Sharif University of Technology

Sharif Mechanical Engineering Journal

https://sjme.journals.sharif.edu

Research Article

Investigation of Parametric Dynamic Mode Decomposition for 2D Flow Field Estimation

Mohammad Sadegh Keyvanipour, Foroogh Mohandespour and Nowrouz Mohammad Nouri *

Faculty of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran.
* Corresponding author:(mnouri@iust.ac.ir)

Article Info

Article history:

Received: 15 February 2026

Revised: 10 September 2026

Accepted: 30 September 2026

Keywords:

Dynamic mode decomposition, computational fluid dynamics, regression.

Abstract

The Dynamic Mode Decomposition (DMD) method is recognized for enhancing the computational efficiency of numerical and experimental studies of complex phenomena. Using this method, a high-dimensional system is reduced to a low-dimensional one that preserves the key features of the original system and reproduces its dynamics. DMD is broadly adaptable and applicable in fluid dynamics and other data-driven fields. Regression methods, in turn, are statistical techniques that model relationships between two or more variables. In this study a fast and accurate technique is used to approximate the velocity field of a fluid from precomputed velocity fields at neighboring Reynolds numbers. Specifically, features of the velocity field are extracted from the decomposed modes and then extended to other Reynolds numbers using regression. Finally, this algorithm is applied to lid-driven cavity flow, with the velocity field studied at Reynolds numbers between 400 and 600. The results show good agreement between the velocity fields estimated by this method and those obtained from full simulations.

Introduction

Data-driven methods have attracted tremendous attention owing to recent advances in computational capacity [1-4]. Unlike other developed methods, such as Proper Orthogonal Decomposition (POD), DMD, as an effective Reduced Order Model (ROM), can predict and estimate the flow field from data and extract fundamental features, called spatial and temporal modes [5-6].

Many researchers have investigated ways to extend the capabilities of DMD and make it more robust [9-10]. Because feature estimation is important in fluid dynamics [13], many studies have been conducted. One DMD variant is parametric DMD, which allows an estimate obtained for one system condition to be extended to another.

In this study, a parametric DMD analysis is used to extract features from three fluid flows. As a case study, a lid-driven cavity flow is considered. Assuming the features vary smoothly within the range of interest (here, Re = 400–600). The novelty of this study lies in adapting the initial conditions of the DMD-decomposed modes and regression method to conduct a parametric study. This method thereby extends DMD's capacity with less computation compared to the existing pDMD methods.

Methodology

Parametric DMD comprises the DMD algorithm and a conductor, such as regression and Radial Basis Function (RBF) Neural Network, that establishes a meaningful relationship among the decomposed modes. First, to apply DMD, the snapshot matrices are defined as in Equation (1) [16]. After the velocity data are arranged accordingly, the algorithm seeks the matrix A. Using Equations (4) to (6), the dynamical modes can be calculated. Therefore, as shown in Equation (7), the flow field dynamics can be reproduced.

To Cite this article:
Keyvanipour, MS., Mohandespour, F. and Mohammad Nouri, N. 2026. Investigation of parametric dynamic mode decomposition for 2d flow field estimation, Sharif Mechanical Engineering Journal, **42**(1), 95-103.
https://doi.org/10.24200/j40.2026.67541.1759

E-ISSN: 2676-4733 © 2026 The Author(s). Sharif Mechanical Engineering Journal, Published by Sharif University of Technology
This is an open access article under the CC-BY 4.0 license.

To conduct the parametric study of the modes, regression on the DMD features is used. The matrices of features are arranged as in Equation (9). The value of p is determined by the flow characteristics. The more complicated and nonlinear the flow, the higher the value of p required to establish a linear relationship with low estimation error.

To implement the method presented in this study, a lid-driven cavity flow, as shown in Figure 1, is considered. The 2D flow is driven by an oscillating lid with velocity u_ref cos(ωt), where the viscosity, Reynolds number, and frequency are $0.01\ N.s/m^2$, 100, and $\frac{2\pi}{6}$, respectively. As shown in Figure 2, the simulation results are consistent with those reported in Ref. [20].

After validation, the simulation is repeated for fluid flows at Reynolds numbers of 400, 500, and 600 to generate sufficient data for the presented method. A laminar, transient solver with the SIMPLE algorithm is used.

Results and Discussion

During mode decomposition, the modes' energies are calculated and shown in Figure 5. The first nine modes contain 99% of the energy and are therefore selected. The spatial and temporal modes of the flow with Re = 400 are shown in Figures 4 and 6. Because the flow is periodic, the modes occur in complex-conjugate pairs, except for the DC mode. Therefore, only one mode from each conjugate pair and the DC mode are included in the figures. Figure 7 compares the spatial modes at Re = 400, 500, and 600; they are almost identical.

According to Equation (11), the initial conditions within the specified span are identified. The flow fields at Re = 425, 450, 475, 525, 550, and 575 are then reconstructed. Finally, Table 1 reports the percentage of nodes with a relative error above 5%. In this table, the percentage of nodes with a relative error greater than 5% is reported. The highest error belongs to the estimation of fluid flow with Re equal to 450, and then to 550. This is attributed to the error increasing with the distance between the estimation point and the nearest training point.

Conclusion

Unlike common ROM, DMD dynamically reconstructs fluid flow. In this research, a variant of parametric DMD with lower computational effort is presented. The results show that the regression between the training nodes, using the DMD modes' initial conditions, provides a sound basis for estimating fluid flows at different Re numbers. However, for highly nonlinear flows, more training points may be needed to improve the estimates; this should be explored in future work.

Funding: This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not-for-profit sectors.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

Author Contributions: All authors contributed to the reported work for conceptualization, methodology, validation, writing-review and editing, and supervision.

مجله علمی مهندسی مکانیک شریف

https://sjme.journals.sharif.edu

مقاله‌ی پژوهشی

بررسی تجزیه‌ی حالت پویا پارامتریک برای تخمین میدان جریان دو بُعدی

محمدصادق کیوانی‌پور ، فروغ مهندس‌پور و نوروز محمد نوری*

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران.

*نویسنده مسئول (mnouri@iust.ac.ir)

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت : ۱۴۰۴/۱۱/۲۶

تاریخ اصلاحیه : ۱۴۰۵/۰۶/۱۹

تاریخ پذیرش : ۱۴۰۵ /۰۷/۰۸

واژگان کلیدی:

تجزیه‌ی مد دینامیکی،

دینامیک سیالات محاسباتی،

رگرسیون.

چکیده

مدل‌های مرتبه‌ی کاهش‌یافته یا ROM ها، به‌دلیل افزایش کارایی محاسباتی برای روش‌های عددی و تحلیل نتایج حاصل از آزمایش‌های تجربی، در مطالعه‌ی پدیده‌های پیچیده‌ای که دینامیک غیرخطی دارند، به جایگاه شناخته‌شده و قابل اطمینانی رسیده‌اند. در این میان، روش تجزیه‌ی حالت پویا یا DMD، در طیف وسیعی از زمینه‌های معرفی‌شده در دینامیک سیالات و سایر رشته‌های مرتبط با روش‌های داده‌محور، نتایج رضایت‌بخشی را نشان داده است. در مطالعه‌ی حاضر، از یک روش سریع و دقیق برای به‌دست‌آوردن تقریب مناسب از میدان سرعت یک سیال مشخص، با استفاده از میدان سرعت محاسبه‌شده‌ی سیال‌هایی که با اعداد رینولدز در همسایگی تعریف شده‌اند، استفاده شده است. در روش مذکور از تشکیل ماتریس داده‌های میدان سرعت و روش رگرسیون بهره گرفته شده است. درنهایت، به‌عنوان یک مطالعه‌ی موردی، الگوریتم اخیر بر روی جریان سیال حفره‌ای با درب محرک اعمال شده است. نتایج به‌دست‌آمده، مطابقت مناسبی بین میدان سرعت تخمین زده‌شده با استفاده از روش مذکور را نشان داده است.

۱. مقدمه

به‌دلیل پیشرفت‌های اخیر در ظرفیت‌های محاسباتی، به روش‌های داده‌محور بیش از پیش توجه شده است. روش DMD[1]، یکی از روش‌های بدیع در میان ROM[2]هاست، که با استخراج ویژگی‌ها از داده‌ها، مدل‌سازی، تخمین، و پیش‌بینی سیستم‌های غیرخطی پیچیده را متحول می‌سازد.[۱] روش DMD، داده‌ها را به ساختارهای زمانی و مکانی منسجم تجزیه می‌کند، که براساس مقادیر ویژه‌ی سیستم رفتار می‌کنند. DMD در سال‌های اخیر در بسیاری از تحلیل‌های پیچیده‌ی مبتنی بر داده، مانند اپیدمیولوژی،[۲] مالی،[۳] علوم اعصاب،[۴] و دینامیک سیالات، که برای اولین بار توسط اشمیت[3] (۲۰۱۰)،[۵] معرفی شده است، استفاده شده است. روش DMD، عملگر کوپمن خطی را منحصراً در حوزه داده‌های اندازه‌گیری‌شده تقریب می‌زند.[۶]

شبیه‌سازی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی و پیچیده در کاربردهای دینامیک سیالات، پرهزینه و عمدتاً پیچیده است، زیرا سیستم‌های حاکم بر معادلات ناویر- استوکس پیچیده هستند. بنابراین، استفاده از مدل‌های ریاضی مبتنی بر داده می‌تواند به‌طور قابل‌توجهی ناسازگاری‌ها و هزینه‌های محاسباتی را کاهش دهد. با این حال، روش‌های مبتنی بر داده در مواردی مانند حساسیت به نویز،[۷] به خوبی عمل نمی‌کنند، که باید خطاهای موجود تا حد امکان کاهش یابند. لذا، کاربرد روش‌های مذکور باید گسترش یابد تا به طورمناسب در جریان سیال در رویکردهای هیدرودینامیکی اعمال شوند. همچنین از روش DMD به منظور کاهش هزینه‌های محاسباتی نیز استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال، صباغ زادگان و کاظم مؤیدی (۲۰۲۱)،[۱۳] با استفاده از روش DMD، یک مدل کاهش مرتبه‌یافته از فرایند انتقال حرارت از یک پوسته‌ی جامد را ارائه و هزینه‌ی محاسباتی را کاهش داده‌اند.

نوشتارهای پژوهشی بسیاری روش DMD را تحلیل کرده‌اند، تا آن را مقاوم‌تر کنند و دامنه‌ی کاربری آن را نیز افزایش دهند. به عنوان مثال، ساشیدر و کوتز[4] (۲۰۲۲)،[۹] تجزیه‌ی حالت پویای بهینه‌شده و بگینگ[5] را معرفی کرده‌اند، که به DMD این امکان را می‌دهد تا انتخاب دقیق تصاویر لحظه‌ای توسط روش‌های یادگیری ماشین انجام شود و درنهایت، سازگاری روش DMD را افزایش دهد. دینگ و لی[6] (۲۰۲۳)،[۱۰] از روش کمینه‌ی مربعات کل برای حذف نویز و حذف بایاس تصاویر لحظه‌ای در جایی که پیچیدگی طیفی سیستم از پیچیدگی مکانی آن قابل توجه‌تر بوده است، استفاده و نتیجه را برای انواع مختلف موارد با موفقیت بررسی کرده‌اند.

[1] Dynamic Mode Decomposition
[2] Reduced-order models
[3] Schmid
[4] Sashidhar & Kutz
[5] Bagging
[6] Ding & Li

استناد به این مقاله:

کیوانی‌پور، محمدصادق، مهندس‌پور، فروغ و محمد نوری، نوروز، ۱۴۰۵. بررسی تجزیه‌ی حالت پویا پارامتریک برای تخمین میدان جریان دو بُعدی. مهندسی مکانیک شریف، ۴۲(۱)، صص.۹۵-۱۰۳. https://doi.org/10.24200/j40.2026.67541.1759

حق مولف © نویسندگان

ناشر: دانشگاه صنعتی شریف

شاپا الکترونیکی: ۴۷۳۳- ۲۶۷۶

اگرچه ثابت شده است که تجزیه‌ی متعامد سره (POD) از نظر دقت بهتر از DMD است، اما DMD همچنان عملکرد بهتری در پیش‌بینی نشان می‌دهد. به عنوان مثال، لی و همکارانش (۲۰۲۰)،[۱۱] دقت روش DMD را در یک میدان فشار با عدد رینولدز بالا، که در آن جریان روی یک منشور عبور می‌کرده است، بررسی کرده‌اند. DMD با رتبه‌ی کامل دقت بالایی را نشان داده است، اگرچه خطاهای کاهش مرتبه در برخی مناطق قابل اغماض نبوده‌اند. از دلایل اصلی خطاهای بازسازی ماتریس ساختارهای مکانی، فعالیت‌های غیرخطی سیستم دینامیکی است. همچنین، خطاهای بازسازی ماتریس ساختارهای زمانی، ناشی از رفتار سیستم دینامیکی در طول زمان هستند. مطالعات پژوهشی زیادی در مورد گسترش توانایی‌های روش DMD از نظر دقت انجام شده است. پن[۷] و همکارانش (۲۰۱۵)،[۱۲] دقت DMD را در تخمین هارمونیک‌های مرتبه‌ی بالاتر با چهار نوع الگوریتم DMD بررسی کرده و نتیجه گرفته‌اند که DMD برای میدان‌های مطالعاتی با انرژی بالا عملکرد بهتری دارد.

با توجه به اهمیت روش تخمین ویژگی‌های هیدرودینامیکی در سیالات،[۱۳] پژوهش‌های زیاد برای افزایش دقت و توانایی‌های پیش‌بینی با استفاده از روش DMD انجام شده است. یکی از زیرشاخه‌های آن، مطالعات پارامتریک است، که میدان جریان در یک حوزه با استفاده از تخمین‌های صورت‌گرفته در حوزه‌های دیگر انجام می‌شود.[۱۴] در پژوهش حاضر نیز با بهره‌گیری از رویکرد اخیر، ویژگی‌های مکانی و زمانی استخراج‌شده از یک سیستم دینامیکی به سیستم دیگر انتقال یافته و بدین صورت ویژگی‌های هیدرودینامیکی سیال ثانویه با درنظرگرفتن شرایط اولیه در تجزیه‌ی مد دینامیکی تخمین زده شده است. این نگاشت ویژگی با استفاده از یادگیری نظارت‌شده انجام شده است. لذا، جریان سیال حفره‌ای با درپوش محرک به عنوان یک مسئله‌ی پایه در دینامیک سیالات در نظر گرفته شده است. پارامترهای تخمین هدف، مؤلفه‌های دو بُعدی میدان‌های سرعت بوده‌اند. نوآوری پژوهش حاضر این است که پس از تجزیه‌ی میدان به مؤلفه‌های استاندارد DMD، با درنظرگرفتن شرایط اولیه‌ی تعریف‌شده، مؤلفه‌های جریان در میدان‌های جریانی دیگر تخمین زده می‌شوند.

۲. روش‌شناسی

در بخش حاضر، رگرسیون- DMD پارامتریک و به اختصار RpDMD ارائه شده است. همان‌طور که قبلاً گفته شده است، خروجی الگوریتم DMD فقط براساس زمان و برای یک نوع جریان سیال است. بنابراین، نمی‌توان آن را مستقیماً برای اهداف دیگری، مانند پیش‌بینی جریان سیال مدل‌سازی‌شده با تغییر پارامترهایی، مانند عدد رینولدز یا ویژگی‌های سیال مانند چگالی استفاده کرد. در این راستا، از یک روش یادگیری ماشین تحت نظارت برای حل مشکل مذکور استفاده شده است. همچنین، برای بررسی معنای هر بخش، روش RpDMD ارائه شده است. در بخش ۲، مروری مختصر بر DMD و رگرسیون ارائه شده است. در بخش ۳، جزئیات روش RpDMD به‌طورجامع شرح داده شده است. درنهایت، همراه با اعتبارسنجی، نتایج شبیه‌سازی و تخمین مطالعات موردی با استفاده از RpDMD به تفضیل تعریف شده است.

۱.۲. تجزیه‌ی حالت پویا

DMD ابزاری کارآمد برای تولید یک مدل ریاضی مقاوم با استفاده از جفت ساختارهای استخراج‌شده از شبیه‌سازی‌های پیچیده‌ی تجربی یا عددی است. DMD ترکیبی از ROM ها و تبدیل فوریه در زمان در است.[۱۵] روش مذکور، ساختارهای مکانی و زمانی را از ماتریس‌های اسنپ شات، که حاوی داده‌های اندازه‌گیری‌شده‌ی مرتب‌شده براساس زمان هستند، استخراج می‌کند. در روش DMD، یک تقریب خطی از داده‌های جمع‌آوری‌شده از یک اندازه‌گیری سیستم دینامیکی غیرخطی یا پیچیده با نرخ نمونه‌برداری ثابت بین بردارهای داده طبق رابطه‌ی ۱ در نظر گرفته می‌شود:[۱۶]

$$X_{k+1} = AX_k \tag{1}$$

مطابق رابطه‌ی اخیر، بهترین تقریب را ماتریس A تخمین می‌زند، که یک تقریب خطی از دینامیک سیستم است. بررسی نرخ نمونه‌برداری مناسب، چالشی است که به‌دلیل تأثیر آن در دقت مدل‌سازی ریاضی، باید در نظر گرفته شود.

برای یافتن ماتریس تقریب سیستم، داده‌های اندازه‌گیری باید به شکل ماتریس‌های داده‌های لحظه‌ای مرتب شوند، که به‌صورت ماتریس لحظه‌ای با جابجایی زمانی مطابق با رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شوند:[۱۵]

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{m-1} \end{bmatrix}, \\ X' &= \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_m \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

بنابراین، رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید:

$$A = X'X^{\dagger} \tag{3}$$

که در آن، $\dagger$ شبه معکوس مور- پنروز است. برای حل مسئله‌ی کمینه‌ی مربعات، می‌توان این موارد را با اعمال SVD طبق رابطه‌ی ۴ تعریف کرد:[۱۷]

$$X = U\Sigma V^* = \begin{bmatrix} \tilde{U} & \tilde{U}_{rem} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma} & 0 \\ 0 & \tilde{\Sigma}_{rem} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}^* \\ \tilde{V}^*_{rem} \end{bmatrix} \approx \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^* \tag{4}$$

که در آن، $U \in R^{n\times n}, \Sigma \in R^{n\times m-1}, \tilde{V}^* \in R^{m-1\times m-1}, \tilde{U} \in R^{n\times r}$ $\tilde{\Sigma} \in R^{r\times r}, \tilde{V}^* \in R^{r\times m-1}$، و عملگر خطی A را می‌توان مطابق رابطه‌ی ۵ به‌دست آورد:[۱۵]

$$A \approx \overline{A} = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^* \tag{5}$$

سپس، حالت‌های DMD مرتبط مطابق رابطه‌ی ۶ عبارت‌اند از:[۱۶]

$$\Phi = X'V\Sigma^{-1}\Psi \tag{6}$$

که در آن، Ψ یک ماتریس قطری شامل مقادیر ویژه است. درنهایت، مدل ریاضی جدید سیستم فقط مبتنی بر داده‌ها مطابق با رابطه‌ی ۷ است:[۱۵]

$$X(t) \approx \sum_{k=1}^{r} \phi_k \exp(\omega_k t) b_k = \Phi \exp(\Omega t) B \tag{7}$$

که در آن، $\omega_k = \ln(\lambda_k)/\Delta t$، B شامل دامنه‌های اولیه، Φ شامل بردارهای ویژه، و Ω شامل مقادیر ویژه به شکل ماتریسی هستند.

۲.۲. روش رگرسیون

اگر υ یک بردار با مرتبه‌ی n به‌عنوان بردار ویژگی باشد، آنگاه $\hat{y}$ نیز بردار پیش‌بینی نامیده می‌شود و مدل رگرسیون به‌صورت رابطه‌ی ۸ خواهد بود:[۱۸]

$$\hat{y} = \upsilon^T \beta + \delta = \begin{bmatrix} 1 \\ \upsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta \\ \beta \end{bmatrix} = \tilde{\upsilon}^T \tilde{\beta} \tag{8}$$

[7] Pan

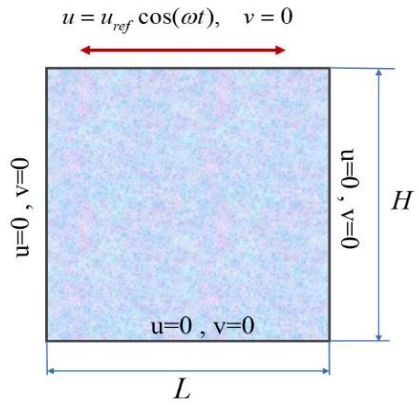

Figure 1. The geometry of the lid driven cavity flow.

شکل ۱. نمایی از هندسه‌ی جریان سیال با درب متحرک.

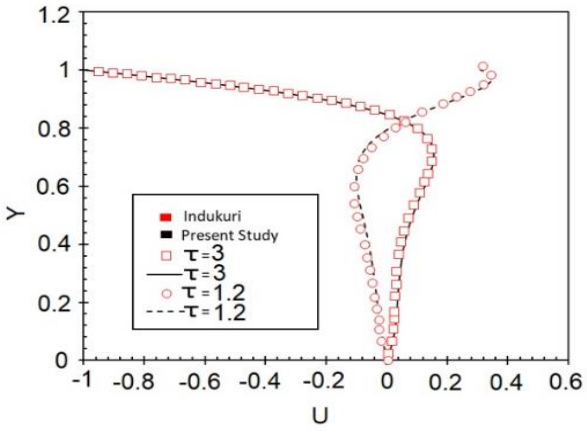

Figure 2. Validation simulation result for speed U.[20]

شکل ۲. نتیجه‌ی شبیه‌سازی اعتبارسنجی برای سرعت U.[۲۰]

می‌شود. در معادله‌ی مذکور، u_{ref} و ω به ترتیب دامنه و فرکانس نوسان هستند. ویسکوزیته، عدد Re، و فرکانس سیال به ترتیب ۰/۰۱ N.s/m^2، Re=۱۰۰، و ۲π/۶ در نظر گرفته شده‌اند. مطابق شکل ۲، نتیجه‌ی شبیه‌سازی با کار ایندوکری و مانییر[8] (۲۰۱۸)،[۲۰] اعتبارسنجی شده است. در این راستا، زمان بدون بُعد به‌صورت $\tau = u_{ref}t/L$ تعریف شده است.

در مرحله‌ی بعد، جریان حفره با درب متحرک با نوسان بالاتر به‌عنوان یک مسئله‌ی گذرا حل شده است، تا DMD بر نوسان هارمونیک اعمال شود و تغییرات آشکار شوند. در این راستا، u_{ref}=۱۰ (m/s)، ω=۲π، (kg/m^3) ρ=۱۰، Re= ۴۰۰، μ=۰/۲۵ (N.s/m^2) در نظر گرفته می‌شود. همچنین، برای گام زمانی داده‌شده برابر با ۰/۰۲ ثانیه، زمان اجرای شبیه‌سازی ۲۰ ثانیه بوده است، که ۱۰۰۰ تصویر لحظه‌ای تولید می‌کند. برای حل شبکه‌ی مذکور از نرم‌افزار فلوئنت از ورژن ۲۰۲۲R۲ و الگوریتم SIMPLE با درنظرگرفتن جریان آرام و گذرا استفاده شده است.

۱.۳. آزمون استقلال از شبکه

به‌منظور بررسی تأثیر اندازه‌ی شبکه‌ی محاسباتی در دقت نتایج و اطمینان از استقلال پاسخ عددی از شبکه، آزمون استقلال از شبکه برای مسئله‌ی جریان ناپایای حاضر انجام شده است. شرایط شبیه‌سازی، شامل عدد رینولدز Re=۱۰۰ و فرکانس تحریک (نوسان)، ۲π/۶ رادیان بر ثانیه بوده است.

۲.۳. الگوریتم جدید مبتنی بر DMD/ رگرسیون

مدل ریاضی سیستم دینامیکی با اعمال الگوریتم DMD بر روی داده‌های حاصل از اندازه‌گیری به‌دست می‌آید. این امر نیز با تشخیص ویژگی‌های دینامیکی سیستم با استفاده از الگوریتم DMD و اجرای آن در طول زمان و برای یک نوع سیال با شرایط تعریف‌شده انجام می‌شود. در پژوهش حاضر سعی بر آن بوده است که با داشتن اطلاعات دینامیکی حاصل از چند شبیه‌سازی، و برقراری رابطه‌ی رگرسیون بین آن‌ها، بتوان میدان سرعت سیال دلخواه را پیش‌بینی کرد. به این منظور، شبیه‌سازی چند نوع سیال متفاوت، که عدد رینولدز متفاوت داشته‌اند، انجام شده است. لذا، فرض شده است که شرایط مرزی برای همه‌ی سیالات یکسان است و فقط چگالی و لزجت آن‌ها با یکدیگر تفاوت دارد. درنهایت، می‌توان میدان سیال دیگر را با استفاده از اعمال رگرسیون بر ویژگی استخراج‌شده توسط DMD از شبیه‌سازی‌های موجود تخمین زد.

اولاً، میدان سرعت یک سیستم دینامیکی سیال فقط براساس داده‌های اندازه‌گیری‌شده بازسازی می‌شود. از آنجا که $Re(t) = \rho V(t)L/\mu$ است، پس می‌توان رابطه‌ی $Re(t) = f(\chi(t))$, را نوشت و رابطه‌ی ۹ نیز برقرار خواهد بود:

$$\chi(t) = \begin{bmatrix}\Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_p\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}B_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & B_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\exp(\Omega_1 t)\\ \exp(\Omega_2 t)\\ \vdots\\ \exp(\Omega_p t)\end{bmatrix} \quad (9)$$

مقدار مناسب p به ویژگی‌های دینامیک جریان سیال بستگی دارد؛ هر چه غیرخطی‌بودن میدان سیال بیشتر باشد، مقدار p بیشتری موردنیاز است.

رابطه‌ی اخیر توضیح می‌دهد که چگونه عدد رینولدز با مدهای مکانی و زمانی میدان سرعت مرتبط است. درنهایت، به‌منظور حل رابطه‌ی مذکور، شرایط اولیه‌ی رابطه‌ی رگرسیون به صورت معادله‌ی ۱۰ برقرار خواهد بود:

$$B_i = \sum_{j=1}^{N}\eta_{i,j}\,\mathrm{Re}^{j-1},\quad i = 1,...,p,\ \ j = 1,...,N \quad (10)$$

عملیات رگرسیون روی هر سطر ماتریس انجام خواهد شد، تا بردارهای وزنی مناسب مربوط به ویژگی‌های میدان جریان انتخاب‌شده شناسایی شوند.

۳. مطالعه‌ی موردی

جریان حفره‌ای با درب متحرک مطابق با شکل ۱، به‌عنوان مطالعه‌ی موردی برای پژوهش حاضر در نظر گرفته شده است. معادله‌های ناویر- استوکس تراکم‌ناپذیر دو بُعدی بدون نیروی خارجی و معادله‌ی پیوستگی استفاده شده است.[۱۹] حل دو بُعدی برای رفتار دینامیکی جریان سیال نیوتنی تراکم‌ناپذیر در یک حفره‌ی

(m^2) ۱ ×۱ با درب نوسانی با سرعت $u_{ref}\cos(\omega t)$ انجام شده است. با استفاده از روش FVM و الگوریتم معادله‌های وابسته به فشار روش نیمه‌ضمنی برای جریان سیال نیوتنی و تراکم‌ناپذیر از شبکه‌های دکارتی روی حفره‌ی دو بُعدی با درب متحرک نوسان‌کننده به‌صورت $u_{ref}\cos(\omega t)$ بهره گرفته

[8] Indukuri & Maniyeri

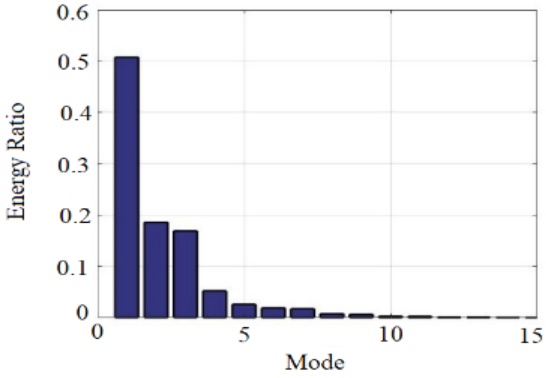

Figure 5. Energy of the first 15 modes.

شکل ۵. انرژی ۱۵ مد اول.

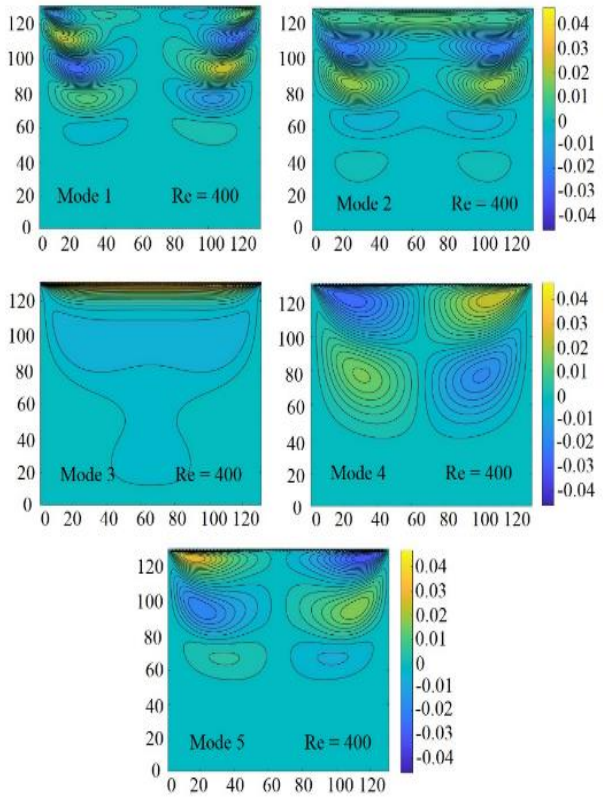

Figure 6. The top 5 non-iterative modes of cavity structures with movable lids for Re = 400.

شکل ۶. پنج ساختار بدون تکرار جریان در حفره با درب متحرک برای جریان با رینولدز ۴۰۰.

به‌صورت مزدوج هستند. در شکل ۶، پنج مد غیرتکراری از ۹ مد دینامیکی نشان داده شده است. مد اول برابر با مد DC و دیگر مدهای هارمونیک برای جریان سیال درون حفره با درب نوسانی برای عدد رینولدز ۴۰۰ رسم شده‌اند.

۲.۳. اعمال الگوریتم RpDMD

جریان سیال حفره با درب متحرک با درنظرگرفتن Re=۴۰۰ با استفاده از روش حجم محدود حل شده است. برای اعمال الگوریتم RpDMD، جریان سیال حفره برای Re=۵۰۰ و Re=۶۰۰ نیز به‌صورت مشابه شبیه‌سازی و مدهای دینامیکی زمانی و مکانی آن‌ها با استفاده از روش DMD استخراج شده‌اند. در این راستا، می‌توان شرایط جریان سیال با Re های مختلف در بازه‌ی ۴۰۰ تا ۶۰۰ را تخمین زد. روش اخیر، محدوده‌ی تخمین و پیش‌بینی الگوریتم DMD را در سایر تغییرات جریان سیال گسترش می‌دهد و باعث می‌شود تا

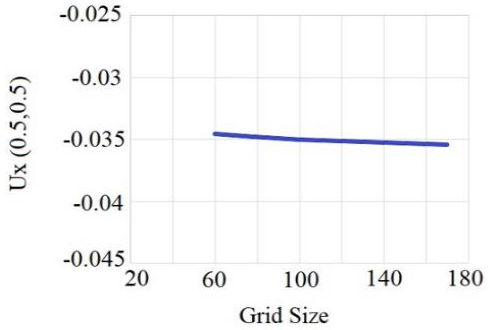

Figure 3. Mesh Independency Test for cavity fluid flow.

شکل ۳. آزمون استقلال از مش برای جریان حفره.

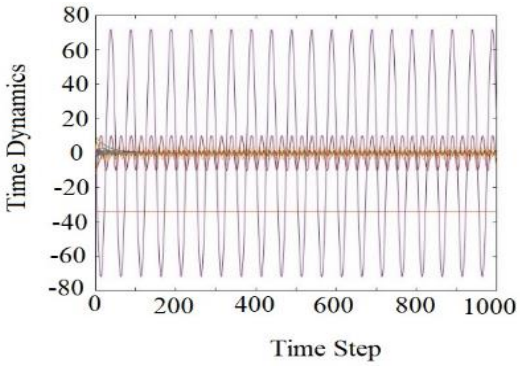

Figure 4. Time dynamics of a cavity flow with a movable lid.

شکل ۴. دینامیک زمانی جریان حفره با درب متحرک.

برای ارزیابی حساسیت نتایج نسبت به اندازه‌ی شبکه، پنج شبکه‌ی یکنواخت با ابعاد نشان داده‌شده در شکل ۳ بررسی شده‌اند. مقایسه‌ی نتایج نشان داده است که اختلاف نسبی میان تمامی شبکه‌های مطالعه‌شده کمتر از ۱٪ است، که بیانگر همگرایی مناسب حل عددی و استقلال نتایج از اندازه‌ی شبکه است. همچنین، کمترین اختلاف بین نتایج حاصل از شبکه‌های ۱۳۰×۱۳۰ و ۱۷۰×۱۷۰ مشاهده شده است، که نشان می‌دهد ریزسازی بیشتر شبکه، تأثیر محسوسی در پاسخ عددی نداشته است. از آنجا که استفاده از شبکه‌ی ۱۷۰×۱۷۰ فقط موجب افزایش هزینه‌ی محاسباتی، بدون بهبود قابل‌توجه در دقت نتایج می‌شود، شبکه‌ی ۱۳۰×۱۳۰ به‌عنوان شبکه‌ی بهینه انتخاب و در تمامی شبیه‌سازی‌های پژوهش استفاده شده است.

همچنین در شکل ۴، مدهای زمانی دینامیکی حفره با درب متحرک در یک شکل مشاهده می‌شوند؛ که مطابق آن، یک دینامیک زمانی DC و چندین دینامیک زمانی هارمونیک وجود دارند. دینامیک زمانی DC و برخی از هارمونیک در طول زمان اجرا ادامه دارند، اما گروهی از دینامیک‌های زمانی نیز به طورموقت وجود داشته و محو شده‌اند.

شرایط اولیه از داده‌های برداشت‌شده از شبیه‌سازی حذف می‌شوند. سپس، پس از اعمال معادله‌ی ۴، می‌توان مشاهده کرد که ۱۵ مد، بیشترین سهم انرژی جنبشی از انرژی کل را داشته‌اند. مقدار سهم انرژی مدهای مذکور را می توان در شکل ۵ مشاهده کرد. در این میان، ۹ مد اول مقدار ۹۹٪ از انرژی کل را در اختیار دارند و می‌توانند به‌عنوان نماینده‌ی کل جریان در نظر گرفته شوند، که در ادامه به آن پرداخته شده است.

شایان ذکر است که به‌دلیل پریودیک‌بودن دینامیک سیستم، به جز یکی از مدها که نشانگر جریان غالب در طول زمان است، بقیه‌ی مدهای دینامیکی

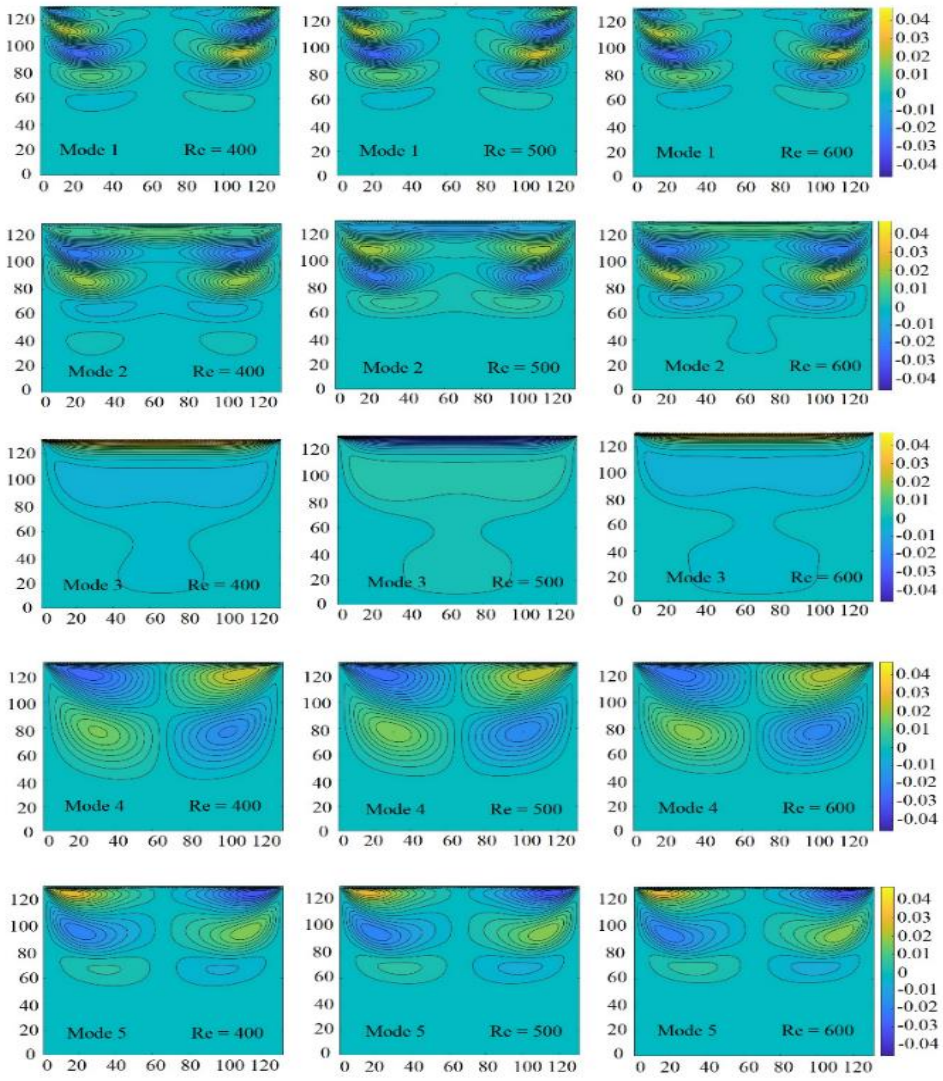

Figure 7. The 5 noniterative space modes of 9 modes with the highest energy in fluid flows with Re equals to 400, 500, 600.

شکل ۷. پنج مد غیرتکراری از ۹ مد فضایی اول با بالاترین انرژی جریان در Re های برابر با ۴۰۰، ۵۰۰، و ۶۰۰.

ظرفیت‌های الگوریتم DMD برای تخمین شرایط جریان سیال دیگر با همان شرایط مرزی افزایش یابد. در مطالعه‌ی پژوهشی حاضر، بخش‌های رگرسیون و DMD، و در نتیجه الگوریتم RpDMD می‌تواند شرایط جریان سیال را در سایر اعداد Re در محدوده‌ی مشخص‌شده تخمین بزند.

برای شبیه‌سازی جریان سیال با عددهای رینولدز ۵۰۰ و ۶۰۰ نیز ۲۰۰ گام زمانی اول از داده‌های برداشت‌شده از شبیه‌سازی، به‌عنوان شرایط اولیه‌ی ناپایدار صرف‌نظر شده است. با استفاده از الگوریتم DMD مدهای دینامیکی شناسایی و تجزیه شده‌اند. در طی این فرایند، در هنگام اعمال معادله‌ی ۴، با توجه با ماتریس مقادیر تکین Σ، مشاهده شده است که ۹ مد اول، شامل ٪۹۹ انرژی جنبشی سیستم دینامیکی بوده‌اند. بنابراین، با داشتن ۹ مد دینامیکی مکانی و زمانی همراه با شرایط اولیه، که در معادله‌ی ۷ نشان داده شده است، می‌توان با دقت مناسبی جریان سیال را بازسازی کرد.

در شکل ۷، مدهای مکانی تجزیه شده‌ی غیرتکراری با بالاترین انرژی برای جریان سیال در هر عدد Re مشاهده می‌شود. تشابه مدهای دینامیکی مکانی ذکرشده، زمینه‌ی مناسب را برای عملگر رگرسیون فراهم می‌آورد تا رابطه‌ی خطی بین میدان‌های سرعت در هر جریان با Re متفاوت در بازه‌ی بیان‌شده را ایجاد کند. به‌عبارت دیگر، با بهره‌گیری از این تشابه بین مدها و یکسان درنظرگرفتن آن‌ها بین جریان‌های سیال با اعداد رینولدز متفاوت در بازه‌ی رینولدز ۴۰۰ تا ۶۰۰، و متغیر درنظرگرفتن شرایط اولیه، می‌توان با استفاده از شرایط اولیه که در معادله‌ی ۱۰ به آن اشاره شده است، می‌توان میدان سیال جدید را تخمین زد. در واقع، در پژوهش حاضر فرض بر آن بوده است که شرایط اولیه در مدها، که با b_k در معادله‌ی ۷ نشان داده شده است، عامل ایجاد تغییرات در میدان سرعت جریان سیال برای جریان با رینولدزهای متفاوت بوده است. لذا، معادله‌ی رگرسیون برای تخمین شرایط اولیه‌ی متغیر در مدها به صورت معادله‌ی ۱۱ است:

$$B_i = \sum_{j=1}^{3} \eta_{i,j}\, \mathrm{Re}^{j-1} \quad i,j = 1,2,3. \tag{11}$$

به‌عبارت دیگر، با درنظرگرفتن تحلیل پارامتریک در DMD، در پژوهش حاضر با استفاده از رگرسیون بین شرایط اولیه‌ی مدهای دینامیکی استخراج‌شده از جریان‌هایی با اعداد رینولدز متفاوت ارتباطی خطی برقرار شده است. در نتیجه، میدان جریان با عدد رینولدز جدید و بدون نیاز به شبیه‌سازی مجدد را می‌توان بازسازی کرد.

جدول ۱. درصد تعداد نقاط با خطای تخمین سرعت بالاتر از ۵٪ در سیال‌ها با اعداد Re مختلف.

Table 1. Percentage of points with estimation error of axial velocity over 5%.

Re	*The percentage of nodes with relative error more than 5%*
425	1.8414
450	2.0365
475	1.2489
525	1.1463
550	1.7322
575	1.4722

برای حاصل‌شدن خطای تخمین کمتر از رگرسیون درجه‌ی دو استفاده شده است. مؤلفه‌ی سرعت که در راستای افق در تمامی نودهای شبکه محاسبه شده‌اند، در نظر گرفته شده است. نتایج خطای تخمین جریان با رینولدزهای متفاوت و درصد تعداد نودهای با خطای تخمین بالاتر از ۵٪ برای جریان سیال تخمین زده شده است، که در جدول ۱ ارائه شده است؛ که مطابق آن، بالاترین مقدار خطا مربوط به جریان با رینولدز ۴۵۰ و سپس ۵۵۰ بوده است. میزان خطای اخیر، نشان می‌دهد که با افزایش فاصله از نقاط تشکیل‌دهنده‌ی منحنی رگرسیون، خطای تخمین کمینه‌ی مربعات بیشتر شده است. بنابراین، برای افزایش دقت تخمین در روش ذکرشده، باید نقاط رگرسیون بیشتری انتخاب شوند.

۴. نتیجه‌گیری

برخلاف آنچه که در روش‌های مرسوم ROM مانند POD مشاهده می‌شود، تجزیه‌ی مد دینامیکی به‌منظور تجزیه‌ی جریان سیال به مدهای دینامیکی مکانی و زمانی معرفی شده است، که علاوه‌بر خاصیت کاهش ابعاد محاسباتی، امکان بازسازی دینامیکی میدان جریان را نیز فراهم می‌آورد. در مطالعات اخیر، به‌منظور تخمین میدان‌های جریان دیگر از روش DMD پارامتریک استفاده می‌شود، که معمولاً حجم مطالعاتی بالا دارند. در مطالعه‌ی حاضر، با استفاده از تشابه مدها در جریان‌هایی با عدد رینولدز متفاوت در محدوده‌های مشخص، تخمین مناسبی از میدان جریان با حجم محاسباتی پایین‌تر صورت گرفته است.

در پژوهش حاضر، با استفاده از رویکرد تحلیل پارامتریک DMD، اما فقط با درنظرگرفتن شرایط اولیه‌ی مدهای دینامیکی، میدان سرعت جریان سیال با Re متفاوت تخمین زده شده است. برای این منظور، سه جریان سیال درون حفره با درب نوسانی با Re های متفاوت با استفاده از روش تفاضل محدود حل شده و سپس داده‌برداری انجام گرفته است. مشاهده شده است که مدهای مکانی و زمانی با اختلاف پایین به صورت مشابه برای سه سیال مذکور وجود دارند و تفاوت را می‌توان در شرایط اولیه‌ی مدها مشاهده کرد. بدین ترتیب، با اعمال رگرسیون بین سه دسته مدهای استخراج‌شده از جریان سیال با Re های متفاوت، جریان‌های متفاوت نیز پیش‌بینی شده‌اند.

این رویکرد در کاربردهایی مفید است که در آن‌ها: نوع، ویسکوزیته، و چگالی سیال تغییر می‌کند، که باعث تغییر در عدد Re می‌شود، اما شرط مرزی ثابت می‌ماند. لذا، در شبیه‌سازی سیال فقط به اعمال اعداد Re به مدل رگرسیون استخراج‌شده نیاز است و پروفیل سرعت را می‌توان بدون شبیه‌سازی استخراج کرد. در نتیجه، تخمین جریان سیال در اعداد رینولدز نزدیک به نقاط تعریف‌شده برای الگوریتم رگرسیون، با دقت بالاتری صورت گرفته است. بیشترین خطا مربوط به سیال با عددهای رینولدز ۵۵۰ و ۴۵۰ بوده است.

- نمادگذاری

A	ماتریس تخمین‌زن خطی
L	طول حفره
r	مقدار مرتبه‌ی کاهش‌یافته
u	سرعت در راستای محور x ها
V	میدان سرعت

- نمادهای یونانی

β	بردار وزنی اسکالر
δ	مقدار انحراف مدل
μ	لزجت
Σ	مقدار تکین
λ	مقدار ویژه
Φ	ماتریس مقادیر ویژه

References - منابع

1. Schmid, P.J., 2021. Dynamic Mode Decomposition and its variants, *Annual Review of Fluid Mechanics*, *54*, pp. 225–254. DOI:10.1146/annurev-fluid-030121-015835

2. Proctor, J.L. & Eckhoff, P.A., 2015. Discovering dynamic patterns from infectious disease data using dynamic mode decomposition, *International Health*, *7*(2), pp. 139–145. DOI:10.1093/inthealth/ihv009

3. Mann, J. & Kutz, J.N., 2016. Dynamic mode decomposition for financial trading strategies, *Quantitative Finance*, *16*(11), pp. 1643–1655. DOI:10.1080/14697688.2016.117019

4. Casorso, J., Kong, X., Chi, W., Van De Ville, D., Yeo, B.T.T. & Liégeois, R., 2019. Dynamic mode decomposition of resting-state and task fMRI, *NeuroImage*, *194*(1), pp. 42–54. DOI:10.1016/j.neuroimage.2019.03.019

5. Schmid, P.J., 2010. Dynamic mode decomposition of experimental data, *Journal of Fluid Mechanics*, *656*, pp. 5–28. DOI:10.1017/S0022112010001217

6. Wu, Z., Brunton, S.L. & Revzen, S., 2021. Challenges in dynamic mode decomposition, *Journal of the Royal Society Interface*, *18*(185). DOI:10.1098/rsif.2021.0686

7. Tissot, G., Cordier, L., Benard, N. & Noack, B.R., 2014. Model reduction using Dynamic Mode Decomposition, *Comptes Rendus Mécanique*, *342*(6–7), pp. 410–416. DOI:10.1016/j.crme.2013.12.011

8. Rasekh, M. & Mahdi, M., 2020. Hydrodynamic coefficients estimation of a prolate spheroid using combination of hybrid extended Kalman filter and computational fluid dynamics, *Sharif Journal of Mechanical Engineering (SJME)*, *36*(3.1), pp. 99–108 [in Persian]. DOI:20.1001.1.26764725.1399.363.1.12.7

9. Sashidhar, D. & Kutz, J.N., 2022. Optimized dynamic mode decomposition for robust, stable forecasting with spatial and temporal uncertainty quantification, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 380(2229). DOI:10.1098/rsta.2021.0199

10. Ding, W. & Li, J.I.E., 2023. Higher order extended dynamic mode decomposition based on the structured total least squares, *Journal on Scientific Computing*, *45*(2), pp. 985–1011. DOI:10.1137/21M1463665

11. Li, C.Y., Tse, T.K.T. & Hu, G., 2020. Dynamic Mode Decomposition on pressure flow field analysis: Flow field reconstruction, accuracy, and practical significance, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, *205*(104278). DOI:10.1016/j.jweia.2020.104278

12. Pan, C., Xue, D. & Wang, J., 2015. On the accuracy of dynamic mode decomposition in estimating instability of wave packet, *Experiments in Fluids*, *56*(8), pp. 1–15. DOI:10.1007/s00348-015-2015-6

13. Sabaghzadeghan, F. & Moayyedi, M.K., 2021. Reduced order model of conduction heat transfer in a solid plate based on Dynamic Mode Decomposition, *Sharif Journal of Mechanical Engineering (SJME)*, *37*(3.2), pp. 3–12 [in Persian]. DOI:10.24200/j40.2021.55926.1555

14. Abhijith, M.S., Sandra, S., 2026. Parametric DMD with multi-linear interpolation for thermal field prediction of nanofluid flows, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 48*(178), pp. DOI:10.1007/s40430-025-06173-w

15. Kutz, J.N., Brunton, S.L., Brunton, B.W. & Proctor, J.L., *Dynamic Mode Decomposition*. Ed., 1st Edn, pp. 1-24, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA (2016). DOI:10.1137/1.9781611974508

16. Wu, Z., Brunton, S. L., Revzen, S., 2021, Challenges in dynamic mode decomposition, *Journal of The Royal Society Interface*, *18* (185), DOI:10.1098/rsif.2021.0686

17. Askham, T, Kutz, N., 2018, Variable Projection Methods for an Optimized Dynamic Mode Decomposition, *Applied Dynamical Systems, 17*(1), pp. 380-416, DOI:10.1137/M1124176

18. Boyd, S., Vandenberghe, L. (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. Cambridge: Cambridge University Press, DOI:10.1017/9781108583664

19. Bruneau, C., Saad, M., 2004, The 2D lid-driven cavity problem revisited, *Computers & Fluids,* 35(3), pp. 326-348. DOI:10.1016/j.compfluid.2004.12.004

20. Indukuri, J.V. & Maniyeri, R., 2018. Numerical simulation of oscillating lid-driven square cavity, *Alexandria Engineering Journal*, *57*(4), pp. 2609–2625. DOI:10.1016/j.aej.2017.07.011

این صفحه عمداً خالی گذاشته شده است.