Sharif University of Technology

Sharif Mechanical Engineering Journal

https://sjme.journals.sharif.edu

Research Article

Enhanced Interfacial Fracture Prediction in Electronic Solder Joints Considering T-Stress under Mixed-Mode I/II Loading

Zahra Khaji [1], Mahdi Fakoor [2*], Saeid Shakhesi [3] and Saeid Sarkeil[3]

[1]Space Science and Technology Institute, Amirkabir University, Tehran, Iran.
[2]College of Interdisciplinary Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran.
[3]Iranian Space Research Center, Tehran, Iran.
* Corresponding author:(mfakoor@ut.ac.ir)

Article Info

Article history:

Received: 7 December 2025

Revised: 31 August 2026

Accepted: 6 September 2026

Keywords:

Electronic board,
interfacial fracture,
T-stress term,
strain energy release rate.

Abstract

Interfacial cracking between solder joints and printed circuit boards (PCBs) can compromise the mechanical reliability of electronic assemblies subjected to severe vibration. This study develops an interfacial fracture criterion for predicting crack initiation under mixed-mode I/II loading. The formulation is based on the maximum strain energy release rate criterion and incorporates the T-stress as the non-singular term of the near-tip stress field. The PCB is modeled as an orthotropic material using the reinforced isotropic solid concept, while the solder is treated as isotropic. The resulting formulation accounts for the influence of material anisotropy and T-stress on mixed-mode interfacial fracture. The predicted fracture limit curves are compared with available experimental data for validation. The results show that inclusion of the T-stress improves agreement between the theoretical fracture limit curves and experimental observations, demonstrating its importance in predicting interfacial fracture under mixed-mode loading.

Introduction

The design and precision manufacturing of space systems are critically important due to their extremely high costs. Electronic boxes constitute the primary components of these systems [1]. Accurate modeling, analysis, and detailed investigation of electronic boxes represent a core requirement in the aerospace domain. Solder joints frequently fail due to cracking within the solder or along the interface with the circuit board under thermal and mechanical loading encountered during assembly, testing, or service [2-3].

Fracture mechanics assessment of an interfacial crack between two dissimilar materials is essential for evaluating the integrity of adhesive bonds, composites, and similar structures [4]. The elastic solution for the stress field around an interfacial crack tip has been derived, with stress intensity factor definitions discussed by Williams [7], Erdogan [5], and Rice and Sih [8]. These solutions reveal oscillatory stress variations and crack surface overlap near the tip.

Various theoretical criteria for mixed-mode I/II fracture in composites have been proposed in the literature, based on energy or stress concepts. Among stress-based criteria, the maximum principal stress criterion [11“has been proposed” or "is widely used.". Regarding energy-based approaches, the maximum strain energy release rate [12] and minimum strain energy density [13] criteria have been proposed for composites.

The literature review indicates a clear need for developing mathematical tools to assess and predict interfacial fracture. This study investigates interfacial fracture between solder joints and electronic boards. The maximum strain energy release rate criterion is extended to include the out-of-plane stress component for improved fracture prediction under in-

To Cite this article:
Khaji, Z., Fakoor, M., Shakhesi, S. and Sarkeil, S. 2026. Enhanced interfacial fracture prediction in electronic solder joints considering t-stress under mixed-mode I/II loading, Sharif Mechanical Engineering Journal, **42**(1), 53-63.
https://doi.org/10.24200/j40.2026.68157.1757

E-ISSN: 2676-4733 © 2026 The Author(s). Sharif Mechanical Engineering Journal, Published by Sharif University of Technology
This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.

plane loading. The electronic board is modeled as an orthotropic material using a reinforced isotropic solid model. To validate the proposed criterion, the resulting fracture limit curve is compared with experimental data.

Methodology

Experimental observations indicate that a crack with any arbitrary orientation relative to the fibers in orthotropic materials tends to rotate toward the fiber direction and subsequently propagates through the isotropic matrix phase of the composite [18]. Accordingly, in the fracture process of orthotropic materials, it is assumed that the crack resides within the isotropic matrix, which is reinforced by fibers. Based on this experimental evidence, the reinforced isotropic solid model is introduced. From the derived relations, reinforcement coefficients relating the normal and shear elastic moduli are obtained.

Fracture in solder joints predominantly occurs near the electronic board, although crack initiation adjacent to electronic components has also been reported in experimental studies [21]. This fracture typically initiates from the outer edges of the joint.

In this section, fracture and interfacial crack growth between orthotropic and isotropic materials under mixed-mode I/II loading are investigated. The crack length is denoted by *a*. Loading is considered as a combination of shear and tensile loads. The stress field around the tip of an interfacial crack in an isotropic material under mixed-mode I/II loading is presented, including the T-stress term. It is important to note that the T-stress term differs for the two dissimilar materials [19].

The development and derivation of the maximum strain energy release rate criterion begin with presenting the mathematical relations governing stresses in the orthotropic material. The tangential stress in the orthotropic material is expressed through the concept of the reinforced isotropic solid.

Finally, the magnitude and direction of the T-stress term in both isotropic and orthotropic materials are examined. Subsequently, the maximum strain energy release rate criterion is extended to incorporate the T-stress parameter. The first step in this development is to derive the stress fields of the orthotropic material while accounting for the T-stress term. In this manner, the stress field in the orthotropic material is expressed via the reinforced isotropic solid model.

Results and Discussion

In this section, the maximum strain energy release rate criterion is validated for predicting interfacial fracture onset in laminated composites under in-plane loading. Theoretical fracture limit curves obtained from this criterion are compared with experimental data to evaluate prediction accuracy. The experimental results are derived from interfacial fracture tests on unidirectional glass/epoxy composites, as reported in reference [26]. In these tests, critical stress intensity factors for pure mode I (K_{Ic}) and pure mode II (K_{IIc}) were determined.

Fig (4) demonstrates that incorporating the T-stress term shifts the theoretical fracture limit curve toward convergence with experimental data. This finding confirms that the T-stress is a crucial parameter for predicting interfacial fracture onset. The improvement in prediction accuracy highlights the importance of including higher-order terms in the stress field expansion near the crack tip, particularly for materials with significant anisotropy.

For further validation of the proposed mixed-mode fracture criterion, the fracture limit curve based on the maximum strain energy release rate criterion is derived for an IM7/977-2 composite laminate with a [0, 45] layup orientation, as shown in Fig (5). The good agreement between the fracture limit curve and experimental data indicates that this criterion, through proper modeling of material anisotropy, accurately predicts interfacial fracture behavior in composite materials. This consistency across different material systems and layup configurations confirms the robustness and general applicability of the proposed criterion for practical engineering applications.

Conclusion

This paper investigates interfacial fracture between components of a satellite electronic board. The reinforced isotropic solid model is used to model the orthotropic material, accounting for stress fields in both fibers and matrix. The T-stress term is included in the normal and shear stress equations around the crack tip for improved accuracy. By developing the stress field for an interfacial crack between orthotropic and isotropic materials under mixed-mode I/II loading, the maximum strain energy release rate criterion is proposed. For validation, fracture limit curves based on this criterion are compared with experimental results. The comparison confirms that the proposed criterion provides sufficient accuracy for predicting interfacial crack growth onset between isotropic and orthotropic materials.

Funding: This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions: All authors contributed to the reported work for conceptualization, methodology, validation, writing-review and editing, and supervision.

مجله علمی مهندسی مکانیک شریف

https://sjme.journals.sharif.edu

مقاله‌ی پژوهشی

بهبود پیش بینی شکست سطحی در اتصال‌های لحیم بورد الکترونیک با درنظرگرفتن نقش ترم تنش T تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II

زهرا خاجی[۱]، مهدی فکور[*۲]، سعید شاخصی[۳] و سعید سرخیل [۳]

[۱] پژوهشکده‌ی علوم و فناوری هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

[۲] دانشکده‌ی هوافضا، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

[۳] پژوهشگاه فضایی ایران، تهران، ایران.

*نویسنده مسئول (mfakoor@ut.ac.ir)

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت : ۱۴۰۴/۰۹/۱۶

تاریخ اصلاحیه : ۱۴۰۵/۰۶/۰۹

تاریخ پذیرش : ۱۴۰۵ /۰۶/۱۵

واژگان کلیدی:

بورد الکترونیکی،

شکست سطحی،

ترم تنش T،

بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی.

چکیده

در طراحی اجزاء سامانه‌های فضایی، جلوگیری از ترک‌خوردگی تحت ارتعاش‌های شدید تصادفی از پارامترهای کلیدی طراحی به‌شمار می‌رود. ترک‌ها معمولاً در سطح بین اتصال‌های لحیم و بورد الکترونیک ایجاد می‌شوند؛ لذا، توسعه‌ی ابزارهای ریاضی برای پیش‌بینی شکست اهمیت ویژه‌ای دارد. در پژوهش حاضر، معیاری جهت پیش‌بینی شکست سطحی بین بورد الکترونیک و لحیم تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II ارائه شده است؛ که بر مبنای مفهوم بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی و با درنظرگرفتن ترم تنش T تدوین شده است. بورد الکترونیک و اتصال‌های لحیم به‌ترتیب به‌عنوان مواد اورتوتروپیک و ایزوتروپیک مدل‌سازی شده‌اند، که ماده‌ی اورتوتروپیک از طریق مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده شبیه‌سازی می‌شود. نتایج نشان داده‌اند که ترم تنش T نقش مهمی در پیش‌بینی مسیر و رفتار رشد ترک در ناحیه‌ی اتصال دارد. به‌کارگیری دقیق‌تر ترم تنش T در تحلیل مود ترکیبی، پیش‌بینی شکست نهایی بورد را به‌طور محسوسی بهبود می‌بخشد. در پایان، دقت معیار پیشنهادی با مقایسه با داده‌های تجربی موجود اعتبارسنجی شده است.

۱. مقدمه

امروزه مسئله‌ی طراحی و ساخت دقیق سامانه‌های فضایی به‌علت هزینه‌های بسیار بالا اهمیت ویژه‌ای دارد. بخش اصلی سیستم‌های فضایی، جعبه‌های الکترونیک هستند. مدل‌سازی، تحلیل، و بررسی دقیق جعبه‌های الکترونیک، یکی از نیازهای اصلی در حوزه‌ی فضایی به‌شمار می‌رود. اجزاء الکترونیک در یک عملیات فضایی تحت ارتعاش‌های تصادفی شدیدی قرار دارند. طراحی اجزا به گونه‌ای که از آسیب پیشرونده و رشد ترک جلوگیری شود، اهمیت ویژه‌ای دارد.

اتصال‌های لحیم‌کاری به‌عنوان اتصال‌های الکتریکی و مکانیکی بین تراشه‌های مدار مجتمع (IC)[۱] و بوردهای مدار چاپی در دستگاه‌های الکترونیکی عمل می‌کنند. خرابی دستگاه‌های مذکور اغلب به‌دلیل ترک‌خوردگی در لحیم‌کاری یا ترک سطحی بین لحیم و بورد الکترونیک تحت شرایط مختلف بارگذاری حرارتی و مکانیکی در هنگام مونتاژ، آزمایش یا سرویس است.

اتصال‌های لحیم‌کاری، اجزاء حیاتی بوردهای مدار چاپی در سیستم‌های الکترونیکی متحرک، مانند ماهواره‌ها و صنایع خودروسازی هستند، که در برابر ارتعاش‌های تصادفی آسیب‌پذیرند. بوردهای مدار چاپی در سیستم‌های متحرک، مانند صنایع خودروسازی، هواپیما، ماهواره، و سیستم‌های ارتباطی در صنایع برق و الکترونیک کاربرد دارند. بارگذاری حرارتی و ارتعاشی، مهم‌ترین پارامترهایی هستند که می‌توانند عمر طولانی بوردهای مذکور را تحت تأثیر قرار دهند. اتصال‌های لحیم‌کاری نقاط اتصال بین قطعات الکترونیکی و بورد مدار چاپی هستند و ارتعاش‌ها در نقاط اتصال تأثیر ویژه‌ای می‌گذارد. به‌خصوص هنگامی که بورد الکترونیک مدار چاپی در یک سیستم متحرک، مانند هواپیما یا ماهواره قرار می‌گیرد، تأثیر پارامترهایی مانند لرزش باید در اتصال‌های لحیم‌کاری در نظر گرفته شود.[۱] بوردهای الکترونیک ممکن است تحت تأثیر بارگذاری‌های شدید دچار خرابی‌های مکانیکی در اتصال‌های بین قطعات و بورد مدار چاپی شوند.[۲]

[1] Integrated Circuit

استناد به این مقاله:

خاجی، زهرا، فکور، مهدی، شاخصی، سعید و سرخیل، سعید، ۱۴۰۵. بهبود پیش بینی شکست سطحی در اتصال‌های لحیم بورد الکترونیک با درنظرگرفتن نقش ترم تنش T تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II. مهندسی مکانیک شریف، ۴۲(۱)، صص.۵۳-۶۳. https://doi.org/10.24200/j40.2026.68157.1757

شاپا الکترونیکی: ۴۷۳۳- ۲۶۷۶

حق مولف © نویسندگان

ناشر: دانشگاه صنعتی شریف

یک بورد الکترونیک، پشتیبانی مکانیکی و اتصال الکتریکی را برای قطعات مختلف الکترونیکی مونتاژشده روی آن فراهم می‌کند. بورد الکترونیک معمولاً یک کامپوزیت پلیمری چندلایه‌ی متشکل از یک ماتریس رزین اپوکسی با بسته‌های بافته‌شده از الیاف شیشه است. مشابه سایر کامپوزیت‌های چندلایه، خواص مکانیکی بورد الکترونیک بسیار ناهمسانگرد است. سختی درون صفحه و استحکام کششی بوردهای الکترونیک بسیار بزرگ‌تر از سختی و استحکام کششی خارج از صفحه است. به‌عبارت دیگر، بوردها در جهت الیاف بسیار قوی‌تر از جهت عرضی (عمود بر بورد الکترونیک) هستند. شواهد حاکی از آن است که استحکام کششی عرضی معمولاً نزدیک به مقاومت رزین اپوکسی است، که الیاف شیشه را پیوند می‌دهد.[۳]

اغلب ترک در داخل لحیم یا در سطح مشترک با یکی از مواد ایجاد می‌شود. پس از آن تغییر مسیر می‌دهد و با احتمال انحراف بیشتر به اجزاء کامپوزیت سازه به سمت سطح مشترک با یکی از مواد پیوندی حرکت می‌کند و در نتیجه یکپارچگی سازه را به خطر می‌اندازد. بنابراین، توانایی پیش‌بینی مسیر انتشار ترک بسیار مهم می‌شود.

معمولاً شروع رشد ترک از تجزیه‌وتحلیل تنش بر مبنای محاسبه‌ی چگالی انرژی قابل پیش‌بینی است.[۴] همچنین، بخش‌های انبساط[۲] و اعوجاج[۳] برای بررسی شروع رشد ترک در معیارهایی برای محاسبه‌ی تشکیل حفره یا تسلیم برشی به‌کار برده می‌شود، در حالی که مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM)[۴] به بررسی انتشار ترک می پردازد.[۵] در سازه‌هایی با بارگذاری پیچیده، مودهای تنش موردنیاز برای تحلیل مکانیک شکست الاستیک خطی تحلیلی وجود ندارند و باید از شبیه‌سازی اجزاء محدود (FEM)[۵] استفاده شود.[۶]

ارزیابی مکانیک شکست یک ترک سطحی بین دو ماده‌ی غیرمشابه در ارزیابی یکپارچگی اتصال‌های چسب، مواد کامپوزیت و غیره مهم است. با استخراج حل الاستیک میدان تنش اطراف نوک ترک سطحی، تعریف ضرایب شدت تنش توسط ویلیامز[۶]،[۷] اردوغان[۷]،[۵] و رایس[۸] و سیه[۹]،[۸] بحث شده‌اند. در حل‌های اخیر، تغییرات میدان تنش و هم‌پوشانی سطوح ترک در مجاورت نوک ترک ظاهر شده است.

در دهه‌های اخیر، بررسی مسئله‌ی واماندگی اتصال‌های لحیم در پکیج‌های الکترونیک موضوع جدی در صنعت ساخت بوردهای الکترونیک بوده است.[۹] مشاهده‌های تجربی حاکی از آن است که چقرمگی شکست در ترک سطح بین دو ماده، کاملاً به مقدار نسبی ضرایب شدت تنش مود I و II وابسته است.[۱۰]

در بخش کنونی، معیارهای تئوری مود ترکیبی I/II مواد کامپوزیتی بررسی شده‌اند. معیارهای تئوری بر مبنای مفهوم انرژی و یا تنش ارائه شده‌اند. برای معیارهای بر مبنای تنش تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II در مواد کامپوزیت می‌توان به معیار بیشینه‌ی تنش اصلی،[۱۱] اشاره کرد. در معیارهای برمبنای انرژی نیز معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی،[۱۲] و کمینه‌ی چگالی انرژی کرنشی،[۱۳] برای مواد کامپوزیتی ارائه شده‌اند.

در ترک‌های سطحی، تمرکز تنش بالایی در نوک ترک یا عیب وجود دارد.

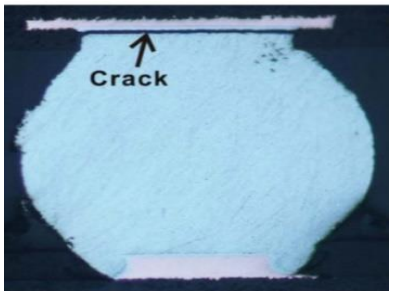

Figure 1. Crack in the interface of solders and electronics components.[15]

شکل ۱. ترک در سطح مشترک بین لحیم و اجزاء الکترونیکی.[۱۵]

تنش‌ها در میدان نوک ترک به صورت ترکیبی از نرخ آزادسازی انرژی کرنشی در وضعیت کششی (G_I) و نرخ آزادسازی انرژی کرنشی در وضعیت برشی (G_{II}) مشخص می‌شود. جدایش سطحی زمانی رخ می‌دهد که بیشینه‌ی مقدار G_I و G_{II} از مقاومت بحرانی شکست در مودهای I و II (G_{IC} و G_{IIC}) بیشتر باشد. در حالت بارگذاری مود ترکیبی I/II نیز شکست زمانی رخ می‌دهد که بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی مود ترکیبی ($G_{I/II}$) به مقدار بحرانی بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی ($G_{I/IIC}$) برسد.[۱۴] در شکل ۱، نمایی از رشد ترک در اتصال بین بورد الکترونیک و لحیم مشاهده می‌شود.

پژوهش‌های اخیر در مورد رشد ترک‌های سطحی بین دو ماده، تأثیر قابل‌توجه ترم تنش T در رفتار ترک و توزیع تنش را نشان می‌دهند.[۱۶ و ۱۷] یک روش رایج برای محاسبه‌ی تنش T در مسائل ترک سطحی مربوط به مواد اورتوتروپیک، بسط سری ویلیامز توسعه‌یافته است، که معادله‌های ریاضی تنش را به‌صورت مجموعه‌ای از توابع بیان می‌کند و وابستگی به جهت مواد کامپوزیت را در نظر می‌گیرد. ترم تنش T به‌عنوان مؤلفه‌ی تنش غیرمنفرد با تجزیه‌وتحلیل عبارت‌های ریاضی در بسط سری تعیین می‌شود.

با مرور پژوهش‌هایی که تاکنون در حوزه‌ی شکست‌های سطحی انجام شده است، می‌توان دریافت که نیاز به توسعه‌ی ابزار ریاضیاتی برای بررسی و برآورد شکست در شکست‌های سطحی، یکی از ضرورت‌های مهم تلقی می‌شود. در پژوهش حاضر، به بررسی و ارزیابی شکست سطحی بین اتصال‌های لحیم و بورد الکترونیک پرداخته شده است. به‌منظور بررسی رخداد شکست سطحی باید از یک معیار شکست معتبر بهره برد. به این ترتیب، معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی برای بررسی شکست سطحی اتصال‌های لحیم و بورد الکترونیک تحت بارگذاری داخل صفحه ارائه شده است. به‌منظور مدل‌سازی بورد الکترونیک به‌عنوان ماده‌ی اورتوتروپیک از مدل ماده‌ی جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده استفاده می‌شود. در معادله‌های معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی علاوه‌بر میدان‌های تنش برشی و عمودی، مؤلفه‌ی تنش T نیز به‌منظور پیش‌بینی دقیق‌تر شکست در نظر گرفته شده است. با درنظرگرفتن تنش T در معادله‌ها، معیار ارائه‌شده‌ی رفتار شکست با دقت بهتری پیش‌بینی می‌شود. همچنین، برای ارزیابی معیار ارائه‌شده به مقایسه‌ی منحنی حد شکست ارائه‌شده با نتایج تجربی پرداخته شده است.

---

[2] Dilatational
[3] Distortional
[4] Linear Elastic Fracture Mechanics
[5] Finite Elment Method
[6] Williams
[7] Erdogan
[8] Rice
[9] Sih

۲. مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده

مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده براساس مشاهده‌های تجربی شکست مواد اورتوتروپیک است. مشاهده‌های تجربی نشان می‌دهند که یک ترک با هر جهت دلخواه به الیاف در مواد اورتوتروپیک در امتداد الیاف می‌چرخد و در بخش ماتریس همسانگرد مواد کامپوزیتی منتشر می‌شود.[۱۸] بنابراین، در فرایند شکست در مواد اورتوتروپیک فرض می‌شود که ترک در ماتریس ایزوتروپیک قرار دارد، که با الیاف تقویت می‌شوند.

براساس مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده، الیاف، تنش‌های اعمالی بر روی ماده‌ی ایزوتروپیک را با ضرایب تقویت‌کنندگی ξ_i کاهش می‌دهند. روابط ریاضیاتی ضرایب تقویت‌کننده به‌صورت رابطه‌ی ۱ بیان می‌شود:

$$\sigma_{11}^{iso}=\frac{\sigma_{11}^{orth}}{\xi_1},\sigma_{22}^{iso}=\frac{\sigma_{22}^{orth}}{\xi_2},\sigma_{12}^{iso}=\frac{\sigma_{12}^{orth}}{\xi_3} \quad (1)$$

که در آن، σ_{ij}^{orth} و σ_{ij}^{iso} به ترتیب میدان تنش ماده‌ی اورتوتروپیک و میدان تنش بخش ایزوتروپیک ماتریس هستند. معادله‌ی ۱ نشان می‌دهد که می‌توان به جای میدان تنش اورتوتروپیک، میدان تنش ایزوتروپیک کاهش‌یافته با ضریب ξ_i را در نظر گرفت. می‌توان اثبات کرد که برای ارضاء معادله‌های سازگاری برای ماتریس ایزوتروپیک، لازم است روابط ۲ الی ۴ برقرار باشد:[۱۹]

$$\xi_1=\frac{E_{xx}}{E_{yy}} \quad (2)$$

$$\xi_2=1 \quad (3)$$

$$\xi_3=G_{12}(1-V_f)(1+\frac{E_{11}(1+v_{21})}{E_{22}(1+v_{12})}) \quad (4)$$

که در آن‌ها، E_{11}، E_{22}، و G_{12} به ترتیب مدول الاستیک در راستا، عمود بر الیاف، و برشی هستند. همچنین، V_f مربوط به حجم الیاف می‌شود.[۲۰]

۳. بررسی مسئله‌ی شکست سطحی

شکست در اتصال‌های لحیم عمدتاً در مجاورت بورد الکترونیکی رخ می‌دهد، اگرچه شروع شکست در نزدیکی قطعات الکترونیکی براساس مطالعات آزمایشگاهی دانشجو و همکاران (۲۰۱۸)،[۲۱] گزارش شده است. شکست اخیر معمولاً از لبه‌های بیرونی اتصال شروع می‌شود. با توجه به ماهیت ایزوتروپیک ماده‌ی لحیم، انتشار ترک سطحی در اتصال‌های لحیم در شکل ۲ مشاهده می‌شود.

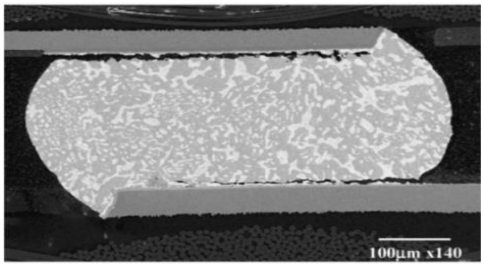

Figure 2. Illustration of interfacial crack propagation between the PCB board and solder joints.[23]

شکل ۲. نمایش انتشار ترک سطحی بین بورد و اتصال‌های لحیم.[۲۲]

در بخش کنونی، انتشار ترک سطحی بین یک بورد الکترونیکی اورتوتروپیک و اتصال‌های لحیم ایزوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II مدل‌سازی شده است. سه مسیر انتشار بالقوه وجود دارد: الف) به زیرلایه‌ی اورتوتروپیک (بورد الکترونیکی)، ب) به ماده‌ی ایزوتروپیک (لحیم)، و ج) در امتداد سطح مشترک. محتمل‌ترین مسیر در امتداد سطح مشترک دو ماده رخ می‌دهد، زیرا استحکام پیوند آن در مقایسه با مواد همگن، مشخصاً پایین‌تر است. هنگامی که استحکام پیوند سطح مشترک قابل‌توجه است و تنش‌های برشی غالب هستند، ترک ممکن است به سمت هر یک از مواد مجاور بچرخد. پژوهش حاضر بر انتشار ترک در سطح مشترک دو ماده به‌عنوان یک مود شکست رایج در سیستم‌های دو ماده‌ای تمرکز دارد (شکل ۲).

پژوهش‌های گسترده‌ای در حوزه‌ی میدان‌های تنش و جابجایی نوک ترک برای ترک‌های سطحی تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II برای پیش‌بینی رفتار رشد ترک انجام شده است.[۱۲] مطابق شکل ۲، ترک در سطح مشترک دو ماده‌ی ایزوتروپیک (لحیم) و اورتوتروپیک (بورد الکترونیکی) قرار دارد.

در بخش حاضر، ابتدا معادله‌های ریاضی حاکم بر معیار شکست بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی برای ترک‌های سطحی بین مواد اورتوتروپیک غیرمشابه استخراج شده است. برای مورد خاص، بررسی مدل ترک سطحی بین لحیم و بورد الکترونیک سیستم به‌صورت ایزوتروپیک- اورتوتروپیک صورت گرفته و ضریب تقویت‌کنندگی برای لحیم برابر با $\xi_i=1$ تعیین شده است. معادله‌های معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی متعاقباً برای استخراج منحنی‌های حد شکست حل شده‌اند.

۴. میدان تنش برای ترک‌های سطحی بین دو ماده‌ی اورتوتروپیک بر مبنای مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده

کیان و سان[۱۰] (۱۹۹۸)، توانسته‌اند ترک سطحی بین دو ماده‌ی اورتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II را مدل کنند. آن‌ها حل تحلیلی برای نرخ آزادسازی انرژی کرنشی در مودهای I و II را بر حسب ضرایب شدت تنش و خواص دو ماده‌ی اورتوتروپیک ارائه کرده‌اند.[۲۳]

در بخش حاضر، بررسی شکست و رشد ترک سطحی بین دو ماده‌ی اورتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II انجام شده است (شکل ۳). طول ترک l بوده است. بارگذاری به‌صورت ترکیب بارگذاری برشی و کششی در نظر گرفته شده است. همچنین، میدان تنش اطراف نوک ترک سطحی ماده‌ی ایزوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II با درنظرگرفتن ترم تنش T

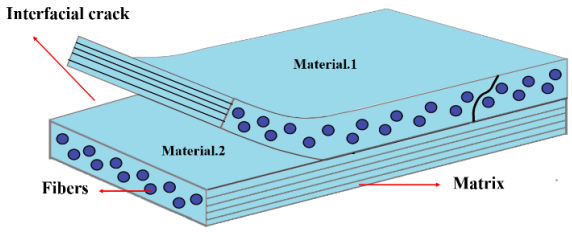

Figure 3. Interfacial surface crack between two dissimilar orthotropic materials subjected to mixed-mode I/II loading.[24]

شکل ۳. ترک سطحی بین دو ماده‌ی اورتوتروپیک غیرمشابه تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II.[۲۴]

[10] Qian & Sun

ارائه شده است (معادلات ۵ الی ۷). نکته‌ی مهم اینجاست که ترم تنش $T_{(i)}$ برای دو ماده، متفاوت از یکدیگر است.[۱۹]

$$\sigma_{xx_{(i)}}^{Iso}=\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{11}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{11}(r,\theta)+T_{(i)} \quad (5)$$

$$\sigma_{yy_{(i)}}^{Iso}=\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{22}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{22}(r,\theta) \quad (6)$$

$$\sigma_{xy_{(i)}}^{Iso}=\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{12}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{12}(r,\theta) \quad (7)$$

که در آن‌ها، ضرایب f_{ij} و g_{ij} مطابق معادله‌های ۸ الی ۱۳ ارائه شده‌اند:[۲۵]

$$f_{11_{(i)}}(r,\theta)=S\begin{Bmatrix}3\cos(\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})-\sin\theta.\sin(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\\+2\varepsilon_i\sin\theta.\cos(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\end{Bmatrix} \quad (8)$$
$$-\frac{1}{S}\cos(-\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})$$

$$f_{22_{(i)}}(r,\theta)=S\begin{Bmatrix}\cos(\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})+\sin\theta.\sin(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\\-2\varepsilon_i\sin\theta.\cos(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\end{Bmatrix} \quad (9)$$
$$+\frac{1}{S}\cos(-\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})$$

$$f_{12_{(i)}}(r,\theta)=S\begin{Bmatrix}\sin(\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})+\sin\theta.\cos(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\\+2\varepsilon_i\sin\theta.\sin(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\end{Bmatrix} \quad (10)$$
$$+\frac{1}{S}\sin(-\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})$$

$$g_{11_{(i)}}(r,\theta)=S\begin{Bmatrix}-3\sin(\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})-\sin\theta.\cos(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\\-2\varepsilon_i\sin\theta.\sin(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\end{Bmatrix} \quad (11)$$
$$-\frac{1}{S}\sin(\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})$$

$$g_{22_{(i)}}(r,\theta)=S\begin{Bmatrix}-\sin(\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})+\sin\theta.\cos(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\\+2\varepsilon_i\sin\theta.\sin(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\end{Bmatrix} \quad (12)$$
$$+\frac{1}{S}\sin(\frac{\theta}{2}-\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})$$

$$g_{12_{(i)}}(r,\theta)=S\begin{Bmatrix}\cos(\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})-\sin\theta.\sin(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\\+2\varepsilon_i\sin\theta.\cos(\frac{3\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})\end{Bmatrix} \quad (13)$$
$$+\frac{1}{S}\cos(-\frac{\theta}{2}+\varepsilon_i\ln\frac{r}{l})$$

حال برمبنای روابط مدل جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده، میدان تنش در مواد اورتوتروپیک به صورت روابط ۱۴ الی ۱۶ است:

$$\sigma_{xx_{(i)}}^{Orth}=\frac{1}{\xi_1}[\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{11_{(i)}}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{11_{(i)}}(r,\theta)+T] \quad (14)$$

$$\sigma_{yy_{(i)}}^{Orth}=\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{22_{(i)}}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{22_{(i)}}(r,\theta) \quad (15)$$

$$\sigma_{xy_{(i)}}^{Orth}=\frac{1}{\xi_3}[\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{12_{(i)}}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{12_{(i)}}(r,\theta)] \quad (16)$$

در معادله‌های میدان تنش اورتوتروپیک، ضرایب S ، Q ، و ε تعریف و به صورت روابط ۱۷ الی ۱۹ استخراج می‌شوند:

$$S=e^{-\varepsilon(\pi-\theta)} \quad (17)$$

$$Q=2\sqrt{2}\cosh(\pi\varepsilon) \quad (18)$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (19)$$

در معادله‌ی ۱۹، پارامتر β با استفاده از رابطه‌ی ۲۰ به‌دست می‌آید:

$$\beta=[(\frac{S_{12_{(2)}}}{L_{22_{(2)}}})^2-(\frac{S_{12_{(1)}}}{L_{22_{(1)}}})^2].\frac{\mathrm{sgn}[(\frac{S_{12_{(2)}}}{L^*_{22_{(2)}}})^2-(\frac{S_{12_{(1)}}}{L^*_{22_{(1)}}})^2]}{\sqrt{D_{11}D_{22}-D_{12}}} \quad (20)$$

که در آن، پارامتر β به ضرایب D_{11} ، D_{22} ، D_{12} ، L_{11}، و L_{22} وابسته است؛ و به‌صورت روابط ۲۱ الی ۲۳ استخراج می‌شوند:

$$D_{11}=\sum_{i=1}^{2}\frac{L_{11_{(i)}}\sin^2\theta_i+L_{22_{(i)}}\cos^2\theta_i}{L_{11_{(i)}}L_{22_{(i)}}} \quad (21)$$

$$D_{22}=\sum_{i=1}^{2}\frac{L_{11_{(i)}}\cos^2\theta_i+L_{22_{(i)}}\sin^2\theta_i}{L_{11_{(i)}}L_{22_{(i)}}} \quad (22)$$

$$D_{12}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\cos\theta_i\sin\theta_i(L_{11_{(i)}}-L_{22_{(i)}})}{L_{11_{(i)}}L_{22_{(i)}}} \quad (23)$$

که در آن‌ها، ضرایب θ_i زاویه‌ی بین ترک و الیاف در هر ماده‌ی اورتوتروپیک است. ضرایب $L_{11_{(i)}}$ و $L_{22_{(i)}}$ برای مواد یک و دو نیز به صورت روابط ۲۴ و ۲۵ تعریف می‌شوند:

$$L_{11_{(i)}}=(C_{12_{(i)}}+\sqrt{C_{11_{(i)}}C_{22_{(i)}}})S_{21_{(i)}} \quad (24)$$

$$L_{22_{(i)}}=\sqrt{\frac{C_{22_{(i)}}}{C_{11_{(i)}}}}L_{11_{(i)}} \quad (25)$$

پارامترهای $S_{21_{(i)}}$ و $S_{12_{(i)}}$ نیز به‌صورت روابط ۲۶ و ۲۷ تعریف می‌شوند:

$$S_{21_{(i)}}=[\frac{C_{66_{(i)}}(\sqrt{C_{11_{(i)}}C_{22_{(i)}}}-C_{12_{(i)}})}{C_{22_{(i)}}(C_{12_{(i)}}+2C_{66_{(i)}}+\sqrt{C_{11_{(i)}}C_{22_{(i)}}})}]^{1/2} \quad (26)$$

$$S_{12_{(i)}}=-\sqrt{\frac{C_{22_{(i)}}}{C_{11_{(i)}}}}S_{21_{(i)}} \quad (27)$$

۵. توسعه‌ی معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی

توسعه و استخراج بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی با ارائه‌ی روابط ریاضی مربوط به تنش در ماده‌ی اورتوتروپیک آغاز می‌شود. تنش مماسی در ماده‌ی اورتوتروپیک از طریق مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده با استفاده از معادله‌ی ۱ به‌صورت روابط ۲۸ و ۲۹ بیان می‌شود:

$$\sigma_{\theta\theta_{(i)}}^{orth}=\sin^2\theta.\sigma_{xx_{(i)}}^{orth}+\cos^2\theta.\sigma_{yy_{(i)}}^{orth}-2\cos\theta\sin\theta.\sigma_{xy_{(i)}}^{orth}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\xi_{1_{(i)}}}.\sigma_{xx_{(i)}}^{Iso}+\cos^2\theta.\sigma_{yy_{(i)}}^{Iso}-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\xi_{3_{(i)}}}.\sigma_{xy_{(i)}}^{Iso} \quad (28)$$

$$\sigma_{r\theta_{(i)}}^{orth}=(\sigma_{xx_{(i)}}^{orth}-\sigma_{yy_{(i)}}^{orth})\cos\theta\sin\theta+\sigma_{xy_{(i)}}^{orth}.(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=(\frac{\sigma_{xx_{(i)}}^{Iso}}{\xi_{1_{(i)}}}-\sigma_{yy_{(i)}}^{Iso})\cos\theta\sin\theta+\frac{\sigma_{xy_{(i)}}^{Iso}}{\xi_{3_{(i)}}}.(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \quad (29)$$

در نتیجه، روابط ریاضی معیار شکست بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی

بر حسب میدان تنش استخراج می‌شود. با پیروی از فرمول‌بندی در نوشتار خاجی و فکور (۲۰۲۳)،[۲۰] رابطه‌ی بین بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی و میدان تنش اورتوتروپیک به‌صورت رابطه‌ی ۳۰ است:

$$G_{(i)}^{orth}=2\pi r.(\frac{\sigma_{r\theta_{(i)}}^{2}}{E_{I_{(i)}}}+\frac{\sigma_{\theta\theta_{(i)}}^{2}}{E_{II_{(i)}}})^{orth} \quad (30)$$

رابطه‌ی اخیر منجر به معادله‌های ۳۱ الی ۳۴ برای معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی می‌شود:

$$G_{(i)}^{orth}=K_I^2.A_1(\theta)+K_{II}^2.A_2(\theta)+2K_IK_{II}.A_3(\theta) \quad (31)$$

$$A_1(\theta)=\frac{2\pi}{Q}.(\frac{f_{12_{(i)}}^2}{E_{I_{(i)}}}+\frac{f_{11_{(i)}}^2}{E_{II_{(i)}}}) \quad (32)$$

$$A_2(\theta)=\frac{2\pi}{Q}.(\frac{g_{12_{(i)}}^2}{E_{I_{(i)}}}+\frac{g_{11_{(i)}}^2}{E_{II_{(i)}}}) \quad (33)$$

$$A_3(\theta)=\frac{2\pi}{Q}.(\frac{g_{12_{(i)}}.f_{12_{(i)}}}{E_{I_{(i)}}}+\frac{g_{11_{(i)}}.f_{11_{(i)}}}{E_{II_{(i)}}}) \quad (34)$$

مفهوم معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی بیان می‌کند که ترک در جهتی شروع به رشد می‌کند که نرخ آزادسازی انرژی کرنشی به بیشینه‌ی مقدار خود برسد. بر مبنای معیار اخیر، ترک لحظه‌ای شروع به رشد می‌کند، که نرخ آزادسازی انرژی کرنشی به مقدار بحرانی خود برسد. با استفاده از مفاهیم ذکرشده، دو رابطه‌ی ۳۵ و ۳۶ برای پیش‌بینی جهت و لحظه‌ی شروع رشد ترک استخراج شده‌اند:

$$G_{C(i)}^{orth}=K_I^2.A_1(\theta)+K_{II}^2.A_2(\theta)+2K_IK_{II}.A_3(\theta) \quad (35)$$

$$\frac{\partial G(\theta)_{(i)}^{Orth}}{\partial\theta}=0\ \&\ \frac{\partial^2 G(\theta)_{(i)}^{Orth}}{\partial\theta^2}<0 \quad (36)$$

با حل هم‌زمان دو معادله‌ی اخیر، می‌توان منحنی حد شکست یا منحنی تغییرات K_{II} را بر حسب K_I ترسیم و رفتار شکست را برآورد کرد.

۶. توسعه‌ی معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی با درنظرگرفتن ترم تنش T

ترم تنش T، اهمیت ویژه‌ای در زمینه‌ی مکانیک شکست الاستیک خطی به‌عنوان ترم دوم عبارت تنش و همچنین ترم غیرمنفرد در بسط سری ویلیامز میدان تنش نوک ترک دارد. عبارت مذکور که با تنش T ثابت مشخص می‌شود، نشان‌دهنده‌ی تنش یکنواختی است که به موازات صفحه‌ی ترک عمل می‌کند.[۲۴] تنش T یک ترم مرتبه‌ی اول مهم برای تعیین کمیت قید نوک ترک ارائه می‌دهد؛ که اغلب به‌عنوان سه محوری‌بودن حالت تنش توصیف می‌شود، و به‌طورقابل‌توجهی در توسعه‌ی ناحیه‌ی پلاستیک و چقرمگی شکست تأثیر می‌گذارد.

در مواد ایزوتروپیک، وقتی قطعه‌ی ترک‌دار تحت بارگذاری مود I خالص قرار می‌گیرد، ترک در راستای مسیر اولیه‌ی خود رشد می‌کند و تنش T، تأثیری در رشد ترک ندارد. با عبور از شرایط مود I خالص و ظهور مود II، ترک می‌چرخد و تنش T، در راستای ترک چرخیده، مؤلفه پیدا می‌کند.[۲۰]

در مواد اورتوتروپیک، در وضعیتی که ترک در راستای الیاف قرار دارد، تنش T، مؤلفه‌ای در راستای ترک تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I/II ندارد؛ و به این ترتیب، تنش T، در فرآیند رشد ترک تأثیرگذار نیست. در وضعیتی که ترک زاویه‌ی دلخواهی نسبت به الیاف دارد، تحت شرایط مود ترکیبی ترک می‌چرخد و در راستای الیاف منتشر می‌شود. به این ترتیب، ترک در راستای الیاف، مؤلفه دارد و تنش T، در رشد ترک مؤثر است. زمانی که جهت انتشار ترک در راستای عمود بر الیاف است، تنش T، بیشترین تأثیر را در رشد ترک دارد. تنش ترم T به هندسه، طول ترک (نسبت طول ترک به عرض قطعه)، و شرایط بارگذاری وابسته است.[۲۰]

مقدار تنش T منفی در مواد ایزوتروپیک و اورتوتروپیک، قید بالاتر را افزایش می‌دهد و می‌تواند چقرمگی اندازه‌گیری‌شده را کاهش دهد؛ در حالی که مقدار تنش T مثبت، قید را کاهش می‌دهد و اغلب منجر به افزایش مقادیر چقرمگی می‌شود.[۲۶] مقادیر مثبت تنش T سبب کاهش ضریب شدت تنش مود II (چقرمگی شکست مود II) و مقادیر منفی آن سبب افزایش چقرمگی شکست مود II می‌شود. به‌علاوه، تنش T در چقرمگی شکست مود I خالص تأثیری ندارد. به این ترتیب، در وضعیت مود ترکیبی I/II به میزان ظهور مود II، مقادیر مثبت ترم تنش T می‌تواند باعث کاهش ضرایب شدت تنش و مقادیر منفی آن باعث افزایش ضرایب شدت تنش شود.

تاکنون مطالعات گسترده‌ای درباره‌ی تأثیر ترم تنش T در قطعات مختلف آزمون انجام شده است. تأثیر ترم تنش T در قطعات خمش نیم دایره‌ای (SCB)[۱۱]، نمونه‌ی مثلثی لبه‌ی ترک‌دار (ECT)[۱۲]، نمونه‌ی خمشی دیسک لبه‌ی ترک‌دار (ENDB)[۱۳]، نمونه‌ی دیسک لبه‌ی ترک‌دار تحت فشار (ENDC)[۱۴]، نمونه‌ی خمش چهار نقطه‌ای (FPB)[۱۵]، نمونه‌ی حلقوی تحت فشار قطری (DCR)[۱۶]، و نمونه‌ی تیر خمیشی کوتاه (SBB)[۱۷] در پژوهش‌های مختلف بررسی شده،[۲۷-۳۰] و نتایج آن‌ها نشان داده است که پارامتر ترم تنش T وابسته به هندسه و نوع بارگذاری است و تأثیری تعیین‌کننده در مقدار چقرمگی شکست اندازه‌گیری‌شده در نمونه‌های مختلف دارد. به‌گونه‌ای که برای یک ماده‌ی ثابت (مانند PMMA)، استفاده از نمونه‌های با ترم تنش T مثبت (مانند نمونه‌های SBB، SCB، و ECT) باعث کاهش محسوس چقرمگی شکست در مودهای ترکیبی I/II و به‌ویژه مود II خالص می‌شود (به‌طوری‌که در نمونه‌ی SBB، نسبت چقرمگی شکست مود II به مود I به حدود ۰/۵ کاهش یافته است). در مقابل، نمونه‌هایی با ترم تنش T منفی (مانند نمونه‌های ENDB، Ring، و ENDC) با ایجاد یک میدان فشاری در جلوی نوک ترک، باعث افزایش چشمگیر چقرمگی شکست می‌شوند (به‌طوری که در نمونه‌ی ENDB، نسبت چقرمگی شکست مود II به مود I به حدود ۱/۸ رسیده است). نمونه‌هایی با ترم تنش T نزدیک به صفر (مانند

[11] Semi-circular bend
[12] Edge cracked triangular
[13] Edge-notched disc bend
[14] Edge notch disc compression
[15] Four-point bend
[16] Diametrally compressed ring
[17] Short bend beam

FPB) نیز رفتاری میانی داشته و نتایج آن‌ها به پیش‌بینی ملاک کلاسیک MTS نزدیک‌تر شده است.

در بخش حاضر، تأثیر ترم تنش T در وضعیتی که مود تنش خارج از صفحه، یعنی مود III (پارگی) ظاهر شود، بررسی شده است. در مود III خالص، ترم تنش T منفی باعث افزایش چشمگیر چقرمگی شکست مود III می‌شود؛ به‌طوری‌که نمونه‌ی فشاری قطری با دو برش لبه‌ای (DNDC)[18] با منفی‌ترین تنش T ، بیشترین چقرمگی شکست مود III را نشان می‌دهد. در مقابل، نمونه‌ی ENDB با تنش T منفی‌تر در مود III، کمترین چقرمگی شکست مود III را دارد، که نشان می‌دهد هر چه تنش ترم T در مود III منفی‌تر باشد، چقرمگی شکست مود III بیشتر می‌شود. به‌طورکلی، رابطه‌ی مستقیم و مثبتی بین مقدار مطلق تنش ترم T منفی و چقرمگی شکست مود III وجود دارد؛ به‌عبارت دیگر، هر چه تنش ترم T منفی‌تر باشد، چقرمگی شکست مود III افزایش می‌یابد و بالعکس.[۳۱]

در نتیجه، پارامتر تنش T برای توضیح رفتار شکست وابسته به هندسه و برای کاربردهای مکانیک شکست اساسی است؛[۳۲] و تجزیه‌وتحلیل آن برای انتقال داده‌های چقرمگی در مقیاس آزمایشگاهی به ارزیابی سازه‌های ترک‌خورده در مقیاس بزرگ ضروری است.[۲۰]

در حوزه‌ی تأثیر ترم تنش T در زاویه‌ی شروع رشد ترک، پژوهش‌ها حاکی از آن هستند در وضعیتی که ترک عمود بر الیاف قرار دارد، تنش T تأثیر قابل‌توجهی در زاویه‌ی شروع رشد ترک دارد. در مود I خالص، تنش T تأثیری در زاویه‌ی شروع رشد ترک ندارد. با ظهور مود II و عبور از مود I خالص (مود ترکیبی I/II)، تنش T مؤلفه‌ای در راستای ترک دارد و در زاویه‌ی شروع رشد ترک تأثیرگذار است.[۲۰]

حال در بخش کنونی به توسعه‌ی معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی با درنظرگرفتن پارامتر تنش T پرداخته شده است. گام نخست، در توسعه‌ی معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی، استخراج میدان‌های تنش ماده‌ی اورتوتروپیک با درنظرگرفتن ترم تنش T است. به این ترتیب، میدان تنش در ماده‌ی اورتوتروپیک از طریق مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده با استفاده از معادله‌ی ۱ در مختصات xy به صورت روابط ۳۷ الی ۳۹ بیان می‌شود:

$$\sigma_{xx_{(i)}}^{Orth}=\frac{1}{\xi_1}[\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{11_{(i)}}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{11_{(i)}}(r,\theta)+T] \quad (37)$$

$$\sigma_{yy_{(i)}}^{Orth}=\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{22_{(i)}}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{22_{(i)}}(r,\theta) \quad (38)$$

$$\sigma_{xy_{(i)}}^{Orth}=\frac{1}{\xi_3}[\frac{K_I}{Q\sqrt{r}}.f_{12_{(i)}}(r,\theta)+\frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}}.g_{12_{(i)}}(r,\theta)] \quad (39)$$

میدان تنش ماده‌ی اورتوتروپیک در مختصات $r\theta$ به صورت روابط ۴۰ و ۴۱ است:

$$\sigma_{\theta\theta_{(i)}}^{orth}=\sin^2\theta.\sigma_{xx_{(i)}}^{orth}+\cos^2\theta.\sigma_{yy_{(i)}}^{orth}-2\cos\theta\sin\theta.\sigma_{xy_{(i)}}^{orth}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\xi_{1_{(i)}}}.\sigma_{xx_{(i)}}^{Iso}+\cos^2\theta.\sigma_{yy_{(i)}}^{Iso}-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\xi_{3_{(i)}}}.\sigma_{xy_{(i)}}^{Iso} \quad (40)$$

$$\sigma_{r\theta_{(i)}}^{orth}=(\sigma_{xx_{(i)}}^{orth}-\sigma_{yy_{(i)}}^{orth})\cos\theta\sin\theta+\sigma_{xy_{(i)}}^{orth}.(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=(\frac{\sigma_{xx_{(i)}}^{Iso}}{\xi_{1_{(i)}}}-\sigma_{yy_{(i)}}^{Iso})\cos\theta\sin\theta+\frac{\sigma_{xy_{(i)}}^{Iso}}{\xi_{3_{(i)}}}.(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \quad (41)$$

در نتیجه، روابط ریاضی معیار شکست بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی بر حسب میدان تنش استخراج می‌شود. با پیروی از فرمول‌بندی در نوشتار خاجی و فکور (۲۰۲۳)،[۲۰] رابطه‌ی بین بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی و میدان تنش اورتوتروپیک به صورت رابطه‌ی ۴۲ است:

$$G_{(i)}^{orth}=2\pi r.(\frac{\sigma_{r\theta_{(i)}}^2}{E_{I_{(i)}}}+\frac{\sigma_{\theta\theta_{(i)}}^2}{E_{II_{(i)}}})^{orth} \quad (42)$$

عبارت تنش T تأثیر عمیقی در رفتار شکست مواد اورتوتروپیک دارد. پارامتر B (واحد آن $MPa\sqrt{m}$ است)، برای نرمال‌سازی عبارت تنش T به صورت رابطه‌ی ۴۳ تعریف می‌شود[۲۰]:

$$T=\frac{B}{\sqrt{2\pi r}} \quad (43)$$

رابطه‌ی اخیر منجر به معادله‌های ۴۴ الی ۵۰ برای معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی می‌شود:

$$G_C^{orth}(\theta)=\frac{1}{E_I}(\mathrm{K}_I^2\,D_1(\theta)+\mathrm{K}_{II}^2\,D_2(\theta)$$
$$+K_IK_{II}D_3(\theta)+D_4(\theta)K_I+D_5(\theta)K_{II}+D_6(\theta)) \quad (44)$$

$$D_1(\theta)=(\frac{A_1^2(\theta)}{\alpha_1^2(\varphi)}+\sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}}\frac{A_3^2(\theta)}{\alpha_3^2(\varphi)}) \quad (45)$$

$$D_2(\theta)=(\frac{A_2^2(\theta)}{\alpha_1^2(\varphi)}+\sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}}\frac{A_4^2(\theta)}{\alpha_3^2(\varphi)}) \quad (46)$$

$$D_3(\theta)=(2\frac{A_1(\theta)A_2(\theta)}{\alpha_1^2(\varphi)}+2\sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}}\frac{A_3(\theta)A_4(\theta)}{\alpha_3^2(\varphi)}) \quad (47)$$

$$D_4(\theta)=(2\frac{A_1(\theta)B\sin^2\theta}{\alpha_1^2(\varphi)}-2\sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}}\frac{A_3(\theta)B\sin\theta\cos\theta}{\alpha_3^2(\varphi)}) \quad (48)$$

$$D_5(\theta)=(2\frac{A_2(\theta)B\sin^2\theta}{\alpha_1^2(\varphi)}-2\sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}}\frac{A_4(\theta)B\sin\theta\cos\theta}{\alpha_3^2(\varphi)}) \quad (49)$$

$$D_6(\theta)=(\frac{B^2\sin^4\theta}{\alpha_1^2(\varphi)}+\sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}}\frac{B^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\alpha_3^2(\varphi)}) \quad (50)$$

که ضرایب A_i در آن‌ها، به صورت روابط ۵۱ الی ۵۴ هستند:

$$A_1(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta) \quad (51)$$

$$A_2(\theta)=-3\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \quad (52)$$

$$A_3(\theta)=\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} \quad (53)$$

$$A_4(\theta)=(3\cos\theta-1)\cos\frac{\theta}{2} \quad (54)$$

[18] Double-notch diametral compression

جدول ۱. خواص مکانیکی لایه‌ی تک‌جهته‌ی UE400REM/ET443 [۳۳].

Table 1. Mechanical properties of the UE400REM/ET443 unidirectional lamina.[33]

$E_{11}(GPa)$	$E_{22}(GPa)$	$G_{12}(GPa)$	ν_{12}	ν_{21}	V_f
43/94	16/71	6/57	0/3	0/095	**58/16**

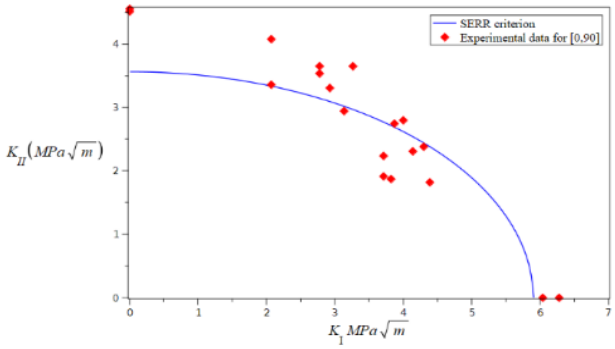

Figure 4. Comparison of the predicted interfacial fracture limit curve with experimental data,[33] for [0, 90] composite laminates.

شکل ۴. مقایسه‌ی منحنی حد شکست سطحی پیش‌بینی‌شده با داده‌های تجربی در نوشتار مارات مندرز و همکارش (۲۰۱۰)،[۳۳] برای صفحات کامپوزیتی [۰، ۹۰].

۷. اعتبارسنجی معیار شکست سطحی بر مبنای بیشینه‌ی نرخ آزادسازی بیشینه‌ی انرژی کرنشی

در بخش حاضر، معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی برای پیش‌بینی شروع شکست سطحی در کامپوزیت‌های چندلایه تحت بارگذاری درون‌صفحه‌ای اعتبارسنجی شده و منحنی‌های حد شکست تئوری به‌دست‌آمده از آن با داده‌های تجربی مقایسه شده است، تا دقت پیش‌بینی‌ها ارزیابی شود. نتایج تجربی از آزمایش‌های شکست سطحی مطابق نوشتار مارات مندرز[۱۹] و همکارش (۲۰۱۰)،[۳۳] برای کامپوزیت‌های الیاف شیشه/ اپوکسی تک‌جهته[۲۰] به‌دست آمده است. خواص مکانیکی لایه‌ی تک‌جهت در جدول ۱ ارائه شده است:

در مطالعه‌ی تجربی حاضر از روش‌های استاندارد تیر دو طرفه (DCB)[۲۱]، تیر با خمیدگی انتها (ENF)[۲۲] و خم مود ترکیبی (MMB)[۲۳] برای توصیف شکست بین سطحی در لمینت‌های متعامد [۰،۹۰] تحت شرایط بارگذاری مود I خالص، مود II خالص، و مود ترکیبی I/II استفاده شده است. در آزمون‌های انجام‌شده، ضرایب شدت تنش بحرانی در مود I خالص (K_{Ic}) و مود II خالص (K_{IIc}) تعیین شده‌اند. منحنی حد شکست تئوری برای ماده‌ی مذکور با استفاده از حل هم‌زمان معادله‌های ۳۵ و ۳۶ با هدف بررسی تغییرات K_{IIc} در برابر تغییرات K_{Ic} برای ترک خوردگی سطحی استخراج و با داده‌های شکست تجربی از مارات مندرز[۲۴] و همکارش (۲۰۱۰)،[۳۳] اعتبارسنجی شده است.

در شکل ۴، تطابق نزدیکی بین نتایج تئوری منحنی‌های حد شکست سطحی و نتایج تجربی مشاهده می‌شود و معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی پیشنهادی را برای پیش‌بینی شروع شکست سطحی تأیید می‌کند. همچنین شکل مذکور نشان می‌دهد که درنظرگرفتن ترم تنش T سبب می‌شود منحنی

[19] Marat-Mendes
[20] UE400REM/ET443
[21] Double Cantilever Beam

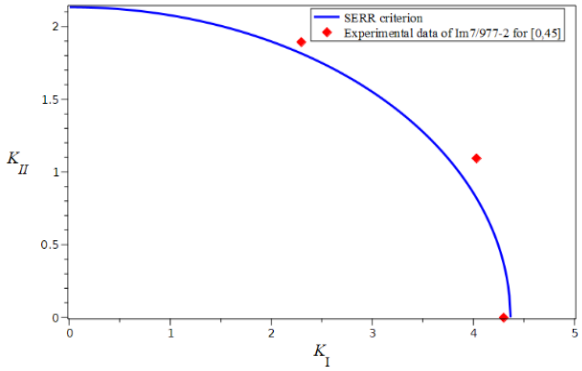

Figure 5. Comparison of the predicted surface fracture limit curve with experimental data [34] for [0, 45] composite laminates.

شکل ۵. مقایسه‌ی منحنی حد شکست سطحی پیش‌بینی‌شده با داده‌های تجربی ریاموندو[۱] و همکاران (۲۰۲۱)،[۳۴] برای صفحات کامپوزیت [۰، ۴۵].

حد شکست تئوری به سمت همگرایی با داده‌های تجربی سوق داده شود. این یافته تأیید می‌کند که محاسبات مربوط به تنش T برای پیش‌بینی شروع شکست سطحی پارامتر بسیار مهمی قلمداد می‌شود.

به‌منظور اعتبارسنجی قوی‌تر معیار شکست مود ترکیبی ارائه‌شده، منحنی حد شکست بر مبنای معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی برای ماده‌ی ۲-Im ۷/۹۷۷ در وضعیت [۰، ۴۵] صفحات کامپوزیت مطابق شکل ۵ استخراج شده است. نزدیکی خوب و قابل‌قبول بین منحنی حد شکست و داده‌های تجربی حاکی از آن است که معیار اخیر با مدل‌سازی درست رفتار ناهمسانگرد ماده، به‌درستی رفتار شکست سطحی در مواد کامپوزیت را پیش‌بینی می‌کند.

۸. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، به بررسی فرآیند شکست سطحی بین اجزاء بورد الکترونیک ماهواره پرداخته شده است. مدل جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده به‌عنوان یک مدل توسعه‌یافته برای مدل‌سازی ماده‌ی اورتوتروپیک با درنظرگرفتن آثار میدان تنش الیاف و ماتریس استفاده شده است. به‌منظور بررسی دستیابی به پیش‌بینی دقیق‌تر ریاضیاتی ترک، ترم تنش T در معادله‌های میدان تنش عمودی و برشی اطراف نوک ترک در نظر گرفته شده است. با توسعه‌ی میدان تنش برای ترک سطحی بین مواد اورتوتروپیک و ایزوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II، معیار شکست بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی ارائه شده است. به‌منظور راستی‌آزمایی و ارزیابی معادله‌های استخراج‌شده‌ی معیار بیشینه‌ی نرخ آزادسازی انرژی کرنشی، منحنی‌های حد شکست بر مبنای معیار اخیر با نتایج آزمایش‌های تجربی از مرجع مقایسه شده است. مقایسه‌ی منحنی حد شکست با نتایج تجربی حاکی از آن است که معیار ارائه‌شده، اعتبار کافی برای پیش‌بینی شروع رشد ترک سطحی بین مواد ایزوتروپیک و اورتوتروپیک را دارد.

تقدیر و تشکر

پژوهش حاضر با حمایت مادی و معنوی پژوهشگاه فضایی ایران انجام شده است. بدین وسیله نویسندگان مراتب تقدیر و تشکر خود را اعلام می‌کنند.

[22] End-Notched Flexure
[23] Mixed-Mode Bending
[24] Marat-Mendes

References – منابع

1. Liang, D., Wu, Q., Ghaderi, D. and Guerrero, J.M., 2020. Analysis of multilayered power module packaging behavior under random vibrations. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, *10*(10), pp.1700-1707. https://doi.org/10.1109/TCPMT.2020.2995735
2. Wu, M.L. and Lan, J.S., 2017. Investigation and prediction of solder joint failure analysis for ball grid array package subject to mechanical bending environment. *Soldering & Surface Mount Technology*, *29*(2), pp.75-84. https://doi.org/10.1108/SSMT-06-2016-0012
3. Akbari, S., Lövberg, A., Tegehall, P.E., Brinkfeldt, K. and Andersson, D., 2019. Effect of PCB cracks on thermal cycling reliability of passive microelectronic components with single-grained solder joints. *Microelectronics Reliability*, *93*, pp.61-71. https://doi.org/10.1016/j.microrel.2019.01.006
4. Heidari-Rarani, M. and Shokrieh, M.M., 2013. Effect of curved crack front on strain energy release rate of unidirectional DCB. *Sharif Journal of Mechanical Engineering (SJME)*, *29*(2), pp.81-86.[In persion].
5. Erdogan, F. and Sih, G.C., 1963. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of basic engineering*, *85*(4), pp.519-525. https://doi.org/10.1115/1.3656897
6. Yousefzadeh, S. and Doustdar, M.M., 2017. Experimental investigation of fatigue life in cracked aluminum plates repaired by composite patches. *Sharif Journal of Mechanical Engineering (SJME)*, *33*(2), pp.123-132. [In persion].
7. Williams, M.L., 1957. On the stress distribution at the base of a stationary crack. https://doi.org/10.1115/1.4011454
8. Rice, J.R. and Sih, G.C., 1965. Plane problems of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, *32*(2), pp.418-423. https://doi.org/10.1115/1.3625816
9. Pongvittayapanu, K., Srisrual, A. and Fakpan, K., 2022. Effect of thermal cycling and vibration on cracking in Sn-3.0 Ag-0.5 Cu solder bump. *Materials Today: Proceedings*, *52*, pp.2372-2376. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.10.222
10. Jensen, H.M., 1990. Mixed mode interface fracture criteria. *Acta metallurgica et materialia*, *38*(12), pp.2637-2644. https://doi.org/10.1016/0956-7151(90)90276-M
11. Talabi, R.B., S. Shahsavar, and M. Fakoor, 2024. Extended maximum principal stress (EMPS) criterion for fracture assessment of orthotropic materials with cracks along and across to the fibers. *Archive of Applied Mechanics,* pp. 1-20. https://doi.org/10.1007/s00419.24.02699.y
12. Khaji, Z. and M. Fakoor, 2022. Enhancing the ability of strain energy release rate criterion for fracture assessment of orthotropic materials under mixed-mode I/II loading considering the effect of crack tip damage zone. *Steel and Composite Structures, An International Journal*, *44*(6), pp. 817-828 https://doi.org/10.12989/scs.2022.44.6.803
13. Ebrahimi, M.T., Z. Khaji, and M. Fakoor, 2025. On mixed-mode fracture of brittle orthotropic solids: A novel micromechanical damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, *313*, pp. 110628. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.110628
14. Yeung, D.T., Lam, D.C. and Yuen, M.M., 2000. Specimen design for mixed mode interfacial fracture properties measurement in electronic packages. *J. Electron. Packag.*, *122*(1), pp.67-72. https://doi.org/10.1115/1.483137
15. Li, W. and Sun, X., 2017, August. An analysis case on the failure of BGA solder joints. In *2017 18th International Conference on Electronic Packaging Technology (ICEPT)* (pp. 731-734). IEEE. https://doi.org/10.1109/ICEPT.2017.8046553
16. Natarajan, S., Song, C. and Belouettar, S., 2014. Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, *279*, pp.86-112. https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.06.024
17. Andrade, H.D.C., Trevelyan, J. and Leonel, E.D., 2023. Direct evaluation of stress intensity factors and T-stress for bimaterial interface cracks using the extended isogeometric boundary element method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, *127*, p.104091. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104091
18. Khaji, Z., Fakoor, M., Farid, H.M. and Alderliesten, R., 2022. Applying the new experimental midpoint concept on strain energy density for fracture assessment of composite materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, *121*, pp.103522. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103522
19. Ryoji, Y. and Jin-Quan, X., 1992. Stress based criterion for an interface crack kinking out of the interface in dissimilar materials. *Engineering Fracture Mechanics*, *41*(5), pp.635-644. https://doi.org/10.1016/0013-7944(92)90150-D

20. Khaji, Z. and Fakoor, M., 2023. Fracture study of wood considering the effect of T-stress term based on matrix reinforcement coefficients model. *Archive of Applied Mechanics*, *93*(5), pp.1963-1983. https://doi.org/10.1007/s00419-023-02366-8

21. Daneshjoo, Z., Shokrieh, M.M., Fakoor, M. and Alderliesten, R.C., 2018. A new mixed mode I/II failure criterion for laminated composites considering fracture process zone. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, *98*, pp.48-58. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.09.004

22. Lall, P., Islam, M.N., Singh, N., Suhling, J.C. and Darveaux, R., 2004. Model for BGA and CSP reliability in automotive underhood applications. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, *27*(3), pp.585-593. https://doi.org/10.1109/TCAPT.2004.831824

23. Qian, W. and Sun, C.T., 1998. Methods for calculating stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids. *International Journal of Solids and Structures*, *35*(25), pp.3317-3330. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00181-9

24. Khaji, Z. and Fakoor, M., 2024. Assessing interfacial fracture in orthotropic materials: Implementing the RIS concept with considering the T-stress term under mixed-mode I/II. *Steel and Composite Structures*, *50*(2), pp.237. https://doi.org/10.12989/scs.2024.50.2.237

25. Ravichandran, M. and Ramesh, K., 2005. Evaluation of stress field parameters for an interface crack in a bimaterial by digital photoelasticity. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, *40*(4), pp.327-344. https://doi.org/10.1243/030932405X16034

26. Ahmadpour Kasgari S., Aliha, M. R. M., Sajadi S. J., Sadowski T. & Berto F., 2024. Progress in Friction Stir Welding of Polymer and Aluminum Alloys. *Mechanics of Composite Materials*, *59* (6), pp.1083-1100. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10158-y

27. Aliha, M. R. M., Hosseinpour, G. R., & Ayatollahi, M. R., 2013. Application of cracked triangular specimen subjected to three-point bending for investigating fracture behavior of rock materials. *Rock mechanics and rock engineering*. *46*(5), pp.1023-1034. https://doi.org/10.1007/s00603-012-0325-z

28. Bahmani, A., Aliha, M. R. M., Sarbijan, M. J., & Mousavi, S. S., 2020. An extended edge-notched disc bend (ENDB) specimen for mixed-mode I+ II fracture assessments. *International Journal of Solids and Structures*, *193*, pp.239-250. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.02.017

29. Shahryari, N., Keymanesh, M. R., & Aliha, M. R. M., 2021. Specimen type effect on measured low-temperature fracture toughness of asphalt concrete. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. *44*(2), pp.551-567. http://doi.org/10.1111/ffe.13379

30. Aliha, M. R. M., & Ayatollahi, M. R., 2010. Geometry effects on fracture behaviour of polymethyl methacrylate. *Materials Science and Engineering: A*, *527*(3), pp.526-530. https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.08.055

31. Mousavi, A., Aliha, M. R. M., Khoramishad, H., & Karimi, H. R., 2025. The effect of non-singular term (T-stress) on mode I/III cracking parameters of brittle materials, numerical and experimental study using different beam and disc shape specimens made of marble rock. *Forces in Mechanics*, *18*, pp.100303. https://doi.org/10.1016/j.finmec.2024.100303

32. Bidadi, J., Aliha, M. R. M., & Akbardoost, J., 2022. Development of maximum tangential strain (MTSN) criterion for prediction of mixed-mode I/III brittle fracture. *International Journal of Solids and Structures*, *256*, pp.111979. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111979

33. Marat-Mendes, R.M. and Freitas, M.M., 2010. Failure criteria for mixed mode delamination in glass fibre epoxy composites. *Composite Structures*, *92*(9), pp.2292-2298. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.07.017

34. Raimondo, A., Urcelay Oca, I. and Bisagni, C, 2021. Influence of interface ply orientation on delamination growth in composite laminates. *Composite Structures*, *55*(27), pp.3955-3972. https://doi.org/10.1177/00219983211031636

این صفحه عمداً خالی گذاشته شده است.