

بررسی تجزیه حالت پویا پارامتریک برای تخمین میدان جریان دوبعدی

محمد صادق کیوانی پور^۱، فروغ مهندس پور^۲، نوروز محمد نوری^{۳*} (نویسنده مسئول)

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران،

^۲ دانشجوی دکترای مهندسی مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران،

^۳ عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه علم و صنعت ایران،

پست الکترونیکی نویسندگان:

۱- m_keyvanipour@mecheng.iust.ac.ir

۲- f_mohandes@mecheng.iust.ac.ir

۳- mnouri@iust.ac.ir

چکیده

مدل‌های مرتبه کاهش یافته یا ROM ها، به دلیل افزایش کارایی محاسباتی برای روش‌های عددی و تحلیل نتایج حاصل از آزمایشات تجربی در مطالعه پدیده‌های پیچیده‌ای که دارای دینامیک غیرخطی به جایگاه شناخته شده و قابل اطمینانی رسیده‌اند. در ای میان، روش تجزیه حالت پویا یا DMD، در طیف وسیعی از زمینه‌های معرفی شده در دینامیک سیالات و سایر رشته‌های مرتبط با روش‌های داده محور نتایج رضایت بخشی را نشان می‌دهد. در این مطالعه از یک تکنیک سریع و دقیق برای بدست آوردن تقریب مناسب از میدان سرعت یک سیال مشخص، با استفاده از میدان سرعت محاسبه شده سیال‌هایی با اعداد رینولدز در همسایگی تعریف شده، استفاده شده است. در این روش از تشکیل ماتریس داده‌های میدان سرعت و روش رگرسیون بهره گرفته شده است. در نهایت، به عنوان یک مطالعه موردی، این الگوریتم بر روی جریان سیال حفره‌ای با درب محرک اعمال می‌شود. نتایج مطابقت مناسبی بین میدان سرعت تخمین زده شده با استفاده از این روش را نشان داده است.

واژه‌های کلیدی: تجزیه مد دینامیکی، دینامیک سیالات محاسباتی، رگرسیون

* نوروز محمد نوری، استاد دانشکده مهندسی مکانیک- دانشگاه علم و صنعت ایران.

ایمیل: mnouri@iust.ac.ir (نویسنده مسئول مقاله)

Investigation of Parametric Dynamic Mode Decomposition for 2D Flow Field Estimation

Mohammad Sadegh. Keyvanipour¹, Foroogh. Mohandespour², Nowrouz. Mohammad.Nouri³

1- M.Sc Student of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

2- Ph.D. Student of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

3- Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.

Abstract:

Reduced-order models (ROMs) have attracted considerable attention due to the recent advances in computational capacity. ROMs are known for their ability to reduce large amounts of data by projecting a high-dimensional system into a lower-dimensional subspace. The Dynamic Mode Decomposition (DMD) method, as one of the powerful ROM variants, is recognized for enhancing the computational efficiency of numerical and experimental studies of complex phenomena. Using these methods, a high-dimensional system is reduced to a low-dimensional subsystem while preserving the pivot features of the original system, with a new, similar system with the same dynamics. It demonstrates broad adaptability and applicability across fluid dynamics and other data-centric applications. On the other hand, regression methods are statistical methods that analyze and model relationships between two or more variables. In this study, a fast and accurate technique is used to obtain a good approximation of the velocity field of a given fluid by using the calculated velocity fields of fluids with Reynolds numbers in the defined neighborhood. Specifically, using the DMD modes, the essential features of the fluid flow velocity domain are extracted, and then, using the regression method, these features are extended to other fluid velocity fields. To reach this goal, the initial conditions of each DMD mode with the highest energy are used to add the regression method. Finally, as a case study, this algorithm is applied to a lid-driven cavity fluid flow. In this case, the fluid flow velocity field is studied for Re numbers between 400 and 600. The features of the velocity field are extracted from the fields with Re numbers of 400, 500, and 600. The features are defined by the first 9 modes, which account for 99% of the energy. The results show a good agreement between the velocity field estimated using this cost-effective variant of the parametric DMD method.

Keywords: Dynamic Mode Decomposition, Computational Fluid Dynamics, Regression.

انتخاب دقیق تصاویر لحظه‌ای توسط روش‌های یادگیری ماشین انجام شود و در نهایت سازگاری روش DMD را افزایش دهد. دینگ و لی [۱۰] از تکنیک حداقل مربعات کل برای حذف نویز و حذف بایاس تصاویر لحظه‌ای استفاده کردند، جایی که پیچیدگی طیفی سیستم از پیچیدگی مکانی آن قابل توجه‌تر است. نتیجه برای انواع مختلف موارد با موفقیت بررسی شده است.

اگرچه ثابت شده است که تجزیه متعامد سره (POD) از نظر دقت بهتر از DMD است، اما DMD همچنان عملکرد بهتری در پیش‌بینی نشان می‌دهد. به عنوان مثال، لی و همکارانش [۱۱]، دقت روش DMD را در یک میدان فشار با عدد رینولدز بالا را بررسی می‌کنند که در آن جریان روی یک منشور عبور می‌کند. DMD با رتبه کامل دقت بالایی را نشان می‌دهد، اگرچه خطاهای کاهش مرتبه در برخی مناطق قابل اغماض نیستند. از دلایل اصلی خطاهای بازسازی ماتریس ساختارهای مکانی، فعالیت‌های غیرخطی سیستم دینامیکی است. همچنین، خطاهای بازسازی ماتریس ساختارهای زمانی ناشی از رفتار سیستم دینامیکی در طول زمان است. مطالعات تحقیقاتی زیادی در مورد گسترش توانایی‌های روش DMD از نظر دقت انجام شده است. پن و همکارانش [۱۲] دقت DMD در تخمین هارمونیک‌های مرتبه بالاتر را با چهار نوع الگوریتم DMD بررسی می‌کنند و نتیجه می‌گیرند که DMD برای میدان‌های مطالعاتی با انرژی بالا عملکرد بهتری دارد.

با توجه به اهمیت روش تخمین ویژگی‌های هیدرودینامیکی در سیالات [۱۳]، تحقیقات زیاد برای افزایش دقت و توانایی‌های پیش‌بینی با استفاده از روش DMD انجام شده است. یکی از زیرشاخه‌های آن، مطالعات پارامتریک است که میدان جریان در یک حوزه با استفاده از تخمین‌های صورت گرفته در حوزه‌های دیگر انجام می‌شود [۱۴]. در این پژوهش نیز با بهره‌گیری از این رویکرد، ویژگی‌های مکانی و زمانی استخراج شده از یک سیستم دینامیکی به سیستم دیگر انتقال یابد و بدین صورت ویژگی‌های هیدرودینامیکی سیال ثانویه با در نظر گرفتن شرایط اولیه در تجزیه مد دینامیکی تخمین زده شود. این نداشت ویژگی با استفاده از

به دلیل پیشرفت‌های اخیر در ظرفیت‌های محاسباتی، روش‌های داده‌محور بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته‌اند. روش DMD یکی از تکنیک‌های بدیع در میان ROMها است که با استخراج ویژگی‌ها از داده‌ها، مدل‌سازی، تخمین و پیش‌بینی سیستم‌های غیرخطی پیچیده را متحول می‌کند [۱]. این روش، داده‌ها را به ساختارهای زمانی و مکانی منسجم تجزیه می‌کند که بر اساس مقادیر ویژه سیستم رفتار می‌کنند. DMD در سال‌های اخیر در بسیاری از تحلیل‌های پیچیده مبتنی بر داده، مانند اپیدمیولوژی [۲]، مالی [۳]، علوم اعصاب [۴] و دینامیک سیالات، که برای اولین بار توسط اشمیت [۵] معرفی شد، مورد استفاده قرار گرفته است. این روش، عملگر کوپمن خطی را منحصراً در حوزه داده‌های اندازه‌گیری شده تقریب می‌زند [۶].

شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی و پیچیده در کاربردهای دینامیک سیالات، پرهزینه و عمدتاً پیچیده است، زیرا سیستم‌های حاکم بر معادلات ناویر-استوکس پیچیده هستند. بنابراین، استفاده از مدل‌های ریاضی مبتنی بر داده می‌تواند به طور قابل توجهی ناسازگاری‌ها و هزینه‌های محاسباتی را کاهش دهد. با این حال، روش‌های مبتنی بر داده در مواردی مانند حساسیت به نویز [۷] به خوبی عمل نمی‌کنند که باید خطاهای موجود تا حد امکان کاهش یابند. از این رو، کاربرد این روش‌ها باید گسترش یابد تا به طور مناسب در جریان سیال در رویکردهای هیدرودینامیکی اعمال شوند. همچنین از این روش به منظور کاهش هزینه‌های محاسباتی نیز استفاده می‌شود. به عنوان مثال، صباغ زادگان و کاظم مویدی [۸]، با استفاده از روش DMD، یک مدل کاهش مرتبه یافته از فرایند انتقال حرارت از یک پوسته جامد را ارائه و هزینه محاسباتی را کاهش دادند.

مقالات تحقیقاتی بسیاری روش DMD را مورد تحلیل قرار داده‌اند تا آن را مقاوم‌تر نموده و دامنه کاربری آن را نیز افزایش دهند. به عنوان مثال، ساشیدر و کوتز [۹]، تجزیه حالت پویای بهینه شده و بگینگ^۲ را معرفی می‌کنند که به DMD این امکان را می‌دهد تا

^۲ Bagging

$$X_{k+1} = AX_k \quad (1)$$

همان طور که در معادله فوق نشان داده شده است، بهترین تقریب ماتریس A را تخمین می‌زند، که یک تقریب خطی از دینامیک سیستم است. بررسی نرخ نمونه‌برداری مناسب چالشی است که به دلیل تأثیر آن بر دقت مدل‌سازی ریاضی، باید در نظر گرفته شود.

برای یافتن ماتریس تقریب سیستم، داده‌های اندازه‌گیری باید به شکل ماتریس‌های داده‌های لحظه‌ای مرتب شوند که به صورت ماتریس لحظه‌ای با جابجایی زمانی مطابق با موارد زیر تعریف می‌شوند: [۱۵]

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & L & x_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$X' = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & L & x_m \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$A = X'X^\dagger \quad (3)$$

که در آن $\dagger$ شبه معکوس مور-پنروز است. برای حل مسئله حداقل مربعات برای مسئله کم تعیین شده، می‌توان با اعمال SVD طبق موارد زیر تعریف کرد: [۱۷]

$$X = U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} U^0 & U_{rem}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{rem}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^0 \\ V_{rem}^0 \end{bmatrix} \approx U^0 \Sigma^0 V^0 \quad (4)$$

که $U \in \mathbb{C}^{n \times n}, \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m-1}, V^0 \in \mathbb{C}^{(m-1) \times m-1}, U_{rem}^0 \in \mathbb{C}^{n \times r}$

$\Sigma^0 \in \mathbb{R}^{r \times r}, V_{rem}^0 \in \mathbb{C}^{(r \times m-1)}$ عملگر خطی A را می‌توان به دست

آورد: [۱۵]

$$A \approx \bar{A} = X'V^0 \Sigma^0 U^0 \quad (5)$$

سپس، حالت‌های DMD مربوطه عبارتند از: [۱۶]

$$\Phi = X'V\Sigma^{-1}\Psi \quad (6)$$

که در آن، Ψ یک ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه است. در نهایت، مدل ریاضی جدید سیستم صرفاً مبتنی بر داده‌ها مطابق با موارد زیر است: [۱۵]

$$X(t) \approx \sum_{k=1}^r \phi_k \exp(\omega_k t) b_k = \Phi \exp(\Omega t) B \quad (7)$$

یادگیری نظارت‌شده انجام می‌شود. در این پژوهش، جریان سیال حفره‌ای با درپوش محرک، به عنوان یک مسئله پایه در دینامیک سیالات، در نظر گرفته شده است. پارامترهای تخمین هدف، مؤلفه‌های دوبعدی میدان‌های سرعت هستند. نوآوری این پژوهش در این امر است که پس از تجزیه میدان به مؤلفه‌های استاندارد DMD، با در نظر گرفتن شرایط اولیه تعریف شده، مؤلفه‌های جریان در میدان‌های جریانی دیگر تخمین زده می‌شوند.

۲. روش‌شناسی

در بخش بعدی، رگرسیون DMD پارامتریک و به اختصار RpDMD ارائه شده است. همانطور که قبلاً گفته شد، خروجی الگوریتم DMD فقط بر اساس زمان و برای یک نوع جریان سیال است. بنابراین، نمی‌توان آن را مستقیماً برای اهداف دیگری مانند پیش‌بینی جریان سیال مدل‌سازی شده با تغییر پارامترهایی مانند عدد رینولدز یا ویژگی‌های سیال مانند چگالی استفاده کرد. در این راستا، از یک روش یادگیری ماشین تحت نظارت برای حل این مشکل استفاده می‌شود. این بخش برای بررسی معنای هر بخش از تکنیک RpDMD ارائه شده است. در بخش ۲، مروری مختصر بر DMD و رگرسیون ارائه شده است. در بخش ۳، جزئیات روش RpDMD به طور جامع شرح داده شده است. در نهایت، همراه با اعتبارسنجی، نتایج شبیه‌سازی و تخمین مطالعات موردی با استفاده از RpDMD به تفصیل تعریف شده است.

۱.۲. تجزیه حالت پویا

DMD ابزاری کارآمد برای تولید یک مدل ریاضی مقاوم با استفاده از جفت ساختارهای استخراج‌شده از شبیه‌سازی‌های پیچیده تجربی یا عددی است. این روش ترکیبی از ROMها و تبدیل فوریه در زمان در نظر گرفته می‌شود [۱۵]. این روش ساختارهای مکانی و زمانی را از ماتریس‌های اسنپ‌شات که حاوی داده‌های اندازه‌گیری شده مرتب‌شده بر اساس زمان هستند، استخراج می‌کند. در روش DMD، یک تقریب خطی از داده‌های جمع‌آوری‌شده از یک اندازه‌گیری سیستم دینامیکی غیرخطی یا پیچیده با نرخ نمونه‌برداری ثابت بین بردارهای داده طبق موارد زیر در نظر گرفته می‌شود: [۱۶]

که در آن، $\omega_k = \ln(\lambda_k) / \Delta t$ ، شامل دامنه‌های اولیه، Φ شامل بردارهای ویژه و Ω شامل مقادیر ویژه به شکل ماتریسی است.

۲.۲. روش رگرسیون

اگر v یک بردار با مرتبه n باشد، به عنوان بردار ویژگی تعریف شده و $\hat{y}$ نیز بردار پیش‌بینی نامیده می‌شود. مدل رگرسیون به صورت زیر خواهد بود: [۱۸]

$$\hat{y} = v^T \beta + \delta = \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta \\ \beta \end{bmatrix} = \theta^T \beta \quad (8)$$

۳.۲. الگوریتم جدید مبتنی بر DMD/رگرسیون

مدل ریاضی سیستم دینامیکی با اعمال الگوریتم DMD بر روی داده‌های حاصل از اندازه‌گیری به دست می‌آید. این امر نیز با تشخیص ویژگی‌های دینامیکی سیستم با استفاده از الگوریتم DMD و اجرای آن در طول زمان و برای یک نوع سیال با شرایط تعریف شده انجام می‌شود. در این تحقیق، سعد بر آن بوده است که با داشتن اطلاعات دینامیکی خاقل از چند شبیه‌سازی، و برقرار رابطه رگرسیون بین آن‌ها، بتوان میدان سرعت سیال دلخواه را پیش‌بینی نمود. به این منظور، شبیه‌سازی چند نوع سیال متفاوت که دارای عدد رینولدز متفاوت هستند انجام شده است. فرض شده است که شرایط مرزی برای همه سیالات یکسان است و فقط چگالی و لزجت سیال‌ها با یکدیگر تفاوت دارد. در نهایت، می‌توان میدان سیال دیگر را با استفاده از اعمال رگرسیون بر ویژگی استخراج شده توسط DMD از شبیه‌سازی‌های موجود را تخمین زد.

اولاً، میدان سرعت یک سیستم دینامیکی سیال صرفاً بر اساس داده‌های اندازه‌گیری شده بازسازی می‌شود. از آنجا که $Re(t) = \rho V(t)L/\mu$ ، پس می‌توان نوشت $Re(t) = f(\chi(t))$ و رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\chi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & L & \Phi_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(\Omega_1 t) \\ \exp(\Omega_2 t) \\ M \\ \exp(\Omega_p t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

مقدار مناسب p به ویژگی‌های دینامیک جریان سیال بستگی دارد؛ هرچه غیرخطی بودن میدان سیال بیشتر باشد، مقدار p بیشتری مورد نیاز است.

رابطه فوق توضیح می‌دهد که چگونه عدد رینولدز با مدهای مکانی و زمانی میدان سرعت مرتبط است. در نهایت به منظور حل رابطه بیان شده، بین شرایط اولیه رابطه رگرسیون به صورت معادله (۱۰) برقرار خواهد بود:

$$B_i = \sum_{j=1}^N \eta_{i,j} Re^{j-1}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, N \quad (10)$$

عملیات رگرسیون روی هر سطر ماتریس انجام خواهد شد تا بردارهای وزنی مناسب مربوط به ویژگی‌های میدان جریان انتخاب شده شناسایی شوند.

۳. مطالعه موردی

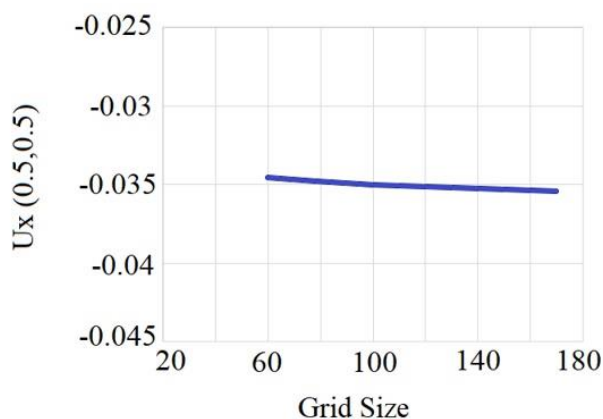
جریان حفره‌ای با درب متحرک مطابق با شکل (۱)، به عنوان مطالعه موردی برای این تحقیق در نظر گرفته شده است. معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر دو بعدی بدون نیروی خارجی و معادله پیوستگی استفاده شده است [۱۹]. حل دو بعدی برای رفتار دینامیکی جریان سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر در یک حفره $1 \times 1 m^2$ با درب نوسانی با سرعت $u_{ref} \cos(\omega t)$ انجام شده است. با استفاده از روش FVM و الگوریتم معادلات وابسته به فشار روش نیمه‌ضمنی برای جریان سیال نیوتنی و تراکم‌ناپذیر روی شبکه‌های دکارتی روی حفره دو بعدی با درب متحرک نوسان‌کننده به صورت $u_{ref} \cos(\omega t)$ بهره گرفته می‌شود. در این معادله u_{ref} و ω به ترتیب برابر با دامنه و فرکانس نوسان هستند. ویسکوزیته، عدد Re و فرکانس سیال به ترتیب $0.01 N.s/m^2$ ، $Re = 100$ و $2\pi/6$ در نظر گرفته می‌شوند. همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده است، نتیجه شبیه‌سازی با کار ایندوگری و مانیر [۲۰] اعتبارسنجی شده است. در این راستا، زمان بدون بعد به صورت $\tau = u_{ref} t / L$ تعریف می‌شود.

نرم افزار فلونت از ورژن 2022R2 و الگوریتم SIMPLE با در نظر گرفتن جریان آرام و گذرا استفاده شده است.

۱.۳. آزمون استقلال از شبکه

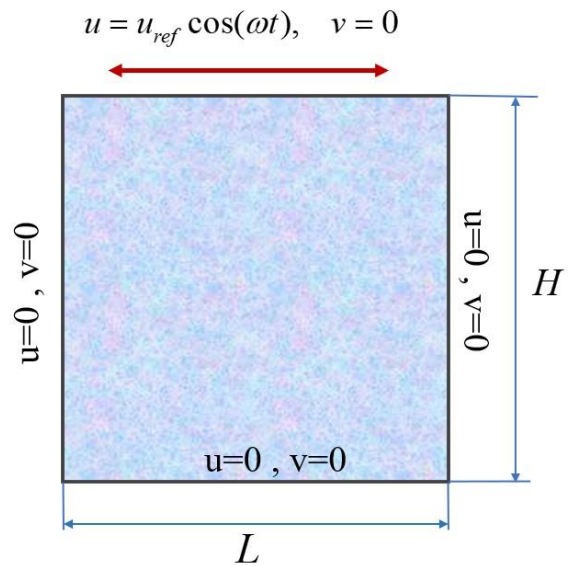
به منظور بررسی تأثیر اندازه شبکه محاسباتی بر دقت نتایج و اطمینان از استقلال پاسخ عددی از شبکه، آزمون استقلال از شبکه برای مسئله جریان ناپایای حاضر انجام شد. شرایط شبیه سازی شامل عدد رینولدز $Re = 100$ و فرکانس تحریک (نوسان) $2\pi/6$ رادیان بر ثانیه است.

برای ارزیابی حساسیت نتایج نسبت به اندازه شبکه، پنج شبکه یکنواخت با ابعاد نشان داده شده در شکل (۳) بررسی شدند. مقایسه نتایج نشان داد که اختلاف نسبی میان تمامی شبکه های مورد مطالعه کمتر از ۱٪ است که بیانگر همگرایی مناسب حل عددی و استقلال نتایج از اندازه شبکه است. همچنین، کمترین اختلاف بین نتایج حاصل از شبکه های 130×130 و 170×170 مشاهده شد که نشان می دهد ریزسازی بیشتر شبکه تأثیر محسوسی بر پاسخ عددی ندارد. از آنجا که استفاده از شبکه 170×170 تنها موجب افزایش هزینه محاسباتی، بدون بهبود قابل توجه در دقت نتایج، می شود، شبکه 130×130 به عنوان شبکه بهینه انتخاب شد و در تمامی شبیه سازی های این پژوهش مورد استفاده قرار گرفت.



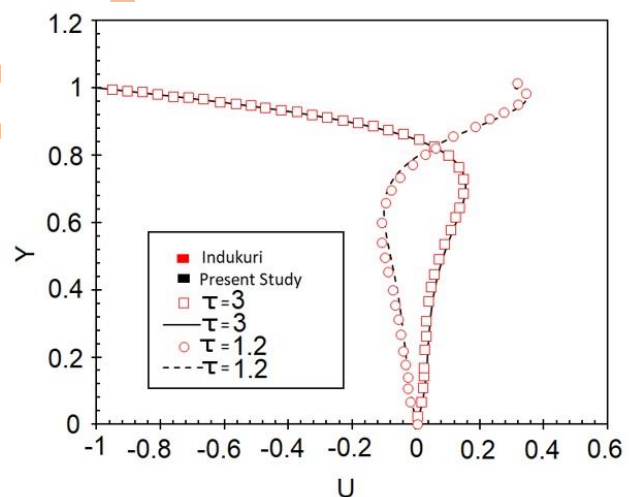
شکل (۳). آزمون استقلال از مش برای جریان حفره

Figure (3). Mesh Independency Test for cavity fluid flow



شکل (۱). نمایی از هندسه جریان سیال با درب متحرک

Figure (1). The geometry of the lid driven cavity flow



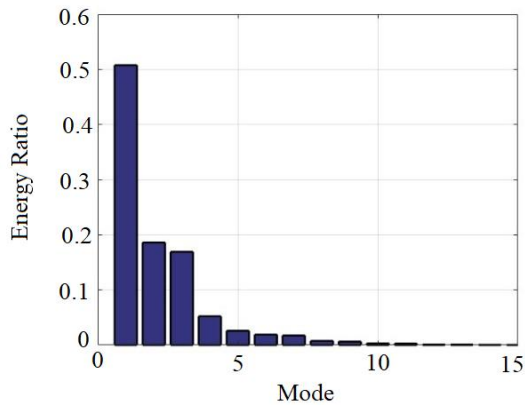
شکل (۲). نتیجه شبیه سازی اعتبارسنجی برای سرعت U [۲۰]

Figure (2). Validation simulation result for speed U [20]

در مرحله بعد، جریان حفره با درب متحرک با نوسان بالاتر به عنوان یک مسئله گذرا حل می شود تا DMD بر نوسان هارمونیک اعمال شود و تغییرات آشکار شوند. در این راستا، $u_{ref} = 10$ (m/s)،

$$Re = 400, \rho = 10 \text{ (kg/m}^3\text{)}, \omega = 2\pi$$

و $\mu = 0.25$ (N.s/m²) در نظر گرفته می شود. همچنین، برای گام زمانی داده شده برابر با ۰/۰۲ ثانیه، زمان اجرای شبیه سازی ۲۰ ثانیه است که ۱۰۰۰ تصویر لحظه ای تولید می کند. برای حل این شبکه از



شکل (۵). انرژی ۱۵ مد اول

Figure (5). Energy of the first 15 modes

لازم به ذکر است که به دلیل پیچیدگی بودن دینامیک سیستم، به جز یکی از مدها که نشان دهنده جریان غالب در طول زمان است، بقیه مدهای دینامیکی به صورت مزدوج هستند. در شکل (۶)، ۵ مد غیر تکراری از ۹ مد دینامیکی نشان داده شده است. مد اول برابر با مد DC و دیگر مدهای هارمونیک برای جریان سیال درون حفره با درب نوسانی برای عدد رینولدز ۴۰۰ رسم شده‌اند.

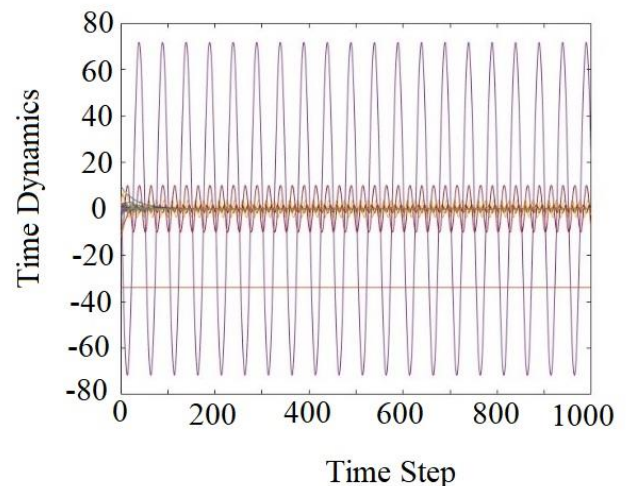
۲.۳. اعمال الگوریتم RpDMD

جریان سیال حفره با درب متحرک با در نظر گرفتن $Re = 400$ با استفاده از روش حجم محدود حل شد. برای اعمال الگوریتم RpDMD، جریان سیال حفره برای $Re = 500$ و $Re = 600$ نیز به صورت مشابه شبیه‌سازی شده و مدهای دینامیکی زمانی و مکانی آن‌ها با استفاده از روش DMD استخراج می‌شوند. در این راستا، می‌توان شرایط جریان سیال با Re مختلف در بازه ۴۰۰ تا ۶۰۰ را تخمین زد. این روش، محدوده تخمین و پیش‌بینی الگوریتم DMD را در سایر تغییرات جریان سیال گسترش می‌دهد و باعث می‌شود تا ظرفیت‌های الگوریتم DMD را برای تخمین شرایط جریان سیال دیگر با همان شرایط مرزی افزایش یابد. در این مطالعه تحقیقاتی، بخش‌های رگرسیون و DMD، و در نتیجه الگوریتم RpDMD می‌تواند شرایط جریان سیال را در سایر اعداد Re محدود و مشخص شده تخمین بزند.

برای شبیه‌سازی جریان سیال با عدد رینولدز ۵۰۰ و ۶۰۰ نیز ۲۰۰ گام زمانی اول از داده‌های برداشت شده از شبیه‌سازی، به عنوان

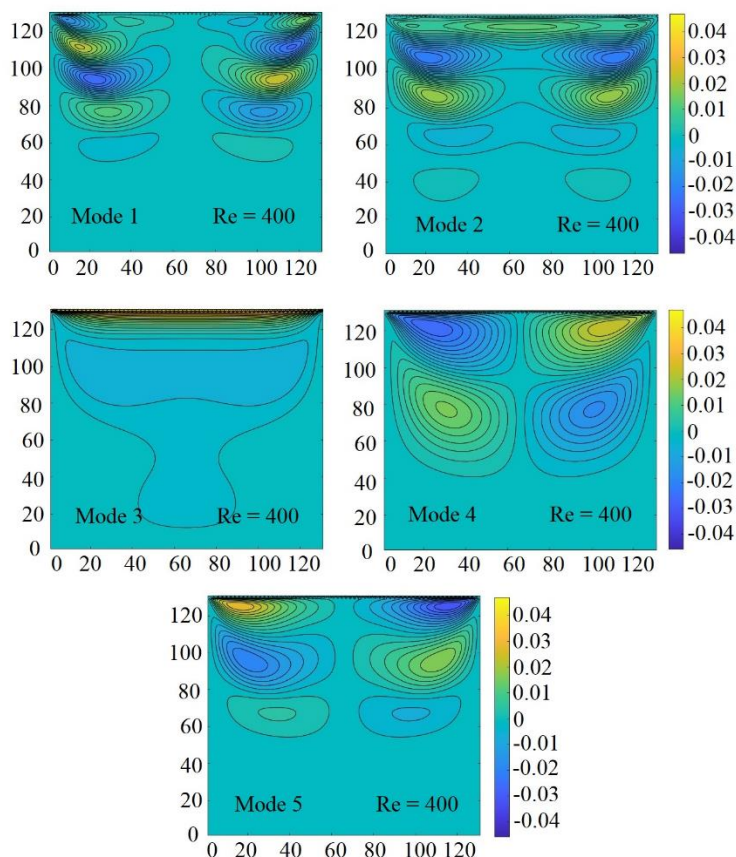
شکل (۴) مدهای زمانی دینامیکی حفره با درب متحرک را در یک شکل نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل نشان داده شده است، یک دینامیک زمانی DC و چندین دینامیک زمانی هارمونیک وجود دارد. دینامیک زمانی DC و برخی از هارمونیک در طول زمان اجرا ادامه دارند، اما گروهی از دینامیک‌های زمانی نیز به طور موقت وجود دارند و محو می‌شود.

شرایط اولیه از داده‌های برداشت شده از شبیه‌سازی حذف می‌شوند. سپس، پس از اعمال معادله (۴)، می‌توان مشاهده نمود که ۱۵ مد با بیشترین سهم انرژی جنبشی، از انرژی کل را دارا هستند. مقدار سهم انرژی این مدها را می‌توان در شکل (۵) مشاهده نمود. در این میان، ۹ مد اول مقدار ۹۹٪ از انرژی کل را در اختیار دارند و می‌توانند به عنوان نماینده کل جریان در نظر گرفته شده و در ادامه مورد مطالعه قرار داد.



شکل (۴). دینامیک زمانی جریان حفره با درب متحرک

Figure (4). Time dynamics of a cavity flow with a movable lid



شکل (۶). ۵ ساختار بدون تکرار جریان در حفره با درب متحرک برای جریان با رینولدز ۴۰۰

Figure (6). The top 5 non-iterative modes of cavity structures with movable lids for $Re = 400$,

برای حاصل شدن خطای تخمین کمتر از رگرسیون درجه دو استفاده می‌شود. مولفه سرعت که در راستای افق در تمامی نودهای شبکه محاسبه شده‌اند، در نظر گرفته شده است. نتایج خطای تخمین جریان با رینولدز متفاوت در جدول (۱) نشان داده شده است. درصد تعداد نودهای با خطای تخمین بالاتر از ۵ درصد برای جریان سیال تخمین زده شده را نشان داده است. همان طور که در جدول مشاهده می‌شود، بالاترین مقدار خطا مربوط به جریان با رینولدز ۴۵۰ و سپس ۵۵۰ است. این میزان خطا نشان دهنده آن است که با افزایش فاصله از نقاط تشکیل دهنده منحنی رگرسیون، خطای تخمین کمینه مریعات بیشتر خواهد شد. بنابراین، برای افزایش دقت تخمین در این روش، باید نقاط رگرسیون بیشتری انتخاب شوند.

شرایط اولیه ناپایدار، صرف نظر می‌شود. با استفاده از الگوریتم DMD مدهای دینامیکی شناسایی و تجزیه می‌شوند. در طی این فرایند، در هنگام اعمال معادله (۴)، با توجه با ماتریس مقادیر تکین Σ ، مشاهده می‌شود که، ۹ مد اول شامل ۹۹٪ انرژی جنبشی سیستم دینامیکی هستند. بنابراین، با داشتن ۹ مد دینامیکی مکانی و زمانی همراه با شرایط اولیه که در معادله (۷) نشان داده شده است، می‌توان با دقت مناسبی جریان سیال را بازسازی نمود.

شکل (۷)، مدهای مکانی تجزیه شده غیر تکراری با بالاترین انرژی را برای جریان سیال در هر عدد Re نشان می‌دهد. تشابه این مدهای دینامیکی مکانی، زمینه مناسب را برای عملگر رگرسیون فراهم می‌آورد تا رابطه خطی بین میدان‌های سرعت در هر جریان با Re متفاوت در بازه بیان شده را ایجاد نماید. به عبارت دیگر، با بهره‌گیری از این تشابه بین مدها و یکسان در نظر گرفتن آن‌ها بین جریان‌های سیال با رینولدز متفاوت در بازه رینولدز ۴۰۰ تا ۶۰۰، و متغیر در نظر گرفتن شرایط اولیه، می‌توان با استفاده از شرایط اولیه که در معادله (۱۰) به آن اشاره شده است، تخمین میدان سیال جدید را حاصل نمود. در واقع در این پژوهش فرض بر آن است که شرایط اولیه در مدها، که با b_k در معادله (۷) نشان داده شده است، عامل ایجاد تغییرات در میدان سرعت جریان سیال برای جریان با رینولدزهای متفاوت است. با توجه به این موضوع، معادله رگرسیون برای تخمین شرایط اولیه متغیر در مدها به صورت معادله (۱۱) است:

$$B_i = \sum_{j=1}^3 \eta_{i,j} Re^{j-1} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

به عبارت دیگر، با در نظر گرفتن تحلیل پارامتریک در DMD، در این پژوهش با استفاده از رگرسیون، بین شرایط اولیه مدهای دینامیکی استخراج شده از جریان‌هایی با اعداد رینولدز متفاوت ارتباطی خطی برقرار شده است. در نتیجه، میدان جریان با عدد رینولدز جدید و بدون نیاز به شبیه سازی مجدد را می‌توان بازسازی نمود.

جدول (۱). درصد تعداد نقاط با خطای تخمین سرعت بالاتر از 5

درصد در سیال‌ها اعداد Re مختلف

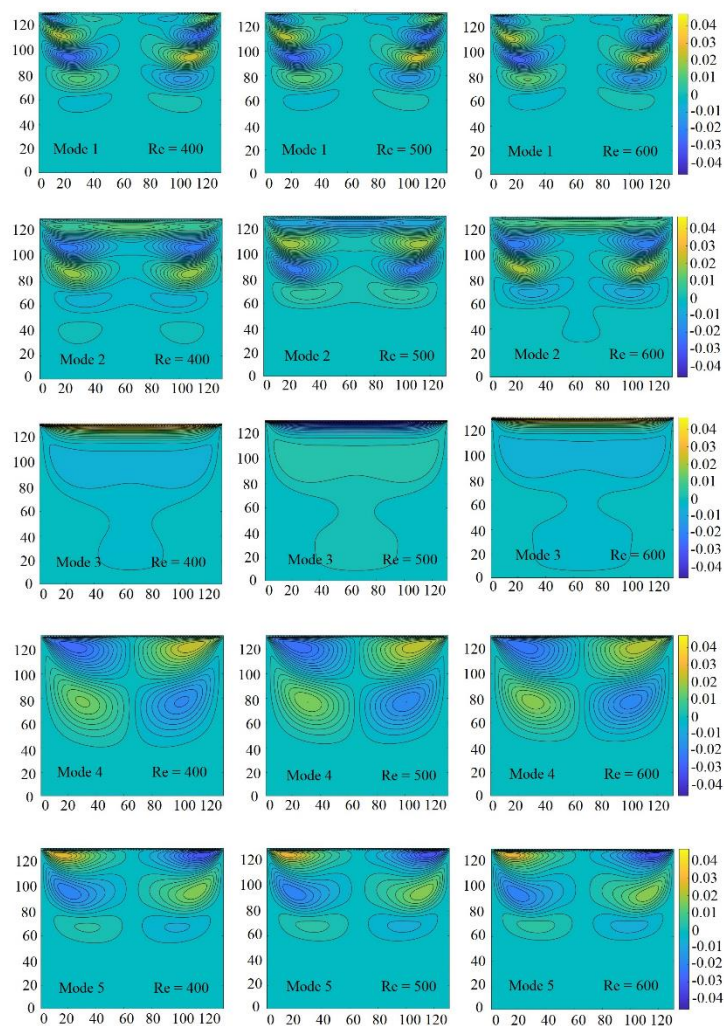
Table (1). Percentage of points with estimation error of axial velocity over 5%

Re	The percentage of nodes with relative error more than 5%
425	1.8414
450	2.0365
475	1.2489
525	1.1463
550	1.7322
575	1.4742

۴. نتیجه‌گیری

برخلاف آنچه که در روش‌های مرسوم ROM مانند POD مشاهده می‌شود، تجزیه مد دینامیکی به منظور تجزیه جریان سیال به مدهای دینامیکی مکانی و زمانی معرفی شده است که علاوه بر خاصیت کاهش ابعاد محاسباتی، امکان بازسازی دینامیکی میدان جریان را نیز فراهم می‌آورد. در مطالعات اخیر، به منظور تخمین میدان‌های جریان دیگر از روش DMD پارامتریک استفاده می‌شود که به طور معمول دارای حجم مطالعاتی بالا هستند. در این مطالعه، با استفاده از تشابه مدها در جریان‌هایی با عدد رینولدز متفاوت در محدوده‌های مشخص، تخمین مناسبی از میدان جریان با حجم محاسباتی پایین‌تر صورت گرفته است.

در این پژوهش، با استفاده از رویکرد تحلیل پارامتریک DMD اما فقط با در نظر گرفتن شرایط اولیه مدهای دینامیکی، میدان سرعت جریان سیال با Re متفاوت تخمین زده شد. برای این منظور، سه جریان سیال درون حفره با درب نوسانی با Re های متفاوت با استفاده از روش تفاضل محدود حل شده، و سپس داده برداری انجام گرفته است. مشاهده شده است که مدهای مکانی و زمانی با اختلاف پایین به صورت مشابه برای این سه سیال وجود دارد و تفاوت را می‌توان در شرایط اولیه مدها مشاهده نمود. بدین ترتیب، با اعمال رگرسیون بین سه دسته مدهای استخراج شده از جریان سیال با Re های متفاوت، جریان‌های متفاوت نیز پیش بینی شدند.



شکل (۷). ۵ مد غیر تکراری از ۹ مد فضایی اول با بالاترین انرژی

جریان در Re برابر با ۴۰۰، ۵۰۰، ۶۰۰

Figure (7). The 5 noniterative space modes of 9 modes with the highest energy in fluid flows with Re equals to 400, 500, 600

منابع

- Schmid, P.J., 2021. Dynamic Mode Decomposition and its variants, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 54, pp. 225–254. DOI:10.1146/annurev-fluid-030121-015835
- Proctor, J.L. & Eckhoff, P.A., 2015. Discovering dynamic patterns from infectious disease data using dynamic mode decomposition, *International Health*, 7(2), pp. 139–145. DOI:10.1093/inthealth/ihv009
- Mann, J. & Kutz, J.N., 2016. Dynamic mode decomposition for financial trading strategies, *Quantitative Finance*, 16(11), pp. 1643–1655. DOI:10.1080/14697688.2016.117019
- Casorso, J., Kong, X., Chi, W., Van De Ville, D., Yeo, B.T.T. & Liégeois, R., 2019. Dynamic mode decomposition of resting-state and task fMRI, *NeuroImage*, 194(1), pp. 42–54. DOI:10.1016/j.neuroimage.2019.03.019
- Schmid, P.J., 2010. Dynamic mode decomposition of experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, 656, pp. 5–28. DOI:10.1017/S0022112010001217
- Wu, Z., Brunton, S.L. & Revzen, S., 2021. Challenges in dynamic mode decomposition, *Journal of the Royal Society Interface*, 18(185). DOI:10.1098/rsif.2021.0686
- Tissot, G., Cordier, L., Benard, N. & Noack, B.R., 2014. Model reduction using Dynamic Mode Decomposition, *Comptes Rendus Mécanique*, 342(6–7), pp. 410–416. DOI:10.1016/j.crme.2013.12.011
- Rasekh, M. & Mahdi, M., 2020. Hydrodynamic coefficients estimation of a prolate spheroid using combination of hybrid extended Kalman filter and computational fluid dynamics, *Sharif Journal of Mechanical*

این رویکرد در کاربردهایی مفید است که در آن‌ها نوع، ویسکوزیته و چگالی سیال تغییر می‌کند که باعث تغییر در عدد Re می‌شود، اما شرط مرزی ثابت می‌ماند. با توجه به این موضوع، شبیه‌سازی سیال صرفاً با اعمال اعداد Re به مدل رگرسیون استخراج‌شده مورد نیاز است و پروفیل سرعت را می‌توان بدون شبیه‌سازی استخراج کرد. در نتیجه این مطالعه، تخمین جریان سیال در اعداد رینولدز نزدیک به نقاط تعریف شده برای الگوریتم رگرسیون، با دقت بالاتری صورت گرفته است. بیشترین خطا مربوط به سیال با عدد رینولدز ۵۵۰ و ۴۵۰ بوده است.

نمادگذاری

A	ماتریس تخمین زن خطی
L	طول حفره
r	مقدار مرتبه کاهش یافته
u	سرعت در راستای محور x ها
V	میدان سرعت

نمادهای یونانی

β	بردار وزنی اسکالر
δ	مقدار انحراف مدل
μ	لزجت
Σ	مقدار تکین
λ	مقدار ویژه
Φ	ماتریس مقادیر ویژه

Society of Mechanical Sciences and Engineering, 48(178), pp.

[DOI:10.1007/s40430-025-06173-w](https://doi.org/10.1007/s40430-025-06173-w)

15. Kutz, J.N., Brunton, S.L., Brunton, B.W. & Proctor, J.L., *Dynamic Mode Decomposition*. Ed., 1st Edn, pp. 1-24, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA (2016).

[DOI:10.1137/1.9781611974508](https://doi.org/10.1137/1.9781611974508)

16. Wu, Z., Brunton, S. L., Revzen, S., 2021, Challenges in dynamic mode decomposition, *Journal of The Royal Society Interface*, 18 (185), [DOI:10.1098/rsif.2021.0686](https://doi.org/10.1098/rsif.2021.0686)

17. Askham, T, Kutz, N., 2018, Variable Projection Methods for an Optimized Dynamic Mode Decomposition, *Applied Dynamical Systems*, 17(1), pp. 380-416,

[DOI:10.1137/M1124176](https://doi.org/10.1137/M1124176)

18. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge: Cambridge University Press,

[DOI:10.1017/9781108583664](https://doi.org/10.1017/9781108583664)

19. Bruneau, C., Saad, M., 2004, The 2D lid-driven cavity problem revisited, *Computers & Fluids*, 35(3), pp. 326-348.

[DOI:10.1016/j.compfluid.2004.12.004](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2004.12.004)

20. Indukuri, J.V. & Maniyeri, R., 2018. Numerical simulation of oscillating lid-driven square cavity, *Alexandria Engineering Journal*, 57(4), pp. 2609–2625.

[DOI:10.1016/j.aej.2017.07.011](https://doi.org/10.1016/j.aej.2017.07.011)

Engineering (SJME), 36(3.1), pp. 99–108 [in Persian].

[DOI:10.26764725.1399.363.1.12.7](https://doi.org/10.26764725.1399.363.1.12.7)

9. Sashidhar, D. & Kutz, J.N., 2022. Optimized dynamic mode decomposition for robust, stable forecasting with spatial and temporal uncertainty quantification, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 380(2229).

[DOI:10.1098/rsta.2021.0199](https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0199)

10. Ding, W. & Li, J.I.E., 2023. Higher order extended dynamic mode decomposition based on the structured total least squares, *Journal on Scientific Computing*, 45(2), pp. 985–1011.

[DOI:10.1137/21M1463665](https://doi.org/10.1137/21M1463665)

11. Li, C.Y., Tse, T.K.T. & Hu, G., 2020. Dynamic Mode Decomposition on pressure flow field analysis: Flow field reconstruction, accuracy, and practical significance, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 205(104278).

[DOI:10.1016/j.jweia.2020.104278](https://doi.org/10.1016/j.jweia.2020.104278)

12. Pan, C., Xue, D. & Wang, J., 2015. On the accuracy of dynamic mode decomposition in estimating instability of wave packet, *Experiments in Fluids*, 56(8), pp. 1–15.

[DOI:10.1007/s00348-015-2015-6](https://doi.org/10.1007/s00348-015-2015-6)

13. Sabaghzadeghan, F. & Moayyedi, M.K., 2021. Reduced order model of conduction heat transfer in a solid plate based on Dynamic Mode Decomposition, *Sharif Journal of Mechanical Engineering (SJME)*, 37(3.2), pp. 3–12 [in Persian].

[DOI:10.24200/j40.2021.55926.1555](https://doi.org/10.24200/j40.2021.55926.1555)

14. Abhijith, M.S., Sandra, S., 2026. Parametric DMD with multi-linear interpolation for thermal field prediction of nanofluid flows, *Journal of the Brazilian*