Sharif University of Technology

Sharif Mechanical Engineering Journal

https://sjme.journals.sharif.edu

Research Article

Investigation of Blade Parameterization Methods for Axial Compressors

Mohammad Farahani*, Mehrab Kalabi, Arman Mohammadi Joozdani and Sajjad Ghadiri

Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.
* Corresponding author:(mfarahani@sharif.edu)

Article Info

Article history:

Received: 11 July 2026

Revised: 16 September 2026

Accepted: 23 September 2026

Keywords:

Geometry parameterization,
turbomachinery,
axial compressor,
compressor blades,
manufacturing variability,
parametrization methods,
Lange method,
CST.

Abstract

Geometry parameterization is essential for turbomachinery design, optimization, and modeling of geometric deviations. A key challenge is achieving high geometric accuracy with a minimal set of variables. While various parameterization techniques exist, a comprehensive comparison of their efficacy for axial compressor blades remains limited. This study implements and compares prominent aerodynamic parameterization methods: curve-fitting, Class/Shape Function Transformation (CST), Hicks-Henne, Singular Value Decomposition (SVD), and the Lange method, which are commonly used for turbomachinery blades. To evaluate performance, two transonic compressor airfoils were parameterized using parameter sets of 10 and 12. Results indicate that while curve-fitting methods provide superior geometric accuracy, the Lange method offers highly competitive performance owing to its explicit physical parameters and ease of implementation. No single method is globally optimal, as the best choice depends on the parameter count, specific geometry, and problem type. To facilitate decision-making, the methods were ranked based on key criteria.

Introduction

Geometry parameterization is an indispensable step in high-fidelity aerodynamic design and optimization. Shape parameterization allows engineers to adjust design variables systematically to achieve optimized geometries, simplifying the process by reducing the design space to a manageable set of control parameters. While various methods exist for the parameterization of conventional airfoils in aerodynamics, their specific effectiveness for turbomachinery blades requires further clarification. A method that accurately describes geometry with minimal variables is highly desirable [1]-[2].

Lauer and Ansell [3] reviewed widely used aerodynamic parameterization methods, including B-splines, Bézier surfaces, CST, and Hicks-Henne, summarizing their applications in design and optimization. Masters [1] similarly evaluated B-spline, Bézier, CST, Hicks-Henne, SVD, and parametric section method (PARSEC) by approximating a dataset of 1,064 airfoils. Subsequently, Masters [2] applied these methods in numerical flow simulations to evaluate their impact on predicted aerodynamic coefficients (lift and drag).

Despite extensive research on conventional airfoils, their application to turbomachinery has received little attention. Beyond accuracy, method selection must account for ease of implementation, leading/trailing-edge representation, parameter definition (explicit vs. implicit), and surface-deviation modeling. This study evaluates the accuracy and practical capabilities of these methods in parameterizing turbomachinery blade geometries.

Methodology

This study evaluates several airfoil parameterization techniques, focusing on axial compressor blade parameterization. Two mid-span airfoils from axial compressor rotor blades were examined. The first is the

To Cite this article:
Farahani, M., Kalabi, M., Mohammadi Joozdani, A. and Ghadiri, S. 2026. The investigation of blade parameterization methods in axial compressor blades, Sharif Mechanical Engineering Journal, **42**(1), 119-132.
https://doi.org/10.24200/j40.2026.68965.1774

E-ISSN: 2676-4733 © 2026 The Author(s). Sharif Mechanical Engineering Journal, Published by Sharif University of Technology
This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.

NASA Rotor 37 mid-span section, an MCA (multiple-circular-arc) airfoil and a benchmark for transonic compressor research, selected for its high-quality experimental data. The second is a transonic DCA (double-circular-arc) airfoil. These geometries (Figure 2 and Figure 3) were represented in the (m', θ) coordinate system.

The selected methods include curve-fitting techniques (spline, B-spline, and Bézier), CST, SVD and the Lange method as constructive methods, the The Hicks–Henne method as a deformative method. Curve-fitting techniques approximate surfaces using parametric curves. They are flexible and accurate but highly sensitive to the number and distribution of control points, particularly at the leading/trailing edges.

CST method uses a limited number of implicit variables. The SVD method parameterizes airfoils using orthogonal basis modes extracted from a training library. The Lange method describes blade sections using separate thickness and camber distributions with dedicated leading- and trailing-edge parameters. Finally, the Hicks–Henne method, a deformative approach, uses local bump functions to modify a baseline airfoil.

Results and Discussion

All methods were compared first using 10 parameters… and the comparison was then repeated with 12 to evaluate the effect of parameter count on reconstruction accuracy.

Figs. 10 and 11 present root mean square error (RMSE) values for the MCA and DCA airfoils. In general, the errors for the MCA airfoil are approximately 14–16% higher than for the DCA airfoil. Increasing the number of parameters reduces reconstruction error for all methods, though the improvement varies widely, ranging from 6% to 50%.

Curve-fitting methods provide the highest reconstruction accuracy, particularly near the leading and trailing edges.

While the Lange method is less accurate, it remains sufficiently accurate in these regions. Furthermore, its physically meaningful parameters (explicate variable) in turbomachinery coordinates make it highly suitable for compressor-blade generation.

Figure 12 and Figure 13 show the parameterized MCA airfoils and chordwise error distributions. The CST method exhibits lower accuracy near the leading and trailing edges compared to the other parameterization methods, a trend also observed for the DCA airfoil (Figure 14 and Figure 15).

The SVD method performs best for the MCA airfoil owing to its richer training library. In contrast, Hicks–Henne is better suited for local deformation of an existing baseline than for generating new airfoil families (Figure 16). Table 2 summarizes the performance of all methods. Results indicate that no single method is universally superior; the ideal choice depends on the specific airfoil geometry, number of parameters, and application.

Conclusion

This study implemented and compared several geometry parameterization methods applied to two common axial-compressor blade airfoils, evaluated using 10 and 12 parameters. Results indicate that the optimal parameterization method depends on the airfoil geometry, problem type, and parameter constraints. While increasing the parameter count reduces error by 6–50%, this improvement is not always significant across all geometries. Curve-fitting methods offer the highest accuracy, while the Lange method provides a physically intuitive approach for turbomachinery applications.

Funding: This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions: All authors contributed to the reported work for conceptualization, methodology, validation, writing-review and editing, and supervision.

مجله علمی مهندسی مکانیک شریف

https://sjme.journals.sharif.edu

مقاله‌ی پژوهشی

بررسی روش‌های پارامتری‌سازی پره در کمپرسورهای محوری

محمد فراهانی*، مهراب کلابی، آرمان محمدی جوزدانی و سجاد غدیری

دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران.

*نویسنده مسئول (mfarahani@sharif.edu)

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت : ۱۴۰۴/۰۴/۲۰

تاریخ اصلاحیه : ۱۴۰۵/۰۶/۲۵

تاریخ پذیرش : ۱۴۰۵/۰۷/۰۱

واژگان کلیدی:

پارامتری‌سازی هندسه،

توربوماشین‌ها،

کمپرسور محوری،

پره‌ی کمپرسور،

خطاهای ساختی،

روش‌های تغییر هندسه،

روش‌های تولید هندسه.

چکیده

پارامتری‌سازی هندسه‌ی پره، نقشی تعیین‌کننده در فرآیند طراحی و تحلیل عملکرد کمپرسورهای محوری ایفا می‌کند و در ارزیابی اثر خطاهای ساختی در عملکرد آئرودینامیکی پره‌ها، جایگاهی کلیدی دارد. دستیابی به تعادل میان تعداد پارامترهای هندسی و حفظ دقت بازتولید سطوح، چالشی اساسی محسوب می‌شود. روش‌های مختلفی برای پارامتری‌سازی هندسی در آئرودینامیک وجود دارد. با توجه به بررسی‌های صورت‌گرفته، تاکنون مقایسه‌ای جامع از کارایی روش‌های پارامتری‌سازی مذکور در پره‌های کمپرسور محوری ضمن درنظرگرفتن عدم‌قطعیت‌های ساختی صورت نگرفته است. در پژوهش حاضر، روش‌های مطرح، شامل: برازش منحنی، تابع انتقال کلاس و پیکره، مقاطع پارامتری، هیکس- هن، تجزیه‌ی مقادیر منفرد ،و روش لانگ، تشریح و پیاده‌سازی شده‌اند. به‌منظور ارزیابی دقیق، دو نوع ایرفویل متداول در پره‌ی کمپرسورهای محوری با استفاده از روش‌های اخیر پارامتری‌سازی شده‌اند. نتایج نشان داده‌اند اگرچه روش‌های مبتنی بر برازش منحنی، دقت بازتولید بسیار بالایی ارائه می‌دهند؛ اما روش لانگ با استفاده از پارامترهای فیزیکی صریح و پیاده‌سازی آسان، عملکرد قابل‌قبولی در پارامتری‌سازی پره‌ی کمپرسورهای محوری داشته است. به‌منظور انتخاب بهترین روش پارامتری‌سازی، عملکرد روش‌های مذکور با معیارهای مختلفی، مانند: دقت بازتولید هندسه، تعداد و نوع پارامترها، قابلیت تولید انحراف‌های هندسی بررسی و مقایسه شده‌اند. پژوهش حاضر، امکان شناسایی روش مناسب در کاربردهای مختلف را فراهم ساخته است.

۱. مقدمه

چرخه‌ی طراحی و بهینه‌سازی عددی در حوزه‌ی آئرودینامیک، بر چهار رکن اساسی پارامتری‌سازی هندسه، تولید شبکه، حل معادله‌های جریان، و فرآیند بهینه‌سازی استوار است. در این میان، پارامتری‌سازی هندسه، نقشی بنیادین در فرآیندهای طراحی و ارزیابی حساسیت توربوماشین‌ها نسبت به خطاهای ساخت ایفا می‌کند. مرحله‌ی اخیر نه فقط امکان تنظیم دقیق متغیرهای طراحی جهت دستیابی به هندسه‌های بهینه را میسر می‌سازد، بلکه بستر لازم را برای مدل‌سازی اثر عدم‌قطعیت‌ها و انحراف‌های هندسی ناشی از فرآیند ساخت فراهم می‌آورد.

بهره‌گیری از روش‌های مختلف پارامتری‌سازی در آئرودینامیک و طراحی توربوماشین‌ها با هدف مدیریت فضای طراحی صورت می‌گیرد؛ که هدف از آن‌ها، تبدیل هندسه‌های پیچیده به مجموعه‌ای محدود از متغیرهای کنترلی است، که منجر به کاهش ابعاد فضای جستجو و اعمال خطاهای ساختی می‌شود. لذا، انتخاب روشی که بتواند با کمترین تعداد متغیر، دقیق‌ترین بازنمایی از هندسه را ارائه دهد، اهمیت بسیاری دارد.[۱ و ۲]

لائر و آنسل[1] (۲۰۲۵)، در یک پژوهش مروری، ضمن معرفی و بررسی انواع روش‌های پرکاربرد پارامتری‌سازی در آئرودینامیک، شامل: بی- اسپلاین[2]، سطوح بزیه[3]، تابع انتقال کلاس و پیکره (CST)[4]، هیکس- هن[5]، و سایر روش‌های متداول، کاربرد آن‌ها را در طراحی و بهینه‌سازی آئرودینامیکی خلاصه‌سازی کرده‌اند. ایشان همچنین یک روش نوین پارامتری‌سازی ارائه داده و عملکرد آن را در مسائل برازش ایرفویل با روش‌های دیگر مقایسه کرده‌اند.[۳]

مسترز[6] و همکاران (۲۰۱۵)،[۱] در یک پژوهش مروری دیگر، انواع روش‌های پرکاربرد پارامتری‌سازی در آئرودینامیک، شامل: بی- اسپلاین، سطوح بزیه، تابع انتقال کلاس و پیکره، هیکس- هن، و تحلیل مؤلفه‌های اصلی (SVD)[7] را

[1] Lauer & Ansell
[2] B-Spline
[3] Bezier
[4] Class/Shape Function
[5] Hicks-Henne
[6] Masters
[7] Singular Value Decomposition

استناد به این مقاله:

فراهانی، محمد، کلابی، مهراب، محمدی جوزدانی، آرمان و غدیری، سجاد، ۱۴۰۵. بررسی روش‌های پارامتری‌سازی پره در کمپرسورهای محوری. مهندسی مکانیک شریف، ۴۲(۱)، صص.۱۱۹-۱۳۲. https://doi.org/10.24200/j40.2026.68965.1774

حق مولف © نویسندگان

ناشر: دانشگاه صنعتی شریف

شاپا الکترونیکی: ۴۷۳۳- ۲۶۷۶

معرفی و عملکرد آن‌ها را در تقریب ۱۰۶۴ ایرفویل آزمایش کرده‌اند. با استناد به نتایج حاصل از مطالعه‌ی اخیر، برای آنکه ۸۰٪ از ایرفویل‌های بانک داده با دقت مناسب تقریب زده شوند، انتخاب دست‌کم ۲۵ متغیر طراحی ضروری است. همچنین ایشان، در پژوهشی دیگر در سال ۲۰۱۷،[۲] با استفاده از روش‌های پارامتری‌سازی ذکرشده، پس از پارامتری‌کردن ایرفویل‌ها و حل عددی جریان، عملکرد هر روش را با دستیابی به ضرایب آئرودینامیکی برآ و پسا آزمایش کرده‌اند. در پژوهش مذکور مشاهده شد که برای دستیابی به ضرایب آئرودینامیکی دقیق و قابل‌اطمینان، انتخاب ۳۸ تا ۶۶ متغیر طراحی ضروری است.

ژانگ و همکاران (۲۰۱۸)،[۴] در معرفی و بررسی روش‌های پارامتری‌سازی در آئرودینامیک، با ارائه و مقایسه‌ی روش‌های: بی- اسپلاین، تابع انتقال کلاس و پیکره، سطوح پارامتری، هیکس- هن، و تحلیل مؤلفه‌های اصلی؛ درنهایت، روش تحلیل مؤلفه‌های اصلی را به‌عنوان بهترین روش انتخاب کرده‌اند. اسپرادکل[8] و همکاران (۲۰۱۰)،[۵] نیز با مقایسه‌ی روش‌های پارامتری‌سازی در آئرودینامیک، شامل: بی- اسپلاین، منحنی فرگوسن، هیکس- هن، سطوح پارامتری، و تابع انتقال کلاس و پیکره، روش‌های پارامتری‌سازی را براساس معیارهای مختلف رتبه‌بندی کرده‌اند، تا طراح براساس نیاز خود، یکی از روش‌ها را انتخاب کند.

یکی از روش‌های مرسوم در توربوماشین، پارامتری‌سازی به کمک توزیع ضخامت و توزیع انحنای ایرفویل است. وانگ و همکاران (۲۰۲۲ و ۲۰۲۳)،[۶ و ۷] در چند پژوهشی که در زمینه‌ی بررسی اثر نامشخصه‌های ساختی در عملکرد کمپرسور محوری انجام داده‌اند، برای پارامتری‌کردن هندسه‌ی پره‌ی کمپرسور از روش اخیر استفاده کرده‌اند.

روش لانگ، یکی از روش‌های معروف پارامتری‌سازی متداول در پره‌ی کمپرسورهاست، که در آن، پره با ۱۴ پارامتر بیان می‌شود. پروتس[9] و همکاران (۲۰۲۳)،[۸] از روش لانگ برای حساسیت‌سنجی و بررسی اثر نامشخصه‌های ساختی و استهلاک حین بهره‌برداری در عملکرد کمپرسور استفاده کرده‌اند.

وانگ و همکاران (۲۰۲۳)،[۹] در پژوهش خود به بهینه‌سازی پره‌های یک کمپرسور محوری پرداخته و در آن، فقط از چند پارامتر هندسی ساده، شامل: طول وتر، زاویه‌ی ورودی پره، بیشینه‌ی ضخامت، و زاویه‌ی نصب برای بیان هندسه استفاده کرده‌اند. ژانگ و همکاران (۲۰۲۲)[۱۰] عدم‌قطعیت عملکرد پره‌های یک کمپرسور محوری را تحت تأثیر تغییرات هندسی لبه‌ی حمله (LE)[10] و لبه‌ی فرار (TE)[11] ارزیابی کرده و هندسه‌ی لبه‌های حمله و فرار را با دو پارامتر هندسی بیان کرده‌اند.

الطافی[12] و همکاران (۲۰۲۲)،[۱۱] اثر انحراف‌های پارامترهای هندسی، مانند ضخامت و زاویه‌ی پره را در عملکرد یک کمپرسور جریان شعاعی بررسی کرده‌اند. الیگودرز و همکاران (۲۰۱۷)،[۱۲] اثر انحراف‌های هندسی ایجادشده در فرآیند ساخت، نظیر: ضخامت بیشینه، طول وتر، و ارتفاع پره را در بازده یک توربین محوری با مدل‌های یک بُعدی بررسی کرده‌اند. صادقی و داوری (۲۰۲۴)،[۱۳] در مطالعه‌ی تجربی آکوستیک یک توربین باد، از روش پارامتری‌سازی CST برای تولید هندسه از هندسه‌ی ایرفویل S834 استفاده کرده‌اند، که مجذور مربعات خطای روش CST برای بازتولید ایرفویل مذکور برابر با 10^{-3} بوده است.

آبراهام و همکاران (۲۰۱۸)،[۱۴] عدم‌قطعیت‌های هندسی و عملکردی روتور ۳۷ ناسا را با استفاده از ۴ پارامتر هندسی (متمرکز بر لبه‌ی حمله‌ی پره) بررسی کرده‌اند. لی[13] و همکاران (۲۰۱۵)،[۱۵] در مسئله‌ای با موضوع بهینه‌سازی کمپرسور، به بهینه‌سازی هم‌زمان هندسه‌ی ایرفویل پره‌ها و شرایط عملکردی پرداخته و از روش تابع انتقال کلاس و پیکره برای پارامتری‌سازی هندسه‌ی ایرفویل استفاده کرده‌اند. ایوانف[14] و همکاران (۲۰۱۷)،[۱۶] نیز با استفاده از الگوریتم ژنتیک و روش تابع انتقال کلاس و پیکره به بهینه‌سازی توربین بادی عمودمحور پرداخته و با نمایش کارآمد هندسه‌ی ایرفویل، به بهبودهای قابل‌توجهی در عملکرد دست یافته‌اند. ژیانگ و چن[15] (۲۰۲۱)،[۱۷] از روش تغییرشکل سطوح آزاد[16] برای طراحی بهینه‌ی یک کمپرسور محوری چندطبقه استفاده کرده‌اند. بسل و فلسیگ[17] (۲۰۱۰)،[۱۸] با هدف بهینه‌سازی پره‌های کمپرسور با درنظرگرفتن نویزهای ناشی از فرآیند ساخت، از روش‌های لانگ و بی- اسپلاین برای پارامتری‌سازی هندسه‌ی ایرفویل استفاده کرده‌اند. جی[18] و همکاران (۲۰۲۳)،[۱۹] در بررسی مسئله‌ی کمّی‌سازی عدم‌قطعیت برای اثر تغییر ضخامت پره‌ی کمپرسور محوری از روش بی- اسپلاین برای پارامتری‌سازی ایرفویل‌های پره استفاده کرده‌اند. جی و چوان[19] (۲۰۲۴)،[۲۰] نیز در بررسی کمّی‌سازی عدم‌قطعیت‌های هندسی ناشی از انحراف‌های پارامترهای متعدد در کمپرسور محوری از روش‌های منحنی‌های بزیه و بی- اسپلاین برای پارامتری‌سازی ایرفویل پره استفاده کرده‌اند؛ به‌عنوان مثال، ۲۴ نقطه‌ی کنترلی منحنی بزیه را برای پارامتری‌سازی توزیع انحنای ایرفویل به‌کار برده‌اند.

با وجود اهمیت حیاتی پارامتری‌سازی در فرآیند بهینه‌سازی هندسی و ارزیابی عدم‌قطعیت‌های ناشی از خطاهای ساخت، بررسی پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهد که کارایی روش‌های مختلف پارامتری‌سازی برای ایرفویل‌های متداول استفاده‌شده در توربوماشین‌ها به‌طور جامع ارزیابی نشده است. لذا، پژوهش حاضر با هدف بررسی جامع عملکرد و دقت روش‌های مختلف پارامتری‌سازی در بازتولید هندسه‌ی پره‌های کمپرسورهای محوری، با لحاظ‌کردن اثر خطاهای ساختی انجام شده است. به همین منظور، عملکرد روش‌های پارامتری‌سازی مذکور با معیارهای دقت بازتولید، خطای لبه‌های حمله و فرار، سادگی در پیاده‌سازی، نوع پارامترها (صریح/ ضمنی)، قابلیت بازتولید انحراف‌های هندسی، و امکان تولید هندسه‌های غیرواقعی بررسی و مقایسه شده و امکان شناسایی روش منتخب در کاربردهای مختلف را فراهم ساخته است.

۱. ۱. انواع خطاهای ساختی

خطاهای ساختی براساس مرتبه‌ی بزرگی به ۶ دسته تقسیم می‌شوند. خطاهای مرتبه‌ی اول، در ابعاد اصلی و مشخصه‌ی قطعه (مانند طول وتر، زاویه‌ی نصب

[8] Sripawadkul
[9] Prots
[10] Leading Edge
[11] Trailing Edge
[12] Altafi
[13] Li
[14] Ivanov
[15] Xiang & Chen
[16] Free-Form Deformation
[17] Bestle & Flassig
[18] Ji
[19] Ji & Chu

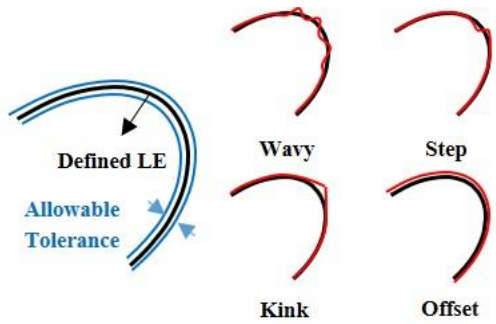

Figure 1. Visual classification of manufacturing errors (Adapted from [21]).

شکل ۱. تقسیم‌بندی ظاهری خطاهای ساختی (برگرفته از نوشتار [۲۱]).

یا شعاع لبه‌ی حمله) رخ می‌دهند و ممکن است ناشی از بی‌دقتی ذاتی دستگاه فرز، گرفتن غیردقیق قطعه، و یا ساییدگی و فرسودگی تیغه‌ی فرزکاری باشد. مقدار خطاها به‌عنوان یک قاعده‌ی تجربی، معمولاً در بازه‌ی ۰/۱ تا ۱ میلی‌متر قرار می‌گیرد. با توجه به آنکه خطاهای مرتبه‌ی اول بیشترین اهمیت را در تحلیل‌های آئرودینامیکی دارند، روش پارامتری‌سازی هندسه باید دقت کافی برای بیان آن‌ها داشته باشد.

خطاهای مرتبه‌ی پنجم و ششم، که در مقیاس ریزساختار ماده تعریف می‌شوند، ابعاد بسیار کوچکی دارند، به‌طوری‌که تأثیر قابل‌توجهی در عملکرد آئرودینامیکی قطعه ندارند. در مقابل، چهار دسته‌ی نخست می‌توانند در جریان سیال و بازده‌ی آئرودینامیکی مؤثر باشند.[۲۱] در استاندارد DIN ۴۷۶۰ به‌طوراختصاصی به انواع خطاهای ساختی در قطعات ماشین‌کاری‌شده پرداخته شده است.

از منظر شکل ظاهری، خطاهای ساختاری به چهار گروه اصلی: آفست، موج‌دار، پلّه، و تاب جزئی تقسیم می‌شوند (شکل ۱). آفست‌ها، اغلب از نوع خطاهای مرتبه‌ی اول هستند و کل سطح را به‌طوریکنواخت جابجا می‌کنند. سطوح موج‌دار، معمولاً در دسته‌ی خطاهای مرتبه‌ی دوم یا سوم قرار می‌گیرند. پلّه و تاب جزئی غالباً در محل اتصال دو قطعه، زمانی که شیب یا ارتفاع در فصل مشترک تطابق ندارد، پدید می‌آیند. همچنین، ماشین‌کاری از دو جهت مخالف، وقفه در فرایند فرزکاری، یا تعویض تیغه در حین عملیات، از دیگر علل ایجاد پلّه بر روی قطعه به‌شمار می‌روند.[۲۰]

۱. ۲. هندسه‌های مطالعه‌شده

هندسه‌های مطالعه‌شده در پژوهش حاضر، شامل: دو ایرفویل از اسپن[20] میانی از دو نمونه پره‌ی کمپرسور محوری بوده‌اند. نمونه‌ی آزمایش اول، اسپن میانی پره‌ی روتور ۳۷ ناسا بوده است، که در دسته‌ی ایرفویل‌های MCA[21] قرار دارد. روتور ۳۷، یکی از طبقات کمپرسور محوری گذرصوتی ۸ طبقه است، که در اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ میلادی در مرکز تحقیقات لوئیس ناسا طراحی، ساخته، و به‌صورت آزمایشگاهی، آزمون شده است.

داده‌های تجربی حاصل از آزمایش‌های روتور ۳۷ به‌دلیل کیفیت بالا و مستندسازی دقیق، به‌سرعت به یکی از مراجع اصلی برای ارزیابی و اعتبارسنجی روش‌های عددی در حوزه‌ی جریان‌های گذرصوتی تبدیل شده‌اند. لذا، نمونه‌ی اخیر به‌عنوان یک مورد آزمایش استاندارد در حوزه‌ی مذکور

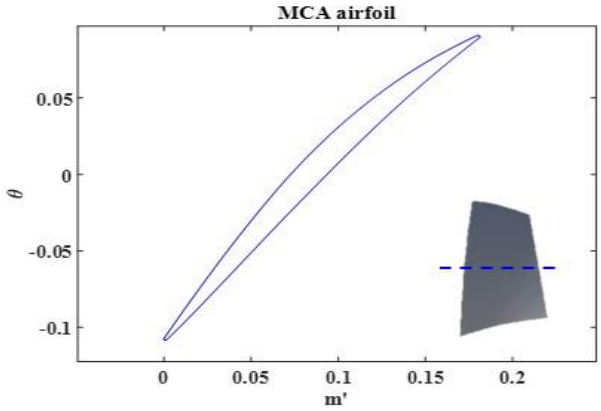

Figure 2. NASA Rotor 37 mid-span airfoil.

شکل ۲. ایرفویل اسپن میانی روتور ۳۷ ناسا.

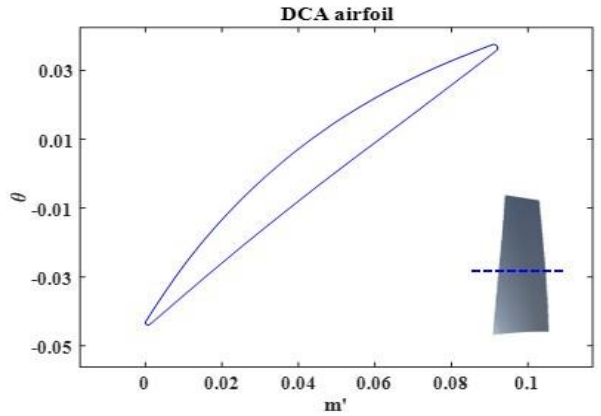

Figure 3. Transonic compressor blade mid-span airfoil.

شکل ۳. ایرفویل اسپن میانی پره‌ی کمپرسور گذرصوتی.

شناخته می‌شود.[۲۲ و ۲۳] نمونه‌ی آزمایش دوم نیز اسپن میانی از روتور یک کمپرسور محوری بوده است، که نمونه‌ای از ایرفویل‌های DCA است.در شکل‌های ۲ و ۳، به ترتیب نمونه‌های آزمایش‌های اول و دوم در دستگاه مختصات (m', θ) مشاهده می‌شوند.

۲. روش‌های پارامتری‌سازی ایرفویل در آئرودینامیک

ساده‌ترین شیوه برای تغییرشکل یک هندسه، جابجایی مستقیم مختصات نقاط روی سطح آن است. اما روش اخیر، نه فقط شمار متغیرهای مسئله را به شکل نامطلوبی افزایش می‌دهد، بلکه ممکن است به ایجاد سطوحی با لبه‌های تیز و ناپیوستگی منجر شود. چنین سطوحی، مدل‌سازی را با چالش‌های جدی درگیر می‌کنند و حتی در مواردی آن را ناممکن می‌سازند. به همین دلیل، روش‌های متنوعی برای پارامتری‌سازی هندسه در علم آئرودینامیک توسعه یافته است، که می‌توان آن‌ها را براساس معیارهای گوناگونی طبقه‌بندی کرد.

در یکی از دسته‌بندی‌های ذکرشده، روش‌ها در دو دسته‌ی تغییر هندسه[۲۲] و تولید هندسه[۲۳] قرار می‌گیرند.[۱ و ۲] در روش‌های تغییر هندسه، یک هندسه‌ی پایه وجود دارد و پارامترهای کنترلی، شکل اولیه را تغییر می‌دهند؛ اما در روش‌های تولید هندسه، پارامترهای کنترلی مستقیماً هندسه را تولید می‌کنند. در یک دسته‌بندی دیگر، می‌توان روش‌ها را بر حسب ماهیت پارامترها تقسیم کرد. در برخی روش‌ها، پارامترهای دخیل در مسئله، معنای فیزیکی مشخصی

[20] Span
[21] Multiple Circular Arc

[22] Deformative methods
[23] Constructive methods

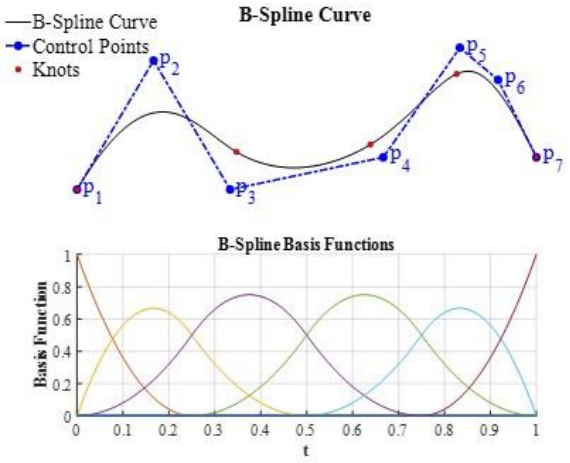

Figure 5. Fourth-order B-spline: control points and corresponding knots (top) and basis functions (bottom) (Adapted from [26]).

شکل ۵. بی- اسپلاین مرتبه‌ی چهار، نقاط کنترلی، و گره‌های متناظر (بالا) و توابع پایه (پایین) (برگرفته از مرجع [۲۶]).

$$X(u)=\sum_{i=0}^{n-1} N_{i,k}(u)P_i \qquad (1)$$

اگر $k = n$ باشد، منحنی حاصل با عنوان منحنی بزیه شناخته می‌شود. هر قدر درجه‌ی توابع پایه، کمتر باشد، اثر نقاط کنترلی موضعی‌تر خواهد بود.[۱] نوع خاصی از اسپلاین پایه با نام اسپلاین پایه‌ی غیریکنواخت منطقی (نربز) نیز توسعه داده شده است، که تفاوت اساسی آن با نوع ابتدایی، وزن‌دادن به هر یک از توابع پایه است. این امر هر چند انعطاف‌پذیری نربز را نسبت به اسپلاین پایه افزایش می‌دهد، اما پارامترهای برازش را افزایش می‌دهد و از این جهت مطلوب نیست.

استفاده از روش‌های برازش منحنی در پارامتری‌سازی ایرفویل عمدتاً به‌صورت برازش دو منحنی جداگانه به سطوح پایینی و بالایی است. در برخی موارد، مخصوصاً پره‌های توربوماشین‌ها، لبه‌های حمله و فرار از منحنی استثنا هستند و با یک بیضی بیان می‌شوند و نقاط مماسی بین بیضی‌ها و منحنی‌ها تعیین می‌شود. این امر تعداد نقطه‌ی کنترلی موردنیاز را تا حد زیادی کاهش می‌دهد، زیرا برای درنظرگرفتن لبه‌های حمله و فرار (که معمولاً انحنا و تغییرات زیادی دارند)، باید نقاط کنترلی نزدیک دو قسمت اخیر را بیشتر کرد.

۲. ۲. تابع انتقال کلاس و پیکره

روش تابع انتقال کلاس و پیکره (CST)، از روش‌های تولید هندسه با متغیرهای ضمنی است، که اولین بار سال ۲۰۰۶ توسط کولفان[۲۹] معرفی شده است.[۲۷-۲۹] روش CST، قابلیت تولید بازه‌ی وسیعی از ایرفویل‌ها را با استفاده از تعداد محدودی متغیر دارد. همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، روش CST قابلیت تولید سایر شکل‌های هندسی، مانند هندسه‌های دایروی، مربعی، و بدنه‌ی هواپیما را نیز دارد.

در روش CST، یک منحنی با استفاده از توابع کلاس و پیکره ساخته می‌شود. توابع کلاس، نوع منحنی هندسه و توابع شکل، انحنای شکل منحنی را اصلاح

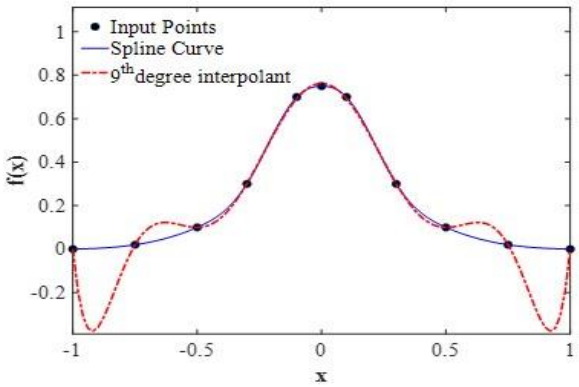

Figure 4. Spline curve and Runge's phenomenon in high-order polynomial interpolation.

شکل ۴. منحنی اسپلاین و پدیده‌ی رانج در میانیابی با چندجمله‌ای مرتبه‌ی بالا.

دارند؛ متغیرهای صریح[۲۴]. برای مثال، زوایای ورود و خروج، طول وتر، و ضخامت بیشینه‌ی ایرفویل از جنس پارامترهای اخیر هستند. در مقابل، اما برخی روش‌ها از پارامترهایی استفاده می‌کنند که معنای فیزیکی ندارند و نوعی کمیت ریاضی هستند، که با قصد کاهش تعداد متغیرها تعریف شده‌اند؛ متغیرهای ضمنی[۲۵]. در ادامه، مهم‌ترین روش‌های پارامتری‌کردن هندسه‌ی ایرفویل معرفی شده‌اند.

۲. ۱. برازش منحنی

یکی از روش‌های متداول، پرکاربرد و در عین حال مؤثر برای پارامتری‌سازی سطح ایرفویل، برازش منحنی به سطح است. منحنی‌هایی همچون: اسپلاین، بی- اسپلاین، نِربز[۲۶]، و بِزیه را می‌توان به‌راحتی با دقت موردنظر به سطوح بالایی و پایینی ایرفویل برازش کرد. هر چند رسیدن به دقت بالا ممکن است نیازمند تعداد نقاط کنترلی (پارامترهای برازش) زیادی باشد.

اسپلاین، یک منحنی شامل تعدادی چندجمله‌ای است؛ که در تعدادی گره[۲۷] به هم متصل شده‌اند. در منحنی اسپلاین، معمولاً از چندجمله‌ای مرتبه‌ی ۳ (مکعبی) استفاده می‌شود و در گره‌ها، علاوه‌بر شرط اتصال، شرط تساوی شیب و مشتق دوم طرفین نیز اعمال می‌شود. میانیابی به کمک اسپلاین مزیت محسوسی نسبت به چندجمله‌ای‌های مرتبه‌ی بالا دارد و بسیار کمتر دچار نوسان‌های ناخواسته یا پدیده‌ی رانج (شکل ۴) می‌شود.[۲۴-۲۶]

بی- اسپلاین یا اسپلاین پایه، با بهره‌گیری از چندجمله‌ای‌های پایه (برن‌اشتین)[۲۸] و تعدادی نقاط کنترلی، می‌تواند هر اسپلاین را بازنویسی و بازتولید کند. در فرمت اخیر، نقاط کنترلی الزاماً روی منحنی قرار نمی‌گیرند و برای گذراندن نقاطی خاص از منحنی، لازم است آن نقطه به‌صورت تعداد خاصی گره (به اندازه‌ی مرتبه‌ی چندجمله‌ای پایه) تکراری اعمال شود. در شکل ۵، منحنی بی- اسپلاین مرتبه‌ی چهار (مکعبی) با ۸ نقطه‌ی کنترلی، گره‌های ابتدا و انتهای تکراری و گره‌های داخلی (توزیع یکنواخت) مشاهده می‌شود. در قسمت پایینی شکل نیز توابع پایه‌ی مرتبه‌ی چهار نمایش داده شده‌اند.

به‌صورت ریاضی، منحنی $X(u)$ را می‌توان به کمک n تابع پایه‌ی $N_{i,k}$ از مرتبه‌ی $k < n$ و n نقطه‌ی کنترلی P_i مطابق رابطه‌ی ۱ تقریب زد:

[24] Explicit variables
[25] Implicit variables
[26] NURBS
[27] knot
[28] Bernstein Polynomials
[29] Kulfan

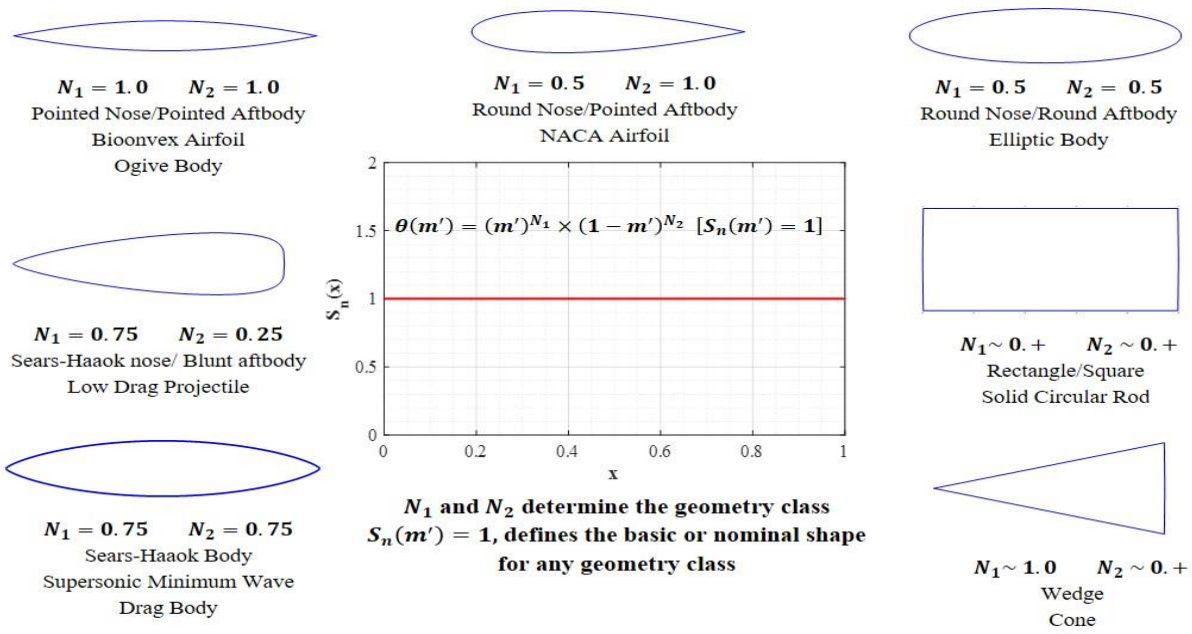

Figure 6. Geometries generated by the CST method (Adapted from [27-29]).
شکل ۶. هندسه‌های تولیدشده با روش CST (برگرفته از مراجع [۲۹-۲۷]).

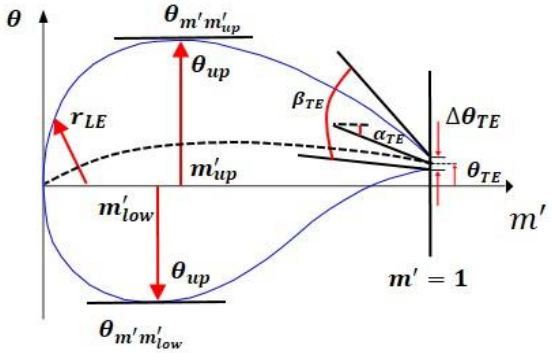

Figure 7. Explicit variables for defining explicit airfoils in the PARSEC method(Adapted from [30].
شکل ۷. متغیرهای صریح برای بیان ایرفویل‌های صریح در روش PARSEC (برگرفته از مرجع [۳۰]).

کولفان برای آنکه تقریب انحنای لبه‌ی حمله‌ی ایرفویل بهبود یابد، راهکاری ارائه داده است (LEM)[31]، که شامل افزودن یک چندجمله‌ای و ضریب اضافه به بسط اخیر است. چندجمله‌ای مذکور مطابق رابطه‌ی ۷ به بسط قبلی اضافه شده است.

$$S(m') = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{i,n}(m') + a_{n+1}(m')^{0.5}(1-m')^{n-0.5} \qquad (7)$$

۲. ۳. روش مقاطع پارامتری

روش مقاطع پارامتری (به اختصار PARSEC)، توسط سوبیزکی[32] (۱۹۹۹ و ۲۰۰۰) معرفی شده است؛[۳۰ و ۳۱] که در آن از ۱۱ متغیر صریح برای بیان ایرفویل استفاده شده است. تعریف ۱۱ متغیر اخیر به گونه‌ای انجام شده است که بتوان سطوح پایینی و بالایی ایرفویل را با کمک ترکیب خطی ۶ چندجمله‌ای بیان کرد (رابطه‌ی ۸). در شکل ۷، متغیرهای روش مقاطع پارامتری بر روی ایرفویل مشاهده می‌شود.

می‌کنند. روابط ریاضی سطح بالایی و پایینی ایرفویل به صورت روابط ۲ و ۳ تعریف می‌شوند:

$$\theta_{upper} = C_{N_2}^{N_1}(m')S_{upper}(m') + m'\Delta\theta_{upper} \qquad (2)$$

$$\theta_{lower} = C_{N_2}^{N_1}(m')S_{lower}(m') + m'\Delta\theta_{lower} \qquad (3)$$

و تابع کلاس نیز به‌صورت رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود:

$$C_{N_2}^{N_1}(m') = (m')^{N_1}.(1-m')^{N_2} \qquad (4)$$

پارامتر $\Delta\theta$ ضخامت لبه‌ی فرار و $m' \in [۰,۱]$ مختصات در جهت نصف‌النهاری و بدون بُعد هستند. با قراردادن $N_۲ = ۱$ و $N_۱ = ۰/۵$ منحنی‌های ایرفویل‌های با لبه‌ی فرار تیز ایجاد می‌شوند. همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، با تغییر مقادیر $N_۱$ و $N_۲$ کلاس‌های متفاوتی از هندسه‌ها ایجاد شده است. برای مثال، در صورتی که $N_۱ = ۰/۰۰۵$ و $N_۲ = ۰/۰۰۵$ باشد، یک شکل مربعی تولید می‌شود.

تابع پیکره‌ی $S(m') \in [۰,۱]$ برای تولید شکل صحیح ایرفویل تعریف می‌شود. کولفان به‌طورخاص برای منحنی‌های ایرفویل شکل، سه پارامتر را تعریف کرده است، تا مستقیماً $S(m')$ با استفاده از روابط ۵ الی ۷، محدود و کنترل شود:

$$S(0) = \sqrt{2r_{le}}, \qquad S(1) = \tan(\beta) + \Delta\theta \qquad (5)$$

که در آن، β زاویه‌ی دُم- قایقی[30] و r_{le} شعاع لبه‌ی حمله است.

همچنین کولفان $S(m')$ را به‌صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های برن‌اشتین مطابق رابطه‌ی ۶ پیشنهاد کرده است:

$$S(m') = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{i,n}(m'), \qquad b_{i,n}(m') = \binom{n}{i}(m')^i(1-m')^{n-i} \qquad (6)$$

[30] Boat-tail angle
[31] Leading Edge Modification
[32] Sobieczky

$$Z_{up,low}(m') = \sum_{i=1}^{6} a_i (m')^{(i-0.5)} \quad (8)$$

۲. ۴. روش هیکس- هن

روش هیکس- هن، از نوع تغییر هندسه است و به کمک تعریف تعدادی تابع برآمدگی[۳۳] و اضافه‌کردن آن به ایرفویل پایه، ایرفویل‌های جدید می‌سازد.[۳۲] توابع برآمدگی با توابع افزایشی سینوسی تعریف می‌شوند و هر سطح ایرفویل طبق رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌شود:

$$\theta = \theta^{initial} + \sum_{i=0}^{n} a_i \sin^{t_i}\left(\pi (m')^{\frac{\ln(0.5)}{\ln(h_i)}}\right) \quad (9)$$

که در آن، h_i مکان بیشینه‌ی تابع ضربه است و t_i ضخامت هر تابع را نشان می‌دهد. بنابراین، هر تابع برآمدگی با ۳ متغیر تعریف می‌شود، که هر کدام از آن‌ها می‌توانند بهینه شوند یا تغییر کنند. با هدف کاهش متغیرها، یوان[۳۴] و همکاران (۲۰۰۳)،[۳۳] مقدار ثابت ۴ $t_i = 4$ را به‌همراه تابع h_i به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ در نظر گرفته‌اند.[۳۱]

$$h_i = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{i\,\pi}{n+1}\right)\right] \quad (10)$$

در برخی مطالعات، هر سه متغیر در نظر گرفته شده‌اند. مسترز و همکاران (۲۰۱۵)،[۱] نشان داده‌اند که برای ایرفویل NACA ۰۰۱۲ بهترین نتایج مطابق رابطه‌ی ۱۱ حاصل می‌شود:

$$t_i = 2\left(\frac{n-i}{n-1}\right)^3 + 1 \quad (11)$$

۲. ۵. روش تجزیه‌ی مقادیر منفرد

روش تجزیه‌ی مقادیر منفرد (SVD)، یک روش کاهش داده‌ی محبوب در یادگیری ماشین است، که به نوعی فرآیند تجزیه‌ی یک ماتریس و شناسایی مهم‌ترین مؤلفه‌های آن را انجام می‌دهد. می‌توان از روش SVD برای پارامتری‌سازی ایرفویل نیز بهره گرفت. به‌منظور پارامتری‌سازی ایرفویل، ابتدا استخراج مدهای[۳۵] پایه‌ی متعامد برای مجموعه‌ای از ایرفویل‌های آموزشی از پیش‌تعیین‌شده انجام می‌شود. سپس، ایرفویل‌های جدید با استفاده از ترکیب خطی از مدهای پایه استخراج، بازسازی، و تولید می‌شوند. روش SVD، ابتدا توسط تول[۳۶] و همکاران (۲۰۱۰)،[۳۴] استفاده شده است. سپس گومن[۳۷] و همکاران (۲۰۱۲)،[۳۵] با استفاده از روش SVD برای مجموعه‌ای از ایرفویل‌های فوق بحرانی[۳۸]، توانسته‌اند ایرفویل‌های فوق بحرانی دیگری را به شکلی مؤثر تولید کنند. پول[۳۹] و همکاران (۲۰۱۵)،[۳۶] نیز با گسترش روش SVD نشان داده‌اند که اگر تعداد ایرفویل‌های موجود در مجموعه‌ی ایرفویل‌های آموزشی به اندازه‌ی کافی زیاد باشد، می‌توان طیف وسیعی از ایرفویل‌ها را توسط روش SVD تولید کرد. مسترز و همکاران (۲۰۱۵)،[۲] نیز بیان کرده‌اند که برای به‌دست‌آوردن مدهای شکل ایرفویل، باید ایرفویل‌هایی که به‌عنوان اشکال اولیه انتخاب می‌شوند، به گونه‌ای متعامدسازی و گسسته شوند که تعداد نقاط در راستای محور m' یکسان باشد. این شرط به این معناست که مدها فقط باید در جهت θ ساخته شوند. مختصات θ ایرفویل‌های آموزشی حول $\bar{\theta}$ انتقال می‌یابد، به طوری که $\hat{\theta} = \theta - \bar{\theta}$ برای ساخت ماتریس T استفاده می‌شود (رابطه‌ی ۱۲):[۱]

$$T = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1^{\,1} & \hat{\theta}_2^{\,1} & \dots & \hat{\theta}_N^{\,1} \\ \hat{\theta}_1^{\,2} & \hat{\theta}_2^{\,2} & \dots & \hat{\theta}_N^{\,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\theta}_1^{\,M} & \hat{\theta}_2^{\,M} & \dots & \hat{\theta}_N^{\,M} \end{bmatrix} \quad (12)$$

ماتریس T برای M ایرفویل آموزشی با تعداد N نقطه در راستای m' تولید شده است. ماتریس T به کمک روش SVD، به سه ماتریس U، V، و S تجزیه می‌شود (رابطه‌ی ۱۳):[۱]

$$T = U\,S\,V \quad (13)$$

به‌طوری که ستون‌های $V = \left[V_1.\ V_2.\ \cdots.\ V_{\min(n.m)}\right]$، بیانگر مدهای متعامد ایرفویل‌های آموزشی هستند. ایرفویل‌های جدید به‌صورت یک ترکیب خطی از مدهای استخراج‌شده مطابق رابطه‌ی ۱۴ ساخته می‌شوند:[۱]

$$\theta = \bar{\theta} + \sum_i a_i v_i + \theta_{te} m' \quad (14)$$

که در آن، a_i بیانگر متغیرهای طراحی و θ_{te} بیانگر نصف ضخامت لبه‌ی فرار ایرفویل هستند.

به‌کارگیری روش تجزیه‌ی مقادیر منفرد، مستلزم ایجاد یک کتابخانه‌ی جامع از ایرفویل‌هاست، که برای استخراج مودها و تولید متعاقب ایرفویل‌های هدف، نقشی حیاتی ایفا می‌کنند و جهت توسعه‌ی فضای پارامتری استفاده می‌شوند. تعداد مودهای قابل استخراج برای ساخت فضای پارامتری در روش SVD، مستقیماً به تعداد ایرفویل‌های آموزشی موجود در هر کتابخانه بستگی دارد؛ به‌عبارت دیگر، با افزایش تعداد ایرفویل‌های آموزشی، فضای وسیع‌تری برای استخراج و بازسازی مودها در دسترس خواهد بود. در شکل ۸، ایرفویل پایه و پنج مود اول استخراج‌شده با استفاده از کتابخانه‌ی ایرفویل‌های استفاده‌شده در پژوهش حاضر مشاهده می‌شوند. مودهای مذکور پس از استخراج، جهت بازسازی ایرفویل هدف از طریق ترکیب خطی استفاده می‌شوند.

۳. روش‌های پارامتری‌سازی هندسه در توربوماشین‌ها

پره‌های توربوماشین‌ها، دسته‌ی خاصی در آئرودینامیک هستند، که هدف اصلی آن‌ها اعمال (و یا استخراج) بیشینه‌ی کار ممکن بر جریان سیال با بازدهی مناسب است. به همین علت در ادبیات توربوماشین‌ها، پارامترهایی نظیر: زوایای نصب ورودی و خروجی و زاویه‌ی برخورد اهمیت دارد، اما در ادبیات متداول آئرودینامیک، پارامترهایی مانند زاویه‌ی حمله‌ی بیشتر موردبحث است.

جریان روی پره‌های توربوماشین‌ها، وابسته به نوع توربوماشین می‌تواند فروصوتی، گذرصوتی، و یا فراصوتی باشد. بدیهی است که ایرفویل‌های هر رژیم جریان متفاوت است. به‌علاوه به‌علت دوران پره‌ها، جریان روی ایرفویل‌های مذکور پیچیده‌تر از مسائل متعارف آئرودینامیک است و از مختصات استوانه‌ای خاصی برای تشریح آن استفاده می‌شود. با توجه به خصوصیات ذکرشده و اهمیت بالای توربوماشین‌ها در صنعت، روش‌های پارامتری‌کردن خاصی نیز برای آن‌ها ارائه شده است.

یکی از روش‌های مرسوم در توربوماشین، پارامتری‌سازی به کمک توزیع ضخامت و توزیع انحنای ایرفویل است؛ که در آن، پارامترهای هندسی لبه‌های

[33] Bump Function
[34] Wu
[35] Modes
[36] Toal
[37] Ghoman
[38] Supercritical
[39] Poole

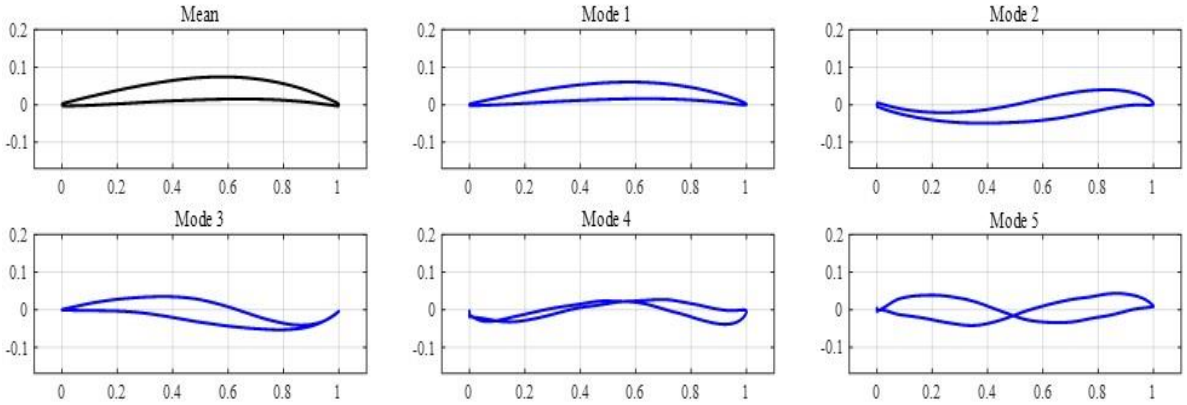

Figure 8. Modes extracted by the Singular Value Decomposition (SVD) method.

شکل ۸. مودهای استخراج‌شده در روش تجزیه‌ی مقادیر منفرد.

جدول ۱. متغیرهای ایرفویل در روش لانگ.

Table 1. Airfoil parameters in the Lange method.

Symbol	parameter.
$ax.tan$	Axial and tangential position of the airfoil section
λ	Stagger angle
c	Chord length
$t_{LE}.t_{TE}$	Leading and Trailing edges thickness
$pos_{t_{LE}}.\ pos_{t_{TE}}$	Position of leading and Trailing edges
$t_{max}.w_{max}$	Maximum thickness and maximum camber
$pos_{t_{max}}.\ pos_{w_{max}}$	Position of maximum thickness and camber
$\beta_{LE}.\ \beta_{TE}$	Leading and trailing edges angles

حمله و فرار، مجزا از سطوح بالایی و پایینی ایرفویل تعیین می‌شوند و عموماً شامل دو پارامتر برای ایجاد انحنای بیضوی‌شکل هستند. در روش اخیر، پارامترهای مذکور برای چند اسپن از پره، به‌صورت دو بعدی تعریف می‌شوند و ایرفویل‌ها توسط منحنی‌های هادی به هم متصل می‌شوند و شکل سه بعدی پره را ایجاد می‌کنند.

۳. ۱. روش لانگ

لانگ و همکاران (۲۰۰۹ و۲۰۱۰)، که پژوهش‌های مهمی در زمینه‌ی عدم‌قطعیت‌های ساختی کمپرسورها و اثر آن در عملکرد انجام داده‌اند،[۳۷ و ۳۸] یکی از روش‌های معروف پارامتری‌سازی ایرفویل‌های متداول کمپرسورها را ارائه کرده‌اند؛ که در آن، هر مقطع پره (ایرفویل) با ۱۴ پارامتر بیان می‌شود. پارامترهای روش لانگ در جدول ۱ و شکل ۹ ارائه شده‌اند.

از بین ۱۴ پارامتر مذکور، دو پارامتر مربوط به مختصات سه بعدی لبه‌ی حمله و دو پارامتر دیگر، زاویه‌ی نصب و طول وتر هستند. پارامترهای زاویه‌ی نصب و طول وتر، پارامترهایی هستند که در فرآیند طراحی اولیه و در بخش طراحی پره‌ی روتور و استاتور استفاده می‌شوند.[۳۹] بنابراین، پروفیل پره با ۱۰ پارامتر، با ۶ پارامتر مربوط به توزیع ضخامت و ۴ پارامتر مربوط به توزیع انحنای ایرفویل بیان می‌شود.

۴. نتایج

در بخش حاضر، نتایج پارامتری‌سازی نمونه‌های آزمایش مذکور ارائه شده است. با توجه به آنکه روش لانگ از ۱۰ پارامتر برای پارامتری‌سازی هندسه‌ی ایرفویل استفاده می‌کند، دقت پارامتری‌سازی تمام روش‌ها با ۱۰ پارامتر مقایسه شده

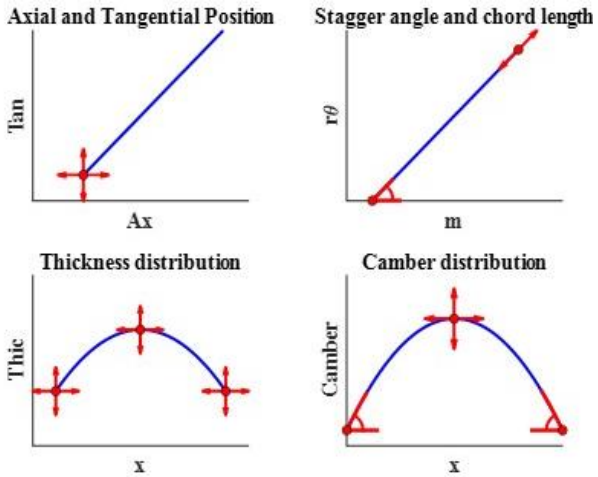

Figure 9. Airfoil parameters in the Lange method (Adapted from [37]).

شکل ۹. پارامترهای ایرفویل در روش لانگ (برگرفته از مرجع [۳۷]).

است. همچنین به‌منظور بررسی اثر افزایش تعداد پارامتر در دقت پارامتری‌سازی، فرآیند اخیر با ۱۲ پارامتر نیز تکرار شده است.

در پژوهش حاضر از رابطه‌ی مجذور میانگین مربعات خطا (رابطه‌ی ۱۵)، به‌عنوان معیاری برای مقایسه‌ی دقت هر روش در پارامتری‌سازی هندسه استفاده شده است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\theta_i - \theta_{true})^2} \qquad (15)$$

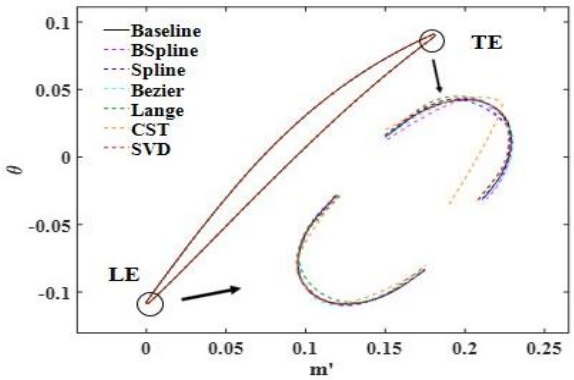

Figure 12. MCA airfoil reconstructed using various parametrization methods.

شکل ۱۲. ایرفویل MCA باز تولیدشده به کمک روش‌های پارامتری سازی مختلف.

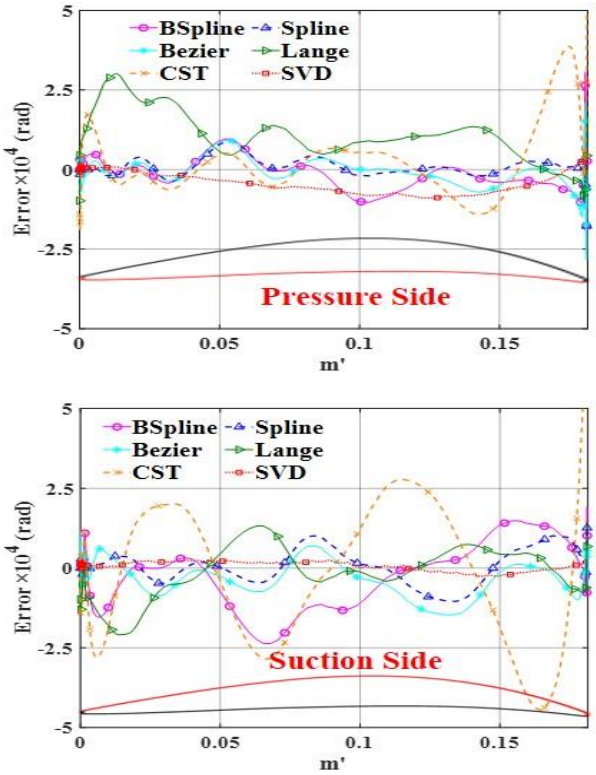

Figure 13. Geometric errors in parametrized MCA airfoils.

شکل ۱۳. خطای ایرفویل‌های پارامتری‌شده‌ی MCA.

هندسه استفاده می‌کند و این مهم، پیاده‌سازی آن را در نمونه‌های توربوماشینی، مانند پره‌های کمپرسور، بسیار آسان می‌کند.

با توجه به موارد ذکرشده، نمی‌توان یک روش را به‌عنوان بهترین روش پارامتری‌سازی معرفی کرد. موارد مختلفی، مانند محدودیت تعداد پارامتر برای پارامتری‌سازی هندسه و ایرفویل موردنظر در انتخاب روش پارامتری‌سازی مؤثر هستند. پژوهش مسترز و همکاران (۲۰۱۵)،[۱] نیز گزاره‌ی اخیر را تأیید می‌کند.

در شکل ۱۲، ایرفویل MCA باز تولیدشده به کمک روش‌های پارامتری‌سازی مختلف و همچنین به‌طورخاص دقت روش‌های پارامتری‌سازی در نواحی لبه‌های حمله و فرار مشاهده می‌شود. در شکل ۱۳، نیز نحوه‌ی توزیع خطای

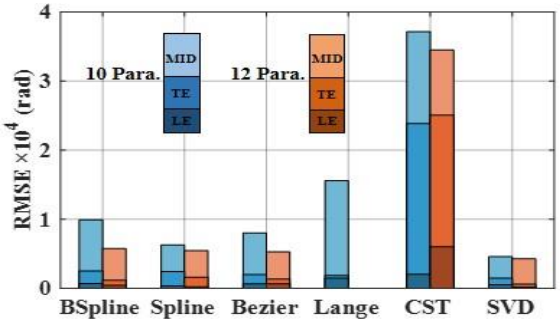

Figure 10. Comparison of parametrization method errors at the leading edge, trailing edge, and mid-section of the MCA airfoil.

شکل ۱۰. مقایسه‌ی خطای روش‌های پارامتری‌سازی در لبه‌های حمله، فرار، و بخش میانی ایرفویل MCA.

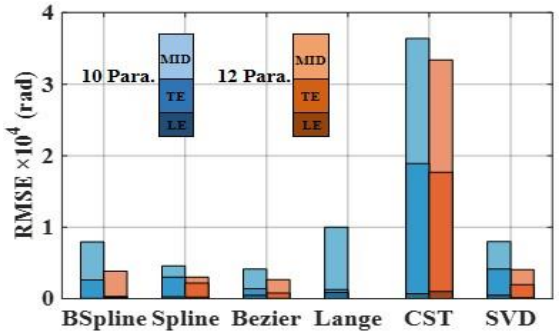

Figure 11. Comparison of parametrization method errors at the leading edge, trailing edge, and mid-section of the DCA airfoil.

شکل ۱۱. مقایسه‌ی خطای روش‌های پارامتری‌سازی در لبه‌های حمله، فرار، و بخش میانی ایرفویل DCA.

جهت کمینه‌سازی خطای مذکور و انطباق دقیق هندسی، از ترکیب الگوریتم‌های تصادفی (بهینه‌سازی ازدحام ذرات)[۴۰] و قطعی (روش تندترین شیب)[۴۱] استفاده شده است. ترکیب دو دسته الگوریتم بهنیه‌سازی مذکور، رسیدن به نقطه‌ی کمینه‌ی عمومی را تضمین و از به دام‌افتادن در بهینه‌های محلی جلوگیری می‌کند. با توجه به اهمیت دقت هندسه در ناحیه‌ی لبه‌ی حمله و جلوی سطح مکش ایرفویل، محاسبه‌ی خطا مطابق با رابطه‌ی ۱۶ با وزن ۲ انجام شده است.[۲]

$$w_i = \begin{cases} 2 & if \quad m_i' < 0.2 \\ 1 & if \quad m_i' > 0.2 \end{cases} \qquad (16)$$

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱، مقادیر RSME به ترتیب برای ایرفویل MCA و DCA مشاهده می‌شوند. مقادیر خطای روش‌های پارامتری‌سازی برای ایرفویل MCA به‌طورکلی ۱۴ تا ۱۶ درصد بیشتر از ایرفویل DCA است. همچنین برای هر دو ایرفویل و برای تمام روش‌ها، افزایش تعداد پارامتر، خطای پارامتری‌سازی را کاهش می‌دهد. اگرچه کاهش مقدار خطا برای تمام روش‌ها یکسان نیست و بین ۶ تا ۶۰ درصد متغیر است.

مطابق شکل‌های ۱۰ و ۱۱، خطای روش لانگ در مقایسه با روش‌های برازش منحنی ۱۰ تا ۶۰ درصد کمتر بوده است. اگرچه روش لانگ از نیم‌دایره برای پارامتری‌کردن نواحی لبه‌های حمله و فرار استفاده می‌کند، اما با این حال با دقت قابل‌قبولی نواحی مذکور را بازتولید کرده است. شایان ذکر است که روش لانگ از پارامترهای صریح در مختصات توربوماشینی برای پارامتری‌سازی

[40] Particle Swarm Optimization

[41] Steepest Descent Method

پارامتری‌سازی در طول محور ایرفویل نشان داده شده است. دقت پایین روش CST به‌ویژه در نواحی لبه‌های حمله و فرار در هر دو شکل قابل مشاهده است. همچنین، در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نیز نتایج اخیر برای ایرفویل DCA مشاهده می‌شود.

اگرچه روش‌های برازش منحنی، قابلیت بالایی در پارامتری‌سازی لبه‌های حمله و فرار دارند، اما باید دقت کرد که در یک فرآیند پارامتری‌سازی خودکار و عدم وجود نظارت، امکان به‌وجود آمدن لبه‌های تیز و تولید هندسه‌های غیرفیزیکی وجود دارد. این در حالی است که روش لانگ به سبب وجود پارامتری‌های صریح، روش مطمئن‌تری برای تولید هندسه‌های مختلف در یک فرآیند خودکار است.

نتایج به وضوح نشان می‌دهند که برای هر دو نمونه‌ی آزمایش، خطای روش CST به‌میزان قابل‌توجهی در لبه‌ی فرار افزایش یافته است. با توجه به روابط

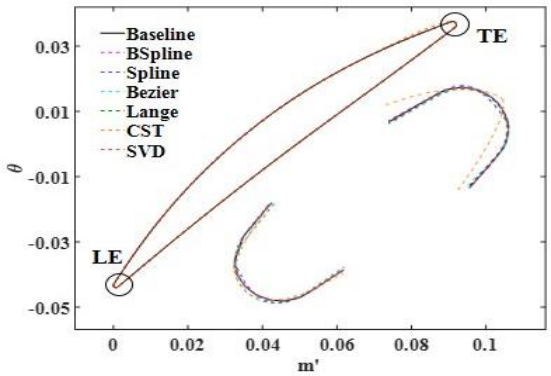

Figure 14. DCA airfoil reconstructed using various parametrization methods.

شکل ۱۴. ایرفویل DCA باز تولیدشده به کمک روش‌های پارامتری سازی مختلف.

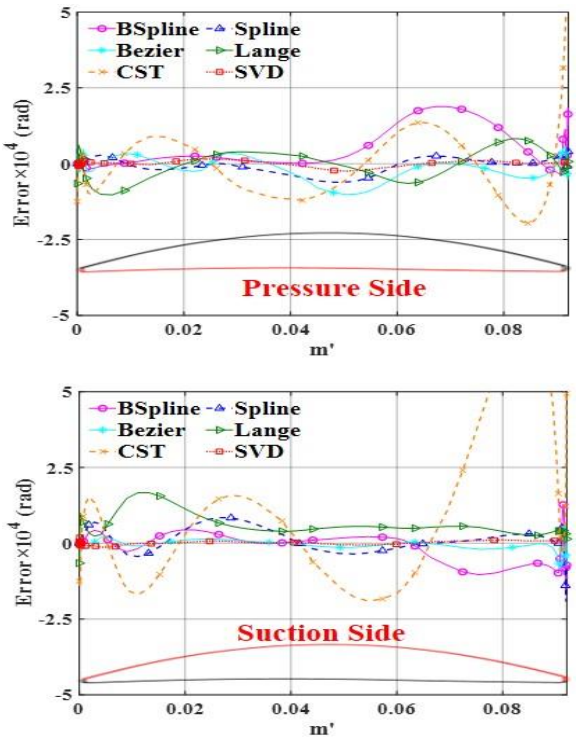

Figure 15. Geometric errors in parametrized MCA airfoils.

شکل ۱۵. خطای ایرفویل‌های پارامتری‌شده‌ی DCA.

۲ و ۳، روش CST با تنظیم $\Delta\theta = 0$ و $N_2 = 0.5$ ناحیه‌ی اخیر را بازتولید کرده است. درنتیجه، افزایش خطا در ناحیه‌ی مذکور دور از انتظار نیست.

با توجه به کتابخانه‌ی غنی‌تر برای ایرفویل MCA، روش SVD با تعداد پارامتر یکسان دقت بسیار خوبی در پارامتری‌کردن ایرفویل MCA دارد. همچنین با افزایش تعداد مودهای روش SVD در پارامتری‌سازی ایرفویل DCA برخلاف ایرفویل MCA، دقت بازتولید هندسه افزایش می‌یابد. درنتیجه، روش SVD در بازتولید ایرفویل MCA عملکرد بهتری نسبت به DCA دارد.

همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، روش هیکس- هن، یک روش تغییر هندسه است و با دریافت ایرفویل پایه به عنوان ورودی، ایرفویل جدید را با توابع برآمدگی ایجاد می‌کند. در صورتی که ضرایب توابع برآمدگی صفر باشند، خروجی همان ایرفویل پایه است و در غیر این‌صورت، ایرفویل‌های جدید ساخته می‌شوند. این روش برای اعمال خطاهای ساختی بر روی یک ایرفویل مشخص به‌کار می‌رود و امکان تولید ایرفویل جدید در روش مذکور وجود ندارد. در شکل ۱۶، تغییرات اعمال‌شده توسط روش هیکس- هن برای دو ایرفویل MCA و DCA مشاهده می‌شود.

در ادامه، در جدول ۲ عملکرد روش‌های پارامتری‌سازی استفاده‌شده در پژوهش حاضر با معیارهای مختلف بیان و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. به‌عنوان مثال، خطای نواحی لبه‌های حمله و فرار به‌صورت مجزا ارائه شده است، که نشانگر قابلیت هر روش در بازتولید نواحی مذکور است. نتایج جدول ۲، راهنمای خوبی در انتخاب بهترین روش پارامتری‌سازی برای یک مسئله و هندسه‌ی مشخص ارائه می‌کند. بهترین روش با توجه به معیارهایی، مانند تعداد پارامتر، نوع هندسه، و مسئله‌ی موردنظر انتخاب می‌شود و نمی‌توان به‌طورکلی یک روش

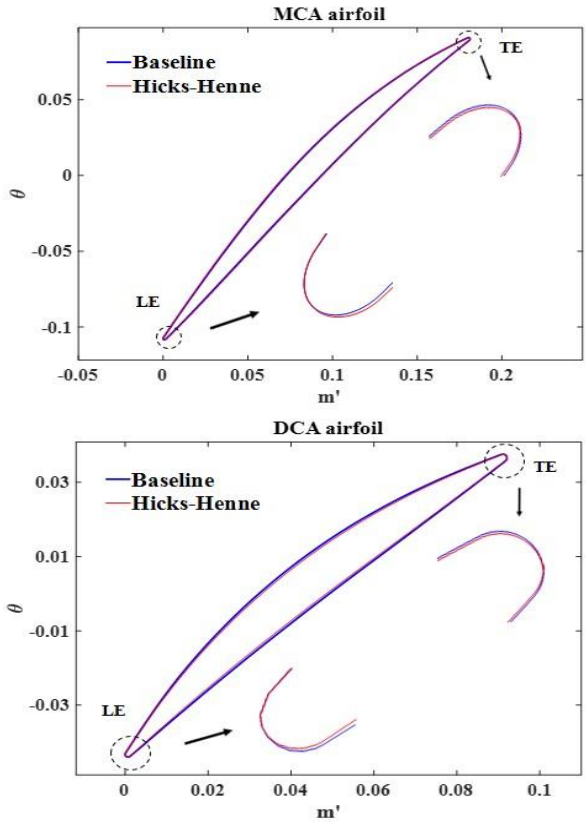

Figure 16. Implementation of non-uniform thickness variationsusing the Hicks-Henne method.

شکل ۱۶. اعمال تغییر ضخامت غیریکنواخت توسط روش هیکس- هن.

جدول ۲. مقایسه‌ی روش‌های پارامتری‌سازی براساس معیارهای کلیدی (۱۰ پارامتری).

Table 2. Comparison of Parametrization Methods Based on Key Criteria (10 parameters).

Methd	Case study 1 (MCA airfoil)			Case study 2 (DCA airfoil)			Ease of Implementation	Parameter type	Deviation modeling capability	unrealistic geometry generation
	Overall accuracy	Error of (%)		Overall accuracy	Error of (%)					
		LE	TE		LE	TE				
B-Spline	$9.88e-5$	8	23	$7.94e-5$	3	30	Moderate	Implicit	Good	Likely
Spline	$6.25e-5$	7	37	$4.58e-5$	6	46	Easy	Explicit	Excellent	Very likely
Bézier	$8.01e-5$	15	28	$4.15e-5$	12	22	Moderate	Implicit	Good	Likely
Lange	$19.5e-5$	18	4	$10.0e-5$	27	4	Easy	Explicit	Fair	Unlikely
CST	$37.2e-5$	5	60	$36.3e-5$	3	50	Moderate	Implicit	Fair	Possible
SVD	$4.55e-5$	6	9	$8.01e-5$	26	4	Complex	Implicit	Poor	Unlikely

را به‌عنوان روش منتخب برای پارامتری‌سازی معرفی کرد. با توجه به معیارهای بررسی‌شده در جدول ۲، بهترین روش قابل انتخاب است.

۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، روش‌های پارامتری‌سازی هندسه در آئرودینامیک و توربوماشین معرفی و برای دو نمونه‌ی آزمایش متداول در پره‌ی کمپرسورهای محوری اعمال شده‌اند. فرآیند پارامتری‌سازی با ۱۰ و ۱۲ پارامتر انجام و دقت روش‌ها با یکدیگر مقایسه شده است. همچنین روش هیکس- هن، به‌عنوان یک روش تغییر هندسه برای اعمال تغییرات هندسی معرفی شده است. نتایج مهم استخراج‌شده از پژوهش حاضر به این شرح است:

۱) انتخاب روش پارامتری‌سازی مناسب، مستقیماً تحت تأثیر نوع ایرفویل، ماهیت مسئله (کمّی‌سازی عدم‌قطعیت‌های هندسی یا بهینه‌سازی) و محدودیت تعداد پارامتر قرار دارد. برای مثال، روش لانگ با امکان کنترل پارامترهایی چون ضخامت و انحنای بیشینه، مانع از تولید هندسه‌های غیرواقعی می‌شود. به همین دلیل، روش لانگ برای مسائل بهینه‌سازی که اعتبار هندسه‌ی اهمیت بالایی دارد، گزینه‌ی مناسبی است. از طرفی، روش‌های برازش منحنی با ارائه‌ی دقت بهتر در بازتولید هندسه و قابلیت اعمال انحنای موضعی قابل‌توجه، برای مدل‌سازی برخی انحراف‌های ساختی مناسب‌تر هستند.

۲) روش‌های پارامتری‌سازی مذکور با معیارهای دقت بازتولید، خطای لبه‌های حمله و فرار، سادگی در پیاده‌سازی، نوع پارامترها (صریح/ ضمنی)، قابلیت بازتولید انحراف‌های هندسی و امکان تولید هندسه‌های غیرواقعی، مقایسه و رتبه‌بندی شده‌اند. مقایسه‌ی اخیر در جدول ۲ به‌طورکامل ارائه شده است، که راهنمای کاملی برای پژوهشگران و طراحان در انتخاب روش‌پارامتری‌سازی مناسب است.

۳) اگرچه افزایش تعداد پارامترهای هندسی از ۱۰ به ۱۲ موجب کاهش خطا می‌شود (در برخی موارد تا ٪۵۰)، اما همواره موجب کاهش چشمگیر خطا نمی‌شود. افزایش تعداد پارامترهای هندسی در ایرفویل MCA برای روش‌های SVD و اسپلاین به ترتیب مقدار خطا را ۷ و ۸ درصد کاهش داده است.

۴) با آنکه خطای روش لانگ نسبت به روش‌های برازش منحنی ۱۰ تا ۶۰ درصد بیشتر است، اما با ارائه‌ی متغیرهای صریح، امکان پارامتری‌سازی راحت را فراهم می‌سازد و از به‌وجودآمدن هندسه‌های غیرواقعی جلوگیری می‌کند.

۵) با توجه به شکل‌های۱۰ و ۱۱، خطای پارامتری‌سازی ایرفویل MCA برای تمام روش‌ها با توجه به انحنای بیشتر نسبت ایرفویل DCA، در برخی موارد حتی تا ٪۵۰ بیشتر است.

۶) روش SVD با مجذورمیانگین مربعات خطای برابر با $۰/۴۲ \times ۱۰^{-۴}$ و $۰/۴۵ \times ۱۰^{-۴}$ رادیان، کمترین خطا را در پارامتری‌کردن ایرفویل MCA و روش بزیه با مجذور میانگین مربعات خطای برابر با $۰/۲۷ \times ۱۰^{-۴}$ و $۰/۴۰ \times ۱۰^{-۴}$ رادیان، کمترین خطا را در پارامتری‌کردن ایرفویل DCA ارائه کرده است.

۷) روش هیکس- هن (Hicks-Henne) به‌عنوان یک روش تغییر هندسه (Deformative Methods) در مدل‌سازی انحراف‌های هندسی، این مزیت را دارد که هندسه‌ی مبنا را با دقت کامل حفظ می‌کند. در روش مذکور، به‌دلیل وجود هندسه‌ی پایه، پارامترهای هندسی لازم برای بازتولید هندسه‌ی پایه حذف می‌شود و مدل فقط بر روی پارامترهای مربوط به تغییرات و انحراف‌ها تمرکز دارد.

References – منابع

1. Masters, D.A., Taylor, N.J., Rendall, T., Allen, C.B. and Poole, D.J., 2015. Review of aerofoil parameterisation methods for aerodynamic shape optimisation. In *53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting*, p. 0761. https://doi.org/10.2514/6.2016-0558

2. Masters, D.A., Taylor, N.J., Rendall, T.C.S., Allen, C.B. and Poole, D.J., 2017. Geometric comparison of aerofoil shape parameterization methods. *AIAA journal*, *55*(5), pp.1575-1589. https://doi.org/10.2514/1.J054943

3 . Lauer, M.G. and Ansell, P.J., 2025. A review of parameterization methods for airfoil design. *Progress in Aerospace Sciences*, *158*, p.101140. https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2025.101140

4. Zhang, T.T., Wang, Z.G., Huang, W. and Yan, L., 2018. A review of parametric approaches specific to aerodynamic design process. *Acta Astronautica*, *145*, pp.319-331. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.02.011

5. Sripawadkul, V., Padulo, M. and Guenov, M., 2010, September. A comparison of airfoil shape parameterization techniques for early design optimization. In *13th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis Optimization Conference*, p. 9050. https://doi.org/10.2514/6.2010-9050

6. Wang, J., Yang, H., Zhou, K., Wei, J., Wen, M. and Zheng, X., 2022. Performance dispersion control of a multistage compressor based on precise identification of critical features. *Aerospace Science and Technology*, *129*, p.107845. https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107845

7. Junying, W.A.N.G., Baotong, W.A.N.G., Heli, Y.A.N.G., Zhenzhong, S.U.N. and Kai, Z.H.O.U., 2023. Compressor geometric uncertainty quantification under conditions from near choke to near stall. *Chinese Journal of Aeronautics*, *36*(3), pp.16-29. https://doi.org/10.1016/j.cja.2022.10.012

8. Prots, A., Schlüter, L., Voigt, M., Meyer, M. and Mailach, R., 2023, June. Sensitivity analysis of performance parameters of a compressor blade with correlated profile parameters. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, *87110*, p. V13DT34A014). American Society of Mechanical Engineers. https://doi.org/10.1115/GT2023-102442

9. Wang, H., Gao, L., Yang, G. and Wu, B., 2023. A data-driven robust design optimization method and its application in compressor blade. *Physics of Fluids*, *35*(6).multi-storey reinforced concrete frame", Struct. *Design Tall Spec. Build*. 21, 405–415, 2012. https://doi.org/10.1063/5.0150040

10. Zhang, Q., Shenren, X.U., Xianjun, Y.U., Jiaxin, L.I.U., Dingxi, W.A.N.G. and Huang, X., 2022. Nonlinear uncertainty quantification of the impact of geometric variability on compressor performance using an adjoint method. *Chinese Journal of Aeronautics*, *35*(2), pp.17-21. https://doi.org/10.1016/j.cja.2021.06.007

11. Altafi, D., Mojaddam, M. and Ghadimi, B., 2022. Investigation of the effect of the geometric deviations on the performance of a radial flow compressor employing uncertainty quantification (UQ) and sensitivity analysis. *The Journal of Engine Research*, *67*(67), pp.51-63. [In Persian]. 10.22034/er.2022.697920

12. Aligoodarz, M., Mehrpanahi, A. and Karrabi, H., 2017. Investigation of blade tolerances effect on efficiency, using 1D modeling of an axial flow turbine [In Persian]. https://www.sid.ir/paper/245524/en

13. Sadeghi Malek-Abadi, M. and Davari, A. (2024) 'An experimental study of the acoustics of small horizontal-axis wind turbines based on computational fluid dynamics and neural network approaches', *Sharif Journal of Mechanical Engineering(SJME)*, *40*(2), pp. 52–63. doi: 10.24200/j40.2024.64121.1704. [in Persian]. https://doi.org/10.24200/j40.2024.64121.1704

14. Abraham, S., Tsirikoglou, P., Lacor, C., Ghorbaniasl, G., Wunsch, D., Hirsch, C. and Contino, F., 2018. Uncertainty quantification in industrial turbo-machinery design using sparse polynomial chaos expansions. In *2018 Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, p. 3103. https://doi.org/10.2514/6.2018-3103

15. Li, J., Liu, B., Yang, X. and Lu, X., 2015, June. Study on coupling optimization design of aspirated compressor airfoil based on two different parameterization methods. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, 56659*, p. V02CT45A001). American Society of Mechanical Engineers. https://doi.org/10.1115/GT2015-42009

16. Ivanov, T.D., Simonović, A.M., Svorcan, J.S. and Peković, O.M., 2017. VAWT optimization using genetic algorithm and CST airfoil parameterization. *FME Transactions*, *45*(1). doi:10.5937/fmet1701026I

17. Xiang, H. and Chen, J., 2021. Aerothermodynamics optimal design of a multistage axial compressor in a gas turbine using directly manipulated free-form deformation. *Case Studies in Thermal Engineering*, *26*, p.101142. https://doi.org/10.1016/j.csite.2021.101142

18. Bestle, D. and Flassig, P., 2010, July. Optimal aerodynamic compressor blade design considering manufacturing noise. In *Proceedings of the 8th ASMO UK/ISSMO Conference*. https://www.researchgate.net/publication/259150461

19. Ji, T., Chu, W., Liang, C. and Meng, D., 2023. Uncertainty quantification on the influence of blade thickness deviation at different rotational speeds based on flow dissipation analysis. *Physics of Fluids*, *35*(6). https://doi.org/10.1063/5.0155693

20. Ji, T. and Chu, W., 2024. Uncertainty quantification of compressor performance affected by data-driven blade geometric deviations. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, *146*(12), p.121016. https://doi.org/10.1115/1.4066231

21. Büche, D., Klostermann, S., Rogé, G. and Loyatho, X., 2018. Uncertainties in compressor and aircraft design. In *Uncertainty Management for Robust Industrial*

Design in Aeronautics: Findings and Best Practice Collected During UMRIDA, a Collaborative Research Project (2013–2016) Funded by the European Union, pp. 35-51. Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77767-2_3

22. Dunham, J., 1998. *CFD validation for propulsion system components (la validation CFD des organes des propulseurs)* (No. AGARDAR355).

23. Moore, R.D., 1980. *Performance of single-stage axial-flow transonic compressor with rotor and stator aspect ratios of 1.19 and 1.26 respectively, and with design pressure ratio of 2.05*. National Aeronautics and Space Administration.

24. Dahlquist, G. and Björck, Å., 2008. *Numerical methods in scientific computing, volume I*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

25. McClarren, R., 2017. *Computational nuclear engineering and radiological science using python*. Academic Press.

26. Marino, E., Hosseini, S.F., Hashemian, A. and Reali, A., 2020. Effects of parameterization and knot placement techniques on primal and mixed isogeometric collocation formulations of spatial shear-deformable beams with varying curvature and torsion. *Computers & Mathematics with Applications*, *80*(11), pp.2563-2585. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2020.06.006

27. Kulfan, B.M., 2010. Recent extensions and applications of the 'CST'universal parametric geometry representation method. *The Aeronautical Journal*, *114*(1153), pp.157-176. https://doi.org/10.2514/6.2007-62

28. Kulfan, B.M., 2008. Universal parametric geometry representation method. *Journal of Aircraft*, *45*(1), pp.142-158. https://doi.org/10.2514/1.29958

29. Kulfan, B. and Bussoletti, J., 2006, September. " Fundamental" parameteric geometry representations for aircraft component shapes. In *11th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference* (p. 6948). https://doi.org/10.2514/6.2006-6948

30. Sobieczky, H., 1999. Parametric airfoils and wings. In *Recent Development of Aerodynamic Design Methodologies: Inverse Design and Optimization* (pp. 71-87).

31. Sobieczky, H., 2000, January. Aerodynamic design and optimization tools accelerated by parametric geometry preprocessing. In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS, 2000*.

32. Hicks, R.M. and Henne, P.A., 1978. Wing design by numerical optimization. *Journal of Aircraft*, *15*(7), pp.407-412. https://doi.org/10.2514/3.58379

33. Wu, H.Y., Yang, S., Liu, F. and Tsai, H.M., 2003, June. Comparisons of three geometric representations of airfoils for aerodynamic optimization. In *16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference* (p. 4095). https://doi.org/10.2514/6.2003-4095

34. Toal, D.J., Bressloff, N.W., Keane, A.J. and Holden, C.M., 2010. Geometric filtration using proper orthogonal decomposition for aerodynamic design optimization. *AIAA journal*, *48*(5), pp.916-928. https://doi.org/10.2514/1.41420

35. Ghoman, S., Wang, Z., Chen, P. and Kapania, R., 2012. A POD-based reduced order design scheme for shape optimization of air vehicles. In *53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 20th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 14th AIAA* (p. 1808). https://doi.org/10.2514/6.2012-1808

36. Poole, D.J., Allen, C.B. and Rendall, T.C., 2015. Metric-based mathematical derivation of efficient airfoil design variables. *AIAA Journal*, *53*(5), pp.1349-1361. https://doi.org/10.2514/1.J053427

37. Lange, A., Vogeler, K., Gu Mmer, V., Schrapp, H. and Clemen, C., 2009, January. Introduction of a parameter based compressor blade model for considering measured geometry uncertainties in numerical simulation. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, *48876*, pp. 1113-1123). https://doi.org/10.1115/GT2009-59937

38. Lange, A., Voigt, M., Vogeler, K., Schrapp, H., Johann, E. and Gu Mmer, V., 2010, October. Probabilistic CFD simulation of a high-pressure compressor stage taking manufacturing variability into account. In *Turbo expo: power for land, sea, and air, 44014*, pp. 617-628). https://doi.org/10.1115/GT2010-22484

39. Hajilou Banisi, A. and Khajeh Kolki, M. R. (2025) 'Design and replacement of a three-stage axial compressor with a centrifugal compressor in a gas turbine to enhance performance', *Sharif Journal of Mechanical Engineering(SJME)*, *41*(1), pp. 29–42 [in Persian]. https://doi.org/10.24200/j40.2025.65087.1719