Sharif University of Technology

Sharif Mechanical Engineering Journal

https://sjme.journals.sharif.edu

Research Article

Static Bending Analysis of Single-Walled Carbon Nanotubes Using Shell Theory and Nonlocal Elasticity

Mahdi Babakhani and Isa Ahmadi*

Department of Mechanical Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.
* Corresponding author:(i_ahmadi@znu.ac.ir)

Article Info

Article history:

Received: 7 February 2026

Revised: 11 August 2026

Accepted: 23 August 2026

Keywords:

Bending of nanotubes,
shell theory,
nonlocal elasticity theory,
generalized differential quadrature method (GDQM),
nanoscale analysis

Abstract

This study investigates the static bending behavior of single-walled carbon nanotubes (SWCNTs) using Love's shell theory combined with Eringen's nonlocal elasticity to properly account for size-dependent effects. The nonlocal model incorporates the influence of neighboring strains on stress, improving the representation of nanoscale behavior. The governing equations are formulated based on Love's shell theory and are solved using the generalized differential quadrature method (GDQM), which Achieves high accuracy using few grid points .The influence of key parameters—including the nonlocal length scale, geometric dimensions, boundary conditions, and loading type—on the bending response is examined. Numerical results are compared with those predicted by classical beam theory. The comparison shows that while both models agree reasonably well for large length-to-radius ratios in the absence of size effects, significant discrepancies arise once nonlocal behavior is considered. The results demonstrate that nonlocal effects reduce the bending stiffness and increase deflection, indicating that beam theory cannot reliably capture the actual bending behavior of CNTs at the nanoscale.

Introduction

Carbon nanotubes (CNTs), owing to their outstanding mechanical, thermal, and electrical properties, have attracted significant attention in applications such as nanosensors, heat-transfer systems, and composite reinforcements. Understanding their mechanical behavior, particularly deformation, vibration, and buckling, is essential for the reliable design of nanoscale devices. Atomistic approaches such as molecular dynamics (MD) provide accurate predictions [1–2], but their high computational cost limits their application to larger nanoscale systems. Molecular structural mechanics, which represents interatomic interactions using equivalent stretching, bending, and torsional springs within a finite element framework, has also been applied to CNT analysis [3–4]. However, continuum mechanics models remain widely used because of their computational efficiency. Classical elasticity cannot adequately capture size-dependent effects, as it assumes that stress at a point depends only on the strain at that point. Eringen's nonlocal elasticity theory [5] addresses this limitation by accounting for the influence of neighboring regions, enabling improved modeling of nanoscale structures. Shell theories also provide a more realistic representation of CNT geometry than beam models, particularly when circumferential and longitudinal stresses are important. Various shell theories, including Love, Donnell, Sanders, and Flügge, have been used to study the vibration, buckling, and instability of CNTs [23–31]. However, studies specifically addressing CNT bending and deflection using nonlocal shell theory remain limited. This motivates the present work, which investigates the bending behavior of single-walled CNTs under various loading and boundary conditions using Love's shell theory combined with Eringen's nonlocal elasticity. The governing equations are solved using the generalized differential quadrature method (GDQM), and the results are compared with beam theory to assess The applicability of the latter in predicting CNT deflection.

To Cite this article:
Babakhani, M. and Ahmadi, I. 2026. Static bending analysis of single walled carbon nanotubes using shell theory and nonlocal elasticity, Sharif Mechanical Engineering Journal, **42**(1), 79-93. https://doi.org/10.24200/j40.2026.68562.1762

E-ISSN: 2676-4733 © 2026 The Author(s). Sharif Mechanical Engineering Journal, Published by Sharif University of Technology
This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.

Methodology

The bending and deflection behavior of single-walled carbon nanotubes (SWCNTs) is modeled using thin shell theory. A schematic representation of the CNT shell model is shown in Fig. 1, where the nanotube has length L, mean radius R, and is described in the cylindrical coordinate system (x, r, θ), with x aligned along the tube axis. The external distributed loads on the surface of cylinder $q_z(x,\theta)$, $q_\theta(x,\theta)$, and $q_x(x,\theta)$ are applied in the radial, circumferential, and axial directions, respectively. The displacement field of the nanotube is represented by the axial, circumferential, and radial components u(x,θ), v(x,θ), and w(x,θ) according to Eq. (1) [32]. Owing to the small wall thickness of CNTs, the radial normal strain εz and transverse shear strains γxz and γθz are neglected. The strain components of the shell are obtained using Eq. (2) [32].

To capture Small-scale (size-dependent) effects, Eringen's nonlocal elasticity theory [5] is employed. The integral form of the nonlocal constitutive relation is given in Eq. (3) [5], where ψ is the nonlocal kernel function, τ is the nonlocal parameter ($\tau=e_0a/L$), and Ω denotes the domain of the structure. This model accounts for the influence of atomic-scale interactions on the continuum response. To avoid the complexity of The integral equations, the differential form of the nonlocal constitutive relation, shown in Eq. (4) [5], is adopted, where $\mu=(e_0a)^2$ represents the small-scale parameter.

This formulation enables efficient incorporation of nonlocal effects into the shell governing equations, which are subsequently solved under various boundary conditions using the generalized differential quadrature method.

Results and Discussion

The dimensionless deflection for the nanotube is defined in Eq. (31).

A sinusoidal axial pressure is applied to the single-walled carbon nanotube as defined in Eq. (36). The effect of the length-to-radius ratio (L/R) on the deflection (w^*) at the midspan (x=L/2, θ=0) is presented in Fig. 3. For μ=0 (black solid line), the shell theory prediction converges to unity as L/R increases, indicating excellent agreement with the classical beam theory ($w^*=1$) for long nanotubes. However, for smaller L/R values, the shell theory predicts significantly larger deflections compared with beam theory, reflecting the limitations of Euler-Bernoulli beam assumptions for short and thick tubes (L/h<10). The influence of the nonlocal parameter μ on w^* is also evident, showing that nonlocal effects reduce the bending stiffness.

The variation of w^* for three different boundary conditions is illustrated in Fig. 4, confirming the influence of the boundary conditions on the bending response. Fig. 5 presents the deflection u_z at θ=0, θ=π/2, and θ=π for varying L/R ratios.

For large L/R, the displacements at θ=0 and θ=π/2 are nearly identical, and u_y approaches zero, indicating that the nanotube cross-section remains approximately circular. Conversely, for small L/R, not only are the displacements unequal, but their signs also differ, leading to a deformation in which the cross-section deviates from circularity: u_y becomes negative, showing contraction along the Y-axis and expansion along the Z-axis.

Conclusion

In this study, a theoretical model combining Love's shell theory with Eringen's nonlocal elasticity is developed to analyze the bending behavior of single-walled carbon nanotubes. To accurately solve the governing differential equations, GDQM is employed. The numerical results obtained from the proposed model indicate that nonlocal effects significantly reduce the bending stiffness of carbon nanotubes, leading to an increase in the predicted deflection. Furthermore, the comparison between the shell model and the beam model shows that, in the absence of size effects, both models exhibit good agreement for large length-to-radius ratios. However, once size effects are taken into account, noticeable discrepancies appear even at high L/R values, and the beam model fails to capture accurately the bending behavior of the nanotube. These findings highlight the necessity of using more refined theories—such as Love's shell theory combined with nonlocal elasticity—when modeling nanoscale structures, particularly for problems involving the deflection analysis of carbon nanotubes.

Funding: This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions: All authors contributed to the reported work for conceptualization, methodology, validation, writing-review and editing, and supervision.

مجله علمی مهندسی مکانیک شریف

https://sjme.journals.sharif.edu

مقاله‌ی پژوهشی

تحلیل خمش استاتیکی در نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با استفاده از تئوری پوسته‌ها و تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی

مهدی باباخانی و عیسی احمدی *

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.

*نویسنده مسئول (i_ahmadi@znu.ac.ir)

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت : ۱۴۰۴/۱۱/۱۸

تاریخ اصلاحیه : ۱۴۰۵/۰۵/۲۰

تاریخ پذیرش : ۱۴۰۵/۰۶/۰۱

واژگان کلیدی:

خمش استاتیکی نانولوله‌ها، نانولوله‌های تک‌جداره، تئوری پوسته‌ها، تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی، روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی (GDQM).

چکیده

خمش استاتیکی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با استفاده از تئوری پوسته‌ها و تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی تحلیل شده است. در نوشتار حاضر، معادله‌های حاکم بر رفتار استاتیکی نانولوله با استفاده از تئوری پوسته‌ی لاو استخراج و شرایط مرزی مناسب در نظر گرفته شده است. حل معادله‌های دیفرانسیل با مشتق‌های جزئی حاصل برای نانولوله، با روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی (GDQM) صورت گرفته و تغییرشکل استاتیکی نانولوله استخراج شده است. در قسمت نتایج عددی، تأثیر پارامترهای مختلف، نظیر: پارامتر غیرموضعی، شرایط مرزی و ابعاد هندسی، و نوع بار وارده در پاسخ خمش نانولوله بررسی شده است. نتایج عددی با نتایج مدل‌سازی نانولوله با تئوری تیرها و اختلاف نتایج دو تئوری در پیش‌بینی خمش به‌وجودآمده در نانولوله مقایسه و مشاهده شده‌اند که درنظرگرفتن آثار غیرموضعی منجر به افزایش خیز پیش‌بینی‌شده برای نانولوله‌ها می‌شود. نتایج عددی نشان داده‌اند که با درنظرگرفتن تئوری غیرموضعی، اختلاف پیش‌بینی تئوری پوسته‌ها با تئوری تیرها حتی برای نانولوله‌های بلند افزایش یافته و اهمیت مدل‌سازی نانولوله‌ها با تئوری پوسته‌ها مشهود شده است.

۱. مقدمه

نانولوله‌های کربنی (CNTs)[1]، به‌دلیل ویژگی‌های مکانیکی، حرارتی، و الکتریکی منحصربه‌فرد خود، مانند استحکام بالا، مدول الاستیسیته‌ی بالا، و پایداری شیمیایی مطلوب در حوزه‌های مختلفی همچون نانوحسگرها، سامانه‌های انتقال حرارت، و تقویت‌کننده‌های کامپوزیت، به آن‌ها توجه شده است. بررسی رفتار مکانیکی سازه‌های نانومقیاس مذکور، به‌ویژه در زمینه‌ی تحلیل تغییرشکل، ارتعاش‌ها و کمانش آن‌ها اهمیت زیادی در طراحی و توسعه‌ی کاربردهای نانوسازه‌های کربنی دارد. یکی از روش‌های قدرتمند برای مدل‌سازی رفتار سازه‌های اخیر، استفاده از تئوری دینامیک مولکولی است.[۱ و ۲] با این حال، استفاده از روش دینامیک مولکولی، مخصوصاً برای سازه‌های بزرگ در مقیاس نانو، نیاز به حجم محاسبه‌ی بسیار بالایی دارد و بعضاً مقرون به صرفه نیست. روش مکانیک مولکولی، که بر مبنای مدل‌کردن برهمکنش‌های بین مولکولی به‌صورت فنرهای کششی، خمشی، و پیچشی و بهره‌گیری از روش المان محدود است، برای مدل‌سازی رفتار نانوساختارها استفاده شده است.[۳ و ۴] با این حال، از مدل‌های بر مبنای مکانیک محیط پیوسته نیز برای مدل‌سازی رفتار سازه‌های مذکور در اندازه‌ی نانو، استفاده‌ی گسترده‌ای صورت گرفته است. ولی به‌علت ابعاد کوچک برهمکنش بین اتمی در مقیاس نانو قابل صرف‌نظر نیست و تئوری کلاسیک الاستیسیته به دلیل نادیده‌گرفتن آثار مقیاس کوچک - که تنش در هر نقطه را تابعی از کرنش در همان نقطه در نظر می‌گیرد- در مدل‌سازی رفتار نانوسازه‌ها محدودیت‌هایی دارد. در این راستا، تئوری‌هایی برای درنظرگرفتن اثر اندازه در تحلیل نانوسازه‌ها با تئوری مکانیک محیط پیوسته ارائه شده است، که تئوری غیرموضعی الاستیسیته، که نخستین بار توسط ارینگن[2] (۱۹۸۳) معرفی شده است،[۵] یکی از مناسب‌ترین رویکردها برای لحاظ‌کردن آثار اندازه‌ای در تحلیل نانوساختارهاست. تئوری اخیر با درنظرگرفتن وابستگی تنش هر نقطه به کرنش در آن نقطه و نقاط مجاور، موجب بهبود دقت نتایج در تحلیل رفتار خمش و ارتعاش نانوتیرها می‌شود.

تئوری تیرها توسط برخی پژوهشگران برای مدل‌سازی اثر اندازه‌ی کوچک استفاده شده است. مخصوصاً در مورد نانولوله‌های کربنی، به‌علت نسبت طول

[1] Carbon Nano Tubes

[2] Eringen

استناد به این مقاله:

باباخانی، مهدی و احمدی، عیسی، ۱۴۰۵. تحلیل خمش استاتیکی در نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با استفاده از تئوری پوسته‌ها و تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی . مهندسی مکانیک شریف، ۴۲(۱)، صص.۷۹-۹۳. https://doi.org/10.24200/j40.2026.68562.1762

حق مولف © نویسندگان

ناشر: دانشگاه صنعتی شریف

شاپا الکترونیکی: ۲۶۷۶-۴۷۳۳

به قطر بالا، برای ساده‌سازی فرمول‌بندی از تئوری تیرها در کنار تئوری پوسته‌ها برای مدل‌سازی رفتار مکانیکی نانولوله‌ها استفاده شده است. در تئوری تیر از تغییرات در راستای محیطی نانولوله صرف‌نظر و فرض می‌شود که نانولوله، یک سازه‌ی یک بُعدی (طولی) است. پژوهش‌های متعددی در زمینه‌ی مدل‌سازی نانولوله‌ها با مدل تیر و با استفاده از تئوری اینگن انجام شده است. ردی[3] (۲۰۰۷)،[۶] ردی و پانگ[4] (۲۰۰۸)،[۷] و آیدوغلو[5] (۲۰۰۹)،[۸] با استفاده از مدل تیرها و تئوری غیرموضعی اینگن، مدل تیر غیرموضعی را برای بررسی رفتار مکانیکی نانولوله‌ها شامل خمش، ارتعاش‌های آزاد، و کمانش ارائه کرده‌اند. پرادهان[6] (۲۰۱۲)،[۹] و الشورباقی[7] و همکاران (۲۰۱۳)،[۱۰] روش المان محدود را برای تحلیل نانولوله‌ها (نانوتیرها) با استفاده از تئوری غیرموضعی تیرها برای بررسی خمش در نانوتیرها ارائه کرده‌اند. پادیکار و پرادهان[8] (۲۰۰۹)،[۱۱] جیوالک و دمیر[9] (۲۰۱۱)،[۱۲] هادی و همکاران (۲۰۱۸)،[۱۳] و ابومندور[10] و همکاران (۲۰۲۲)،[۱۴] از تئوری تیرها و الاستیسیته‌ی غیرموضعی و روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی (GDQM)[11] برای بررسی خمش و ارتعاش‌ها و یا کمانش در نانولوله‌ها استفاده کرده‌اند. نژاد و همکاران (۲۰۱۸)،[۱۵] از فرم انتگرالی تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی و تئوری تیر اویلر- برنولی[12] برای بررسی خمش نانوتیرها استفاده کرده‌اند. نجفی و احمدی (۲۰۲۱ و ۲۰۲۲)،[۱۶ و ۱۷] با استفاده از تئوری غیرموضعی اینگن و یک روش بر مبنای تئوری لایه‌ای، روش جدیدی برای بررسی خمش و ارتعاش‌های نانوتیر با دقت بالاتر ارائه کرده‌اند. کوچکیان‌فرد و علی‌بیگلو (۲۰۲۳)،[۱۸] ارتعاش‌های غیرموضعی نانوتیر دوار با بستر ویسکوالاستیک را با درنظرگرفتن اثر سطحی بررسی کرده‌اند. احمدی و همکاران (۲۰۲۴)،[۱۹] رفتار خمش گذرای نانوتیر را در اثر برخورد نانوذره با روش بدون المان و تئوری غیرموضعی بررسی کرده‌اند. دانش و همکاران (۲۰۲۳)،[۲۰] یک مطالعه‌ی مقایسه‌ای بین روش غیرموضعی انتگرالی تیر تیموشینکو[13] و روش دو بُعدی انتگرالی الاستیسیته‌ی غیرموضعی برای بررسی خمش در نانوسازه انجام داده‌اند. احمدی و همکاران (۲۰۲۵ و ۲۰۱۶)،[۲۱ و ۲۲] از روش بدون المان و تئوری غیرموضعی تیر تیموشینکو برای بررسی کمانش و ارتعاش‌های نانوتیرهای چندگانه استفاده کرده‌اند.

از سوی دیگر، استفاده از تئوری پوسته برای مدل‌سازی نانولوله‌ها به‌دلیل درنظرگرفتن هندسه‌ی واقعی نانولوله و تنش‌های طولی و محیطی نسبت به مدل تیر پیچیده‌تر است و ابزار قدرتمندتری برای مدل‌سازی دقیق‌تر رفتار نانولوله‌ها محسوب می‌شود. همچنین، ترکیب تئوری پوسته با مدل غیرموضعی می‌تواند مدل مناسب‌تری برای درنظرگرفتن آثار هندسه و اندازه‌ی کوچک باشد و در تحلیل نانولوله‌های کربنی نقش مهمی ایفا کند. از آنجا که معمولاً معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر نانولوله‌ها به‌مراتب پیچیده‌تر از معادله‌های حاکم بر تیرها هستند، لذا حل آن‌ها مخصوصاً برای شرایط لبه‌ای مختلف، پیچیدگی‌هایی دارد. برای حل معادله‌های حاکم حاصل از مدل‌های ذکرشده، روش‌های عددی پیشرفته، نظیر روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی کاربرد وسیعی یافته‌اند. روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی به‌دلیل همگرایی سریع و دقت بالا در تقریب مشتق‌ها، گزینه‌ای مناسب برای حل معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای است، که توسط برخی پژوهشگران برای تحلیل نانوسازه‌ها استفاده شده است.

حسینی هاشمی و ایلخانی (۲۰۱۶)،[۲۳] با ترکیب تئوری پوسته‌ی لاو و مدل غیرموضعی، ارتعاش‌های آزاد نانولوله‌های دوار را تحلیل کرده‌اند. ونگ و وارادان[14] (۲۰۰۷)،[۲۴] تئوری پوسته و الاستیسیته‌ی غیرموضعی را در تحلیل انتشار موج در نانولوله‌ها به‌کار برده‌اند. ونگ و یانگ[15] (۲۰۰۶)،[۲۵] از تئوری پوسته‌ها برای بررسی کمانش و ناپایداری نانولوله‌ی دوجداره استفاده کرده‌اند. ونگ و همکاران (۲۰۱۱)،[۲۶] از تئوری پوسته برای بررسی کمانش خمشی نانولوله‌های کربنی چنددیواره استفاده کرده‌اند. شعبان و علی بیگلو (۲۰۱۴)،[۲۷] از تئوری الاستیسیته‌ی سه بُعدی برای بررسی خمش و ارتعاش‌های نانولوله‌ها همراه با تئوری غیرموضعی استفاده کرده‌اند. برخی دیگر از پژوهشگران نیز از تئوری پوسته‌ی دانل یا فلوگه برای بررسی فرکانس‌های طبیعی نانولوله‌ها استفاده کرده‌اند. انصاری و همکاران (۲۰۱۲ و ۲۰۱۶)،[۲۸ و ۲۹] ارتعاش‌های آزاد نانولوله‌ها را با تئوری پوسته‌ی فلوگه بررسی کرده‌اند. سلیم و همکاران (۲۰۲۳)،[۳۰] ارتعاش‌های پیچشی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره با هندسه‌ی نامنظم را با شرایط مرزی تکیه‌گاه الاستیک، با استفاده از تئوری پوسته‌ای فلوگه و رویکرد انتشار موج بررسی کرده‌اند. استروزی[16] و همکاران (۲۰۲۳)،[۳۱] مقایسه‌ای بین سه تئوری کلاسیک پوسته‌ای، شامل تئوری‌های دانل سندرز و فلوگه در ارزیابی فرکانس‌های طبیعی نانولوله‌های کربنی تک‌جداره انجام داده‌اند.

مرور ادبیات اخیر نشان می‌دهد هر چند که از تئوری تیرها همراه با تئوری غیرموضعی به طورگسترده برای تحلیل خمش و خیز در نانوسازه‌ها و نانولوله‌ها استفاده شده است، اما استفاده از تئوری پوسته‌ها برای بررسی خمش استاتیکی در نانولوله‌ها بسیار محدود و موارد مشاهده‌شده در منابع به‌طورعمده در مورد ارتعاش‌ها و ناپایداری نانولوله‌ها بوده است. استفاده‌ی هم‌زمان از تئوری پوسته‌ی لاو و مدل غیرموضعی الاستیسیته به همراه روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی، ابزاری قدرتمند برای تحلیل رفتار مکانیکی نانولوله‌ها خواهد بود. با وجود پیشرفت‌های قابل‌توجه، هنوز تحلیل جامع خیز و خمش نانولوله‌ها تحت بارگذاری‌های جانبی و شعاعی مختلف، با درنظرگرفتن شرایط مرزی متنوع و آثار مقیاس کوچک، نیازمند پژوهش‌های بیشتری است، که پژوهش حاضر درصدد پُرکردن شکاف پژوهشی مذکور است. در نوشتار حاضر، با استفاده از تئوری پوسته‌های لاو، تحلیل خمش و خیز در نانولوله‌های کربنی تحت بارگذاری‌های مختلف و شرایط مرزی مختلف انجام شده است. برای بررسی اثر اندازه از تئوری غیرموضعی اینگن استفاده شده است. با استفاده از ترکیب تئوری غیرموضعی اینگن و تئوری پوسته‌ی لاو، مدلی برای بررسی خمش نانولوله‌ها ارائه شده است. برای حل معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر مسئله در شرایط مرزی مختلف با توجه به کارایی بالای روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی، از روش اخیر استفاده شده است. معادله‌های دیفرانسیل برای شرایط مرزی مختلف حل و میدان جابجایی نانولوله برای بارگذاری‌های مختلف

[3] Reddy
[4] Reddy & Pang
[5] Aydogdu
[6] Pradhan
[7] Alshorbagy
[8] Phadikar & Pradhan
[9] Civalek & Demir
[10] Abumandour
[11] Generalized Differential Quadrature Method
[12] Euler–Bernoulli beam
[13] Timoshenko beam
[14] Wang & Varadan
[15] Wang & Yang
[16] Strozzi

استخراج شده است. نتایج به‌دست‌آمده برای خیز بیشینه‌ی نانولوله با نتایج حاصل از تئوری تیر مقایسه شده و نشان داده است که در چه محدوده‌ای می‌توان از تئوری تیر برای تحلیل جابجایی و خمش در نانولوله‌ها استفاده کرد. با درنظرگرفتن اثر پارامتر غیرموضعی در راستای طولی و محیطی نانولوله نشان داده شده است که اثر اندازه در تئوری پوسته و تئوری تیر، آثار متفاوتی در پیش‌بینی خمش در نانولوله دارد. بدون درنظرگرفتن اثر اندازه برای L/R های بزرگ، پیش‌بینی تئوری تیر و پوسته برای خیز بیشینه، تطابق بالایی دارد؛ ولی با درنظرگرفتن اثر اندازه حتی برای L/R های بزرگ، پیش‌بینی تئوری پوسته با تئوری تیر انطباق ندارد و لذا با درنظرگرفتن اثر اندازه حتی برای نانولوله‌های بلند انطباق بین پیش‌بینی تئوری پوسته و تیرها وجود ندارد.

۲. مدل‌سازی

برای مدل‌سازی خمش و تغییرشکل نانولوله از تئوری پوسته‌های نازک استفاده شده است. شکل شماتیک پوسته‌ای از نانولوله‌ی کربنی تک‌جداره در شکل ۱ مشاهده می‌شود. طول نانولوله برابر با L، شعاع متوسط آن برابر با R، و محورهای مختصات xrθ برای نانولوله در نظر گرفته شده‌اند، ، که محور x منطبق بر محور نانولوله و r مختصه‌ی شعاعی و θ مختصه‌ی محیطی هستند. همچنین فرض شده است که بارهای خارجی گسترده‌ی $q_z(x,\theta)$، $q_\theta(x,\theta)$ ، و $q_x(x,\theta)$ در راستای شعاعی و محیطی و محوری بر نانولوله وارد می‌شوند. در مدل‌سازی رفتار مکانیکی نانولوله، برای بیان تغییرشکل نانولوله، میدان جابجایی نانولوله در راستای طولی، محیطی، و شعاعی به ترتیب با $\bar{u}$، $\bar{v}$، و $\bar{w}$ مشخص شده‌اند. رابطه‌ی مؤلفه‌های جابجایی پوسته بر حسب مؤلفه‌های مختصات و جابجایی صفحه‌ی میانی به‌صورت رابطه‌ی ۱ بیان می‌شود.[۳۲]

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,\theta,z) &= u(x,\theta) - z\,\frac{\partial w}{\partial x}\\ \bar{v}(x,\theta,z) &= v(x,\theta) - z\left(\frac{\partial w}{R\,\partial\theta} + \frac{v}{R}\right)\\ \bar{w}(x,\theta,z) &= w(x,\theta)\end{aligned} \qquad (1)$$

که در آن، $u(x,\theta)$، $v(x,\theta)$، و $w(x,\theta)$ مؤلفه‌های جابجایی صفحه‌ی میانی پوسته هستند. شایان ذکر است که براساس فرضیات استفاده‌شده در مدل پوسته‌ی جدار نازک و به‌علت ضخامت کم جداره‌ی نانولوله، از مؤلفه‌ی کرنش در راستای شعاعی پوسته (ε_z) و کرنش‌های برشی در راستای ضخامت (γ_{xz} و $\gamma_{\theta z}$)، ناچیز در نظر گرفته شده است.

مؤلفه‌های کرنش در پوسته از رابطه‌ی ۲ به‌دست می‌آیند:[۳۲]

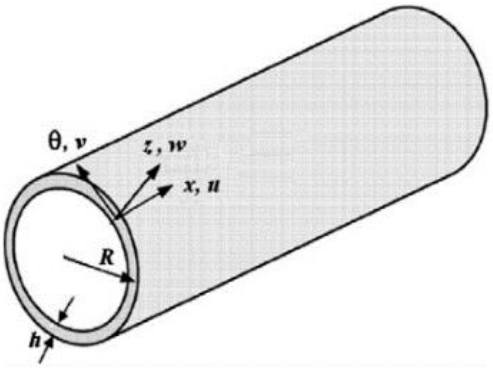

Fig.1. Shell model of a single-walled nanotube.

شکل ۱. مدل پوسته‌ای از یک نانولوله‌ی تک جداره.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} - z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} + w\right) - z\,\frac{1}{R^2}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\theta}\right)\\ \gamma_{x\theta} &= \left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - z\,\frac{1}{R}\left(-\frac{2\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned} \qquad (2)$$

در نوشتار حاضر، به‌منظور درنظرگرفتن اثر اندازه‌ی کوچک در مدل‌سازی رفتار نانولوله از تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی،[۵] استفاده شده است. تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک موضعی و تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی در تعریف تنش است. در نظریه‌ی کلاسیک موضعی، بین تنش در یک نقطه و کرنش در همان نقطه، یک تناظر یک به یک برقرار است. بدین معنی که تنش در یک نقطه فقط تابعی منحصربه‌فرد از کرنش در همان نقطه است؛ ولی در تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی، تنش در یک نقطه، تابعی از کرنش در تمام نقاط همسایگی آن نقطه در جسم است. رابطه‌ی ساختاری در تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی به شکل انتگرالی آن به‌صورت رابطه‌ی ۳ است:[۵]

$$\sigma_{ij}(x) = \int_{\Omega} \psi\left(|x'-x|,\tau\right) C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}(x')\,dV(x') \qquad (3)$$

که در آن، σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش در نقطه‌ی x، σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور کرنش، و C_{ijkl} تانسور خواص ماده (ثوابت الاستیسیته) هستند، و Ψ تابع هسته‌ی غیرموضعی است که میزان تأثیر تنش در نقطه‌ی x را از کرنش نقاط همسایگی آن مشخص می‌کند، و Ω دامنه‌ی جسم موردنظر است، که انتگرال‌گیری بر روی آن انجام می‌شود. همچنین τ پارامتر مشخصه‌ی غیرموضعی است و نقش مهمی در تعیین گستره‌ی تأثیر کرنش یا تنش نقاط اطراف در نقطه‌ی موردنظر دارد. پارامتر τ معمولاً به‌صورت بدون بُعد است و با رابطه‌ی $\tau = e.a/L$ تعریف می‌شود؛ که در آن، e. یک ثابت تجربی بدون بُعد است، که مقدار آن در محدوده‌ی ۰/۳ تا ۰/۵ در نظر گرفته می‌شود. پارامتر a معرف فاصله‌ی بین‌اتمی یا اندازه‌ی ویژگی‌های ساختاری در مقیاس نانو و L نیز طول مشخصه‌ی هندسی جسم است، که ابعاد کلی سازه را در مقیاس ماکرو نمایش می‌دهد. رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد که پاسخ تنشی در یک نقطه، به‌طورجمعی از اطلاعات کرنش در محیط اطراف آن نقطه تأثیر می‌پذیرد، که برخلاف فرض تئوری کلاسیک، به‌طور دقیق‌تری رفتار مواد در مقیاس نانو را مدل‌سازی می‌کند. معمولاً به‌منظور اجتناب از درگیرشدن با معادله‌های انتگرالی، در منابع مختلف از فرم دیفرانسیلی معادله استفاده می‌شود. معادله‌ی ساختاری غیرموضعی در فرم دیفرانسیلی به‌صورت رابطه‌ی ۴ بیان می‌شود:[۵]

$$(1-\mu\nabla^2)\,\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad (4)$$

که در آن، $\mu = (e.a)^2$ پارامتر اندازه‌ی کوچک در تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی است؛ که برای هر ماده‌ی خاص با استفاده از آزمایش‌های مناسب تعیین می‌شود. با توجه به اینکه از کرنش‌های در راستای ضخامت صرف‌نظر شده است، رابطه‌ی ساختاری برای رابطه‌ی تنش و کرنش در تئوری غیرموضعی براساس رابطه‌ی ۵ نوشته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_{x\theta}\end{Bmatrix} - (e_0 a)^2\nabla^2\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_\theta\\ \sigma_{x\theta}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0\\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{x\theta}\end{bmatrix} \qquad (5)$$

که در آن، E مدول یانگ، ν ضریب پواسون، و پارامترهای: σ_x، σ_θ، و $\sigma_{\xi\theta}$

به‌ترتیب تنش عمودی محوری (طولی)، تنش محیطی، و تنش برشی درون صفحه‌ای هستند.

برای استخراج معادله‌های حاکم بر نانولوله از اصل کمینه‌ی انرژی پتانسیل کل استفاده شده است. با توجه به اینکه از کرنش‌های برون‌صفحه‌ای ε_z، γ_{xz}، و $\gamma_{\theta z}$ صرف‌نظر شده است، انرژی پتانسیل کرنشی پوسته را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۶ بیان کرد.[۳۲]

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta}\gamma_{x\theta})dV \tag{6}$$

با جایگذاری روابط تنش و کرنش در رابطه‌ی ۶ و انتگرال‌گیری روی حجم نانولوله، رابطه‌ی ۷ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\delta U = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}\Big\{ & N_{xx}(\frac{\partial \delta u}{\partial x}) + N_{\theta\theta}(\frac{1}{R}\frac{\partial \delta v}{\partial \theta} + \frac{\delta w}{R}) \\ & + N_{x\theta}(\frac{1}{R}\frac{\partial \delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}) - M_{xx}(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}) + \\ & + M_{\theta\theta}(-\frac{\partial^2 \delta w}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial \delta v}{R^2 \partial \theta}) \\ & + M_{x\theta}(-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial \theta \partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial \delta v}{\partial x})\Big\} R dx d\theta\end{aligned} \tag{7}$$

که در تئوری پوسته، منتجه‌های تنش استفاده‌شده در رابطه‌ی ۷ براساس مؤلفه‌های تنش به‌صورت رابطه‌ی ۸ تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}(N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta})dz \\ (M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta})z dz\end{aligned} \tag{8}$$

کار نیروهای خارجی وارده بر نانولوله از رابطه‌ی ۹ به‌دست می‌آید.

$$W = \int_0^{2\pi}\int_0^{L}(q_r w + q_\theta v + q_x w)R dx d\theta \tag{9}$$

که در آن، پارامترهای: q_r، q_θ، و q_x به‌ترتیب نیروهای خارجی وارد بر نانولوله در راستای شعاعی، محیطی، و طولی هستند. با به‌کاربردن انتگرال‌گیری جزء به جزء برای انرژی پتانسیل کرنشی و با استفاده از اصل کمینه‌ی انرژی پتانسیل کل، معادله‌ی حاکم بر نانولوله بر حسب منتجه‌های تنش به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + q_x(x,\theta) = 0 \\ &\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + q_\theta(x,\theta) = 0 \\ &\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial^2 M_{x\theta}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 M_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + q_r(x,\theta) = 0\end{aligned} \tag{10}$$

همچنین شرایط مرزی در لبه‌های نانولوله به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ خواهد بود.

$$\begin{aligned}&N_{xx}\delta u = 0 \\ &(N_{x\theta} + \frac{1}{R}M_{x\theta})\delta v = 0 \\ &M_{xx}\delta w_{,x} = 0 \qquad\qquad at\ x = 0\ ,\ x = L \\ &(M_{xx,x} + \frac{2}{R}M_{x\theta,\theta})\delta w = 0\end{aligned} \tag{11}$$

حال برای به‌دست‌آوردن معادله‌های تعادل بر حسب مؤلفه‌های جابجایی، با استفاده از روابط ۵ و ۸، منتجه‌های نیرو بر حسب مؤلفه‌های جابجایی به‌صورت رابطه‌ی ۱۲ بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}&N_{xx} - (e_0 a)^2 \nabla^2 N_{xx} = K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R})\right) \\ &N_{\theta\theta} - (e_0 a)^2 \nabla^2 N_{\theta\theta} = K\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R})\right) \\ &N_{x\theta} - (e_0 a)^2 \nabla^2 N_{x\theta} = K\left(\frac{1-\nu}{2}(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x})\right) \\ &M_{xx} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{xx} = D\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu(\frac{1}{R^2}(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}))\right) \\ &M_{\theta\theta} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{\theta\theta} = D\left(-\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\frac{1}{R^2}(-\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}))\right) \\ &M_{x\theta} - (e_0 a)^2 \nabla^2 M_{x\theta} = D\left(\frac{1-\nu}{2}(\frac{1}{R}(-\frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}))\right)\end{aligned} \tag{12}$$

که در آن، $K = Eh/(1-\nu^2)$، سفتی غشایی جداره و $D = Eh^3/\left(12(1-\nu^2)\right)$ صلبیت خمشی جداره هستند. برای استخراج معادله‌های حرکت پوسته بر حسب مؤلفه‌های جابجایی، میدان جابجایی نانولوله به‌صورت سری فوریه بر حسب مختصه‌ی محیطی θ مطابق رابطه‌ی ۱۳بسط داده شده است:

$$\begin{aligned}u(x,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\sin n\theta \\ v(x,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x)\cos n\theta \\ w(x,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(x)\sin n\theta\end{aligned} \tag{13}$$

با توجه به اینکه در بسیاری از کاربردها، نانولوله در محیط خلأ نبوده و در داخل یک محیط الاستیک قرار گرفته است و همچنین برای جامعیت‌بخشیدن به فرمول‌بندی در نوشتار حاضر نیز مانند بسیاری از نوشتارهای دیگر فرض شده است که نانولوله درون بستر الاستیک قرار دارد. اثر سفتی الاستیک و سفتی برشی برای بستر الاستیک با مدل بستر وینکلر- پاسترناک مدل شده است. لذا بار خارجی شعاعی وارد بر نانولوله، دو قسمت دارد که یک قسمت بار وارده توسط بستر و قسمت دیگر بار وارده‌ی خارجی است. لذا، بار وارده‌ی شعاعی را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۱۴ نوشت.

$$\bar{q}_r = q_r(x,\theta) - K_w w + K_p \nabla^2 w \tag{14}$$

که در آن، $q_r(x,\theta)$ بار شعاعی خارجی وارد بر نانولوله به جز نیروی بستر است. بار خارجی نیز به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ بسط فوریه داده شده است.

$$q_r(x,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)\cos n\theta \tag{15}$$

حال با استفاده از رابطه‌های ۱۲ و ۱۵، رابطه‌ی ۱۰ برای مؤلفه‌های جابجایی به‌صورت رابطه‌ی ۱۶ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}_n \begin{Bmatrix} U(x) \\ V(x) \\ W(x) \end{Bmatrix}_n \\ &= (1-\mu\nabla^2)\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_n(x) \end{Bmatrix},\ n = 0,1,2,...\end{aligned} \tag{16}$$

که در آن، L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی و به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ است.

$$\begin{aligned}L_{11} &= K(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (-n^2)(\frac{1-\nu}{2R^2})), \\ L_{12} &= (-n)K(\frac{1+\nu}{2R})\frac{\partial}{\partial x},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{13} &= +(\frac{\nu K}{R})\frac{\partial}{\partial x},\\
L_{21} &= (n)K(\frac{1+\nu}{2R})\frac{\partial}{\partial x},\\
L_{22} &= K(\frac{1-\nu}{2})+\frac{2D}{R^2}(\frac{1-\nu}{2})\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(\frac{K}{R^2}+\frac{2D}{R^4})(-n^2)\\
L_{23} &= -(\frac{D}{R^2})(-n)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+(\frac{K}{R})(n)-(\frac{D}{R^4})(-n^3),\\
L_{31} &= -(\frac{\nu K}{R})\frac{\partial}{\partial x},\\
L_{32} &= (\frac{D}{R^2})(-n)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-(\frac{K}{R})(-n)+(\frac{D}{R^4})(n^3),\\
L_{33} &= -D\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\frac{2D}{R^2}(-n^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{D}{R^4}(n^4)-\frac{K}{R^2},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

از روابط اخیر مشخص است که مشتق U و V تا مرتبه‌ی دوم و مشتق W تا مرتبه‌ی چهارم در معادله‌ی حاکم ظاهر شده و مشتق سوم W در معادلات ظاهر نشده است. حال برای حل معادله‌ها، یک ماتریس ستونی $\{X\}_{۱۰\times ۱}$ که شامل توابع مجهول جابجایی و مشتق‌های آن بوده و در رابطه‌ی ۱۶ ظاهر شده است، به‌صورت رابطه‌ی ۱۸ تعریف می‌شود.

$$
\{X(x)\}_n = \left\{\{\tilde{U}(x)\}_n^T, \{\tilde{V}(x)\}_n^T, \{\tilde{W}(x)\}_n^T\right\}^T \tag{18}
$$

که در آن، ماتریس‌های $\{\tilde{U}\}$، $\{\tilde{V}\}$، و $\{\tilde{W}\}$ ماتریس‌های ستونی شامل جابجایی هستند و مشتق‌های آن‌ها به‌صورت روابط ۱۹ تعریف می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
&\{\tilde{U}(x)\}_n = \{U(x), U^{(1)}(x), U^{(2)}(x)\}_n^T\\
&\{\tilde{V}(x)\}_n = \{V(x), V^{(1)}(x), V^{(2)}(x)\}_n^T\\
&\{\tilde{W}(x)\}_n =\\
&\{W(x), W^{(1)}(x), W^{(2)}(x), W^{(4)}(x)\}_n^T
\end{aligned}
\tag{19}
$$

که در آن، بالانویس داخل پرانتز (k) به معنی مشتق مرتبه‌ی k اُم است و به‌عنوان مثال $U^{(2)}(x)=U_{,xx}(x)$ است. با استفاده از روابط ۱۸ و ۱۹، معادله‌های حاکم را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۲۰ نوشت:

$$
[R]_n\{X\}_n = -(1+\mu\frac{n^2}{R^2}-\mu\partial_x^2)\begin{Bmatrix}0\\0\\Q_n\end{Bmatrix} \tag{20}
$$

که در آن، ماتریس [R] ماتریس ضرایب با ابعاد ۱۰×۳ است و به‌طورمثال، بعضی مؤلفه‌های آن به‌صورت رابطه‌ی ۲۱ تعریف می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&R_{1,1} = -n^2K(\frac{1-\nu}{2R^2}),\ R_{1,3} = K,\\
&R_{1,5} = -nK(\frac{1+\nu}{2R}),\ R_{1,8} = (\frac{\nu K}{R}),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

در نوشتار حاضر، برای حل معادله‌های حاکم از روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی استفاده شده است. لذا برای گسسته‌سازی معادله‌های حاکم، تعداد N گره در امتداد طولی استوانه در نظر گرفته شده است، به‌طوری که گره‌ی i اُم در نقطه‌ی x_i قرار بگیرد. مقادیر گره‌ای برای گره‌ی i اُم در نقطه‌ی x_i به‌ترتیب با $U_i=U(x_i)$، $V_i=V(x_i)$ و $W_i=W(x_i)$ نشان داده می‌شود. با استفاده از روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی، مشتق مرتبه‌ی k از یک تابع مثلاً U(x)، V(x)، و W(x) در نقطه‌ی x_i را می‌توان به‌صورت گسسته بر حسب مقادیر گره‌ای به‌صورت ماتریسی (مطابق رابطه‌ی ۲۲) نوشت.[۳۳]

$$
U_n^{(k)}(x_i) = \sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{(k)} U_n(x_j) = \{C\}_i^{(k)}\{U\}_n
$$

$$
\begin{aligned}
V_n^{(k)}(x_i) &= \sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{(k)} V_n(x_j) = \{C\}_i^{(k)}\{V\}_n\\
W_n^{(k)}(x_i) &= \sum_{j=1}^{N} C_{ij}^{(k)} W_n(x_j) = \{C\}_i^{(k)}\{W\}_n
\end{aligned}
\tag{22}
$$

که در آن، ماتریس‌های $\{U\}_n$، $\{V\}_n$، و $\{W\}_n$ ماتریس‌های ستونی شامل مقادیر گره‌ای هستند و $\{C\}_i^{(k)}$ ماتریس ضرایب مربوط به مشتق مرتبه‌ی k اُم در روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی است، که با روش‌های ارائه‌شده در روش مذکور قابل استخراج است.[۳۳] به‌طور مثال، $\{U\}_n$ ماتریس مقادیر گره‌ای در جمله‌ی n اُم سری فوریه است و به‌صورت رابطه‌ی ۲۳ تعریف می‌شود.

$$
\{U\}_n = \{U_1, U_2, U_3, ..., U_N\}_n^T \tag{23}
$$

سپس ماتریس ستونی $\{d\}_n$ شامل تمام مقادیر گره‌ای یک ماتریس ۳N×۱ است، که به‌صورت رابطه‌ی ۲۴ تعریف می‌شود.

$$
\{d\}_n = \{\{U\}_n^T, \{V\}_n^T, \{W\}_n^T\}^T \tag{24}
$$

آنگاه با استفاده از گسسته‌سازی به روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی که در رابطه‌ی ۲۲ آمده است، می‌توان ماتریس $\{X\}$ را که در رابطه‌ی۱۸ تعریف شده است، در نقطه‌ی x_i به‌صورت ضریبی از مقادیر گره‌ای مانند رابطه‌ی ۲۵ نوشت.

$$
\{X(x_i)\}_n = [G_i]\{d\}_n \tag{25}
$$

حال با استفاده از معادله‌های ۱۴، ۱۹، و ۲۰، معادله‌ی حاکم در نقطه‌ی x_i به‌صورت رابطه‌ی ۲۶ گسسته می‌شود.

$$
[k_i]_n\{d\}_n = \{0, 0, Q_n(x_i)\}^T \tag{26}
$$

که در آن، $[k_i]_{۳\times ۳N} = ([R]_{۳\times ۱۰})([G_i]_{۱۰\times ۳N})$ است. با اعمال معادله‌ی ۲۶ برای تمامی N گره در طول نانولوله، دستگاه ۳N معادله با ۳N مجهول مانند رابطه‌ی ۲۷ به‌دست می‌آید.

$$
[K]_n\{d\}_n = \{F\}_n \tag{27}
$$

که در آن، ماتریس $\{F\}_n$ به‌صورت رابطه‌ی ۲۸ تعریف می‌شود:

$$
\{F\}_n = \left\{\{0\}^T, \{0\}^T, \{Q_n(x_i)\}^T\right\}^T \tag{28}
$$

که در آن، $\{۰\} = \{۰, ۰, ۰, \ldots, ۰\}_{۱\times N}$ یک ماتریس سطری صفر با N ستون است و همچنین $\{Q_n(x_i)\}$ مطابق رابطه‌ی ۲۹ به‌دست می‌آید:

$$
\{Q_n(x_i)\} = \{Q_n(x_1), Q_n(x_2), ..., Q_n(x_N)\}^T \tag{29}
$$

سپس با حل معادله‌ی ۲۷، مقدار $\{d\}_n$ که مربوط به n اُمین جمله از سری فوریه است، با تکرار فرایند مقادیر گره‌ای از سری فوریه (مطابق رابطه‌ی ۱۳) به‌دست می‌آید.

۳. نتایج عددی

نتایج عددی مربوط به بررسی تغییرشکل و جابجایی نانولوله‌ها تحت بارهای خارجی در بخش حاضر ارائه شده است. برای نانولوله‌های کربنی، مقادیر نسبتاً متفاوتی برای ضخامت و مدول الاستیسیته در منابع مختلف گزارش شده است، اما صلبیت کششی جداره C=Eh و صلبیت خمشی جداره‌ی کربنی $D = Eh^۳/\left(۱۲(1-\nu^۲)\right)$ به‌عنوان کمیت‌های ثابتی برای نانولوله‌ها در نظر گرفته می‌شوند، که با مقادیر مربوط به گرافن بسیار نزدیک هستند. در پژوهش حاضر، مقادیر کمیت‌های مذکور به‌ترتیب C=۳۶۰ N/m و D= ۰/۸۵ eV و ضریب پواسون ν= ۰/۱۹ انتخاب شده است.[۳۴] نتایج عددی برای نانولوله‌ی کربنی دسته‌صندلی با عدد چیرال (۳۵,۳۵)، که دارای قطر D= ۴/۷۴ nm است، ارائه شده است؛ مگر در مواردی که به‌طور مشخص بیان شده باشد.

از آنجا که در منابع پیشین عمدتاً از تئوری تیرها برای مدل‌سازی رفتار نانولوله‌ها استفاده شده است، در پژوهش حاضر، به‌منظور درک اهمیت استفاده از تئوری پوسته در محاسبه‌ی تغییرشکل نانولوله‌ها، خیز نانولوله به‌صورتی بی‌بُعد تعریف شده است، تا تفاوت یا تطابق پیش‌بینی‌های تئوری پوسته با پیش‌بینی‌های مدل تیر اویلر- برنولی آشکار شود. برای این منظور، خیز بیشینه‌ی تیر اویلر- برنولی با شرایط مرزی دو سر ساده و بدون درنظرگرفتن اثر اندازه (μ=۰) به‌عنوان معیار انتخاب شده است. به‌صورتی که خیز حاصل از تئوری پوسته بر بیشینه‌ی خیز به‌دست‌آمده از تئوری اویلر- برنولی تقسیم و نسبت به‌عنوان خیز بی‌بُعد معرفی شده است. خیز بیشینه‌ی تیر اویلر- برنولی با الاستیسیته‌ی موضعی با شرایط مرزی دو سر ساده برای بارگذاری با توزیع سینوسی در راستای طول $q(x)=q.\sin(\pi x/L)$ به‌صورت رابطه‌ی ۳۰ است.

$$w_{EB}=\frac{1}{\pi^4}\frac{q_0L^4}{EI}=\frac{1}{2\pi^3}\frac{PL^3}{EI}, \qquad (30)$$

که در آن، $P=2q.\ L/\pi$ برابر با کل بار واردشده به تیر در راستای خیز از طرف بار گسترده‌ی خارجی سینوسی است. بر این اساس، خیز بی‌بُعد نانولوله به‌صورت رابطه‌ی ۳۱ تعریف می‌شود:

$$w^*=\frac{w}{w_{EB}}=\frac{2\pi^3EI}{PL^3}w \qquad (31)$$

با تعریف اخیر خیز بی‌بُعد، هر چه مقدار خیز بی‌بُعد در وسط نانولوله با شرایط مرزی دو سر ساده (S-S) و برای حالت μ=۰ به عدد ۱ نزدیک‌تر باشد، نشان می‌دهد انطباق بیشتری بین پیش‌بینی‌های تئوری پوسته و تئوری تیر اویلر- برنولی در تخمین خیز وجود دارد. در مقابل، فاصله‌گرفتن نسبت اخیر از عدد ۱، نشانگر کاهش انطباق تئوری پوسته با تئوری تیر اویلر- برنولی در پیش‌بینی خیز نانولوله‌هاست و نشان می‌دهد که در آن شرایط، استفاده از تئوری تیر اویلر- برنولی خطای بیشتری در پیش‌بینی نانولوله دارد.

شایان ذکر است که براساس تئوری تیر اویلر- برنولی براساس تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی، معادله‌ی حاکم بر نانولوله در حالت استاتیکی به‌صورت رابطه‌ی ۳۲ است.[۷]

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)=q(x)-\mu q_{,xx}(x) \qquad (32)$$

که اگر بار وارده با توزیع سینوسی به‌صورت $q(x)=q.\sin(\pi x/L)$ در نظر گرفته شود ،آنگاه برای تیر دو سر تکیه‌گاه ساده، مقدار خیز به‌صورت رابطه‌ی ۳۳ به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} w&=\frac{q_0L^4}{\pi^4EI}\left(1+\mu\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\\ &=\frac{PL^3}{2\pi^3EI}\left(1+\mu\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\end{aligned} \qquad (33)$$

و برای تیر با شرایط مرزی دو سرگیردار مقدار خیز به‌صورت رابطه‌ی ۳۴ به‌دست می‌آید.

$$w=\frac{PL^3}{2\pi^3EI}\left(1+\mu\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right)\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\pi\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2-\frac{x}{L}\right)\right) \qquad (34)$$

و لذا خیز بیشینه‌ی بی‌بُعد برای آن در x=L/۲ به‌صورت رابطه‌ی ۳۵ است.

$$\begin{aligned} w^*_{EB}&=\left(1+\mu\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right), && S-S\\ w^*_{EB}&=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\mu\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right), && C-C\end{aligned} \qquad (35)$$

ملاحظه می‌شود که تأثیر شرط مرزی دو سرگیردار نسبت به شرایط مرزی دو سر ساده برای بیشینه‌ی خیز در تئوری تیر اویلر- برنولی برابر ضریب (۱-π/۴=۰/۲۱۵) است. شایان ذکر است که تئوری تیر اویلر-برنولی از اثر کرنش برشی در تیر صرف‌نظر می‌کند و لذا، نتایج تئوری تیر اویلر- برنولی برای تیرهای نازک با نسبت طول به ضخامت بزرگ (L/h>۲۰) قابل‌قبول است، ولی خطای پیش‌بینی تئوری مذکور برای L/h کوچک افزایش می‌یابد.

این تذکر لازم است که بار وارده بر نانولوله بستگی به کاربرد خاص آن دارد و برای هر کاربرد باید بار وارده مشخص شود. باید توجه شود که برای حل مسئله‌ی بارگذاری اعمال‌شده باید نسبت به راستای محیطی (مختصه‌ی θ) بسط فوریه داده شود. در ادامه، در نوشتار حاضر، نتایج عددی برای خیز نانولوله برای دو نوع بارگذاری ارائه شده است. در بارگذاری نوع اول نیمه‌ی پایین نانولوله (π/۲ >θ> -π/۲) تحت بارگذاری قرار دارد و نیمه‌ی بالایی تحت بار قرار ندارد، که در رابطه‌ی ۳۶ آمده است. این بارگذاری برای حالتی که نانولوله مثلاً به‌عنوان حسگر استفاده می‌شود و از یک طرف تحت بار قرار دارد، قابل فرض است. این بارگذاری باید در راستای محیطی بسط فوریه داده شود. بارگذاری نوع دوم نیز در رابطه‌ی ۳۹ ارائه شده است، که در راستاهای محیطی و طولی، توزیع مثلثاتی دارد و نیازی به بسط فوریه ندارد. بارگذاری اخیر به‌عنوان یک بارگذاری معیار انتخاب شده است.

۳. ۱. بارگذاری نوع اول

در این حالت فرض شده است که بار شعاعی فقط به نیمه‌ی پایین نانولوله (π/۲ >θ> -π/۲) وارد می‌شود و توزیع بار نسبت به طول نانولوله، توزیع سینوسی دارد. بارگذاری نوع اول، به صورت رابطه‌ی ۳۶ در نظر گرفته شده است:

$$q=\begin{cases} q_0\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\theta, & -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \theta<-\frac{\pi}{2}\ or\ \frac{\pi}{2}<\theta\end{cases} \qquad (36)$$

شکل شماتیک از محورهای مختصات کارتزین انتخاب‌شده به نانولوله، که محور X منطبق بر محور نانولوله است، مبدأ اندازه‌گیری زاویه‌ی θ و همچنین بار وارده بر مقطعی از نانولوله در بارگذاری نوع اول طبق رابطه‌ی ۳۶، در شکل۲ مشاهده می‌شود:

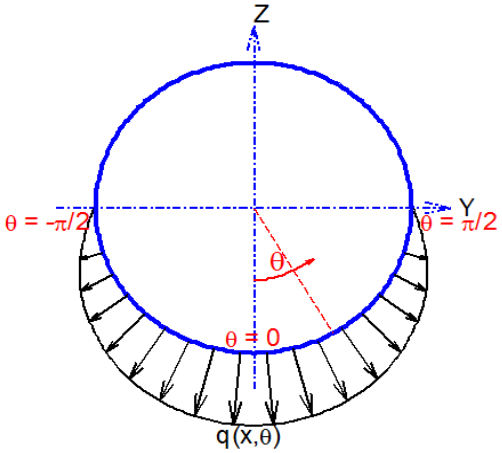

Fig. 2. Cartesian coordinate axes for the nanotube and the origin of the theta angle (θ=0 coincides with the negative Z-axis direction).

شکل ۲. محورهای مختصات کارتزین انتخاب‌شده برای نانولوله و مبدأ زاویه‌ی θ، (θ=۰ منطبق بر راستای منفی محور Z).

واضح است که در این حالت، نیروی وارد بر نانولوله در راستای Y برابر صفر است و مقدار کل بار وارده بر نانولوله در راستای Z مطابق رابطه‌ی ۳۷ محاسبه می‌شود:

$$P = q_0 LR \tag{37}$$

در این حالت برای حل مسئله، بارگذاری رابطه‌ی ۳۶ نسبت به مختصه‌ی θ بسط فوریه‌ی مثلثاتی کسینوسی داده شده و حل براساس سری فوریه صورت گرفته است. در ابتدا، همگرایی حل بر حسب تعداد جملات استفاده‌شده در سری فوریه، که با M نشان داده شده است، برای شرایط مرزی مختلف برای دو مقدار پارامتر غیرموضعی μ= ۰ و μ=۲ nm^2 در جدول ۱ ارائه شده است؛ که مطابق آن، با افزایش جملات سری فوریه تا ۷ جمله، (M=۷)، همگرایی نتایج عددی برای خیز نانولوله تا ۴ رقم اعشار حاصل شده است.

ابتدا مقدار خیز در نقطه‌ی (θ=۰ و x=L/۲) برای نانولوله در جدول‌های ۲ و ۳ برای شرط مرزی دو سر ساده و دو سر گیردار ارائه شده و پیش‌بینی تئوری تیر از رابطه‌ی ۳۵ با پیش‌بینی تئوری پوسته مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که برای L/R بزرگ در تئوری موضعی θ= ۰، پیش‌بینی مدل تیر و تئوری پوسته بسیار به همدیگر نزدیک است؛ ولی با درنظرگرفتن تئوری غیرموضعی (θ≠۰) پیش‌بینی تئوری پوسته و تئوری تیر اویلر- برنولی تفاوت قابل‌توجهی با هم دارند، که نشان می‌دهد پیش‌بینی تئوری تیر نمی‌تواند برای بررسی خیز حتی در نانولوله‌ی بلند هم معتبر باشد. علت پدیده‌ی اخیر آن است که با افزایش طول، اثر اندازه در راستای طول به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابد و اختلاف پیش‌بینی تئوری تیر و پوسته بیشتر ناشی از اثر اندازه در راستای محیطی است، که باعث افزایش حدود ۳۰ درصدی خیز در پیش‌بینی تئوری

جدول ۱. همگرایی نتایج برای خیز نانولوله در (x=L/۲) و در سطح پایین (θ=۰) و سطح بالا (θ=π) برای (L/R=۳۰).

Table 1. Convergence of results for the deflection of nanotube at (x=L/2) on Bottom (θ=0) and top (θ=π) on nanotube (L/R=30).

M	SS		CC		SC	
	μ=0	μ=2	μ=0	μ=2	μ=0	μ=2
1	-1.0550 1.0552	-1.4353 1.4355	-0.2465 0.2467	-0.3353 0.3355	-0.3860 0.3862	-0.5252 0.5253
2	-0.9691 1.1411	-1.2265 1.6443	-0.1604 0.3328	-0.1260 0.5449	-0.3000 0.4722	-0.3161 0.7345
3	-0.9691 1.1411	-1.2265 1.6443	-0.1604 0.3328	-0.1260 0.5449	-0.3000 0.4722	-0.3161 0.7345
4	-0.9698 1.1404	-1.2312 1.6396	-0.1611 0.3321	-0.1307 0.5402	-0.3007 0.4716	-0.3208 0.7298
5	-0.9698 1.1404	-1.2312 1.6396	-0.1611 0.3321	-0.1307 0.5402	-0.3007 0.4716	-0.3208 0.7298
6	-0.9698 1.1404	-1.2305 1.6404	-0.1610 0.3321	-0.1300 0.5409	-0.3006 0.4716	-0.3201 0.7305
7	-0.9698 1.1404	-1.2305 1.6404	-0.1610 0.3321	-0.1300 0.5409	-0.3006 0.4716	-0.3201 0.7305

جدول ۲. مقایسه‌ی پیش‌بینی تئوری پوسته و تئوری تیر برای خیز نانولوله‌ی کربنی دو سر ساده در (θ=۰ و x=L/۲) بارگذاری نوع اول.

Table 2. Comparison of shell and beam theory predictions for deflection of a simply-supported carbon nanotube at (x=L/2, θ=0) under Type I loading, E-B: Euler-Bernoulli.

μ	L/R=50		L/R=80	
	E-B beam	Shell theory	E-B beam	Shell theory
0	1.0000	1.0427	1.0000	1.0069
0.5	1.0004	1.1386	1.0001	1.0969
1	1.0007	1.2345	1.0003	1.1870
1.5	1.0011	1.3306	1.0004	1.2770
2	1.0014	1.4267	1.0005	1.3671
2.5	1.0018	1.5228	1.0007	1.4572
3	1.0021	1.6190	1.0008	1.4573

جدول ۳. مقایسه‌ی پیش‌بینی تئوری پوسته و تئوری تیر برای خیز نانولوله‌ی کربنی دوسر گیردار در (x=L/۲ و θ=۰) بارگذاری نوع اول.

Table 3. Comparison of shell theory and beam theory predictions for the deflection of a clamped-clamped carbon nanotube at (x=L/2, θ=0) under loading Type I.

μ	L/R=50		L/R=80		L/R=100	
	E-B beam	Shell theory	E-B beam	Shell theory	E-B beam	Shell theory
0	0.2146	0.2408	0.2146	0.2246	0.2146	0.2212
0.5	0.2147	0.2652	0.2146	0.2450	0.2146	0.2411
1	0.2148	0.2896	0.2147	0.2654	0.2146	0.2609
1.5	0.2148	0.3140	0.2147	0.2858	0.2147	0.2808
2	0.2149	0.3385	0.2147	0.3063	0.2147	0.3006
2.5	0.2150	0.3629	0.2147	0.3267	0.2147	0.3205
3	0.2151	0.3874	0.2148	0.3472	0.2147	0.3404

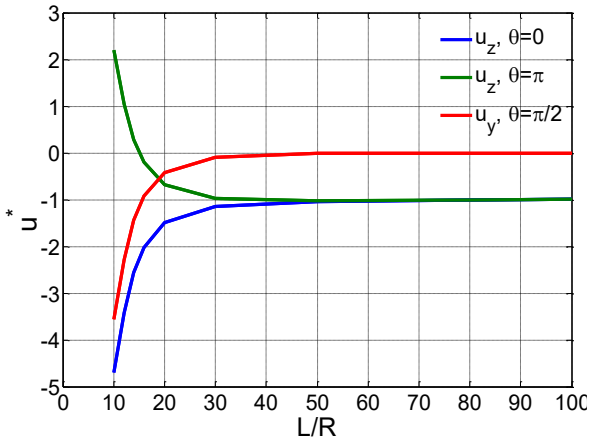

Fig. 5. Displacement at the midpoint of the nanotube (x=L/2) at θ=0, θ=π/2 and θ=π versus L/R variations for Simply-supported boundary conditions (μ=0).

شکل ۵. جابجایی در وسط نانولوله (x=L/۲) در θ=۰ و θ=π/۲ و θ=π با تغییرات L/R برای شرایط مرزی دوسرساده (μ=۰).

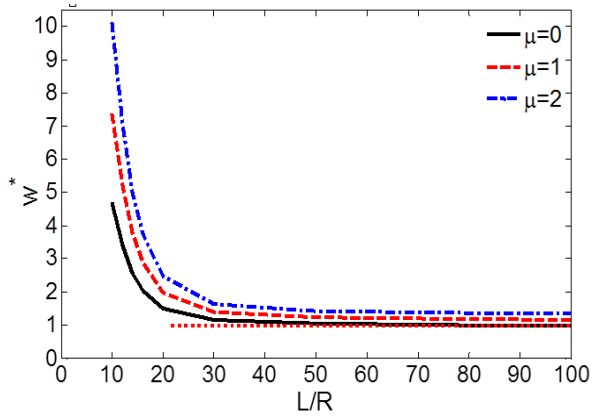

Fig. 3 Variations in deflection at the midpoint (x=L/2) of a simply-supported nanotube at θ=0 versus L/R variations for different values of the nonlocal parameter.

شکل ۳.تغییرات خیز در وسط نانولوله (x=L/۲) دو سرساده در θ=۰ نسبت به تغییرات L/R برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی.

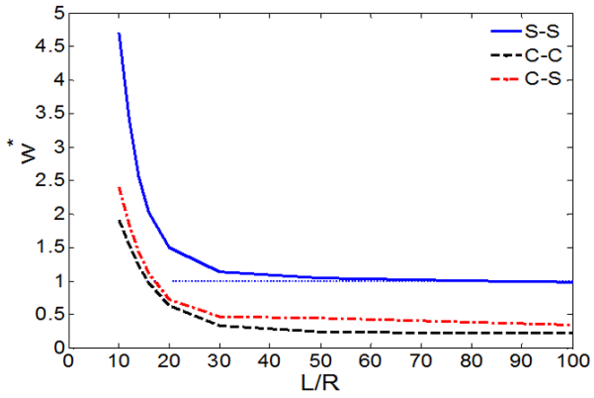

Fig. 4. Variations in deflection at the midpoint of a nanotube (x=L/2) at θ=0 versus L/R variations for different boundary conditions (μ=0).

شکل ۴. تغییرات خیز در وسط نانولوله (x=L/۲) در θ=۰ نسبت به

شکل ۳ مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، برای μ=۰ (خط پر مشکی)، با افزایش نسبت L/R، پیش‌بینی تئوری پوسته برای خیز بی‌بُعد به‌طورکامل به عدد ۱ همگرا شده است. این موضوع نشان می‌دهد که برای μ= ۰ با افزایش نسبت L/R، پیش‌بینی تئوری پوسته کاملاً به پیش‌بینی تئوری تیر (w^*=۱) نزدیک و بر آن منطبق می‌شود. با این حال، برای مقادیر کوچک‌تر L/R، پیش‌بینی تئوری پوسته به‌طور قابل‌توجهی بزرگ‌تر از پیش‌بینی تئوری تیر اویلر- برنولی است. شایان ذکر است که مدل تیر- اویلر برنولی، کرنش برشی در تیر را نادیده می‌گیرد و لذا پیش‌بینی مدل تیر اویلر- برنولی برای تیرهای نازک (L/h>۲۰) دقت کافی دارد و برای مقادیر طول به ضخامت کوچک، نتایج تئوری تیر اویلر- برنولی اعتبار کافی ندارد، که در شکل‌های ۳ و ۴ نیز مشاهده می‌شود، و پیش‌بینی مدل پوسته اختلاف قابل‌توجهی با مقدار w^*=۱ دارد. همچنین اثر پارامتر غیرموضعی در خیز نانولوله در شکل ۳ مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، با افزایش L/R، مقدار خیز بی‌بُعد، مجانب افقی دارد و به نسبت L/R وابسته نیست. تغییرات خیز بی‌بُعد نانولوله نسبت به تغییرات L/R برای سه شرایط مرزی مختلف دو سر ساده (S-S)، گیردار- ساده (C-S)، و دو سر گیردار (C-C) در شکل۴ نمایش داده شده است. اثر شرایط مرزی نانولوله در مقدار خیز تیر در نمودار مذکور مشاهده می‌شود. خیز نانولوله برای شرایط مرزی دو سر ساده، بزرگ‌ترین مقدار و برای دو سر گیردار، کمترین مقدار را دارد و برای شرط مرزی گیردار- ساده، بین دو حالت دو سر ساده و دو سر گیردار است.

پوسته نسبت به پیش‌بینی تئوری تیر اویلر- برنولی می‌شود. بدیهی است که تئوری تیر، اثر اندازه‌ی کوپک را در راستای محیطی نادیده می‌گیرد و لذا در مدل تیر با افزایش طول نانولوله، اثر اندازه کاملاً حذف می‌شود.

نمودارهای اثر نسبت طول به شعاع (L/R) نانولوله بر خیز آن، در شکل‌های ۳ الی ۵ مشاهده می‌شوند. همچنین، مقدار خیز بی‌بُعد نانولوله (w^*) در x=L/۲ و در نقطه‌ی θ=۰ (محل بیشینه‌ی بار خارجی) برای مقادیر مختلف L/R در

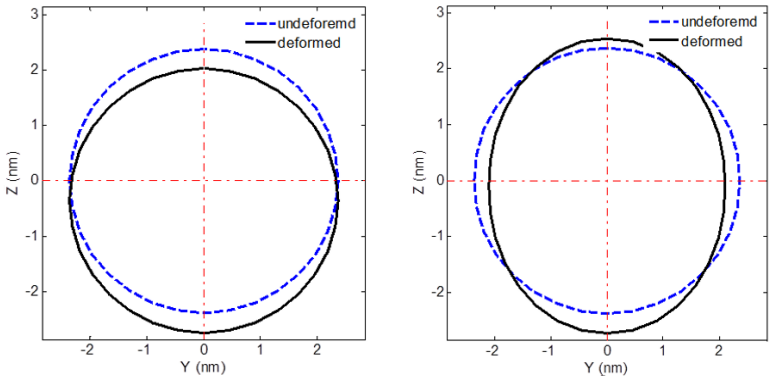

Fig. 6. Undeformed and deformed cross-section of the nanotube under loading type I.

شکل ۶. مقطع اولیه و تغییریافته‌ی نانولوله در اثر بارگذاری نوع اول.

همچنین مقدار خیز (جابجایی) نانولوله در (x=L/۲) در موقعیت‌های مختلف θ= ۰، θ=π/۲، و θ=π و برای مقادیر مختلف نسبت L/R در نانولوله دو سر ساده (S-S) در شکل۵ مشاهده می‌شوند. نتایج نشان می‌دهند که خیز u_z در دو نقطه‌ی مقابل هم (θ=۰ و θ=π/۲) برای مقادیر بزرگ L/R بسیار به یکدیگر نزدیک است، به‌طوری که جابجایی دو نقطه‌ی اخیر تقریباً برابر است. اما برای مقادیر کوچک‌تر L/R، جابجایی دو نقطه‌ی مذکور نه فقط برابر نیست، بلکه علامت آن‌ها نیز با یکدیگر متفاوت است.

همچنین با افزایش نسبت L/R مشاهده می‌شود که مقدار جابجایی نانولوله در راستای محور Y (u_Y) به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین برای مقادیر بزرگ L/R، قطر نانولوله در راستاهای Y و Z تغییری نکرده و مقطع نانولوله تقریباً دایره‌ای باقی مانده است. برای مقادیر کوچک‌تر L/R، جابجایی دو نقطه‌ی مقابل در پایین و بالای نانولوله (θ=۰ و θ=π) نه فقط برابر نیست، بلکه مشاهده می‌شود علامت آن‌ها نیز متفاوت است. علاوه‌بر این، مقدار منفی u_Y برای مقادیر کوچک L/R نیز نشان می‌دهد که برای مقادیر کوچک L/R قطر نانولوله در راستای Y کاهش و در راستای Z افزایش یافته است، که بیانگر خروج مقطع نانولوله از حالت دایره‌ای است.

شکل شماتیک از مقطع نانولوله با شرایط مرزی دو سر ساده، قبل و بعد از تغییرشکل نانولوله در اثر بارگذاری نوع اول در شکل ۶ مشاهده می‌شود. شکل تغییریافته‌ی مقطع نانولوله بزرگ‌نمایی شده و ضریب بزرگ‌نمایی برای دو شکل یکسان نبوده است. مشاهده می‌شود که برای L/R= ۵۰ مقطع نانولوله تقریباً دایره مانده و تغییر شکل نداده است و تقریباً به‌صورت صلب به سمت پایین حرکت کرده است. ولی برای مقدار L/R= ۱۰، مقطع نانولوله کاملاً تغییرشکل داده و حتی قسمت بالای آن در خلاف جهت بارگذاری حرکت کرده است.

همچنین نسبت خیز غیرموضعی به خیز موضعی (R=w/$w_{\mu=.}$) در نقطه‌ی (θ=۰ و x=L/۲) برای مقادیر مختلف e.a و شرایط مرزی مختلف در شکل ۷ مشاهده می‌شود. با تغییر پارامتر غیرموضعی از ۰ تا e.a=۱/۵Nm مقدار خیز تا حدود ۴۵٪ افزایش یافته است.

برای بررسی اثر بستر در رفتار نانولوله، نمودارهای اثر سفتی بستر وینکلر و سفتی بستر پاسترناک در خیز نانولوله برای شرایط مرزی مختلف در شکل‌های ۸ و ۹ بررسی شده‌اند. در نمودارهای مذکور، بارگذاری نانولوله مانند رابطه‌ی ۳۶ است. ضریب بستر وینکلر و بستر پاسترناک بی‌بُعد به‌صورت رابطه‌ی ۳۸ تعریف شده است.

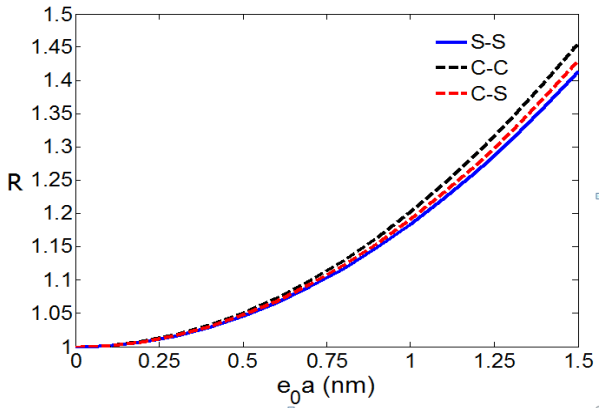

Fig. 7. Displacement ratio for different values of the nonlocal parameter e_0a under various boundary conditions (L/R=50).

شکل ۷. نسبت جابجایی برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی e_0a در شرایط مرزی مختلف (L/R= ۵۰).

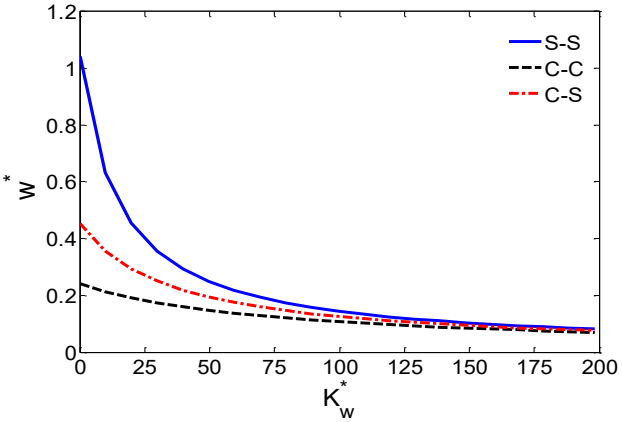

Fig.8 Dimensionless deflection of the nanotube at (x=L/2, θ=0) versus the dimensionless Winkler parameter (L/R=50).

شکل ۸. خیز بی‌بُعد نانولوله در (θ=۰ و x=L/۲) بر حسب ضریب سفتی بی‌بعد وینکلر (L/R=۵۰).

$$K_w = \frac{k_w L^5}{100EI},\quad K_P = \frac{k_P L^3}{EI} \qquad (38)$$

مشاهده می‌شود با افزایش ضریب بستر، نقش شرایط مرزی نانولوله در خیز نانولوله کاهش یافته است.

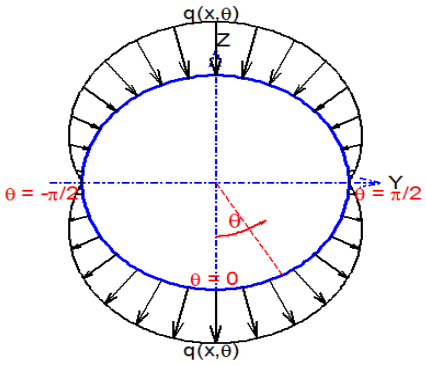

Fig. 10. Schematic diagram of loading on the nanotube (Type II).

شکل ۱۰. شکل شماتیک بارگذاری نوع دوم بر روی نانولوله.

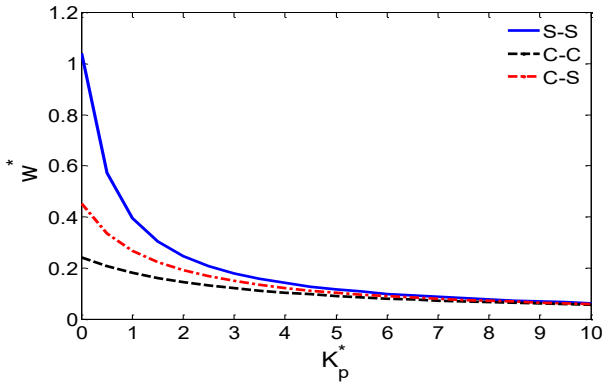

Fig.9 Dimensionless deflection of nanotube at (x=L/2, θ=0) versus the dimensionless Pasternak parameter (L/R=50).

شکل ۹. خیز بی‌بُعد نانولوله در (x=L/۲ و θ=۰) بر حسب ضریب سفتی بی‌بعد پاسترناک (L/R=۵۰).

۳. ۲. بارگذاری نوع دوم

در حالت بارگذاری نوع دوم، بار شعاعی وارده بر نانولوله، یک بارگذاری نمونه انتخاب شده است، تا امکان مقایسه‌ی نتایج عددی توسط سایر پژوهشگران با روش ارائه‌شده در نوشتار حاضر امکان‌پذیر باشد. در حالت بارگذاری نوع دوم، بار شعاعی در راستای طول و در راستای محیطی نانولوله به‌صورت مثلثاتی در نظر گرفته شده است (رابطه‌ی ۳۹):

$$q(x,\theta) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{L})\cos(n\theta) \qquad (39)$$

حل بارگذاری نوع دوم، نیاز به بسط فوریه برای مختصه‌ی θ ندارد. شکل شماتیکی از توزیع نیروی شعاعی در بارگذاری نوع دوم برای n= ۱ در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود.

مقدار نیروی خالص جانبی بار خارجی اخیر بر نانولوله در راستای محور Y برابر با صفر و نیروی خالص وارده در راستای محور Z مطابق رابطه‌ی ۴۰ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} q(x,\theta)\cos\theta R\, d\theta = \\ &= \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} q_0 \sin(\pi x / L)\cos(n\theta)\cos(\theta) R\, d\theta \\ &= \begin{cases} \dfrac{2q_0}{\pi}(\pi L R) & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases} \end{aligned} \qquad (40)$$

مشاهده می‌شود که برای n= ۱، مقدار نیروی خالص جانبی وارد بر نانولوله مخالف صفر است. بنابراین، در این حالت، تغییرشکل خمشی در نانولوله ایجاد و مرکز نانولوله دچار جابجایی می‌شود. اما برای حالت n≠۱، نیروی خالص جانبی بار خارجی واردشده در هر مقطع از نانولوله برابر صفر است. در این حالت، مرکز جرم نانولوله در اثر نیروهای وارده جابجا نمی‌شود و فقط جداره‌ی نانولوله در هر مقطع تغییرشکل می‌دهد، در حالی که مرکز هر مقطع بدون جابجایی باقی می‌ملند. در ادامه، نتایج عددی برای n=۱ ارائه شده است.

مقدار خیز بی‌بُعد نانولوله در راستای Z (جابجایی شعاعی) در وسط نانولوله (x=L/۲) در نقطه‌ی بالایی نانولوله (θ=π) و پایینی نانولوله (θ=۰) برای مقادیر مختلف L/R و پارامتر غیرموضعی در جدول‌های ۴ الی ۶ برای سه شرط مرزی ارائه شده است. در جدول۴ مشاهده می‌شود که برای شرایط مرزی دو سر ساده در حالت μ= ۰، برای تمام مقادیر L/R، خیز بی‌بُعد پیش‌بینی‌شده با تئوری پوسته، بزرگ‌تر از عدد ۱ است و همان‌گونه که انتظار می‌رفت، با افزایش نسبت طول به شعاع در حالت μ= ۰، مقدار خیز بی‌بُعد به عدد ۱ نزدیک‌تر شده است. این موضوع نشان می‌دهد که برای نانولوله‌هایی با نسبت طول به شعاع بزرگ، پیش‌بینی تئوری پوسته با تئوری تیر در حالت μ=۰ انطباق بسیار بالایی دارد. برای نسبت‌های طول به شعاع کوچک (به‌عنوان مثال L/R= ۵)، پیش‌بینی تئوری پوسته بیش از ۲ برابر پیش‌بینی مدل تیر در شرایط بارگذاری مشابه است. همچنین اثر پارامتر اندازه در پیش‌بینی تئوری در جدول ۴ مشخص است. مشاهده می‌شود که برای L/R= ۵، با افزایش

جدول ۴. خیز بی‌بُعد نانولوله در وسط آن (x=L/۲) و در سطح پایین (θ=۰) و سطح بالا (θ=π) نانولوله با شرط مرزی دو سر ساده.

Table 4. Dimensionless deflection of the nanotube at its midpoint (x=L/2) on the bottom (θ=0) and top (θ=π) of nanotube with simply-supported boundary condition.

μ (nm²)	θ	L/R=5	L/R=10	L/R=20	L/R=50	L/R=80
0	0	-2.0179	-1.2517	-1.0869	-1.0315	-1.0052
	π	2.0179	1.2517	1.0869	1.0315	1.0052
0.5	0	-2.2740	-1.3747	-1.1860	-1.1234	-1.0946
	π	2.2740	1.3747	1.1860	1.1234	1.0946
1	0	-2.5428	-1.4998	-1.2855	-1.2155	-1.1841
	π	2.5428	1.4998	1.2855	1.2155	1.1841
0.5	0	-2.8241	-1.6267	-1.3855	-1.3076	-1.2735
	π	2.8241	1.6267	1.3855	1.3076	1.2735
2	0	-3.1180	-1.7557	-1.4858	-1.3998	-1.3630
	π	3.1180	1.7557	1.4858	1.3998	1.3630

جدول ۵. خیز بی‌بُعد نانولوله در وسط آن (x=L/۲) و در سطح پایین (θ=۰) و سطح بالا (θ=π) نانولوله با شرط مرزی گیردار- گیردار.

Table 5. Dimensionless deflection of the nanotube at its midpoint (x=L/2) on the bottom (θ=0) and top (θ=π) of the nanotube with clamped-clamped boundary condition.

μ (nm²)	θ	L/R=5	L/R=10	L/R=20	L/R=50	L/R=80
0	0	-1.3057	-0.4629	-0.2794	-0.2296	-0.2229
	π	1.3057	0.4629	0.2794	0.2296	0.2229
0.5	0	-1.4715	-0.5084	-0.3049	-0.2500	-0.2427
	π	1.4715	0.5084	0.3049	0.2500	0.2427
1	0	-1.6454	-0.5546	-0.3305	-0.2705	-0.2625
	π	1.6454	0.5546	0.3305	0.2705	0.2625
1.5	0	-1.8274	-0.6016	-0.3562	-0.2910	-0.2823
	π	1.8274	0.6016	0.3562	0.2910	0.2823
2	0	-2.0175	-0.6493	-0.3820	-0.3115	-0.3022
	π	2.0175	0.6493	0.3820	0.3115	0.3022

جدول ۶. خیز بی‌بعد نانولوله در وسط آن (x=L/۲) و در سطح پایین (θ=۰) و سطح بالا (θ=π) نانولوله با شرط مرزی گیردار- ساده.

Table 6. Dimensionless deflection of the nanotube at its midpoint (x=L/2) on the bottom (θ=0) and top (θ=π) of the nanotube with clamped-simply supported boundary condition.

μ (nm²)	θ	L/R=5	L/R=10	L/R=20	L/R=50	L/R=80
0	0	-2.6756	-0.5476	-0.3464	-0.4409	-0.3865
	π	2.6756	0.5476	0.3464	0.4409	0.3865
0.5	0	-3.0153	-0.6014	-0.3780	-0.4802	-0.4209
	π	3.0153	0.6014	0.3780	0.4802	0.4209
1	0	-3.3717	-0.6561	-0.4097	-0.5195	-0.4553
	π	3.3717	0.6561	0.4097	0.5195	0.4553
1.5	0	-3.7447	-0.7117	-0.4416	-0.5589	-0.4897
	π	3.7447	0.7117	0.4416	0.5589	0.4897
2	0	-4.1344	-0.7681	-0.4736	-0.5983	-0.5241
	π	4.1344	0.7681	0.4736	0.5983	0.5241

ضریب غیرموضعی از μ=۱ nm^2 به μ=۲ nm^2، مقدار خیز در پیش‌بینی تئوری غیرموضعی حدود ۵۰٪ افزایش یافته است. این افزایش برای نسبت L/R= ۸۰ حدود ۳۰٪ است. همچنین مقدار خیز در نقاط مشابه (θ=۰ و x=L/۲) و (θ=π و x=L/۲) برای شرایط مرزی گیردار- گیردار در جدول ۵ ارائه شده است. مشاهده می‌شود برای مقادیر بزرگ L/R، مقدار خیز در نانولوله‌ی گیردار- گیردار حدود ۲۲٪ مقدار خیز در نانولوله دو سر ساده است، که با مقدار موردانتظار از تئوری تیر اویلر- برنولی (۲۱/۵٪) تطابق دارد. اما برای L/R= ۵، نسبت خیز نانولوله‌ی دو سر گیردار به دو سر ساده حدود ۶۵٪ است، که نشان می‌دهد با کاهش نسبت L/R، تأثیر شرایط مرزی گیردار در کاهش خیز نانولوله کمتر شده است. مقدار خیز برای شرایط مرزی گیردار- ساده در جدول ۶ ارائه شده است.

۴. نتیجه‌گیری

در مطالعه‌ی حاضر، یک مدل مبتنی بر ترکیب تئوری پوسته‌های لاو و نظریه‌ی الاستیسیته‌ی غیرموضعی ارینگن برای تحلیل خمش نانولوله‌های کربنی تک جداره ارائه شده است. به‌منظور حل دقیق معادله‌های دیفرانسیل حاکم، از روش تعمیم‌یافته‌ی مربعات تفاضلی استفاده شده است، که ضمن دستیابی به دقت بالا با تعداد کم گره‌ها، توانایی بالایی در اعمال شرایط مرزی مختلف دارد.

نتایج عددی حاصل از مدل پیشنهادی نشان داده است که درنظرگرفتن آثار غیرموضعی منجر به افزایش قابل‌توجه در پیش‌بینی مقدار خیز نانولوله نسبت به حالتی که آثار غیرموضعی در نظر گرفته نشده است، می‌شود.

مقایسه‌ی بین نتایج مدل پوسته و مدل تیر برای پیش‌بینی خیز نانولوله نشان داده است که در غیاب اثر اندازه، دو مدل مذکور در نسبت‌های طول به شعاع بزرگ (L/R بزرگ) تطابق مناسبی دارند. اما با درنظرگرفتن اثر اندازه، حتی در نسبت‌های L/R بزرگ نیز تفاوت چشمگیری بین نتایج مدل تیر و مدل پوسته مشاهده می‌شود و نشان می‌دهد که مدل تیر به این علت که نمی‌تواند آثار تغییرات نسبت به محیط نانولوله را در مدل‌سازی در نظر بگیرد، نمی‌تواند به‌درستی رفتار واقعی خمشی نانولوله را پیش‌بینی کند. مسئله‌ی اخیر، لزوم استفاده از تئوری‌های دقیق‌تر، نظیر: تئوری لاو در ترکیب با تئوری الاستیسیته‌ی غیرموضعی برای مدل‌سازی نانولوله‌ها را به‌ویژه در مسائل مربوط به مدل‌سازی خیز نانولوله‌ها تأکید می‌کند.

References - منابع

1. Yakobson, B.I., Brabec, C.J. and Bernholc, J., 1996. Nanomechanics of carbon tubes: instabilities beyond linear response. *Physical Review Letters*, *76*(14), pp. 2511–2514. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.2511
2. Kulathunga, D.D.T.K., Ang, K.K. and Reddy, J.N., 2010. Molecular dynamics analysis on buckling of defective carbon nanotubes. *Journal of Physics: Condensed Matter*, *22*(34), p. 345301. DOI: https://doi.org/10.1088/0953-8984/22/34/345301
3. Kasti, N.A., 2007. Zigzag carbon nanotubes—molecular/structural mechanics and the finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, *44*(21), pp. 6914–6929. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.03.017
4. Chowdhury, R., Adhikari, S., Wang, C.Y. and Scarpa, F., 2010. A molecular mechanics approach for the vibration of single-walled carbon nanotubes. *Computational Materials Science*, *48*(4), pp. 730–735. DOI: https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.03.020
5. Eringen, A.C., 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, *54*(9), pp. 4703–4710. DOI: https://doi.org/10.1063/1.332803
6. Reddy, J.N., 2007. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, *45*(2–8), pp. 288–307. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.004
7. Reddy, J.N. and Pang, S.D., 2008. Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, *103*(2), p. 023511. DOI: https://doi.org/10.1063/1.2833431
8. Aydogdu, M., 2009. A general nonlocal beam theory: its application to nanobeam bending, buckling and vibration. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, *41*(9), pp. 1651–1655. DOI: https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.05.014
9. Pradhan, S.C., 2012. Nonlocal finite element analysis and small scale effects of CNTs with Timoshenko beam theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, *50*, pp. 8–20. DOI: https://doi.org/10.1016/j.finel.2011.08.008
10. Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A. and Mahmoud, F.F., 2013. Static analysis of nanobeams using nonlocal FEM. *Journal of Mechanical Science and Technology*, *27*(7), pp. 2035–2041. DOI: https://doi.org/10.1007/s12206-013-0212-x
11. Phadikar, J.K. and Pradhan, S.C., 2009. Bending vibration and buckling analysis of nonhomogeneous nanotubes using nonlocal elasticity theory and GDQ method. *Journal of Aerospace Sciences and Technologies*, *61*(4), pp. 482–495. DOI: https://doi.org/10.61653/joast.v61i4.2009.588
12. Civalek, Ö. and Demir, Ç., 2011. Bending analysis of microtubules using nonlocal Euler–Bernoulli beam theory. *Applied Mathematical Modelling*, *35*(5), pp. 2053–2067. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.11.004
13. Hadi, A., Nejad, M.Z. and Hosseini, M., 2018. Vibrations of three-dimensionally graded nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, *128*, pp. 12–23. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.03.004
14. Abumandour, R.M., El-Shorbagy, M.A., Eldesoky, I.M., Kamel, M.H., Alotaibi, H. and Felila, A.L., 2022. Deflection analysis of a nonlocal Euler–Bernoulli nanobeam model resting on two elastic foundations: a generalized differential quadrature approach. *Symmetry*, *14*(11), p. 2342. DOI: https://doi.org/10.3390/sym14112342
15. Nejad, M.Z., Hadi, A., Omidvari, A. and Rastgoo, A., 2018. Bending analysis of bi-directional functionally graded Euler–Bernoulli nano-beams using integral form of Eringen's non-local elasticity theory. *Structural Engineering and Mechanics: An International Journal*, *67*(4), pp. 417–425. DOI: https://doi.org/10.12989/sem.2018.67.4.417
16. Najafi, M. and Ahmadi, I., 2022. A new model to study magnetic-electric fields effects on bending of nano-scale magneto-electro-elastic beams. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, *96*, p. 104712. DOI: https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104712
17. Najafi, M. and Ahmadi, I., 2021. A nonlocal layerwise theory for free vibration analysis of nanobeams with various boundary conditions on Winkler-Pasternak foundation. *Steel and Composite Structures, An International Journal*, *40*(1), pp. 101–119. DOI: https://doi.org/10.12989/scs.2021.40.1.101
18. Koochakianfard, O. and Alibeigloo, A., 2023. Nonlocal vibration of nanobeam embedded in viscoelastic Pasternak foundation with longitudinal and rotational motions with surface effects. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, *54*(10), pp. 2215–2238. DOI: https://doi.org/10.22060/mej.2022.21234.7407
19. Ahmadi, I., Moradi, M.N. and Panah, M.D., 2024. Dynamic response analysis of nanoparticle-nanobeam impact using nonlocal theory and meshless method. *Structural Engineering and Mechanics*, *89*(2), pp. 135–153. DOI: https://doi.org/10.12989/sem.2024.89.2.135
20. Danesh, H., Javanbakht, M. and Aghdam, M.M., 2023. A comparative study of 1D nonlocal integral Timoshenko beam and 2D nonlocal integral elasticity

theories for bending of nanoscale beams. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, *35*(3), pp. 1063–1085. DOI: https://doi.org/10.1007/s00161-021-00976-7

21. Ahmadi, I., Davarpanah, M., Sladek, J., Sladek, V. and Moradi, M.N., 2024. A size-dependent meshless model for free vibration analysis of 2D-functionally graded multiple nanobeam system. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, *46*(1), p. 11. DOI: https://doi.org/10.1007/s40430-023-04580-5

22. Ahmadi, I., Sladek, V. and Sladek, J., 2025. Instability and buckling analysis of bi-directional FG multiple nanobeam system in thermal environment by a meshless method. *Archive of Applied Mechanics*, *95*(8), p. 181. DOI: https://doi.org/10.1007/s00419-025-02890-9

23. Hosseini-Hashemi, S. and Ilkhani, M.R., 2016. Exact solution for free vibrations of spinning nanotube based on nonlocal first order shear deformation shell theory. *Composite Structures*, *157*, pp. 1–11. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.08.019

24. Wang, Q. and Varadan, V.K., 2007. Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes. *Smart Materials and Structures*, *16*(1), pp. 178–190. DOI: https://doi.org/10.1088/0964-1726/16/1/022

25. Wang, X. and Yang, H.K., 2006. Bending stability of multiwalled carbon nanotubes. *Physical Review B*, *73*(8), p. 085409. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.73.085409

26. Wang, C.M., Tay, Z.Y., Chowdhury, A.R., Duan, W.H., Zhang, Y.Y. and Silvestre, N., 2011. Examination of cylindrical shell theories for buckling of carbon nanotubes. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, *11*(6), pp. 1035–1058. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219455411004464

27. Shaban, M. and Alibeigloo, A., 2014. Three-dimensional vibration and bending analysis of carbon nanotubes embedded in elastic medium based on theory of elasticity. *Latin American Journal of Solids and Structures*, *11*, pp. 2122–2140. DOI: https://doi.org/10.1590/S1679-78252014001200002

28. Ansari, R., Rouhi, H. and Sahmani, S., 2016. Studying the vibrational behavior of single-walled carbon nanotubes under different boundary conditions using the Rayleigh-Ritz technique. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, *8*(2), pp. 51–67. DOI: https://doi.org/10.24107/ijeas.252145

29. Ansari, R. and Rouhi, H., 2012. Analytical treatment of the free vibration of single-walled carbon nanotubes based on the nonlocal Flügge shell theory. *Journal of Engineering Materials and Technology*, *134*(1), p. 011008. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4005347

30. Selim, M.M., Alotaibi, M.F., Soltani, A., Mohamed, A.B.A. and Abdel-Aty, A.H., 2023. Torsional vibrational analysis of irregular single-walled carbon nanotube with elastic-support boundary conditions. *Journal of Materials Research and Technology*, *24*, pp. 215–222. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2023.02.230

31. Strozzi, M., Elishakoff, I.E., Bochicchio, M., Cocconcelli, M., Rubini, R. and Radi, E., 2023. A comparison of shell theories for vibration analysis of single-walled carbon nanotubes based on an anisotropic elastic shell model. *Nanomaterials*, *13*(8), p. 1390. DOI: https://doi.org/10.3390/nano13081390

32. Budiansky, B. and Sanders, J.L., 1963. On the best first-order linear shell theory. In Progress in Applied Mechanics: The Prager Anniversary Volume, pp. 129–140, Macmillan, New York, USA.

33. Shu, C., 2000. Differential quadrature and its application in engineering. Springer, London, UK. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0407-0

34. Pantano, A., Parks, D.M. and Boyce, M.C., 2004. Mechanics of deformation of single- and multi-wall carbon nanotubes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, *52*(4), pp. 789–821. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmps.2003.08.004

این صفحه عمداً خالی گذاشته شده است.