

بهبود پیش بینی شکست سطحی در اتصالات لحیم مورد الکترونیک با در نظر گرفتن نقش ترم

تنش T تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II

زهرا خاجی^۱، مهدی فکور^{۲*}، سعید شاخصی^۳، سعید سرخیل^۴

۱- استادیار، پژوهشکده علوم و فناوری هوافضا، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۲- استاد، دانشکده هوافضا، دانشگاه تهران

۳- دانشیار پژوهشگاه فضایی ایران

۴- استادیار پژوهشگاه فضایی ایران

* نویسنده مسئول

پست الکترونیکی نویسندگان:

۱- z_khaji_2010@aut.ac.ir

۲- mfakoor@ut.ac.ir

۳- s.shakhesi@isrc.ac.ir

۴- s.sarkheil@isrc.ac.ir

چکیده:

در طراحی اجزای سامانه‌های فضایی، جلوگیری از ترک خوردگی تحت ارتعاشات شدید تصادفی از پارامترهای کلیدی طراحی به شمار می‌رود. ترک‌ها معمولاً در سطح بین اتصالات لحیم و مورد الکترونیک ایجاد می‌شوند؛ از این رو توسعه‌ی ابزارهای ریاضی برای پیش‌بینی شکست اهمیت ویژه‌ای دارد. در این پژوهش، معیاری جهت پیش‌بینی شکست سطحی بین مورد الکترونیک و لحیم تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II ارائه شده است. این معیار بر مبنای مفهوم حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی و با در نظر گرفتن ترم تنش T تدوین گردیده است. مورد الکترونیک و اتصالات لحیم به ترتیب به عنوان مواد اورتوتروپیک و ایزوتروپیک مدل‌سازی شده‌اند، که ماده اورتوتروپیک از طریق مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت‌شده شبیه‌سازی می‌شود. نتایج نشان می‌دهد ترم تنش T نقش مهمی در پیش‌بینی مسیر و رفتار رشد ترک در ناحیه اتصال دارد. به کارگیری دقیق‌تر این ترم در تحلیل مود ترکیبی، پیش‌بینی شکست نهایی مورد را به طور محسوسی بهبود می‌دهد. در پایان، دقت معیار پیشنهادی با مقایسه با داده‌های تجربی موجود مورد اعتبارسنجی قرار گرفته است.

واژگان کلیدی:

مورد الکترونیک، شکست سطحی، ترم تنش T، حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی.

Enhanced Interfacial Fracture Prediction in Electronic Solder Joints Considering T-Stress under Mixed-Mode I/II Loading

Z. Khaji¹, M. Fakoor^{2*}, S. Shakhesi³, S. Sarkeil⁴

1- Assistant Prof., Space science and technology institute of Amirkabir University, Tehran, Iran.

2- Professor, College of Interdisciplinary Science and Technology, University of Tehran, Tehran, Iran.

3- Associate Prof., Iranian Space Research Center, Tehran, Iran.

4- Assistant Prof., Iranian Space Research Center, Tehran, Iran.

Abstract:

Ensuring the structural integrity of electronic assemblies exposed to severe random vibrations is a critical aspect of space systems engineering. In such assemblies, cracks typically initiate and propagate at the solder joint–Printed Circuit Board (PCB) interface due to the mismatch in material stiffness, thermal expansion coefficients, and the presence of complex dynamic stresses. Interfacial failure of solder joints not only reduces the mechanical reliability of the system but may also lead to functional failure of electronic modules. Therefore, developing an accurate and physics-based predictive model for interfacial fracture is of major significance for enhancing the durability and reliability of space electronic systems. In this study, a new interfacial fracture criterion is developed to predict crack initiation and propagation in PCB–solder interfaces subjected to mixed-mode I/II loading. The proposed model is formulated based on the Maximum Strain Energy Release Rate (MSERR) criterion, with explicit incorporation of the T-stress term, which accounts for the non-singular component of the near-tip stress field. The PCB is modeled as an orthotropic material, while the solder joint is treated as isotropic. The orthotropic response of the PCB is represented through a reinforced isotropic solid modeling approach, enabling an efficient yet accurate description of anisotropic stiffness characteristics. Parametric analyses demonstrate that the T-stress plays a decisive role in controlling the crack initiation angle, mode mixity, and overall failure envelope. Neglecting this term leads to notable deviations in predicting interfacial fracture under mixed-mode conditions. Incorporating the T-stress enhances the model's ability to capture the interaction between normal and shear components of stress, thereby improving the accuracy of predicted failure paths. Finally, the proposed criterion is validated against available experimental data and published analytical results. The comparison confirms strong agreement in predicting crack trajectory, critical energy release rate, and ultimate load capacity. The developed criterion provides valuable insights for the design and reliability assessment of microelectronic and aerospace structures where complex mixed-mode loading conditions prevail. This study highlights the essential role of the T-stress in advanced fracture mechanics formulations for predicting interfacial failure with higher fidelity.

Keywords: Electronic Board, Interfacial fracture, T-stress term. Strain energy release rate.

Introduction

The design and precision manufacturing of space systems are critically important due to their extremely high costs. Electronic boxes constitute the primary components of these systems [1]. Accurate modeling,

analysis, and detailed investigation of electronic boxes represent a core requirement in the aerospace domain. Solder joints frequently fail due to cracking within the solder or along the interface with the circuit board, under thermal and mechanical loading encountered during assembly, testing, or service[2-3].

Fracture mechanics assessment of an interfacial crack between two dissimilar materials is essential for evaluating the integrity of adhesive bonds, composites, and similar structures [4]. The elastic solution for the stress field around an interfacial crack tip has been derived, with stress intensity factor definitions discussed by Williams [7], Erdogan [5], and Rice and Sih [8]. These solutions reveal oscillatory stress variations and crack surface overlap near the tip.

Theoretical criteria for mixed-mode I/II fracture in composites are presented, based on energy or stress concepts. Among stress-based criteria, the maximum principal stress criterion [11] is noted. Regarding energy-based approaches, the maximum strain energy release rate [12] and minimum strain energy density [13] criteria have been proposed for composites.

Literature review indicates a clear need for developing mathematical tools to assess and predict interfacial fracture. This study investigates interfacial fracture between solder joints and electronic boards. The maximum strain energy release rate criterion is extended to include the out-of-plane stress component for improved fracture prediction under in-plane loading. The electronic board is modeled as an orthotropic material using a reinforced isotropic solid model. To validate the proposed criterion, the resulting fracture limit curve is compared with experimental data.

Methodology

Experimental observations indicate that a crack with any arbitrary orientation relative to the fibers in orthotropic materials tends to rotate toward the fiber direction and subsequently propagates through the isotropic matrix phase of the composite [18]. Accordingly, in the fracture process of orthotropic materials, it is assumed that the crack resides within the isotropic matrix, which is reinforced by fibers. Based on this experimental evidence, the reinforced isotropic solid model is introduced. From the derived relations, reinforcement coefficients are obtained between the normal and shear elastic moduli.

Fracture in solder joints predominantly occurs near the electronic board, although crack initiation adjacent to electronic components has also been reported in experimental studies [21]. This fracture typically initiates from the outer edges of the joint.

In this section, fracture and interfacial crack growth between two orthotropic materials under mixed-mode I/II loading are investigated. The crack length is denoted by a . Loading is considered as a combination of shear and tensile loads. The stress field around the tip of an interfacial crack in an isotropic material under mixed-mode I/II loading is presented, including the T-stress term. It is important to note that the T-stress term differs for the two dissimilar materials [19].

The development and derivation of the maximum strain energy release rate criterion begin with presenting the mathematical relations governing stresses in the orthotropic material. The tangential stress in the orthotropic material is expressed through the concept of the reinforced isotropic solid.

Finally, the magnitude and direction of the T-stress term in both isotropic and orthotropic materials are examined. Subsequently, the maximum strain energy release rate criterion is extended to incorporate the T-stress parameter. The first step in this development is to derive the stress fields of the orthotropic material while accounting for the T-stress term. In this manner, the stress field in the orthotropic material is expressed via the reinforced isotropic solid model.

Result

In this section, the maximum strain energy release rate criterion is validated for predicting interfacial fracture onset in laminated composites under in-plane loading. Theoretical fracture limit curves obtained from this criterion are compared with experimental data to evaluate prediction accuracy. The experimental results are derived from interfacial fracture tests on unidirectional glass/epoxy composites, as reported in reference [26]. In these tests, critical stress intensity factors for pure mode I (K_{Ic}) and pure mode II (K_{IIc}) were determined.

Fig (4) demonstrates that incorporating the T-stress term shifts the theoretical fracture limit curve toward convergence with experimental data. This finding confirms that T-stress calculations constitute a crucial parameter for predicting interfacial fracture onset. The improvement in prediction accuracy highlights the importance of including higher-order terms in the stress field expansion near the crack tip, particularly for materials with significant anisotropy.

For further validation of the proposed mixed-mode fracture criterion, the fracture limit curve based on the maximum strain energy release rate criterion is derived for Im7/977-2 material with [0, 45] composite laminate orientation, as shown in Fig (5). The good and acceptable agreement between the fracture limit curve and experimental data indicates that this criterion, through proper modeling of material anisotropy, accurately predicts interfacial fracture behavior in composite materials. This consistency across different material systems and layup configurations confirms the robustness and general applicability of the proposed criterion for practical engineering applications.

Conclusion

This paper investigates interfacial fracture between components of a satellite electronic board. The reinforced isotropic solid model is used to model the orthotropic material, accounting for stress fields in both fibers and matrix. The T-stress term is included in the normal and shear stress equations around the crack tip for improved accuracy. By developing the stress field for an interfacial crack between orthotropic and isotropic materials under mixed-mode I/II loading, the maximum strain energy release rate criterion is proposed. For validation, fracture limit curves based on this criterion are compared with experimental results. The comparison confirms that the proposed criterion provides sufficient accuracy for predicting interfacial crack growth onset between isotropic and orthotropic materials.

۱- مقدمه و تاریخچه تحقیقات

امروزه مسئله طراحی و ساخت دقیق سامانه های فضایی به علت هزینه های بسیار بالا اهمیت ویژه ای دارد. بخش اصلی سیستم های فضایی جعبه های الکترونیک هستند. مدل سازی، تحلیل و بررسی دقیق جعبه های الکترونیک یکی از نیازهای اصلی در حوزه فضایی به شمار می رود. اجزای الکترونیک در یک عملیات فضایی تحت ارتعاشات تصادفی شدیدی قرار دارند. طراحی اجزا به گونه ای که از آسیب پیشرونده و رشد ترک جلوگیری شود، اهمیت ویژه ای دارد. اتصالات لحیم کاری به عنوان اتصالات الکتریکی و مکانیکی بین تراشه های مدار مجتمع^۱ و بوردهای مدار چاپی در دستگاه های الکترونیکی عمل می کنند. خرابی این دستگاه ها اغلب به دلیل ترک خوردگی در لحیم کاری یا ترک سطحی بین لحیم و برد الکترونیک تحت شرایط مختلف بارگذاری حرارتی و مکانیکی در هنگام مونتاژ، آزمایش یا سرویس است.

اتصالات لحیم کاری، اجزای حیاتی بوردهای مدار چاپی در سیستم های الکترونیکی متحرک مانند ماهواره ها و صنایع خودروسازی می باشند که در برابر ارتعاشات تصادفی آسیب پذیر هستند. بوردهای مدار چاپی در سیستم های متحرک مانند صنایع خودروسازی، هواپیما، ماهواره و سیستم های ارتباطی در صنایع برق و الکترونیک کاربرد دارند. بارگذاری حرارتی و ارتعاشی مهم ترین پارامترهایی هستند که می توانند عمر طولانی این بوردها را تحت تاثیر قرار دهند. اتصالات لحیم کاری نقاط اتصال بین قطعات الکترونیکی و برد مدار چاپی هستند و ارتعاشات بر این نقاط تاثیر ویژه ای می گذارد. به خصوص هنگامی که برد الکترونیک مدار چاپی در یک سیستم متحرک مانند هواپیما یا ماهواره قرار می گیرد، تاثیر پارامترهایی مانند لرزش باید بر روی اتصالات لحیم کاری در نظر گرفته شود.^۱ بوردهای الکترونیک ممکن است تحت تاثیر بارگذاری های شدید دچار خرابی های مکانیکی در اتصالات بین قطعات و برد مدار چاپی شوند.^۲

یک برد الکترونیک پشتیبانی مکانیکی و اتصال الکتریکی را برای قطعات مختلف الکترونیکی مونتاژ شده روی آن فراهم می کند. برد الکترونیک معمولاً یک کامپوزیت پلیمری چند لایه متشکل از یک ماتریس رزین اپوکسی با بسته های بافته شده از الیاف شیشه است. مشابه سایر کامپوزیت های چند لایه، خواص مکانیکی برد الکترونیک بسیار ناهمسانگرد است. سختی درون صفحه و استحکام کششی بوردهای الکترونیک بسیار بزرگتر از سختی و استحکام کششی خارج از صفحه است. به عبارت دیگر، بوردها در جهت الیاف بسیار قوی تر از جهت عرضی (عمود بر برد الکترونیک) هستند. شواهد حاکی از آن است که استحکام کششی عرضی معمولاً نزدیک به مقاومت رزین اپوکسی است که الیاف شیشه را پیوند می دهد.^۳

اغلب ترک در داخل لحیم یا در سطح مشترک با یکی از مواد ایجاد می شود. پس از آن تغییر مسیر داده و با احتمال انحراف بیشتر به اجزای کامپوزیت سازه به سمت سطح مشترک با یکی از مواد پیوندی حرکت می کند و در نتیجه یکپارچگی سازه را به خطر می اندازد. بنابراین، توانایی پیش بینی مسیر انتشار ترک بسیار مهم می شود.

معمولاً شروع رشد ترک از تجزیه و تحلیل تنش بر مبنای محاسبه چگالی انرژی قابل پیش بینی است.^۴ هم چنین، بخش های انبساط^۵ و اعوجاج^۶ برای بررسی شروع رشد ترک در معیارهایی برای محاسبه تشکیل حفره یا تسلیم برشی به کار برده می شود، در حالی که مکانیک شکست الاستیک خطی^۷ به بررسی انتشار ترک می پردازد.^۸ در سازه هایی با بارگذاری پیچیده، مودهای تنش مورد نیاز برای تحلیل مکانیک شکست الاستیک خطی تحلیلی وجود ندارند و باید از شبیه سازی اجزا محدود^۹ استفاده شود.^{۱۰}

ارزیابی مکانیک شکست یک ترک سطحی بین دو ماده ی غیر مشابه در ارزیابی یکپارچگی اتصالات چسب، مواد کامپوزیت و غیره مهم است. حل الاستیک میدان تنش اطراف نوک ترک سطحی استخراج شد و تعریف ضرایب شدت تنش توسط ویلیامز^{۱۱}، اردوغان^{۱۲} و رایس^{۱۳} و سیه^{۱۴} مورد بحث قرار گرفت. در این حل ها، تغییرات

^۶ Williams

^۷ Erdogan

^۸ Rice

^۹ Sih

^۱ Integrated circuit (IC)

^۲ Dilatational

^۳ Distortional

^۴ Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM)

^۵ Finite Element Method (FEM)

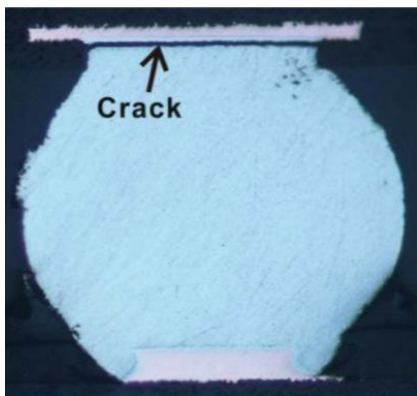


Figure 1. Crack in the interface of solders and electronics components [15]

شکل ۱. ترک در سطح مشترک بین لحیم و اجزای الکترونیکی^[۱۵]
تحقیقات اخیر در مورد رشد ترک‌های سطحی بین دو ماده، حکایت از تأثیر قابل توجه ترم تنش T بر رفتار ترک و توزیع تنش را نشان می‌دهد.^[۱۷، ۱۶] یک روش رایج برای محاسبه این تنش در مسائل ترک سطحی مربوط به مواد اورتوتروپیک، بسط سری ویلیامز توسعه یافته است. این رویکرد، معادلات ریاضی تنش را به صورت مجموعه‌ای از توابع بیان می‌کند و وابستگی به جهت مواد کامپوزیت را در نظر می‌گیرد. ترم تنش T به عنوان مؤلفه تنش غیر منفرد با تجزیه و تحلیل عبارات ریاضی در بسط سری تعیین می‌شود.

با مرور پژوهش‌هایی که تاکنون در حوزه شکست‌های سطحی انجام شده است، می‌توان دریافت نیاز به توسعه ابزار ریاضیاتی برای بررسی و برآورد شکست در شکست‌های سطحی یکی از ضرورت‌های مهم تلقی می‌شود. در این پژوهش، به بررسی و ارزیابی شکست سطحی بین اتصالات لحیم و بورد الکترونیک پرداخته می‌شود. به منظور بررسی رخداد شکست سطحی باید از یک معیار شکست معتبر بهره برد. به این ترتیب، معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی برای بررسی شکست سطحی اتصالات لحیم و بورد الکترونیک تحت بارگذاری داخل صفحه ارائه می‌شود. به منظور مدلسازی بورد الکترونیک به عنوان ماده اورتوتروپیک از مدل ماده جامد ایزوتروپیک تقویت شده استفاده می‌شود. در معادلات معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی علاوه بر میدان‌های تنش برشی و عمودی، مؤلفه تنش T نیز به منظور پیش بینی دقیق تر شکست در نظر گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن این تنش در معادلات معیار ارائه شده رفتار شکست با دقت بهتری پیش بینی می‌شود. هم چنین، برای ارزیابی معیار ارائه

میدان تنش و همپوشانی سطوح ترک در مجاورت نوک ترک ظاهر می‌شود.

در دهه‌های اخیر بررسی مسئله واماندگی اتصالات لحیم در پکیج‌های الکترونیک موضوع جدی در صنعت ساخت بورد‌های الکترونیک بوده است.^[۹] مشاهدات تجربی حاکی از آن است که چقرمگی شکست در ترک سطح بین دو ماده ای کاملاً به مقدار نسبی ضرایب شدت تنش مود I و II وابسته است.^[۱۰]

در این بخش، معیارهای تئوری مود ترکیبی I/II مواد کامپوزیتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. معیارهای تئوری بر مبنای مفهوم انرژی و یا تنش ارائه می‌شوند. برای معیارهای بر مبنای تنش تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II در مواد کامپوزیت می‌توان به معیار حداکثر تنش اصلی^[۱۱] اشاره کرد. در معیارهای بر مبنای انرژی نیز معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی^[۱۲] و حداکثر چگالی انرژی کرنشی^[۱۳] برای مواد کامپوزیتی ارائه شدند.

در ترک‌های سطحی، تمرکز تنش بالایی در نوک ترک یا عیب وجود دارد. تنش‌ها در میدان نوک ترک به صورت ترکیبی از نرخ آزادسازی انرژی کرنشی در وضعیت کششی (G_I) و نرخ آزادسازی انرژی کرنشی در وضعیت برشی (G_{II}) مشخص می‌شود. جدایش سطحی زمانی رخ می‌دهد که حداکثر مقدار G_I و G_{II} از مقاومت بحرانی شکست در مود I و II (G_{IC} و G_{IIC}) بیشتر باشد. در حالت بارگذاری مود ترکیبی I/II نیز شکست زمانی رخ می‌دهد که حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی مود ترکیبی $(G_{I/II})$ به مقدار بحرانی حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی $(G_{I/IIc})$ برسد.^[۱۴] شکل (۱) نمایی از رشد ترک در اتصال بین بورد الکترونیک و لحیم را نشان می‌دهد.

شده به مقایسه منحنی حد شکست ارائه شده با نتایج تجربی پرداخته می‌شود.

۲- مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت شده

مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت شده بر اساس مشاهدات تجربی شکست مواد اورتوتروپیک است. مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که یک ترک با هر جهت دلخواه به الیاف در مواد اورتوتروپیک در امتداد الیاف می‌چرخد و در بخش ماتریس همسانگرد مواد کامپوزیتی منتشر می‌شود^[۱۸]. بنابراین در فرایند شکست در مواد اورتوتروپیک فرض می‌شود که ترک در ماتریس ایزوتروپیک قرار دارد که با الیاف تقویت می‌شوند.

بر اساس مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت شده، الیاف تنش‌های اعمالی بر روی ماده ایزوتروپیک را با ضرایب تقویت کنندگی ξ_i کاهش می‌دهند. روابط ریاضیاتی ضرایب تقویت کننده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{11}^{iso} = \frac{\sigma_{11}^{orth}}{\xi_1}, \sigma_{22}^{iso} = \frac{\sigma_{22}^{orth}}{\xi_2}, \sigma_{12}^{iso} = \frac{\sigma_{12}^{orth}}{\xi_3} \quad (1)$$

که در این معادله، σ_{ij}^{orth} و σ_{ij}^{iso} به ترتیب میدان تنش ماده اورتوتروپیک و میدان تنش بخش ایزوتروپیک ماتریس است. معادله (1) نشان می‌دهد که می‌توان به جای میدان تنش اورتوتروپیک، میدان تنش ایزوتروپیک کاهش یافته با ضریب ξ_i را در نظر گرفت. می‌توان اثبات کرد که برای ارضای معادلات سازگاری برای ماتریس ایزوتروپیک، لازم است روابط زیر برقرار باشد^[۱۹]:

$$\xi_1 = \frac{E_{xx}}{E_{yy}} \quad (2)$$

$$\xi_2 = 1 \quad (3)$$

$$\xi_3 = G_{12}(1 - V_f) \left(1 + \frac{E_{11}(1 + \nu_{21})}{E_{22}(1 + \nu_{12})} \right) \quad (4)$$

که در معادلات بالا، E_{11} ، E_{22} و G_{12} به ترتیب مدول الاستیک در راستا، عمود بر الیاف و برشی هستند. هم چنین، V_f مربوط به حجم الیاف می‌شود^[۲۰].

۱- بررسی مسئله شکست سطحی

شکست در اتصالات لحیم عمدتاً در مجاورت بورد الکترونیکی رخ می‌دهد، اگرچه شروع شکست در نزدیکی قطعات الکترونیکی براساس مطالعات آزمایشگاهی مرجع^[۲۱] گزارش شده است. این شکست معمولاً از لبه‌های بیرونی اتصال شروع می‌شود. با توجه به ماهیت ایزوتروپیک ماده لحیم، شکل (2) انتشار ترک سطحی در اتصالات لحیم را نشان می‌دهد.

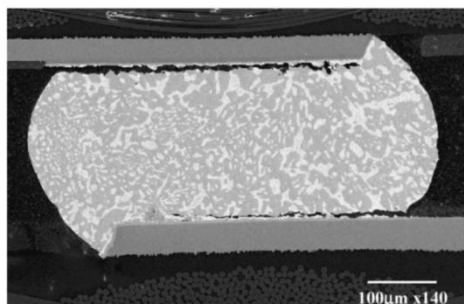


Figure 2. Illustration of interfacial crack propagation between the PCB board and solder joints [23]

شکل ۲. نمایش انتشار ترک سطحی بین بورد و اتصالات لحیم^[۲۲]
در این بخش، انتشار ترک سطحی بین یک بورد الکترونیکی اورتوتروپیک و اتصالات لحیم ایزوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II مدل‌سازی می‌شود. سه مسیر انتشار بالقوه وجود دارد: (الف) به زیرلایه اورتوتروپیک (بورد الکترونیکی)، (ب) به ماده ایزوتروپیک (لحیم) و (ج) در امتداد سطح مشترک. محتمل‌ترین مسیر در امتداد سطح مشترک دو ماده رخ می‌دهد، زیرا استحکام پیوند آن در مقایسه با مواد همگن، به طور مشخص پایین‌تر است. هنگامی که استحکام پیوند سطح مشترک قابل توجه است و تنش‌های برشی غالب هستند، ترک ممکن است به سمت هر یک از مواد مجاور بچرخد. این پژوهش بر انتشار ترک در سطح مشترک دو ماده به عنوان یک مود شکست رایج در سیستم‌های دوماده‌ای تمرکز دارد (شکل ۲).

تحقیقات گسترده‌ای در حوزه میدان‌های تنش و جابجایی نوک ترک برای ترک‌های سطحی تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II پیش‌بینی رفتار رشد ترک انجام شده است^[۱۲]. همانطور که در شکل (2) نشان داده شده است، ترک در سطح مشترک دو ماده ایزوتروپیک (لحیم) و اورتوتروپیک (بورد الکترونیکی) قرار دارد.

در این بخش، ابتدا معادلات ریاضی حاکم بر معیار شکست حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی برای ترک‌های سطحی بین مواد

$$\sigma_{xx(i)}^{Iso} = \frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{11}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{11}(r, \theta) + T_{(i)} \quad (5)$$

$$\sigma_{yy(i)}^{Iso} = \frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{22}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{22}(r, \theta) \quad (6)$$

$$\sigma_{xy(i)}^{Iso} = \frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{12}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{12}(r, \theta) \quad (7)$$

که ضرایب f_{ij} و g_{ij} در معادلات (۸) تا (۱۳) بیان شده‌اند [۲۵].

$$f_{11(i)}(r, \theta) = S \left\{ \begin{aligned} &3 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) - \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \\ &+ 2\varepsilon_i \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \end{aligned} \right\} - \frac{1}{S} \cos\left(-\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \quad (8)$$

$$f_{22(i)}(r, \theta) = S \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) + \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \\ &- 2\varepsilon_i \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \end{aligned} \right\} + \frac{1}{S} \cos\left(-\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \quad (9)$$

$$f_{12(i)}(r, \theta) = S \left\{ \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) + \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \\ &+ 2\varepsilon_i \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \end{aligned} \right\} + \frac{1}{S} \sin\left(-\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \quad (10)$$

$$g_{11(i)}(r, \theta) = S \left\{ \begin{aligned} &-3 \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) - \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \\ &- 2\varepsilon_i \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \end{aligned} \right\} - \frac{1}{S} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \quad (11)$$

اورتوتروپیک غیرمشابه استخراج می‌شود. برای مورد خاص بررسی ترک سطحی بین لحیم و برد الکترونیک سیستم به صورت ایزوتروپیک-اورتوتروپیک مدل می‌شود و ضریب تقویت کنندگی برای لحیم برابر با $\varepsilon_i^* = 1$ تعیین می‌شود. معادلات معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی متعاقباً برای استخراج منحنی‌های حد شکست حل می‌شوند.

۲- میدان تنش برای ترک‌های سطحی بین دو ماده اورتوتروپیک بر مبنای مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت شده

کیان و سان توانستند ترک سطحی بین دو ماده اورتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II را مدل کنند. آنها حل تحلیلی برای نرخ آزادسازی انرژی کرنشی در مود I و II بر حسب ضرایب شدت تنش و خواص دو ماده اورتوتروپیک ارائه کردند [۲۳].

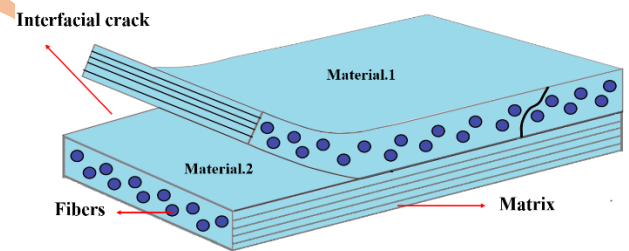


Figure 3. Interfacial surface crack between two dissimilar orthotropic materials subjected to mixed-mode I/II loading [24].

شکل ۳. ترک سطحی بین دو ماده اورتوتروپیک غیرمشابه تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II [۲۴]

در این بخش بررسی شکست و رشد ترک سطحی بین دو ماده اورتوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II انجام می‌شود. طول ترک l است. بارگذاری به صورت ترکیب بارگذاری برشی و کششی در نظر گرفته شده است. در این بخش میدان تنش اطراف نوک ترک سطحی ماده ایزوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II با در نظر گرفتن ترم تنش T ارائه می‌شود. نکته مهم در اینجا این است که ترم تنش $T_{(i)}$ برای دو ماده متفاوت از یکدیگر است [۱۹].

در معادله (۱۹)، پارامتر β با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\beta = \left[\left(\frac{S_{12(2)}}{L_{22(2)}} \right)^2 - \left(\frac{S_{12(1)}}{L_{22(1)}} \right)^2 \right] \cdot \frac{\operatorname{sgn} \left[\left(\frac{S_{12(2)}}{L_{22(2)}} \right)^2 - \left(\frac{S_{12(1)}}{L_{22(1)}} \right)^2 \right]}{\sqrt{D_{11} D_{22} - D_{12}^2}} \quad (20)$$

در معادله فوق، پارامتر β به ضرایب D_{11} ، D_{12} ، D_{22} و L_{11} وابسته است. ضرایب فوق به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$D_{11} = \sum_{i=1}^2 \frac{L_{11(i)} \sin^2 \theta_i + L_{22(i)} \cos^2 \theta_i}{L_{11(i)} L_{22(i)}} \quad (21)$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^2 \frac{L_{11(i)} \cos^2 \theta_i + L_{22(i)} \sin^2 \theta_i}{L_{11(i)} L_{22(i)}} \quad (22)$$

$$D_{12} = \sum_{i=1}^2 \frac{\cos \theta_i \sin \theta_i (L_{11(i)} - L_{22(i)})}{L_{11(i)} L_{22(i)}} \quad (23)$$

در معادلات فوق، ضرایب θ_i زاویه بین ترک و الیاف در هر ماده اورتوتروپیک است. ضرایب $L_{11(i)}$ و $L_{22(i)}$ برای ماده یک و دو نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_{11(i)} = (C_{12(i)} + \sqrt{C_{11(i)} C_{22(i)}}) S_{21(i)} \quad (24)$$

$$L_{22(i)} = \sqrt{\frac{C_{22(i)}}{C_{11(i)}}} L_{11(i)} \quad (25)$$

پارامترهای $S_{12(i)}$ و $S_{21(i)}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S_{21(i)} = \left[\frac{C_{66(i)} (\sqrt{C_{11(i)} C_{22(i)}} - C_{12(i)})}{C_{22(i)} (C_{12(i)} + 2C_{66(i)} + \sqrt{C_{11(i)} C_{22(i)}})} \right]^{1/2} \quad (26)$$

$$S_{12(i)} = -\sqrt{\frac{C_{22(i)}}{C_{11(i)}}} S_{21(i)} \quad (27)$$

$$g_{22(i)}(r, \theta) = S \left\{ \begin{aligned} & -\sin\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) + \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \\ & + 2\varepsilon_i \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \end{aligned} \right\} + \frac{1}{S} \sin\left(\frac{\theta}{2} - \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \quad (12)$$

$$g_{12(i)}(r, \theta) = S \left\{ \begin{aligned} & \cos\left(\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) - \sin \theta \cdot \sin\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \\ & + 2\varepsilon_i \sin \theta \cdot \cos\left(\frac{3\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \end{aligned} \right\} + \frac{1}{S} \cos\left(-\frac{\theta}{2} + \varepsilon_i \ln \frac{r}{l}\right) \quad (13)$$

حال بر مبنای روابط مدل جامد ایزوتروپیک تقویت شده، میدان تنش در مواد اورتوتروپیک به صورت زیر است:

$$\sigma_{xx(i)}^{Orth} = \frac{1}{\xi_1} \left[\frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{11(i)}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{11(i)}(r, \theta) + T \right] \quad (14)$$

$$\sigma_{yy(i)}^{Orth} = \frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{22(i)}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{22(i)}(r, \theta) \quad (15)$$

$$\sigma_{xy(i)}^{Orth} = \frac{1}{\xi_3} \left[\frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{12(i)}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{12(i)}(r, \theta) \right] \quad (16)$$

در معادلات میدان تنش اورتوتروپیک ضرایب S ، Q و ε تعریف می‌شوند. این ضرایب به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$S = e^{-\varepsilon(\pi - \theta)} \quad (17)$$

$$Q = 2\sqrt{2} \cosh(\pi\varepsilon) \quad (18)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (19)$$

۳- توسعه معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی

توسعه و استخراج معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی با ارائه روابط ریاضی مربوط به تنش در ماده اورتوتروپیک آغاز می شود. تنش مماسی در ماده اورتوتروپیک از طریق مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت شده با استفاده از معادله (۱) به صورت زیر بیان می شود:

$$\sigma_{\theta\theta(i)}^{orth} = \sin^2 \theta \cdot \sigma_{xx(i)}^{orth} + \cos^2 \theta \cdot \sigma_{yy(i)}^{orth} - 2 \cos \theta \sin \theta \cdot \sigma_{xy(i)}^{orth} \\ = \frac{\sin^2 \theta}{\xi_{1(i)}} \cdot \sigma_{xx(i)}^{iso} + \cos^2 \theta \cdot \sigma_{yy(i)}^{iso} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\xi_{3(i)}} \cdot \sigma_{xy(i)}^{iso} \quad (28)$$

$$\sigma_{r\theta(i)}^{orth} = (\sigma_{xx(i)}^{orth} - \sigma_{yy(i)}^{orth}) \cos \theta \sin \theta + \sigma_{xy(i)}^{orth} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ = \left(\frac{\sigma_{xx(i)}^{iso}}{\xi_{1(i)}} - \sigma_{yy(i)}^{iso} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\sigma_{xy(i)}^{iso}}{\xi_{3(i)}} \cdot (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (29)$$

در نتیجه، روابط ریاضی معیار شکست حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی بر حسب میدان تنش استخراج می شود. با پیروی از فرمول بندی در مرجع [۲۰]، رابطه بین حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی و میدان تنش اورتوتروپیک به صورت زیر است:

$$G_{(i)}^{orth} = 2\pi r \cdot \left(\frac{\sigma_{r\theta(i)}^2}{E_{I(i)}} + \frac{\sigma_{\theta\theta(i)}^2}{E_{II(i)}} \right)^{orth} \quad (30)$$

رابطه فوق منجر به معادله زیر برای معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی می شود:

$$G_{(i)}^{orth} = K_I^2 \cdot A_1(\theta) + K_{II}^2 \cdot A_2(\theta) + 2K_I K_{II} \cdot A_3(\theta) \quad (31)$$

$$A_1(\theta) = \frac{2\pi}{Q} \cdot \left(\frac{f_{12(i)}^2}{E_{I(i)}} + \frac{f_{11(i)}^2}{E_{II(i)}} \right) \quad (32)$$

$$A_2(\theta) = \frac{2\pi}{Q} \cdot \left(\frac{g_{12(i)}^2}{E_{I(i)}} + \frac{g_{11(i)}^2}{E_{II(i)}} \right) \quad (33)$$

$$A_3(\theta) = \frac{2\pi}{Q} \cdot \left(\frac{g_{12(i)} \cdot f_{12(i)}}{E_{I(i)}} + \frac{g_{11(i)} \cdot f_{11(i)}}{E_{II(i)}} \right) \quad (34)$$

مفهوم معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی بیان می کند که ترک در جهتی شروع به رشد می کند که نرخ آزادسازی انرژی کرنشی به حداکثر مقدار خود برسد. بر مبنای این معیار ترک لحظه ای شروع به رشد می کند که نرخ آزادسازی انرژی کرنشی به مقدار بحرانی خود برسد. با استفاده از این مفاهیم دو رابطه زیر برای پیش بینی جهت و لحظه شروع رشد ترک استخراج می شوند:

$$G_{C(i)}^{orth} = K_I^2 \cdot A_1(\theta) + K_{II}^2 \cdot A_2(\theta) + 2K_I K_{II} \cdot A_3(\theta) \quad (35)$$

$$\frac{\partial G(\theta)_{(i)}^{orth}}{\partial \theta} = 0 \text{ \& } \frac{\partial^2 G(\theta)_{(i)}^{orth}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (36)$$

با حل همزمان دو معادله فوق می توان منحنی حد شکست یا منحنی تغییرات K_{II} بر حسب K_I را ترسیم کرد و رفتار شکست را برآورد کرد.

۴- توسعه معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی با

در نظر گرفتن ترم تنش T

ترم تنش T از اهمیت ویژه ای در زمینه مکانیک شکست الاستیک خطی به عنوان ترم دوم عبارت تنش و هم چنین ترم غیر منفرّد در بسط سری ویلیامز میدان تنش نوک ترک برخوردار است. این عبارت که با تنش T ثابت مشخص می شود، نشان دهنده تنش یکنواختی است که به موازات صفحه ترک عمل می کند [۲۴]. تنش T یک ترم مرتبه اول مهم برای تعیین کمیت قید نوک ترک ارائه می دهد. این قید که اغلب به عنوان سه محوری بودن حالت تنش توصیف می شود، به طور قابل توجهی بر توسعه ناحیه پلاستیک و چقرمگی شکست تأثیر می گذارد.

در مواد ایزوتروپیک وقتی قطعه ترک دار تحت بارگذاری مود I خالص قرار می گیرد، ترک در راستای مسیر اولیه خود رشد می کند و این تنش تأثیری بر روی رشد ترک ندارد. با عبور از شرایط مود I خالص

و ظهور مود II، ترک می‌چرخد و این تنش در راستای ترک چرخیده مولفه پیدا می‌کند^[۲۰].

در مواد اورتوتروپیک، در وضعیتی که ترک در راستای الیاف قرار دارد، این تنش مولفه‌ای در راستای ترک تحت شرایط بارگذاری مود ترکیبی I/II ندارد. به این ترتیب، این تنش تأثیری بر روی فرآیند رشد ترک ندارد. در وضعیتی که ترک زاویه‌ی دلخواهی نسبت به الیاف دارد، تحت شرایط مود ترکیبی ترک می‌چرخد و در راستای الیاف منتشر می‌شود. به این ترتیب، ترک در راستای الیاف مولفه دارد و این تنش در رشد ترک موثر است. زمانی که جهت انتشار ترک در راستای عمود بر الیاف است، این تنش بیشترین تأثیر را بر روی رشد ترک دارد. تنش ترم T به هندسه، طول ترک (نسبت طول ترک به عرض قطعه) و شرایط بارگذاری وابسته است^[۲۰].

مقدار تنش T منفی در مواد ایزوتروپیک و اورتوتروپیک، قید بالاتر را افزایش می‌دهد و می‌تواند چقرمگی اندازه‌گیری شده را کاهش دهد، در حالی که مقدار تنش T مثبت، قید را کاهش می‌دهد و اغلب منجر به افزایش مقادیر چقرمگی می‌شود^[۲۶]. مقادیر مثبت این تنش سبب کاهش ضریب شدت تنش مود II (چقرمگی شکست مود II) می‌شود و مقادیر منفی آن سبب افزایش چقرمگی شکست مود II می‌شود. به علاوه، این تنش بر روی چقرمگی شکست مود I خالص تأثیری ندارد. به این ترتیب، در وضعیت مود ترکیبی I/II به میزان ظهور مود II، ترم تنش T می‌تواند مقادیر مثبت آن باعث کاهش ضرایب شدت تنش و مقادیر منفی آن باعث افزایش ضرایب شدت تنش شود.

تاکنون مطالعات گسترده‌ای درباره تأثیر ترم تنش T در قطعات مختلف تست انجام شده است. تأثیر ترم تنش T در قطعات خمش نیم دایره ای^{۱۰}، نمونه مثلثی لبه ترک دار^{۱۱}، نمونه خمشی دیسک لبه ترک دار^{۱۲}، نمونه دیسک لبه ترک دار تحت فشار^{۱۳}، نمونه خمش چهار نقطه ای^{۱۴}، نمونه حلقوی تحت فشار قطری^{۱۵} و نمونه تیر خمشی کوتاه^{۱۶} در پژوهش‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت^[۲۷].^{۳۰} نتایج این مقالات نشان می‌دهد که پارامتر ترم تنش T وابسته به هندسه و نوع بارگذاری است و تأثیری تعیین‌کننده بر مقدار

چقرمگی شکست اندازه‌گیری شده در نمونه‌های مختلف دارد. به‌گونه‌ای که برای یک ماده‌ی ثابت (مانند PMMA)، استفاده از نمونه‌های با ترم تنش T مثبت (مانند نمونه‌های SBB، SCB و ECT) باعث کاهش محسوس چقرمگی شکست در مودهای ترکیبی I/II و به‌ویژه مود II خالص می‌شود (به‌طوری‌که در نمونه‌ی SBB، نسبت چقرمگی شکست مود II به مود I به حدود 0.5 کاهش یافت). در مقابل، نمونه‌هایی با ترم تنش T منفی (مانند نمونه‌های ENDB، Ring و ENDC) با ایجاد یک میدان فشاری در جلوی نوک ترک، باعث افزایش چشمگیر چقرمگی شکست می‌شوند (به‌طوری‌که در نمونه‌ی ENDB، نسبت چقرمگی شکست مود II به مود I به حدود 1.8 رسید). نمونه‌هایی با ترم تنش T نزدیک به صفر (مانند FPB) نیز رفتاری میانی داشته و نتایج آنها به پیش‌بینی ملاک کلاسیک MTS نزدیک‌تر است.

در این بخش، تأثیر ترم تنش T در وضعیتی که مود تنش خارج از صفحه یعنی مود III (پارگی) ظاهر گردد، بررسی می‌شود. در مود III خالص، ترم تنش T منفی باعث افزایش چشمگیر چقرمگی شکست مود III می‌شود؛ به‌طوری‌که نمونه‌ی فشاری قطری با دو برش لبه ای^{۱۷} با منفی‌ترین تنش T ، بیشترین چقرمگی شکست مود III را نشان می‌دهد. در مقابل، نمونه‌ی ENDB با تنش T منفی‌تر در مود III، کمترین چقرمگی شکست مود III را دارد که نشان می‌دهد هرچه تنش ترم T در مود III منفی‌تر باشد، چقرمگی شکست مود III بیشتر می‌شود. به‌طور کلی، رابطه‌ی مستقیم و مثبتی بین مقدار مطلق تنش ترم T منفی و چقرمگی شکست مود III وجود دارد؛ به عبارت دیگر، هرچه تنش ترم T منفی‌تر باشد، چقرمگی شکست مود III افزایش می‌یابد و بالعکس^[۳۱].

در نتیجه، پارامتر تنش T برای توضیح رفتار شکست وابسته به هندسه و برای کاربردهای مکانیک شکست اساسی است^[۳۲]. تجزیه و تحلیل آن برای انتقال داده‌های چقرمگی در مقیاس آزمایشگاهی به ارزیابی سازه‌های ترک خورده در مقیاس بزرگ ضروری است^[۳۰].

در حوزه تأثیر ترم تنش T بر روی زاویه شروع رشد ترک، پژوهش‌ها حاکی از آن است که در وضعیتی که ترک عمود بر الیاف قرار دارد،

^{۱۰} Four-point bend (FPB)

^{۱۱} Diametrically compressed ring (DCR)

^{۱۲} Short bend beam (SBB)

^{۱۷} Double-notch diametral compression (DNDC)

^{۱۰} Semi-circular bend (SCB)

^{۱۱} Edge cracked triangular (ECT)

^{۱۲} Edge-notched disc bend (ENDB)

^{۱۷} Edge notch disc compression (ENDC)

فرمول‌بندی در مرجع [۲۰]، رابطه بین حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی و میدان تنش اورتوتروپیک به صورت زیر است:

$$G_{(i)}^{orth} = 2\pi r \left(\frac{\sigma_{r\theta(i)}^2}{E_{I(i)}} + \frac{\sigma_{\theta\theta(i)}^2}{E_{II(i)}} \right)^{orth} \quad (42)$$

عبارت تنش T تأثیر عمیقی بر رفتار شکست مواد اورتوتروپیک دارد. پارامتر B (واحد آن $MPa\sqrt{m}$ است). برای نرمال‌سازی عبارت تنش T تعریف می‌شود. بنابراین، عبارت تنش T به صورت زیر بیان می‌شود [۲۰]:

$$T = \frac{B}{\sqrt{2\pi r}} \quad (43)$$

رابطه فوق منجر به معادله زیر برای معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی می‌شود:

$$G_C^{orth}(\theta) = \frac{1}{E_I} (K_I^2 D_1(\theta) + K_{II}^2 D_2(\theta) + K_I K_{II} D_3(\theta) + D_4(\theta) K_I + D_5(\theta) K_{II} + D_6(\theta)) \quad (44)$$

$$D_1(\theta) = \left(\frac{A_1^2(\theta)}{\alpha_1^2(\varphi)} + \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}} \frac{A_3^2(\theta)}{\alpha_3^2(\varphi)} \right) \quad (45)$$

$$D_2(\theta) = \left(\frac{A_2^2(\theta)}{\alpha_1^2(\varphi)} + \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}} \frac{A_4^2(\theta)}{\alpha_3^2(\varphi)} \right) \quad (46)$$

$$D_3(\theta) = \left(2 \frac{A_1(\theta)A_2(\theta)}{\alpha_1^2(\varphi)} + 2 \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}} \frac{A_3(\theta)A_4(\theta)}{\alpha_3^2(\varphi)} \right) \quad (47)$$

$$D_4(\theta) = \left(2 \frac{A_1(\theta)B \sin^2 \theta}{\alpha_1^2(\varphi)} - 2 \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}} \frac{A_3(\theta)B \sin \theta \cos \theta}{\alpha_3^2(\varphi)} \right) \quad (48)$$

$$D_5(\theta) = \left(2 \frac{A_2(\theta)B \sin^2 \theta}{\alpha_1^2(\varphi)} - 2 \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}} \frac{A_4(\theta)B \sin \theta \cos \theta}{\alpha_3^2(\varphi)} \right) \quad (49)$$

$$D_6(\theta) = \left(\frac{B^2 \sin^4 \theta}{\alpha_1^2(\varphi)} + \sqrt{\frac{C_{11}}{C_{22}}} \frac{B^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\alpha_3^2(\varphi)} \right) \quad (50)$$

این تنش تأثیر قابل توجهی بر روی زاویه شروع رشد ترک دارد. در مود I خالص، این تنش تأثیری بر روی زاویه شروع رشد ترک ندارد. با ظهور مود II و عبور از مود I خالص (مود ترکیبی I/II)، این تنش مولفه ای در راستای ترک دارد و بر روی زاویه شروع رشد ترک تأثیرگذار است [۲۰].

حال در این بخش به توسعه معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی با در نظر گرفتن پارامتر تنش T پرداخته می‌شود. گام نخست در توسعه معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی استخراج میدان‌های تنش ماده اورتوتروپیک با در نظر گرفتن ترم تنش T است. به این ترتیب، میدان تنش در ماده اورتوتروپیک از طریق مفهوم جامد ایزوتروپیک تقویت شده با استفاده از معادله (۱) در مختصات xy به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{xx(i)}^{orth} = \frac{1}{\xi_1} \left[\frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{11(i)}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{11(i)}(r, \theta) + T \right] \quad (37)$$

$$\sigma_{yy(i)}^{orth} = \frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{22(i)}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{22(i)}(r, \theta) \quad (38)$$

$$\sigma_{xy(i)}^{orth} = \frac{1}{\xi_3} \left[\frac{K_I}{Q\sqrt{r}} \cdot f_{12(i)}(r, \theta) + \frac{K_{II}}{Q\sqrt{r}} \cdot g_{12(i)}(r, \theta) \right] \quad (39)$$

میدان تنش ماده اورتوتروپیک در مختصات $r\theta$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta(i)}^{orth} &= \sin^2 \theta \cdot \sigma_{xx(i)}^{orth} + \cos^2 \theta \cdot \sigma_{yy(i)}^{orth} - 2 \cos \theta \sin \theta \cdot \sigma_{xy(i)}^{orth} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\xi_{1(i)}} \cdot \sigma_{xx(i)}^{Iso} + \cos^2 \theta \cdot \sigma_{yy(i)}^{Iso} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\xi_{3(i)}} \cdot \sigma_{xy(i)}^{Iso} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta(i)}^{orth} &= (\sigma_{xx(i)}^{orth} - \sigma_{yy(i)}^{orth}) \cos \theta \sin \theta + \sigma_{xy(i)}^{orth} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \left(\frac{\sigma_{xx(i)}^{Iso}}{\xi_{1(i)}} - \sigma_{yy(i)}^{Iso} \right) \cos \theta \sin \theta + \frac{\sigma_{xy(i)}^{Iso}}{\xi_{3(i)}} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (41)$$

در نتیجه، روابط ریاضی معیار شکست حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی بر حسب میدان تنش استخراج می‌شود. با پیروی از

سطحی در لمینت‌های متعامد [0, 90] تحت شرایط بارگذاری مود I خالص، مود II خالص و مود ترکیبی I/II استفاده کرد. در این تست‌ها ضرایب شدت تنش بحرانی در مود I خالص (K_{Ic}) و مود II خالص (K_{IIc}) تعیین شدند. منحنی حد شکست تئوری برای این ماده با استفاده از حل همزمان معادلات (۳۵) و (۳۶) با هدف بررسی تغییرات K_{IIc} در برابر تغییرات K_{Ic} برای ترک خوردگی سطحی استخراج شده است. این منحنی با داده‌های شکست تجربی از مرجع [۳۳] اعتبارسنجی می‌شود.

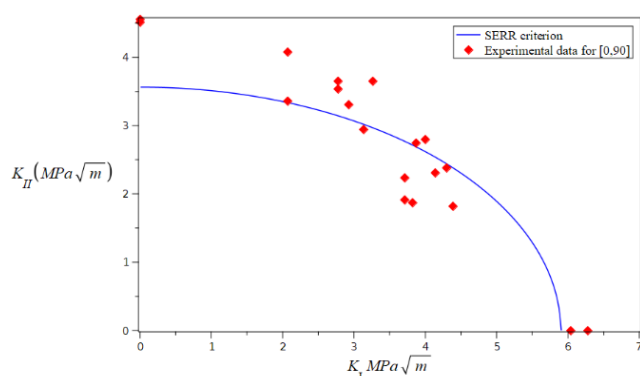


Figure 4. Comparison of the predicted interfacial fracture limit curve with experimental data [33] for [0, 90] composite laminates.

شکل ۴. مقایسه منحنی حد شکست سطحی پیش‌بینی شده با داده‌های تجربی [۳۳] برای صفحات کامپوزیتی [90, 0]

شکل (۴) تطابق نزدیکی بین نتایج تئوری منحنی‌های حد شکست سطحی و نتایج تجربی نشان می‌دهد و معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی پیشنهادی را برای پیش‌بینی شروع شکست سطحی تأیید می‌کند.

شکل (۴) نشان می‌دهد که در نظر گرفتن ترم تنش T سبب می‌شود منحنی حد شکست تئوری به سمت همگرایی با داده‌های تجربی سوق داده شود. این یافته تأیید می‌کند که محاسبات مربوط به این تنش برای پیش‌بینی شروع شکست سطحی پارامتر بسیار مهمی قلمداد می‌شود.

که ضرایب A_i به صورت زیر هستند:

$$A_1(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) \quad (51)$$

$$A_2(\theta) = -3 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \quad (52)$$

$$A_3(\theta) = \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \quad (53)$$

$$A_4(\theta) = (3 \cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2} \quad (54)$$

۵- اعتبارسنجی معیار شکست سطحی بر مبنای حداکثر نرخ آزادسازی حداکثر انرژی کرنشی

در این بخش معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی برای پیش‌بینی شروع شکست سطحی در کامپوزیت‌های چندلایه تحت بارگذاری درون صفحه‌ای اعتبارسنجی می‌کند. منحنی‌های حد شکست تئوری به‌دست‌آمده از این معیار با داده‌های تجربی مقایسه می‌شود تا دقت پیش‌بینی‌ها ارزیابی شود. نتایج تجربی از آزمایش‌های شکست سطحی مطابق مرجع [۳۳] برای کامپوزیت‌های الیاف شیشه/اپوکسی تک‌جهته^{۱۸} به‌دست آمده است. خواص مکانیکی لایه تک جهت در جدول (۱) ارائه شده است:

جدول ۱- خواص مکانیکی لایه تک‌جهته UE400REM/ET443 [۳۳]

Table 1. Mechanical properties of the UE400REM/ET443 unidirectional lamina [33].

$E_{11} (GPa)$	$E_{22} (GPa)$	$G_{12} (GPa)$	ν_{12}	ν_{21}	V_f
43.94	16.71	6.57	0.3	0.095	58.16

این مطالعه تجربی از روش‌های استاندارد تیر دو طرفه^{۱۹}، تیر با خمیدگی انتها^{۲۰} و خم مود ترکیبی^{۲۱} برای توصیف شکست بین

^{۲۰} End-Notched Flexure (ENF)

^{۲۱} Mixed-Mode Bending (MMB)

^{۱۸} UE400REM/ET443

^{۱۹} Double Cantilever Beam (DCB)

شکست بر مبنای این معیار با نتایج آزمایش‌های تجربی از مرجع مقایسه می‌گردد. مقایسه منحنی حد شکست با نتایج تجربی حاکی از آن است که معیار ارائه شده اعتبار کافی برای پیش‌بینی شروع رشد ترک سطحی بین ماده ایزوتروپیک و اورتوتروپیک را دارد.

۷- تقدیر و تشکر

این تحقیق با حمایت مادی و معنوی پژوهشگاه فضایی ایران انجام شده است. بدینوسیله نویسندگان مراتب تقدیر و تشکر خود را اعلام می‌کنند.

منابع

1. Liang, D., Wu, Q., Ghaderi, D. and Guerrero, J.M., 2020. Analysis of multilayered power module packaging behavior under random vibrations. *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, 10(10), pp.1700-1707. <https://doi.org/10.1109/TCPMT.2020.2995735>
2. Wu, M.L. and Lan, J.S., 2017. Investigation and prediction of solder joint failure analysis for ball grid array package subject to mechanical bending environment. *Soldering & Surface Mount Technology*, 29(2), pp.75-84. <https://doi.org/10.1108/SSMT-06-2016-0012>
3. Akbari, S., Löfberg, A., Tegehall, P.E., Brinkfeldt, K. and Andersson, D., 2019. Effect of PCB cracks on thermal cycling reliability of passive microelectronic components with single-grained solder joints. *Microelectronics Reliability*, 93, pp.61-71. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2019.01.006>
4. Heidari-Rarani, M. and Shokrieh, M.M., 2013. Effect of curved crack front on strain energy release rate of unidirectional DCB. *Sharif Journal of Mechanical Engineering (SJME)*, 29(2), pp.81-86. [In persian].
5. Erdogan, F. and Sih, G.C., 1963. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of basic engineering*, 85(4), pp.519-525. <https://doi.org/10.1115/1.3656897>
6. Yousefzadeh, S. and Doustdar, M.M., 2017. Experimental investigation of fatigue life in cracked aluminum plates repaired by composite patches. *Sharif Journal of Mechanical Engineering (SJME)*, 33(2), pp.123-132. [In persian].

به منظور اعتبار سنجی قوی‌تر معیار شکست مود ترکیبی ارائه شده، منحنی حد شکست بر مبنای معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی برای ماده Im7/977-2 در وضعیت [۰، ۴۵] صفحات کامپوزیت مطابق شکل (۵) استخراج می‌شود. نزدیکی خوب و قابل قبول بین منحنی حد شکست و داده‌های تجربی حاکی از آن است که این معیار با مدلسازی درست رفتار ناهمسانگرد ماده، به درستی رفتار شکست سطحی در مواد کامپوزیت را پیش‌بینی می‌کند.

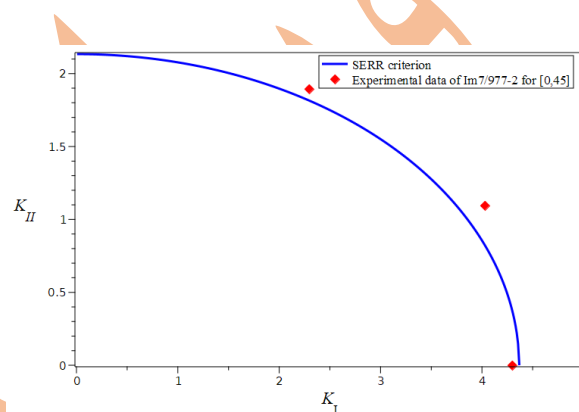


Figure 5: Comparison of the predicted surface fracture limit curve with experimental data [34] for [0, 45] composite laminates

شکل ۵. مقایسه منحنی حد شکست سطحی پیش‌بینی‌شده با داده‌های تجربی [۳۴] برای صفحات کامپوزیت [۰، ۴۵]

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی فرآیند شکست سطحی بین اجزای مورد الکترونیک ماهواره پرداخته می‌شود. مدل جامد ایزوتروپیک تقویت شده به عنوان یک مدل توسعه یافته برای مدل سازی ماده اورتوتروپیک با در نظر گرفتن تاثیرات میدان تنش الیاف و ماتریس به کار برده می‌شود. به منظور بررسی دست یابی به پیش‌بینی دقیق‌تر ریاضیاتی ترک، ترم تنش T در معادلات میدان تنش عمودی و برشی اطراف نوک ترک در نظر گرفته می‌شود. با توسعه میدان تنش برای ترک سطحی بین ماده اورتوتروپیک و ایزوتروپیک تحت بارگذاری مود ترکیبی I/II، معیار شکست حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی ارائه می‌شود. به منظور صحت سنجی و ارزیابی معادلات استخراج شده معیار حداکثر نرخ آزادسازی انرژی کرنشی، منحنی‌های حد

- terminating at the interface without asymptotic enrichment. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 279, pp.86-112. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.06.024>
17. Andrade, H.D.C., Trevelyan, J. and Leonel, E.D., 2023. Direct evaluation of stress intensity factors and T-stress for bimaterial interface cracks using the extended isogeometric boundary element method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 127, p.104091. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104091>
 18. Khaji, Z., Fakoor, M., Farid, H.M. and Alderliesten, R., 2022. Applying the new experimental midpoint concept on strain energy density for fracture assessment of composite materials. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 121, pp.103522. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103522>
 19. Ryoji, Y. and Jin-Quan, X., 1992. Stress based criterion for an interface crack kinking out of the interface in dissimilar materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 41(5), pp.635-644. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(92\)90150-D](https://doi.org/10.1016/0013-7944(92)90150-D)
 20. Khaji, Z. and Fakoor, M., 2023. Fracture study of wood considering the effect of T-stress term based on matrix reinforcement coefficients model. *Archive of Applied Mechanics*, 93(5), pp.1963-1983. <https://doi.org/10.1007/s00419-023-02366-8>
 21. Daneshjoo, Z., Shokrieh, M.M., Fakoor, M. and Alderliesten, R.C., 2018. A new mixed mode I/II failure criterion for laminated composites considering fracture process zone. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 98, pp.48-58. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.09.004>
 22. Lall, P., Islam, M.N., Singh, N., Suhling, J.C. and Darveaux, R., 2004. Model for BGA and CSP reliability in automotive underhood applications. *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, 27(3), pp.585-593. <https://doi.org/10.1109/TCAPT.2004.831824>
 23. Qian, W. and Sun, C.T., 1998. Methods for calculating stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 35(25), pp.3317-3330. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00181-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00181-9)
 24. Khaji, Z. and Fakoor, M., 2024. Assessing interfacial fracture in orthotropic materials: Implementing the RIS concept with considering the T-stress term under mixed-mode I/II. *Steel*
 7. Williams, M.L., 1957. On the stress distribution at the base of a stationary crack. <https://doi.org/10.1115/1.4011454>
 8. Rice, J.R. and Sih, G.C., 1965. Plane problems of cracks in dissimilar media. *Journal of Applied Mechanics*, 32(2), pp.418-423. <https://doi.org/10.1115/1.3625816>
 9. Pongvittayapanu, K., Srisrual, A. and Fakpan, K., 2022. Effect of thermal cycling and vibration on cracking in Sn-3.0 Ag-0.5 Cu solder bump. *Materials Today: Proceedings*, 52, pp.2372-2376. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.10.222>
 10. Jensen, H.M., 1990. Mixed mode interface fracture criteria. *Acta metallurgica et materialia*, 38(12), pp.2637-2644. [https://doi.org/10.1016/0956-7151\(90\)90276-M](https://doi.org/10.1016/0956-7151(90)90276-M)
 11. Talabi, R.B., S. Shahsavari, and M. Fakoor, 2024. Extended maximum principal stress (EMPS) criterion for fracture assessment of orthotropic materials with cracks along and across to the fibers. *Archive of Applied Mechanics*, pp. 1-20. <https://doi.org/10.1007/s00419-024-02699-y>
 12. Khaji, Z. and M. Fakoor, 2022. Enhancing the ability of strain energy release rate criterion for fracture assessment of orthotropic materials under mixed-mode I/II loading considering the effect of crack tip damage zone. *Steel and Composite Structures, An International Journal*, 44(6), pp. 817-828. <https://doi.org/10.12989/scs.2022.44.6.803>
 13. Ebrahimi, M.T., Z. Khaji, and M. Fakoor, 2025. On mixed-mode fracture of brittle orthotropic solids: A novel micromechanical damage model. *Engineering Fracture Mechanics*, 313, pp. 110628. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.110628>
 14. Yeung, D.T., Lam, D.C. and Yuen, M.M., 2000. Specimen design for mixed mode interfacial fracture properties measurement in electronic packages. *J. Electron. Packag.*, 122(1), pp.67-72. <https://doi.org/10.1115/1.483137>
 15. Li, W. and Sun, X., 2017, August. An analysis case on the failure of BGA solder joints. In *2017 18th International Conference on Electronic Packaging Technology (ICEPT)* (pp. 731-734). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICEPT.2017.8046553>
 16. Natarajan, S., Song, C. and Belouettar, S., 2014. Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks

- mode I/III brittle fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 256, pp.111979. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111979>
33. Marat-Mendes, R.M. and Freitas, M.M., 2010. Failure criteria for mixed mode delamination in glass fibre epoxy composites. *Composite Structures*, 92(9), pp.2292-2298. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.07.017>
 34. Raimondo, A., Urcelay Oca, I. and Bisagni, C., 2021. Influence of interface ply orientation on delamination growth in composite laminates. *Composite Structures*, 55(27), pp.3955-3972. <https://doi.org/10.1177/00219983211031636>
 - and *Composite Structures*, 50(2), pp.237. <https://doi.org/10.12989/scs.2024.50.2.237>
 25. Ravichandran, M. and Ramesh, K., 2005. Evaluation of stress field parameters for an interface crack in a bimaterial by digital photoelasticity. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 40(4), pp.327-344. <https://doi.org/10.1243/030932405X16034>
 26. Ahmadpour Kasgari S., Aliha, M. R. M., Sajadi S. J., Sadowski T. & Berto F., 2024. Progress in Friction Stir Welding of Polymer and Aluminum Alloys. *Mechanics of Composite Materials*, 59 (6), pp.1083-1100. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10158-y>
 27. Aliha, M. R. M., Hosseinpour, G. R., & Ayatollahi, M. R., 2013. Application of cracked triangular specimen subjected to three-point bending for investigating fracture behavior of rock materials. *Rock mechanics and rock engineering*. 46(5), pp.1023-1034. <https://doi.org/10.1007/s00603-012-0325-z>
 28. Bahmani, A., Aliha, M. R. M., Sarbijan, M. J., & Mousavi, S. S., 2020. An extended edge-notched disc bend (ENDB) specimen for mixed-mode I+II fracture assessments. *International Journal of Solids and Structures*, 193, pp.239-250. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.02.017>
 29. Shahryari, N., Keymanesh, M. R., & Aliha, M. R. M., 2021. Specimen type effect on measured low-temperature fracture toughness of asphalt concrete. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 44(2), pp.551-567. <https://doi.org/10.1111/ffe.13379>
 30. Aliha, M. R. M., & Ayatollahi, M. R., 2010. Geometry effects on fracture behaviour of polymethyl methacrylate. *Materials Science and Engineering: A*, 527(3), pp.526-530. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2009.08.055>
 31. Mousavi, A., Aliha, M. R. M., Khoramishad, H., & Karimi, H. R., 2025. The effect of non-singular term (T-stress) on mode I/III cracking parameters of brittle materials, numerical and experimental study using different beam and disc shape specimens made of marble rock. *Forces in Mechanics*, 18, pp.100303. <https://doi.org/10.1016/j.finmec.2024.100303>
 32. Bidadi, J., Aliha, M. R. M., & Akbardoost, J., 2022. Development of maximum tangential strain (MTSN) criterion for prediction of mixed-