1}{\pi^4} \frac{q_0 L^4}{EI} = \frac{1}{2\pi^3} \frac{PL^3}{EI}, \quad (30)$$

که در آن $P = 2q_0 L/\pi$ برابر با کل بار وارد شده به تیر در راستای خیز از طرف بار گسترده خارجی سینوسی می‌باشد. بر این اساس، خیز بی بعد نانولوله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w^* = \frac{w}{w_{EB}} = \frac{2\pi^3 EI}{PL^3} w \quad (31)$$

با این تعریف خیز بی بعد، هرچه مقدار خیز بی بعد در وسط نانولوله با شرایط مرزی دوسر ساده (S-S) و برای حالت $\mu=0$ به عدد یک نزدیک تر باشد، نشان می‌دهد انطباق بیشتری بین پیش‌بینی‌های تئوری پوسته و تئوری تیر اوایلر-برنولی در تخمین خیز وجود دارد. در مقابل، فاصله گرفتن این نسبت از عدد یک نشان‌دهنده کاهش انطباق تئوری پوسته با تئوری تیر اوایلر-برنولی در پیش‌بینی خیز نانولوله‌ها است و نشان می‌دهد در آن شرایط استفاده از تئوری تیر اوایلر-برنولی خطای بیشتری در پیش‌بینی نانولوله دارد. شایان ذکر است که بر اساس تئوری تیر اوایلر-برنولی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرموضعی، معادله حاکم بر نانولوله در حالت استاتیکی بصورت زیر است [۷].

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 w}{dx^2}) = q(x) - \mu q_{,xx}(x) \quad (32)$$

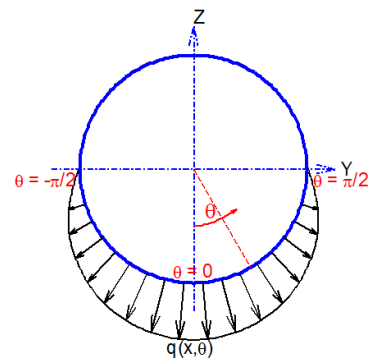
که اگر بار وارده با توزیع سینوسی بصورت $q(x) = q_0 \sin(\pi x/L)$ در نظر گرفته شود آنگاه برای تیر دوسر تکیه‌گاه ساده مقدار خیز بصورت رابطه (۳۳) بدست می‌آید.

$$w = \frac{q_0 L^4}{\pi^4 EI} (1 + \mu(\frac{\pi}{L})^2) \sin(\frac{\pi}{L} x) = \frac{PL^3}{2\pi^3 EI} (1 + \mu(\frac{\pi}{L})^2) \sin(\frac{\pi}{L} x) \quad (33)$$

و برای تیر با شرایط مرزی دوسرگیردار مقدار خیز بصورت رابطه (۳۴) بدست می‌آید.

$$w = \frac{PL^3}{2\pi^3 EI} (1 + \mu(\frac{\pi}{L})^2) \left(\sin(\frac{\pi x}{L}) + \pi \left((\frac{x}{L})^2 - \frac{x}{L} \right) \right) \quad (34)$$

و لذا خیز حداکثر بی بعد برای آن در $x=L/2$ بصورت است.



شکل ۲. محورهای مختصات کارتزین انتخاب شده برای نانولوله و مبدا زاویه θ , $(\theta=0)$ منطبق بر راستای منفی محور (Z)

Fig.2 Cartesian coordinate axes for the nanotube and the origin of the theta angle ($\theta=0$ coincides with the negative Z-axis direction)

واضح است که در این حالت، نیروی وارد بر نانولوله در راستای Y برابر صفر بوده و مقدار کل بار وارده بر نانولوله در راستای Z، برابر است با:

$$P = q_0 LR \quad (37)$$

در این حالت برای حل مسئله، بارگذاری رابطه (۳۶) نسبت به مختصه θ بسط فوریه مثلثاتی کسینوسی داده شده و حل بر اساس سری فوریه انجام شده است. در ابتدا، همگرایی حل بر حسب تعداد جملات استفاده شده در سری فوریه که با M نشان داده شده است برای شرایط مرزی مختلف برای دو مقدار پارامتر غیرموضعی $\mu=0$ و $\mu=2nm^2$ در جدول ۱ آمده است. در جدول ۱ مشاهده می شود که با افزایش جملات سری فوریه تا ۷ جمله، $(M=7)$ ، همگرایی نتایج عددی برای خیز نانولوله تا ۴ رقم اعشار حاصل شده است.

جدول ۱. همگرایی نتایج برای خیز نانولوله در $(x=L/2)$ و در سطح پایین $(\theta=0)$ و سطح بالا $(\theta=\pi)$ برای $(L/R=30)$

Table 1. Convergence of results for the deflection of nanotube at $(x=L/2)$ on Bottom $(\theta=0)$ and top $(\theta=\pi)$ on nanotube $(L/R=30)$

M	SS		CC		SC	
	$\mu=0$	$\mu=2$	$\mu=0$	$\mu=2$	$\mu=0$	$\mu=2$
۱	-۱/۰۵۵۰	-۱/۴۳۵۳	-۰/۲۴۶۵	-۰/۳۳۵۳	-۰/۳۸۶۰	-۰/۵۲۵۲
	۱/۰۵۵۲	۱/۴۳۵۵	۰/۲۴۶۷	۰/۳۳۵۵	۰/۳۸۶۲	۰/۵۲۵۳
۲	-۰/۹۶۹۱	-۱/۲۲۶۵	-۰/۱۶۰۴	-۰/۱۲۶۰	-۰/۳۰۰۰	-۰/۳۱۶۱
	۱/۱۴۱۱	۱/۶۴۴۳	۰/۳۳۲۸	۰/۵۴۴۹	۰/۴۷۲۲	۰/۷۳۴۵
۳	-۰/۹۶۹۱	-۱/۲۲۶۵	-۰/۱۶۰۴	-۰/۱۲۶۰	-۰/۳۰۰۰	-۰/۳۱۶۱
	۱/۱۴۱۱	۱/۶۴۴۳	۰/۳۳۲۸	۰/۵۴۴۹	۰/۴۷۲۲	۰/۷۳۴۵
۴	-۰/۹۶۹۸	-۱/۲۳۱۲	-۰/۱۶۱۱	-۰/۱۳۰۷	-۰/۳۰۰۷	-۰/۳۲۰۸
	۱/۱۴۰۴	۱/۶۳۹۶	۰/۳۳۲۱	۰/۵۴۰۲	۰/۴۷۱۶	۰/۷۲۹۸
۵	-۰/۹۶۹۸	-۱/۲۳۱۲	-۰/۱۶۱۱	-۰/۱۳۰۷	-۰/۳۰۰۷	-۰/۳۲۰۸
	۱/۱۴۰۴	۱/۶۳۹۶	۰/۳۳۲۱	۰/۵۴۰۲	۰/۴۷۱۶	۰/۷۲۹۸
۶	-۰/۹۶۹۸	-۱/۲۳۰۵	-۰/۱۶۱۰	-۰/۱۳۰۰	-۰/۳۰۰۶	-۰/۳۲۰۱
	۱/۱۴۰۴	۱/۶۴۰۴	۰/۳۳۲۱	۰/۵۴۰۹	۰/۴۷۱۶	۰/۷۳۰۵
۷	-۰/۹۶۹۸	-۱/۲۳۰۵	-۰/۱۶۱۰	-۰/۱۳۰۰	-۰/۳۰۰۶	-۰/۳۲۰۱
	۱/۱۴۰۴	۱/۶۴۰۴	۰/۳۳۲۱	۰/۵۴۰۹	۰/۴۷۱۶	۰/۷۳۰۵

ابتدا مقدار خیز در نقطه $(x=L/2, \theta=0)$ برای نانولوله در جدول ۲ و برای شرط مرزی دو سر ساده و دو سر گیردار آمده و پیش‌بینی تئوری تیر از رابطه (۳۵) با پیش‌بینی تئوری پوسته مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که برای L/R بزرگ در تئوری موضعی $\mu=0$ ، پیش‌بینی مدل تیر و تئوری پوسته بسیار به همدیگر نزدیک است ولی با در نظر گرفتن تئوری غیرموضعی $(\mu \neq 0)$ پیش‌بینی تئوری پوسته و تئوری تیر اولیه-برنولی تفاوت قابل توجهی با هم دارند که نشان می‌دهد پیش‌بینی تئوری تیر نمی‌تواند برای بررسی خیز حتی در نانولوله بلند هم معتبر باشد. علت این پدیده آن است که با افزایش طول، اثر اندازه در راستای طول به‌طور چشمگیری کاهش یافته و اختلاف پیش‌بینی تئوری تیر و پوسته بیشتر ناشی از اثر اندازه در راستای محیطی است که باعث افزایش حدود ۳۰ درصدی خیز در پیش‌بینی تئوری پوسته نسبت به پیش‌بینی تئوری تیر اولیه-برنولی می‌شود. بدیهی است که تئوری تیر اثر اندازه کوچک را در راستای محیطی نادیده می‌گیرد و لذا در مدل تیر با افزایش طول نانولوله، اثر اندازه به‌طور کامل حذف می‌شود.

جدول ۲. مقایسه پیش‌بینی تئوری پوسته و تئوری تیر برای خیز نانولوله کرنی دوسر ساده در $(x=L/2, \theta=0)$ بارگذاری نوع اول

Table 2. Comparison of shell and beam theory predictions for deflection of a simply-supported carbon nanotube at $(x=L/2, \theta=0)$ under Type I loading, E-B: Euler-Bernoulli

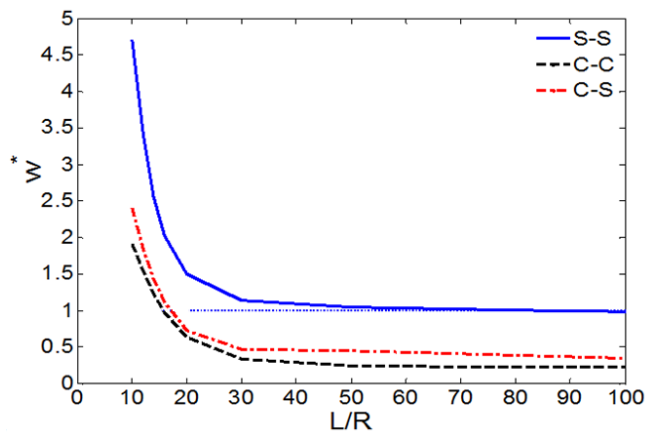
μ	L/R=50		L/R=80	
	E-B beam	Shell theory	E-B beam	Shell theory
۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۴۲۷	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۶۹
۰/۵	۱/۰۰۰۴	۱/۱۳۸۶	۱/۰۰۰۱	۱/۰۹۶۹
۱	۱/۰۰۰۷	۱/۲۳۴۵	۱/۰۰۰۳	۱/۱۸۷۰
۱/۵	۱/۰۰۱۱	۱/۳۳۰۶	۱/۰۰۰۴	۱/۲۷۷۰
۲	۱/۰۰۱۴	۱/۴۲۶۷	۱/۰۰۰۵	۱/۳۶۷۱
۲/۵	۱/۰۰۱۸	۱/۵۲۲۸	۱/۰۰۰۷	۱/۴۵۷۲
۳	۱/۰۰۲۱	۱/۶۱۹۰	۱/۰۰۰۸	۱/۴۵۷۳

جدول ۳. مقایسه پیش‌بینی تئوری پوسته و تئوری تیر برای خیز نانولوله کرنی دوسر گیردار در $(x=L/2, \theta=0)$ بارگذاری نوع اول

Table 3. Comparison of shell theory and beam theory predictions for the deflection of a clamped-clamped carbon nanotube at $(x=L/2, \theta=0)$ under loading Type I

μ	L/R=50		L/R=80		L/R=100	
	E-B beam	Shell theory	E-B beam	Shell theory	E-B beam	Shell theory
۰	۰/۲۱۴۶	۰/۲۴۰۸	۰/۲۱۴۶	۰/۲۲۴۶	۰/۲۱۴۶	۰/۲۲۱۲
۰/۵	۰/۲۱۴۷	۰/۲۶۵۲	۰/۲۱۴۶	۰/۲۴۵۰	۰/۲۱۴۶	۰/۲۴۱۱
۱	۰/۲۱۴۸	۰/۲۸۹۶	۰/۲۱۴۷	۰/۲۶۵۴	۰/۲۱۴۶	۰/۲۶۰۹
۱/۵	۰/۲۱۴۸	۰/۳۱۴۰	۰/۲۱۴۷	۰/۲۸۵۸	۰/۲۱۴۷	۰/۲۸۰۸
۲	۰/۲۱۴۹	۰/۳۳۸۵	۰/۲۱۴۷	۰/۳۰۶۳	۰/۲۱۴۷	۰/۳۰۰۶
۲/۵	۰/۲۱۵۰	۰/۳۶۲۹	۰/۲۱۴۷	۰/۳۲۶۷	۰/۲۱۴۷	۰/۳۲۰۵
۳	۰/۲۱۵۱	۰/۳۸۷۴	۰/۲۱۴۸	۰/۳۴۷۲	۰/۲۱۴۷	۰/۳۴۰۴

Fig.3 Variations in deflection at the midpoint ($x=L/2$) of a simply-supported nanotube at $\theta=0$ versus L/R variations for different values of the nonlocal parameter



شکل ۴. تغییرات خیز در وسط نانولوله ($x=L/2$) در $\theta=0$ نسبت به

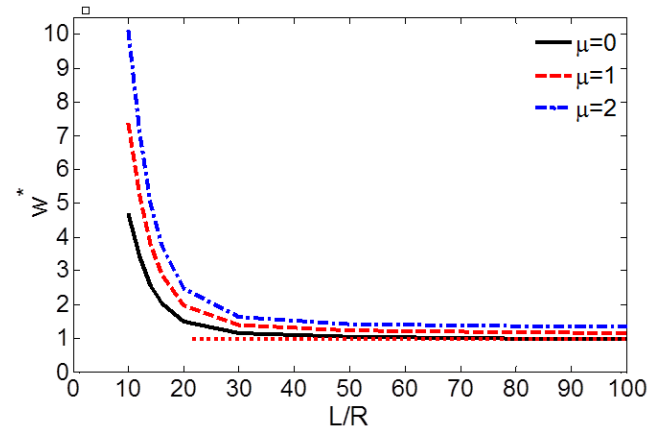
تغییرات L/R برای شرایط مرزی مختلف ($\mu=0$)

Fig.4 Variations in deflection at the midpoint of a nanotube ($x=L/2$) at $\theta=0$ versus L/R variations for different boundary conditions ($\mu=0$)

همچنین مقدار خیز (جابجایی) نانولوله در ($x=L/2$) در موقعیت‌های مختلف $\theta=0$, $\theta=\pi/2$ و $\theta=\pi$ و برای مقادیر مختلف نسبت L/R در نانولوله دوسر ساده (S-S) در شکل ۵ ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که خیز u_z در دو نقطه مقابل هم ($\theta=0$ و $\theta=\pi/2$) برای مقادیر بزرگ L/R بسیار به یکدیگر نزدیک است، به طوری که جابجایی این دو نقطه تقریباً برابر است. اما برای مقادیر کوچک‌تر L/R ، جابجایی دو نقطه نه تنها برابر نیست، بلکه علامت آن‌ها نیز با یکدیگر متفاوت است.

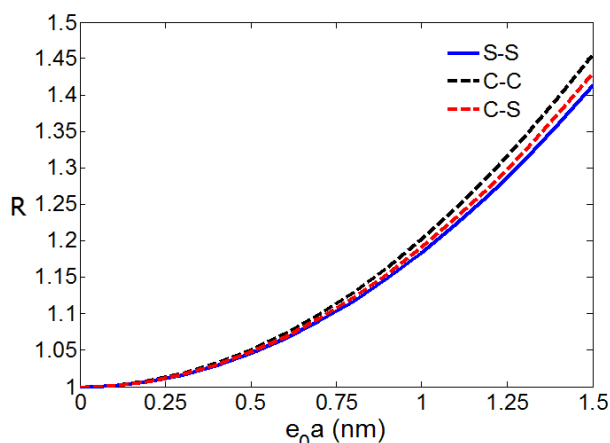
همچنین با افزایش نسبت L/R مشاهده می‌شود که مقدار جابجایی نانولوله در راستای محور Y (u_y) به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین برای مقادیر بزرگ L/R ، قطر نانولوله در راستاهای Y و Z تغییری نکرده و مقطع نانولوله تقریباً دایره‌ای باقی می‌ماند. برای مقادیر کوچک‌تر L/R ، جابجایی دو نقطه مقابل در پایین و بالای نانولوله ($\theta=0$ و $\theta=\pi$) نه تنها برابر نیست بلکه مشاهده می‌شود علامت آن‌ها نیز متفاوت است. علاوه بر این، مقدار منفی u_y برای مقادیر کوچک L/R نیز نشان می‌دهد که برای مقادیر کوچک L/R قطر نانولوله در راستای Y کاهش یافته و در راستای Z افزایش یافته است که بیانگر خروج مقطع نانولوله از حالت دایره‌ای است.

اثر نسبت طول به شعاع (L/R) نانولوله بر خیز آن، در نمودارهای (۳) تا (۵) مورد بررسی قرار گرفته است. مقدار خیز بی‌بعد نانولوله (w^*) در $x=L/2$ و در نقطه $\theta=0$ (محل حداکثر بار خارجی) برای مقادیر مختلف L/R در شکل ۳ ارائه شده است. در این نمودار مشاهده می‌شود که برای $\mu=0$ (خط پر مشکی)، با افزایش نسبت L/R ، پیش‌بینی تئوری پوسته برای خیز بی‌بعد به طور کامل به عدد یک همگرا می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد که برای $\mu=0$ با افزایش نسبت L/R ، پیش‌بینی تئوری پوسته کاملاً به پیش‌بینی تئوری تیر ($w^*=1$) نزدیک و بر آن منطبق می‌شود. با این حال، برای مقادیر کوچک‌تر L/R ، پیش‌بینی تئوری پوسته به طور قابل توجهی بزرگ‌تر از پیش‌بینی تئوری تیر اویلر-برنولی است. شایان ذکر است که مدل تیر-اویلر-برنولی کرنش برشی در تیر را نادیده می‌گیرد و لذا پیش‌بینی مدل تیر اویلر-برنولی برای تیرهای نازک ($L/h > 20$) دقت کافی دارد و برای مقادیر طول به ضخامت کوچک نتایج تئوری تیر اویلر-برنولی اعتبار کافی ندارد که در شکل ۳ و ۴ نیز قابل مشاهده است که پیش‌بینی مدل پوسته اختلاف قابل توجهی با مقدار $w^*=1$ دارد. همچنین اثر پارامتر غیرموضعی بر خیز نانولوله در این نمودار قابل مشاهده است. مشاهده می‌شود که با افزایش L/R ، مقدار خیز بی‌بعد مجانب افقی دارد و به نسبت L/R وابسته نیست. تغییرات خیز بی‌بعد نانولوله نسبت به تغییرات L/R برای سه شرایط مرزی مختلف دوسر ساده (S-S)، گیردار-ساده (C-C) و دوسرگیردار (C-C) در شکل ۴ نمایش داده شده است. اثر شرایط مرزی نانولوله بر مقدار خیز تیر در این نمودار مشاهده می‌شود. خیز نانولوله برای شرایط مرزی دوسر ساده بزرگ‌ترین مقدار و برای دوسرگیردار کمترین مقدار را دارد و برای شرط مرزی گیردار-ساده بین دو حالت دوسر ساده و دوسرگیردار است.



شکل ۳. تغییرات خیز در وسط نانولوله ($x=L/2$) دو سر ساده در $\theta=0$

نسبت به تغییرات L/R برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی



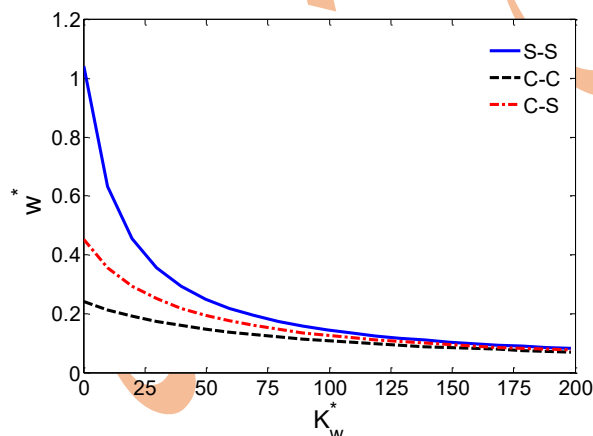
شکل ۷. نسبت جابجایی برای مقادیر مختلف پارامتر غیر موضعی e_0a در شرایط مرزی مختلف ($L/R=50$)

Fig.7 Displacement ratio for different values of the nonlocal parameter e_0a under various boundary conditions ($L/R=50$)

برای بررسی اثر بستر بر رفتار نانولوله، اثر سفتی بستر وینکلر و سفتی بستر پاسترناک بر خیز نانولوله برای شرایط مرزی مختلف در نمودار ۸ و ۹ مورد بررسی قرار گرفته است. در این نمودارها بارگذاری نانولوله مانند رابطه (۳۶) است. ضریب بستر وینکلر و بستر پاسترناک بی بعد بصورت زیر تعریف شده است.

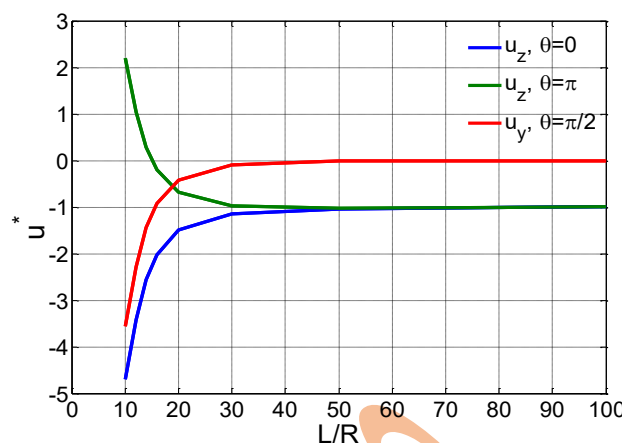
$$K_w = \frac{k_w L^5}{100EI}, \quad K_p = \frac{k_p L^3}{EI} \quad (38)$$

مشاهده می شود با افزایش ضریب بستر نقش شرایط مرزی نانولوله بر خیز نانولوله کاهش می یابد.



شکل ۸. خیز بی بعد نانولوله در $(x=L/2, \theta=0)$ بر حسب ضریب سفتی بی بعد وینکلر ($L/R=50$)

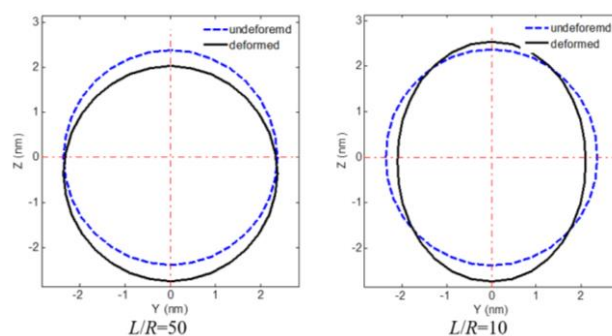
Fig.8 Dimensionless deflection of the nanotube at $(x=L/2, \theta=0)$ versus the dimensionless Winkler parameter ($L/R=50$)



شکل ۵. جابجایی در وسط نانولوله $(x=L/2)$ در $\theta=0$ و $\theta=\pi/2$ و $\theta=\pi$ با تغییرات L/R برای شرایط مرزی دوسر ساده ($\mu=0$)

Fig.5 Displacement at the midpoint of the nanotube $(x=L/2)$ at $\theta=0, \theta=\pi/2$ and $\theta=\pi$ versus L/R variations for Simply-supported boundary conditions ($\mu=0$)

شکل شماتیک از مقطع نانولوله با شرایط مرزی دوسر ساده قبل و بعد از تغییر شکل نانولوله در اثر بارگذاری نوع اول در شکل ۶ آمده است. شکل تغییر یافته مقطع نانولوله بزرگ نمای شده است و ضریب بزرگنمایی برای دو شکل یکسان نیست. مشاهده می شود که برای $L/R=50$ مقطع نانولوله تقریباً دایره مانده و تغییر شکل نداده است و تقریباً بصورت صلب به سمت پایین حرکت کرده است. ولی برای مقدار $L/R=10$ مقطع نانولوله کاملاً تغییر شکل داده است و حتی قسمت بالای آن در خلاف جهت بارگذاری حرکت کرده است.



شکل ۶. مقطع اولیه و تغییر یافته نانولوله در اثر بارگذاری نوع اول

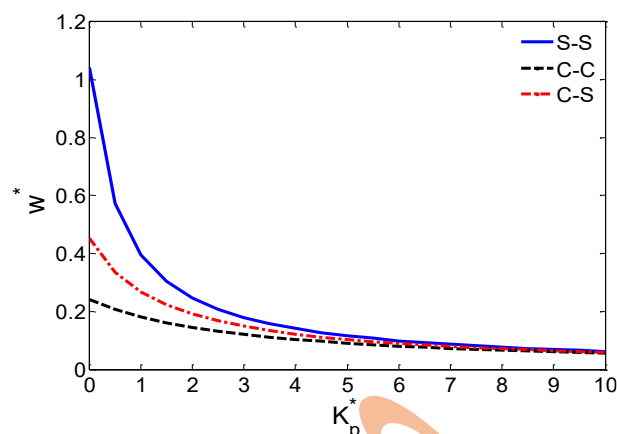
Fig.6 Undeformed and deformed cross-section of the nanotube under loading type I

همچنین نسبت خیز غیر موضعی به خیز موضعی ($R=w/w_{\mu=0}$) در نقطه $(x=L/2, \theta=0)$ برای مقادیر مختلف e_0a و شرایط مرزی مختلف در شکل ۷ آمده است. با تغییر پارامتر غیر موضعی از ۰ تا $e_0a=1.5\text{nm}$ مقدار خیز تا حدود ۴۵ درصد افزایش یافته است.

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} q(x, \theta) \cos \theta R d\theta = \\
 &= \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} q_0 \sin(\pi x / L) \cos(n\theta) \cos(\theta) R d\theta \\
 &= \begin{cases} \frac{2q_0}{\pi} (\pi LR) & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases} \quad (40)
 \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که برای $n=1$ مقدار نیروی خالص جانبی وارد بر نانولوله مخالف صفر است. بنابراین در این حالت، تغییر شکل خمشی در نانولوله ایجاد شده و مرکز نانولوله دچار جابجایی می‌شود. اما برای حالت $n \neq 1$ نیروی خالص جانبی بار خارجی وارد شده در هر مقطع از نانولوله برابر صفر است. در این حالت، مرکز جرم نانولوله در اثر نیروهای وارده جابجا نمی‌شود و تنها جداره نانولوله در هر مقطع تغییر شکل می‌دهد، در حالی که مرکز هر مقطع بدون جابجایی باقی می‌ماند. در ادامه نتایج عددی برای $n=1$ ارائه شده است.

مقدار خیز بی‌بعد نانولوله در راستای Z (جابجایی شعاعی) در وسط نانولوله ($x=L/2$) در نقطه بالایی نانولوله ($\theta=\pi$) و پایینی نانولوله ($\theta=0$) برای مقادیر مختلف L/R و پارامتر غیرموضعی در جدول ۴ تا جدول ۶ برای سه شرط مرزی ارائه شده است. در جدول ۴ مشاهده می‌شود که برای شرایط مرزی دوسر ساده در حالت $\mu=0$ ، برای تمام مقادیر L/R ، خیز بی‌بعد پیش‌بینی شده با تئوری پوسته بزرگ‌تر از عدد ۱ است و همانگونه که انتظار می‌رود با افزایش نسبت طول به شعاع در حالت $\mu=0$ ، مقدار خیز بی‌بعد به عدد ۱ نزدیک‌تر می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد که برای نانولوله‌هایی با نسبت طول به شعاع بزرگ، پیش‌بینی تئوری پوسته با تئوری تیر در حالت $\mu=0$ انطباق بسیار بالایی دارد. برای نسبت‌های طول به شعاع کوچک (به‌عنوان مثال $L/R=5$)، پیش‌بینی تئوری پوسته بیش از دو برابر پیش‌بینی مدل تیر در شرایط بارگذاری مشابه است. همچنین اثر پارامتر اندازه بر پیش‌بینی تئوری در این جدول مشخص است. مشاهده می‌شود که برای $L/R=5$ ، با افزایش ضریب غیرموضعی از $\mu=1 \text{ nm}^2$ به $\mu=2 \text{ nm}^2$ ، مقدار خیز در پیش‌بینی تئوری غیرموضعی حدود ۵۰ درصد افزایش یافته است. این افزایش برای نسبت $L/R=80$ حدود ۳۰ درصد است. همچنین مقدار خیز در نقاط مشابه ($x=L/2, \theta=0$) و ($x=L/2, \theta=\pi$) برای شرایط مرزی گیردار-گیردار در جدول ۵ ارائه شده است. مشاهده می‌شود برای مقادیر بزرگ L/R ، مقدار خیز در نانولوله گیردار-گیردار حدود ۲۲ درصد مقدار خیز در نانولوله دو سر ساده است که با مقدار مورد انتظار از تئوری تیر اولیه-برنولی (۲۱.۵ درصد) تطابق دارد. اما برای $L/R=5$ ، نسبت خیز نانولوله دوسر گیردار به دوسر ساده حدود ۶۵ درصد است که نشان می‌دهد با کاهش نسبت L/R ، تأثیر شرایط



شکل ۹. خیز بی‌بعد نانولوله در $(x=L/2, \theta=0)$ بر حسب ضریب سفتی بی‌بعد پاسترناک ($L/R=50$)

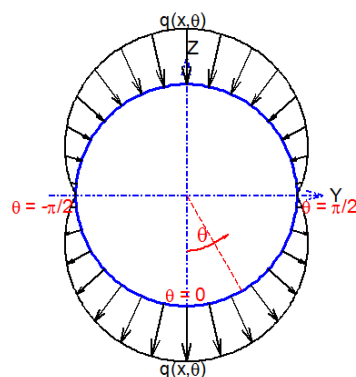
Fig.9 Dimensionless deflection of nanotube at $(x=L/2, \theta=0)$ versus the dimensionless Pasternak parameter ($L/R=50$)

۳-۲- بارگذاری نوع دوم

در حالت بارگذاری نوع دوم بار شعاعی وارده بر نانولوله یک بارگذاری نمونه (Benchmark) انتخاب شده است تا امکان مقایسه نتایج عددی توسط سایر محققان با روش ارائه شده در این مقاله امکان پذیر باشد. در این حالت بارگذاری بار شعاعی در راستای طول و در راستای محیطی نانولوله بصورت مثلثاتی در نظر گرفته شده است که بصورت رابطه (۳۹) قابل بیان است.

$$q(x, \theta) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos(n\theta) \quad (39)$$

حل این بارگذاری نیاز به بسط فوریه برای مختصه θ ندارد. شکل شماتیکی از توزیع نیروی شعاعی در بارگذاری نوع دوم برای $n=1$ در شکل ۱۰ نشان داده شده است.



شکل ۱۰. شکل شماتیک بارگذاری نوع دوم بر روی نانولوله

Fig.10 Schematic diagram of loading on the nanotube (Type II)

مقدار نیروی خالص جانبی این بار خارجی بر نانولوله در راستای محور Y برابر با صفر و نیروی خالص وارده در راستای محور Z بصورت زیر است.

۱	۰	-۳/۳۷۱۷	-۰/۶۵۶۱	-۰/۴۰۹۷	-۰/۵۱۹۵	-۰/۴۵۵۳
	π	۳/۳۷۱۷	۰/۶۵۶۱	۰/۴۰۹۷	۰/۵۱۹۵	۰/۴۵۵۳
۱/۵	۰	-۳/۷۴۴۷	-۰/۷۱۱۷	-۰/۴۴۱۶	-۰/۵۵۸۹	-۰/۴۸۹۷
	π	۳/۷۴۴۷	۰/۷۱۱۷	۰/۴۴۱۶	۰/۵۵۸۹	۰/۴۸۹۷
۲	۰	-۴/۱۳۴۴	-۰/۷۶۸۱	-۰/۴۷۳۶	-۰/۵۹۸۳	-۰/۵۲۴۱
	π	۴/۱۳۴۴	۰/۷۶۸۱	۰/۴۷۳۶	۰/۵۹۸۳	۰/۵۲۴۱

۴ - نتیجه گیری

در این مطالعه، یک مدل مبتنی بر ترکیب تئوری پوسته‌های لاو و نظریه الاستیسیته غیرموضعی ارینگن برای تحلیل خمش نانولوله‌های کربنی تک‌جاره ارائه شده است. به منظور حل دقیق معادلات دیفرانسیل حاکم، از روش تعمیم‌یافته مربعات تفاضلی استفاده شده است که این روش ضمن دستیابی به دقت بالا با تعداد کم گره‌ها، توانایی بالایی در اعمال شرایط مرزی مختلف دارد. نتایج عددی حاصل از مدل پیشنهادی نشان داد که در نظر گرفتن اثرات غیرموضعی منجر به افزایش قابل توجه در پیش‌بینی مقدار خیز نانولوله نسبت به حالتی که اثرات غیرموضعی در نظر گرفته نشده است می‌شود.

مقایسه بین نتایج مدل پوسته و مدل تیر برای پیش‌بینی خیز نانولوله نشان داد که در غیاب اثر اندازه، این دو مدل در نسبت‌های طول به شعاع بزرگ (L/R بزرگ) تطابق مناسبی دارند. اما با در نظر گرفتن اثر اندازه، حتی در این نسبت‌های L/R بزرگ نیز تفاوت چشمگیری بین نتایج مدل تیر و مدل پوسته مشاهده می‌شود و نشان می‌دهد که مدل تیر به این علت که نمی‌تواند اثرات تغییرات نسبت به محیط نانولوله را در مدلسازی در نظر بگیرد نمی‌تواند به درستی رفتار واقعی خمشی نانولوله را پیش‌بینی کند. این مساله لزوم استفاده از تئوری‌های دقیق‌تر نظیر تئوری لاو در ترکیب با تئوری الاستیسیته غیرموضعی برای مدلسازی نانولوله‌ها را به‌ویژه در مسائل مربوط به مدلسازی خیز نانولوله‌ها مورد تأکید قرار می‌دهد.

منابع

- Yakobson, B.I., Brabec, C.J. and Bernholc, J., 1996. Nanomechanics of carbon tubes: instabilities beyond linear response. *Physical review letters*, 76(14), p.2511.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.2511>
- Kulathunga, D.D.T.K., Ang, K.K. and Reddy, J.N., 2010. Molecular dynamics analysis on buckling of defective carbon nanotubes. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 22(34), p.345301.
<https://doi.org/10.1088/0953-8984/22/34/345301>

مرزی گیردار در کاهش خیز نانولوله کمتر می‌شود. مقدار خیز برای شرایط مرزی گیردار-ساده در جدول ۶ آمده است.

جدول ۴. خیز بی‌بعد نانولوله در وسط آن ($x=L/2$) و در سطح پایین

($\theta=0$) و سطح بالا ($\theta=\pi$) نانولوله با شرط مرزی دوسر ساده

Table 4. Dimensionless deflection of the nanotube at its midpoint ($x=L/2$) on the bottom ($\theta=0$) and top ($\theta=\pi$) of nanotube with simply-supported boundary condition

μ nm^2	θ	$L/R=5$	$L/R=10$	$L/R=20$	$L/R=50$	$L/R=80$
۰	۰	-۲/۰۱۷۹	-۱/۲۵۱۷	-۱/۰۸۶۹	-۱/۰۳۱۵	-۱/۰۰۵۲
	π	۲/۰۱۷۹	۱/۲۵۱۷	۱/۰۸۶۸	۱/۰۳۱۵	۱/۰۰۵۲
۰/۵	۰	-۲/۲۷۴۰	-۱/۳۷۴۷	-۱/۱۸۶۰	-۱/۱۲۳۴	-۱/۰۹۴۶
	π	۲/۲۷۴۰	۱/۳۷۴۷	۱/۱۸۶۰	۱/۱۲۳۴	۱/۰۹۴۶
۱	۰	-۲/۵۴۲۸	-۱/۴۹۹۸	-۱/۲۸۵۵	-۱/۲۱۵۵	-۱/۱۸۴۱
	π	۲/۵۴۲۸	۱/۴۹۹۸	۱/۲۸۵۵	۱/۲۱۵۵	۱/۱۸۴۱
۰/۵	۰	۲/۸۲۴۱	-۱/۶۲۶۷	-۱/۳۸۵۵	-۱/۳۰۷۶	-۱/۲۷۲۵
	π	۲/۸۲۴۱	۱/۶۲۶۷	۱/۳۸۵۵	۱/۳۰۷۶	۱/۲۷۲۵
۲	۰	۳/۱۱۸۰	-۱/۷۵۵۷	-۱/۴۸۵۸	-۱/۳۹۹۸	-۱/۳۶۳۰
	π	۳/۱۱۸۰	۱/۷۵۵۷	۱/۴۸۵۸	۱/۳۹۹۸	۱/۳۶۳۰

جدول ۵. خیز بی‌بعد نانولوله در وسط آن ($x=L/2$) و در سطح پایین

($\theta=0$) و سطح بالا ($\theta=\pi$) نانولوله با شرط مرزی گیردار-گیردار

Table 5. Dimensionless deflection of the nanotube at its midpoint ($x=L/2$) on the bottom ($\theta=0$) and top ($\theta=\pi$) of the nanotube with clamped-clamped boundary condition

μ nm^2	θ	$L/R=5$	$L/R=10$	$L/R=20$	$L/R=50$	$L/R=80$
۰	۰	-۱/۳۰۵۷	-۰/۴۶۲۹	-۰/۲۷۹۴	-۰/۲۲۹۶	-۰/۲۲۲۹
	π	۱/۳۰۵۷	۰/۴۶۲۹	۰/۲۷۹۴	۰/۲۲۹۶	۰/۲۲۲۹
۰/۵	۰	-۱/۴۷۱۵	-۰/۵۰۸۴	-۰/۳۰۴۹	-۰/۲۵۰۰	-۰/۲۴۲۷
	π	۱/۴۷۱۵	۰/۵۰۸۴	۰/۳۰۴۹	۰/۲۵۰۰	۰/۲۴۲۷
۱	۰	-۱/۶۴۵۴	-۰/۵۵۴۶	-۰/۳۳۰۵	-۰/۲۷۰۵	-۰/۲۶۲۵
	π	۱/۶۴۵۴	۰/۵۵۴۶	۰/۳۳۰۵	۰/۲۷۰۵	۰/۲۶۲۵
۱/۵	۰	-۱/۸۲۷۴	-۰/۶۰۱۶	-۰/۳۵۶۲	-۰/۲۹۱۰	-۰/۲۸۲۳
	π	۱/۸۲۷۴	۰/۶۰۱۶	۰/۳۵۶۲	۰/۲۹۱۰	۰/۲۸۲۳
۲	۰	-۲/۰۱۷۵	-۰/۶۴۹۳	-۰/۳۸۲۰	-۰/۳۱۱۵	-۰/۳۰۲۲
	π	۲/۰۱۷۵	۰/۶۴۹۳	۰/۳۸۲۰	۰/۳۱۱۵	۰/۳۰۲۲

جدول ۶. خیز بی‌بعد نانولوله در وسط آن ($x=L/2$) و در سطح پایین

($\theta=0$) و سطح بالا ($\theta=\pi$) نانولوله با شرط مرزی گیردار-ساده

Table 6. Dimensionless deflection of the nanotube at its midpoint ($x=L/2$) on the bottom ($\theta=0$) and top ($\theta=\pi$) of the nanotube with clamped-simply supported boundary condition

μ nm^2	θ	$L/R=5$	$L/R=10$	$L/R=20$	$L/R=50$	$L/R=80$
۰	۰	-	-۰/۵۴۷۶	-۰/۳۴۶۴	-۰/۴۴۰۹	-۰/۳۸۶۵
	π	2/6756 ۲/۶۷۵۶	۰/۵۴۷۶	۰/۳۴۶۴	۰/۴۴۰۹	۰/۳۸۶۵
۰/۵	۰	-۳/۰۱۵۳	-۰/۶۰۱۴	-۰/۳۷۸۰	۰/۴۸۰۲	-۰/۴۲۰۹
	π	۳/۰۱۵۳	۰/۶۰۱۴	۰/۳۷۸۰	۰/۴۸۰۲	۰/۴۲۰۹

۱۳. Hadi, A., Nejad, M.Z. and Hosseini, M., 2018. Vibrations of three-dimensionally graded nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 128, pp.12-23.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.03.004>
۱۴. Abumandour, R.M., El-Shorbagy, M.A., Eldesoky, I.M., Kamel, M.H., Alotaibi, H. and Felila, A.L., 2022. Deflection analysis of a nonlocal Euler–Bernoulli Nanobeam model resting on two elastic foundations: a generalized differential quadrature approach. *Symmetry*, 14(11), p.2342.
<https://doi.org/10.3390/sym14112342>
۱۵. Nejad, M.Z., Hadi, A., Omidvari, A. and Rastgoo, A., 2018. Bending analysis of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams using integral form of Eringen's non-local elasticity theory. *Structural engineering and mechanics: An international journal*, 67(4), pp.417-425.
۱۶. Najafi, M. and Ahmadi, I., 2022. A new model to study magnetic-electric fields effects on bending of nano-scale magneto-electro-elastic beams. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 96, p.104712.
<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104712>
۱۷. Najafi, M. and Ahmadi, I., 2021. A nonlocal Layerwise theory for free vibration analysis of nanobeams with various boundary conditions on Winkler-Pasternak foundation. *Steel and Composite Structures, An International Journal*, 40(1), pp.101-119.
۱۸. Koochakianfard, O. and Alibeigloo, A., 2022. Nonlocal Vibration of Nanobeam Embedded in Viscoelastic Pasternak Foundation with Longitudinal and Rotational Motions with Surface Effects. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 54(10), pp.2215-2238.
<https://doi.org/10.22060/mej.2022.21234.7407>
۱۹. Ahmadi, I., Moradi, M.N. and Panah, M.D., 2024. Dynamic response analysis of nanoparticle-nanobeam impact using nonlocal theory and meshless method. *Struct. Eng. Mech*, 89(2), p.135.
<https://doi.org/10.12989/sem.2024.89.2.000>
۲۰. Danesh, H., Javanbakht, M. and Aghdam, MM., 2023. A comparative study of 1D nonlocal integral Timoshenko beam and 2D nonlocal integral elasticity theories for bending of nanoscale beams. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 35(3), pp.1063-1085.
<https://doi.org/10.1007/s00161-021-00976-7>
۲۱. Ahmadi, I., Davarpanah, M., Sladek, J., Sladek, V. and Moradi, M.N., 2024. A size-dependent meshless model for free vibration analysis of 2D-functionally graded Zigzag carbon nanotubes—Molecular/structural mechanics and the finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 44(21), pp.6914-6929.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.03.017>
۲. Chowdhury, R., Adhikari, S., Wang, C.Y. and Scarpa, F., 2010. A molecular mechanics approach for the vibration of single-walled carbon nanotubes. *Computational Materials Science*, 48(4), pp.730-735.
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.03.020>
۵. Eringen, A.C., 1983. *On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves* (No. RR83SM10).
۶. Reddy, J., 2007. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2-8), pp.288-307.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004>
۷. Reddy, J.N. and Pang, S.D., 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2).
<https://doi.org/10.1063/1.2833431>
۸. Aydogdu, M., 2009. A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 41(9), pp.1651-1655.
<https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.05.014>
۹. Pradhan, S.C., 2012. Nonlocal finite element analysis and small scale effects of CNTs with Timoshenko beam theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 50, pp.8-20.
<https://doi.org/10.1016/j.fincl.2011.08.008>
۱۰. Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A. and Mahmoud, F.F., 2013. Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 27(7), pp.2035-2041.
<https://doi.org/10.1007/s12206-013-0212-x>
۱۱. Phadikar, J.K. and Pradhan, S.C., 2009. Bending Vibration and Buckling Analysis Of Nonhomogeneous Nanotubes Using Nonlocal Elasticity Theory and GdQ Method. *Journal of Aerospace Sciences and Technologies*, pp.482-495.
<https://doi.org/10.61653/joast.v6i4.2009.588>
۱۲. Civalek, Ö. and Demir, Ç. 2011. Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler–Bernoulli beam theory. *Applied Mathematical Modelling*, 35(5), pp.2053-2067.

<https://doi.org/10.1590/S1679-78252014001200002>

۲۸. Ansari, R., Rouhi, H. and Sahmani, S., 2016. Studying the Vibrational Behavior of Single-Walled Carbon Nanotubes under Different Boundary Conditions using the Rayleigh-Ritz Technique. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 8(2), pp.51-67.
۲۹. Ansari, R. and Rouhi, H., 2012. Analytical treatment of the free vibration of single-walled carbon nanotubes based on the nonlocal Flugge shell theory. *J. Eng. Mater. Technol.*, 134(1): 011008, <https://doi.org/10.1115/1.4005347>
۳۰. Selim, M.M., Alotaibi, M.F., Soltani, A., Mohamed, A.B.A. and Abdel-Aty, A.H., 2023. Torsional vibrational analysis of irregular single-walled carbon nanotube with elastic-support boundary conditions. *Journal of Materials Research and Technology*, 24, pp.215-222. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.02.230>
۳۱. Strozzi, M., Elishakoff, I.E., Boichichio, M., Cocconcilli, M., Rubini, R. and Radi, E., 2023. A comparison of shell theories for vibration analysis of single-walled carbon nanotubes based on an anisotropic elastic shell model. *Nanomaterials*, 13(8), p.1390. <https://doi.org/10.3390/nano13081390>
۳۲. Budiansky, B., 1963. On the best first-order linear shell theory. *The Prager Anniversary Volume-Progress in Applied Mechanics*.
۳۳. Shu, C., 2012. *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer Science & Business Media.
۳۴. Pantano, A., Parks, D.M. and Boyce, M.C., 2004. Mechanics of deformation of single-and multi-wall carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(4), pp.789-821. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2003.08.004>
- multiple nanobeam system. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 46(1), p.11. <https://doi.org/10.1007/s40430-023-04580-5>
۲۲. Ahmadi, I., Sladek, V. and Sladek, J., 2025. Instability and buckling analysis of bi-directional FG multiple nanobeam system in thermal environment by a meshless method. *Archive of Applied Mechanics*, 95(8), p.181. <https://doi.org/10.1007/s00419-025-02890-9>
۲۳. Hosseini-Hashemi, S. and Ilkhani, M.R., 2016. Exact solution for free vibrations of spinning nanotube based on nonlocal first order shear deformation shell theory. *Composite Structures*, 157, pp.1-11. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.08.019>
۲۴. Wang, Q. and Varadan, V.K., 2007. Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes. *Smart Materials and Structures*, 16(1), p.178. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/1/022>
۲۵. Wang, X. and Yang, H.K., 2006. Bending stability of multiwalled carbon nanotubes. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, 73(8), p.085409. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.085409>
۲۶. Wang, C.M., Tay, Z.Y., Chowdhury, A.R., Duan, W.H., Zhang, Y.Y. and Silvestre, N., 2011. Examination of cylindrical shell theories for buckling of carbon nanotubes. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 11(06), pp.1035-1058. <https://doi.org/10.1142/S0219455411004464>
۲۷. Shaban, M. and Alibeigloo, A., 2014. Three dimensional vibration and bending analysis of carbon nanotubes embedded in elastic medium based on theory of elasticity. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11, pp.2122-2140.