فصلنامه‌ی علمی و پژوهشی شریف
زمستان ۱۳۸۶، شماره‌ی چهلم، ص. ۹۳-؟؟

کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌یی پیزوالکتریک بر پایه‌ی نظریه‌ی مرتبه بالا

محمد شرعیات (استادیار)
امین یاقوتیان (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

در این نوشتار کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌یی پیزوالکتریک با به‌کارگیری یک نظریه‌ی مرتبه بالا بررسی شده است. بدین ترتیب، برخلاف نظریه‌ی کلاسیک، تنش‌های برشی عرضی نیز در نظر گرفته شده‌اند. فرمول‌بندی پیشنهادی برای پوسته‌های جدار ضخیم و جدار نازک معتبر است. اثر دامنه‌ی انحراف اولیه که عموماً به‌صورت جابه‌جایی عرضی است بر بار کمانش ارزیابی شده‌است. با بهره‌گیری از المان هرمیتی هرگونه شرایط مرزی از قبیل جابه‌جایی و تنشی قابل اعمال است. در نهایت، اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی روی سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی پیزوالکتریک بر بار کمانش بررسی شده است.

۱. مقدمه

استفاده از مواد هوشمند در سازه‌ها یکی از زمینه‌های بسیار جدیدی است که در مهندسی سازه و مواد در سال‌های اخیر رونق پیدا کرده است. سازه‌های پیزوالکتریک با بهره‌گیری از اثرات مستقیم و معکوس مواد پیزوالکتریک رشد و توسعه‌ی فراوانی در صنایع (نظیر هوافضا، صنایع دریایی، هواپیماسازی و غیره) یافته‌اند. به‌کارگیری اثر مستقیم خاصیت پیزوالکتریکی در حس‌گرها همزمان با اثر معکوس آنها در محرک‌ها، این مواد را به یکی ازکاربردی‌ترین مواد در زمینه‌ی سازه‌های هوشمند مبدل ساخته است. از این میان کنترل شکل و کمانش سازه‌ها با استفاده از مواد پیزوالکتریک در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهش‌گران و محققان قرار گرفته است. از زمان پیدایش خواص مستقیم و معکوس مواد پیزوالکتریک تا کنون تحقیقات فراوانی بر روی این مواد صورت گرفته است.

لامرینگ برای تحلیل سازه‌ی پوسته‌یی عمومی که سطح آن پوشیده از لایه‌ی نازکی از ماده‌ی پیزوالکتریک بود، مدل اجزاء محدود را بر پایه‌ی نظریه‌ی مرتبه اول برشی ارائه کرد.[۱] همچنین محققان، مطالعاتی پیرامون حل دقیق پوسته‌های استوانه‌یی دایره‌یی پیزوالکتریک انجام دادند.[۲] ابراموویچ و میلر نیز با استفاده از نظریه‌ی مرتبه‌اول برشی به بررسی محرک‌های خود حس‌گر پیزوالکتریک پوسته‌یی اقدام کردند.[۳] این در حالی بود که کنترل فعال کمانش ستونی که سطح آن پوشیده از مواد پیزوالکتریک بود، مورد آزمایش قرار گرفته بود.[۴] استرامبی مدل فشار سوزنی را برای تحلیل تیری که وصله‌هایی از جنس پیزوالکتریک روی سطوح بالایی و پایینی آن تعبیه شده بود به‌کار برد.[۵] بعدها این مدل برای تحلیل تیرهای خمیده تعمیم یافت.[۶] تحقیقاتی بر روی کمانش، پس کمانش و پایداری دینامیکی پوسته‌های پیزوالکتریک[۷]، بررسی رفتار الکترومکانیکی پوسته‌های استوانه‌یی پیزوترموالاستیک[۸] و همچنین، اثر خاصیت پیزوالکتریکی بر بارکمانش پوسته‌های استوانه‌یی با طول نامحدود تحت فشار و میدان الکتریکی شعاعی [۹] توسط چن و همکارش انجام شده است. پژوهشگران رفتار ارتعاشی و پس‌کمانش ورق‌های مرکب پیزوالکتریک را با در نظرگرفتن جابه‌جایی‌های حرارتی بزرگ مورد بررسی قرار دادند.[۱۰] و با استفاده از روش المان محدود غیرخطی و نیز بهره جستن از روش نیوتن ـ رافسون، به تحلیل رفتار ترموپیزوالکتریک ورق پیزوالکتریک بر پایه‌ی نظریه‌ی ayerwise و روابط کرنش‌ـجابه‌جایی ون‌ـکارمن پرداختند.[۱۱] رفتار پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌یی لایه‌یی دارای نقص اولیه، تحت بار محوری به همراه محرک‌های پیزوالکتریک براساس روابط کرنش‌ـجابه‌جایی دانل مورد مطالعه قرار گرفت.[۱۲] از سوی دیگر، محققان مطالعاتی پیرامون پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌یی پیزوالکتریک با استفاده از روش اجزاء محدود[۱۳] و نیز پوسته‌های استوانه‌یی پیزوترموالاستیک با استفاده از روش اجزاء محدود انجام داده‌اند.[۱۴]

طبق مطالعات انجام شده، کمانش پوسته‌های استوانه‌یی پیزوالکتریک تحت بارهای محوری کم‌تر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در این نوشتار پوسته‌های استوانه‌یی پیزوالکتریک بررسی می‌شود. در این مسیر، بر خلاف بسیاری از کارهای پیشین که از نظریه‌های کلاسیک ورق و پوسته یا نظریه‌ی مرتبه اول استفاده شده است، به‌منظور در نظر

گرفتن اثرات تنش‌های برشی عرضی و عدم نیاز به ضرائب تصحیح، از نظریه‌های مرتبه بالای پوسته بهره گرفته می‌شود. همچـنین تغییرات پتانسیل الکتریکی براسـاس مؤلفه‌های مرتبه بالای ضـخامت آورده شـده اسـت.

با در نظر گرفتن کرنش‌های متوسط، از روابط غیر خطی کرنش ـ جابه‌جایی دانل بهره گرفته شده است. با استفاده از روش اجزاء محدود و با کمینه کردن تابع پتانسیل کل سیستم، معادلات حاکم بر مسئله استخراج شده است. به‌دلیل غیرخطی بودن روابط، نمی‌توان بار بحرانی را از روش حل مقادیر ویژه به‌دست آورد، لذا از روش بودیانسکی استفاده شده است. در این روش تغییر ناگهانی در شیب منحنی بار ـ جابه‌جایی معرف بارکمانش است. اثر انحراف اولیه که عموماً به‌صورت جابه‌جایی شعاعی در استوانه وجود دارد نیز منظور شده است.

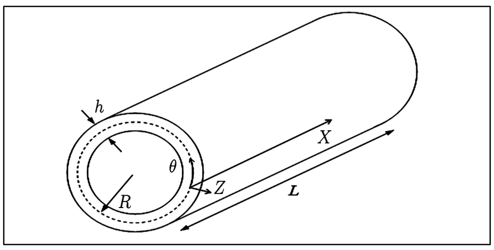
۲. میدان جابه‌جایی و کرنش

برای واردکردن اثرات تنش‌های برشی عرضی در پوسته از نظریه‌ی برشی مرتبه سوم بهره گرفته شده است. همچنین در این نظریه توزیع تنش برشی در راستای ضخامت به‌صورت سهموی است. میدان جابه‌جایی نظریه‌ی مرتبه سوم به‌صورت رابطه‌ی ۱ است.[۱۵]

$$\begin{cases} u(x,\theta,z) = u_\circ + z\beta_x + z^3 k(\beta_x + w_{\circ,x}) \\ \nu(x,\theta,z) = \nu_\circ(1 + z/R) + z\beta_\theta + z^3 k(\beta_\theta + w_{\circ,\theta}/R) \\ w(x,\theta,z) = w_\circ(x,\theta) \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن $u_\circ$، $v_\circ$ و $w_\circ$ جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی، β_x و β_θ دوران‌های عمود بر صفحه‌ی میانی حول محورهای x و θ هستند. همچنین R شعاع میانگین استوانه $k = -\frac{4}{3}h^2$ و h ضخامت پوسته‌اند. مختصه‌ی x در راستای طولی، θ شعاعی و z در جهت ضخامت پوسته به سمت خارج استوانه و نسبت به لایه‌ی میانی است (شکل ۱).

با اعمال میدان جابه‌جایی ۱ در روابط کرنش‌ـجابه‌جایی غیرخطی دانل[۱۶] و با منظور کردن اثر انحراف اولیه که عموماً به‌صورت



شکل ۱. مشخصات هندسی و مختصات به‌کار رفته.

جابه‌جایی‌های شعاعی در استوانه‌ها ظاهر می‌شوند[۱۷]، رابطه‌ی ۲ حاصل می‌شود:

$$\epsilon = \epsilon^{(\circ)} + zk^{(1)} + z^2 k^{(2)} + z^3 k^{(3)} \quad (۲)$$

که در آن $\epsilon = \{\epsilon_x\ \epsilon_\theta\ \gamma_{\theta z}\ \gamma_{xz}\ \gamma_{x\theta}\}^T$ است و $\epsilon^{(\circ)}$، $k^{(1)}$، $k^{(2)}$ و $k^{(3)}$ در روابط ۳ تا ۶ آورده شده‌اند.

$$\epsilon^{(\circ)} = \begin{cases} u_{\circ,x} + \frac{1}{2}w_{\circ,x}^2 + \bar{w}_{,x}w_{\circ,x} \\ (v_{\circ,\theta} + w_\circ)/R + \frac{1}{2}(w_{\circ,\theta}/R)^2 + \bar{w}_{,\theta}w_{\circ,\theta}/R^2 \\ \beta_\theta + w_{\circ,\theta}/R \\ \beta_x + w_{\circ,x} \\ u_{\circ,\theta}/R + v_{\circ,x} + (w_{\circ,x}w_{\circ,\theta} + \bar{w}_{,x}w_{\circ,\theta} + \bar{w}_{,\theta}w_{\circ,x})/R \end{cases} \quad (۳)$$

$$k^{(1)} = \begin{cases} \beta_{x,x} \\ \beta_{\theta,\theta}/R - \nu_{\circ,\theta}/R^2 \\ \circ \\ \circ \\ \beta_{x,\theta}/R + \beta_{\theta x} - \nu_{\circ,x}/R \end{cases} \quad (۴)$$

$$k^{(2)} = \begin{cases} \circ \\ \circ \\ 3k(\beta_\theta + w_{\circ,\theta}/R) \\ 3k(\beta_x + w_{o,x}) \\ \circ \end{cases} \quad (۵)$$

$$k^{(3)} = \begin{cases} k(w_{\circ,xx} + \beta_{x,x}) \\ k(w_{\circ,\theta\theta}/R + \beta_{\theta,\theta})/R \\ \circ \\ \circ \\ k(2w_{\circ,x\theta}/R + \beta_{x,\theta}/R + \beta_{\theta,x}) \end{cases} \quad (۶)$$

در روابط اخیر $\bar{w}$ انحراف اولیه‌ی پوسته است.

۳. پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی

تابع پتانسیل الکتریکی که در این مسئله در نظرگرفته شده است تابعی است به‌صورت رابطه‌ی ۷:[۱۸]

$$\varphi(x,\theta,z)=\varphi^{(0)}+z\varphi^{(1)}+z^{2}\varphi^{(2)} \tag{7}$$

که در آن $\varphi^{(0)}$، $\varphi^{(1)}$ و $\varphi^{(2)}$ به‌ترتیب عبارت‌اند از: پتانسیل الکتریکی سطح میانی، مشتق اول و مشتق دوم پتانسیل الکتریکی نسبت به راستای ضخامت در سطح میانی پوسته. دلیل استفاده از رابطه‌ی ۷، سازگاری مناسب‌تر آن با رابطه‌ی مؤلفه‌های جابه‌جایی (رابطه‌ی ۱) در استفاده از فرم توانی است. در این خصوص فرم‌های مثلثاتی نیز ارائه شده‌اند.[۱۹] با جای‌گذاری مقدار پتانسیل الکتریکی روی سطوح بالایی $(\varphi(x,\theta,+h/2)=\varphi^{(T)})$ و پایینی $(\varphi(x,\theta,-h/2)=\varphi^{(B)})$، در رابطه‌ی ۷، معادله‌ی ۸ برحسب پتانسیل الکتریکی سطح بالایی $(\varphi^{(T)})$، سطح میانی $(\varphi^{(0)})$، و سطح پایینی $(\varphi^{(B)})$ به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\varphi(x,\theta,z)&=\varphi^{(0)}+(z/h)(-\varphi^{(B)}+\varphi^{(T)})\\&+(2z^{2}/h^{2})(\varphi^{(B)}-2\varphi^{(0)}+\varphi^{(T)})\end{aligned} \tag{8}$$

رابطه‌ی میدان الکتریکی برحسب پتانسیل الکتریکی در رابطه‌ی ۹ بیان شده است.[۱۵]

$$\mathbf{E}=-\nabla\varphi \tag{9}$$

که در آن $\mathbf{E}=\{E_xE_\theta E_z\}^T$ و ∇ بردار گرادیان در مختصات استوانه‌یی است.

۴. معادلات بنیانی

روابط مزدوج الکترومکانیکی حاکم بر محیط پیزوالکتریک عبارت است از:[۱۵]

$$\begin{cases}\sigma=\mathbf{C}\epsilon-\mathbf{e^T}\mathbf{E}\\ \mathbf{D}=\mathbf{e}\epsilon+\mathbf{b}\mathbf{E}\end{cases} \tag{10}$$

که در آن $\sigma=\{\sigma_x\,\sigma_\theta\,\sigma_{\theta z}\,\sigma_{xz}\sigma_{x\theta}\}^T$ نماینده‌ی بردار تنش، و $\mathbf{D}=\{D_x\,D_\theta\,D_z\}^T$ نماینده‌ی بردار جابه‌جایی الکتریکی هستند و بالانویس T ترانهاده‌ی ماتریس را نشان می‌دهد. $\mathbf{C}$ ماتریس سفتی کشسانی، $\mathbf{e}$ ماتریس سفتی پیزوالکتریسیته و $\mathbf{b}$ ماتریس نفوذپذیری دی‌الکتریک ماده است.

۵. مدل اجزاء محدود

برای به‌دست آوردن مدل اجزاء محدود، از المان چهارگرهی در مختصات استوانه‌یی استفاده شده است. از آنجا که در معادلات حاکم، مشتقات w_0 تا مرتبه‌ی ۲ آشکار شده‌اند، استفاده از تابع شکل مرتبه ۳ مورد نیاز است. بر این پایه، از تابع شکل هرمیتی[۱۶]، با پیوستگی مشتقات مرتبه اول برای جابه‌جایی جانبی w_0 بهره گرفته شده است. مرتبه‌ی مشتق مرتبط با دیگر مؤلفه‌های جابه‌جایی ۱ است و لذا برای مؤلفه‌های مذکور از تابع شکل خطی لاگرانژی با پیوستگی C^0 استفاده شده است.[۱۶]

$$\begin{Bmatrix}u_0\\ \nu_0\\ w_0\\ \beta_x\\ \beta_\theta\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} & N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & H_{kl} & H_{k2} & H_{k3} & 0 & 0 & \dots\\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_k & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_k & \end{bmatrix}\mathbf{a}_e \tag{11}$$

که در آن N تابع شکل لاگرانژی و H تابع شکل هرمیتی است. زیرنویس k مربوط به گره‌ی kام المان است. $\mathbf{a_e}$ بردار مقادیر گرهی المان بوده و در رابطه‌ی ۱۲ معرفی شده است.

$$\mathbf{a}_e^T=[\dots u_0,\nu_0,w,w_x,w_\theta,\beta_x,\beta_\theta\dots]_e \tag{12}$$

همچنین برای پتانسیل الکتریکی مشابه با جابه‌جایی‌های مکانیکی رابطه‌ی ۱۳ برقرار است.

$$\begin{Bmatrix}\varphi^{(B)}\\ \varphi^{(0)}\\ \varphi^{(T)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} & N_k & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & N_k & 0 & \dots\\ & 0 & 0 & N_k & \end{bmatrix}\varphi_e \tag{13}$$

که در آن $\varphi_e=\{\dots\ \Phi^{(B)}\ \ \Phi^{(0)}\ \ \Phi^{(T)}\ \dots\}^T$ است و کمیت‌های Φ با مقدار در نقاط گره متناظرند.

۶. معادلات حاکم

برای استخراج معادلات حاکم، و به‌منظور به دست آوردن فرمول‌بندی اجزاء محدود مسئله، از تابع انرژی پتانسیل سیستم استفاده می‌شود.

$$\pi=\frac{1}{2}\int_V(\varepsilon^T\sigma-\mathbf{E}^T\mathbf{D})dV-\int_A u^T\mathbf{T}dA \tag{14}$$

در رابطه‌ی فوق از شارژ الکتریکی سطحی و نیروهای حجمی صرف‌نظر شده است. $\mathbf{T}$ بردار تنش سطحی و u بردار جابه‌جایی مکانیکی است.

با کمینه کردن تابع پتانسیل سیستم ($\delta\pi = 0$) رابطه‌ی ۱۵ نتیجه می‌شود.

$$\int_V (\delta\varepsilon^T\sigma - \delta\mathbf{E}^T\mathbf{D})dV = \int_A \delta u^T\mathbf{T}dA \qquad (۱۵)$$

از اعمال روابط ۲ و ۱۱، $\delta\epsilon$ برحسب مقادیر گرهی در رابطه‌ی ۱۶ آورده شده است.

$$\delta\varepsilon = (B_{u0} + zB_{u1} + z^2B_{u2} + z^3B_{u3})\delta\mathbf{a}_e \qquad (۱۶)$$

همچنین با استفاده از روابط ۹ و ۱۳ می‌توان رابطه‌ی ۱۷ را برای میدان الکتریکی به دست آورد.

$$\delta E = (B_{\varphi0} + zB_{\varphi1} + z^2B_{\varphi2})\delta\varphi_e \qquad (۱۷)$$

ماتریس‌های $B_{u3},\dots,B_{u0}$ و $B_{\varphi2},\dots,B_{\varphi0}$ در پیوست آورده شده‌اند.

با اِعمال روابط ۱۰، ۱۶ و ۱۷ در رابطه‌ی ۱۵ می‌توان به رابطه‌ی ۱۸ دست یافت:

$$\begin{bmatrix} K^e_{uu} & K^e_{u\varphi} \\ K^e_{\varphi u} & K^e_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_e \\ \varphi_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^e \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۱۸)$$

که در آن K^e_{uu} ماتریس سفتی مکانیکی المان، $K^e_{u\varphi}$ و $K^e_{\varphi u}$ ماتریس‌های سفتی الکترومکانیکی المان و $K^e_{\varphi\varphi}$ ماتریس سفتی الکتریکی المان هستند. همچنین F^e بردار نیروی مکانیکی المان است. روابط منتجه به ماتریس‌های سفتی عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned} K^e_{uu} = &\\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} &(B^T_{u0}(C_0B_{u0} + C_1B_{u1} + C_2B_{u2} + C_3B_{u3}) \\ &+ B^T_{u1}(C_1B_{u0} + C_2B_{u1} + C_3B_{u2} + C_4B_{u3}) \\ &+ B^T_{u2}(C_2B_{u0} + C_3B_{u1} + C_4B_{u2} + C_5B_{u3}) \\ &+ B^T_{u3}(C_3B_{u0} + C_4B_{u1} + C_5B_{u2} + C_6B_{u3})) \\ &\det(J)Rd\xi d\eta \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

$$\begin{aligned} K^e_{u\varphi} = &\\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} &(B^T_{u0}(e_0^TB_{\varphi0} + e_1^TB_{\varphi1} + e_1^TB_{\varphi1}) \\ &+ B^T_{u1}(e_1^TB_{\varphi0} + e_2^TB_{\varphi1} + e_3^TB_{\varphi1}) \\ &+ B^T_{u2}(e_2^TB_{\varphi0} + e_3^TB_{\varphi1} + e_4^TB_{\varphi1}) \\ &+ B^T_{u3}(e_3^TB_{\varphi0} + e_4^TB_{\varphi1} + e_5^TB_{\varphi1}) \\ &\det(J)Rd\xi d\eta \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} K^e_{\varphi u} = &\\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} &(B^T_{\varphi0}(e_0B_{u0} + e_1B_{u1} + e_2B_{u2} + e_3B_{u3}) \\ &+ B^T_{\varphi1}(e_1B_{u0} + e_2B_{u1} + e_3B_{u2} + e_4B_{u3}) \\ &+ B^T_{\varphi2}(e_2B_{u0} + e_3B_{u1} + e_4B_{u2} + e_5B_{u3})) \\ &\det(J)Rd\xi d\eta \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

$$\begin{aligned} K^e_{\varphi\varphi} = &\\ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} &(B^T_{\varphi0}(b_0B_{\varphi0} + b_1B_{\varphi1} + b_2B_{\varphi1}) \\ &+ B^T_{\varphi1}(b_1B_{\varphi0} + b_2B_{\varphi1} + b_3B_{\varphi1}) \\ &+ B^T_{\varphi2}(b_2B_{\varphi0} + b_3B_{\varphi1} + b_4B_{\varphi1})) \\ &\det(J)Rd\xi d\eta \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

در روابط فوق J ماتریس ژاکوبین، ξ و η مختصات محلی در راستاهای طولی و محیطی المان هستند. دیگر پارامترهای به‌کار رفته به قرار زیرند:

$$[C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6] = \int_z C\,[1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6]dz \qquad (۲۳)$$

$$[e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] = \int_z e\,[1, z, z^2, z^3, z^4, z^5]dz \qquad (۲۴)$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4] = \int_z b\,[1, z, z^2, z^3, z^4]dz \qquad (۲۵)$$

در نهایت با ترکیب کل المان‌ها، مدل نهایی اجزاء محدود مسئله حاصل می‌شود (رابطه‌ی ۲۶):

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۲۶)$$

۷. روش حل عددی

به‌دلیل غیرخطی بودن رابطه‌ی ۲۶ نمی‌توان از طریق حل مقدار ویژه بار بحرانی کمانش را به دست آورد. لذا از معیار پایداری بودیانسکی

به‌منظور تعیین مقدار بار کمانش استفاده می‌شود.[۱۷] گام‌های حل مسئله را می‌توان چنین خلاصه کرد:

۱. دریافت ورودی‌های مسئله شامل مشخصات هندسی و خواص ماده؛

۲. شبکه‌بندی سطح میانی پوسته؛

۳. محاسبه‌ی ماتریس‌های خواص ماده شامل ماتریس‌های C_i، e_i و b_i. در این مرحله انتگرال‌گیری در راستای ضخامت انجام می‌گیرد؛

۴. اعمال تغییر شکل‌های اولیه. در این مرحله تغییر شکل‌های اولیه روی نقاط گرهی المان تعریف می‌شوند؛

۵. تقسیم‌بندی و مشخص کردن مراحل اعمال بار به‌صورت افزایش مرحله‌یی؛

۶. مشخص کردن تعداد نقاط در انتگرال‌گیری گوس‌ـلژاندر و تابع وزن متناظر با هر نقطه؛

۷. شروع اعمال مرحله‌یی بار؛

۸. محاسبه‌ی ماتریس سفتی المان و مونتاژکردن آن در ماتریس سفتی نهایی؛ با توجه به این که ماتریس سفتی وابسته به مقادیر گرهی است، در هر تکرار ماتریس سفتی برحسب متغیرهای گرهی تکرار قبل محاسبه می‌شود. (در اولین مرحله مقادیر گرهی صفر در نظر گرفته می‌شوند.)

۹. محاسبه‌ی بردار نیروی المان و مونتاژکردن آن در بردار نیروی نهایی؛

۱۰. اعمال شرایط مرزی در ماتریس سفتی نهایی و بردار نیروی نهایی به‌منظور حل دستگاه معادلات جبری؛

۱۱. حل دستگاه معادلات جبری سیستم و به دست آوردن مقادیر متغیرهای گرهی؛

۱۲. مقایسه‌ی مقادیر گرهی به دست آمده با مقادیر گرهی تکرار قبل به‌منظور ارزیابی همگرایی؛

۱۳. درصورت عدم دست‌یابی به همگرایی، با منظور کردن مقادیر متغیرهای اولیه، مراحل ۸ تا ۱۲ تکرار می‌شوند؛

۱۴. در صورت به دست آمدن همگرایی، اگر مراحل افزایش بار پایان نپذیرفته باشد مقادیر متغیرهای اولیه‌ی به‌دست آمده برای شروع اعمال مرحله‌ی بعدی نیرو منظور شده و مراحل ۷ تا ۱۳ دوباره برای بار افزایش داده شده تکرار می‌شوند.

بعد از اتمام مراحل افزایش بار، با استفاده از منحنی بار-جابه‌جایی و معیار بودیانسکی محل بار بحرانی کمانش مشخص می‌شود.

۸. نتایج

۸.۱. اعمال فشار یکنواخت خارجی بر استوانه‌ی $PVDF$[۱] دو سر مفصل

در این مثال برای بررسی صحت پاسخ‌های به دست آمده از حل اجزا محدود، نتایج بی‌بعد شده‌ی جابه‌جایی شعاعی و محوری و پتانسیل الکتریکی سطح میانی برای پوسته‌ی استوانه‌یی PVDF دو سر مفصل تحت فشار یکنواخت خارجی P_0 و پتانسیل الکتریکی صفر روی سطوح داخلی و خارجی با نتایج موجود پیشین[۲۰] در جدول ۱ برای نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت و نسبت طول به شعاع ۴ مقایسه شده است که حاکی از مطابقت خوب نتایج است. بی‌بعد سازی به‌صورت روابط ۲۷ انجام شده است:[۲۰]

$$\tilde{u} = \frac{uE}{S^2 h P_0}, \quad \tilde{Q} = 1000\,\frac{\varphi d_3 E}{R P_0}, \quad \tilde{\tau}_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{P_0}$$
$$\tilde{w} = \frac{wE}{S^2 h P_0}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{h}, \quad S = \frac{R}{h} \tag{27}$$

از نتایج به دست آمده در جدول ۱ چنین بر می‌آید که با کاهش نسبت شعاع به ضخامت، میزان جابه‌جایی شعاعی پوسته نسبت به حل کلاسیک افزایش می‌یابد؛ این امر ناشی از تأثیر لحاظ کردن تنش‌های برشی برخلاف حل کلاسیک است.

۸.۲. تعیین بار کمانش پوسته‌های استوانه‌یی الاستیک بر پایه‌ی نظریه‌ی مرتبه بالا

در این بخش بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌یی کشسان با استفاده از نظریه‌ی مرتبه بالای پوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. به‌دلیل در نظر گرفتن اثرات تنش‌های برشی عرضی و افزایش نسبت جابه‌جایی‌های جانبی نسبت به حل کلاسیک با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، بار کمانش کمتر از مقدار بار کمانش حل مقدار ویژه که مبتنی بر حل کلاسیک است به دست خواهد آمد.[۲۱] جدول ۲ مقدار بار کمانش پوسته‌های استوانه‌یی کشسان با مدول کشسانی $E = 209/5GPa$

جدول ۱. تأثیر نسبت شعاع به ضخامت بر مقادیرِ بی‌بعد جابه‌جایی‌های شعاعی، محوری و پتانسیل الکتریکی سطح میانی پوسته تحت تأثیر فشار خارجی یکنواخت.

	$\tilde{w}_0(x = 0/5L)$		$\tilde{u}_0(x = 0)$		$\tilde{\varphi}_0(x = 0/025L)$	
S	کار حاضر	مرجع[۲۰]	کار حاضر	مرجع [۲۰]	کار حاضر	مرجع [۲۰]
۱۰۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۰۳۳	۰٫۶۷۰۲	۰٫۶۶۰۴	-۰٫۷۰۶۴	-۰٫۷۱۰۵
۱۰	۱٫۰۰۰۰	۱٫۰۳۲۵	۰٫۷۰۱۵	۰٫۶۹۶۲	-۰٫۴۵۱۰	-۰٫۴۷۳۳
۶	۱٫۰۱۷۳	۱٫۰۴۹۸	۰٫۷۱۱۵	۰٫۷۳۳۶	-۰٫۲۴۴۵	-۰٫۲۴۳۷

و ضریب پواسون $\nu = ۰/۳$ را برای نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت و نسبت‌های مختلف طول به شعاع را نشان می‌دهد.

بار بحرانی به دست آمده نسبت به بارکمانش حاصل از حل مسئله‌ی مقدار ویژه بی‌بعد شده است. نتایج حاکی از کاهش بار کمانش براثر کاهش نسبت شعاع به ضخامت، و همچنین طول به شعاع به‌دلیل درنظر گرفتن اثرات تنش‌های برشی عرضی برخلاف نظریه‌ی کلاسیک است.

از آنجا که با نازک‌تر شدن پوسته، اثر تنش‌های برشی عرضی ناچیزتر می‌شود، انطباق نتایج کنونی با نظریه‌ی کلاسیک در پوسته‌های نازک‌تر (نسبت شعاع به ضخامت بزرگ‌تر) بیشتر است. در نسبت‌های بزرگ طول به شعاع استوانه، کمانش به کمانش تیر (کمانش کلی) نزدیک‌تر شده و اثر تنش‌های برشی عرضی (اثر موضعی) کاهش می‌یابد. درنتیجه مقدار بار کمانش به مقدار پیش‌بینی شده از نظریه‌ی کلاسیک نزدیک می‌شود.[۱۷]

۸.۳. اثر انحراف اولیه بر بار کمانش

در این بخش اثر انحراف اولیه بر بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌یی با مشخصات مادی بخش قبل، و با نسبت طول به شعاع ۲٫۵ و نسبت شعاع به ضخامت ۱۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد. انحراف اولیه به‌صورت رابطه‌ی ۲۸ است.

$$\bar{w} = \frac{W_\circ}{h} sin(۵\pi \frac{x}{L}) \qquad (۲۸)$$

جدول ۳ اثر میزان دامنه‌ی انحراف اولیه بر بار کمانش نسبی را نشان می‌دهد.

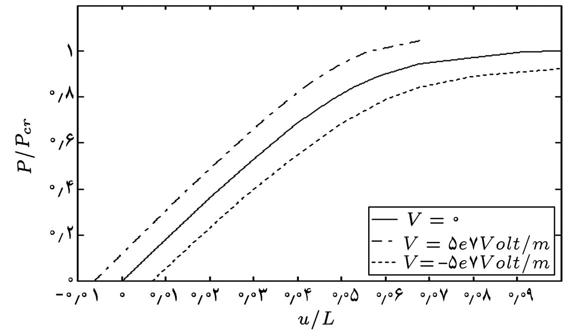
نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دامنه‌ی انحراف اولیه، مقدار بار بحرانی کاهش می‌یابد. ثابت شده است که تغییر شکل اولیه بر فرم نهایی کمانش تأثیرگذار است و دامنه‌های بزرگ‌تر تمایل به کمانش را افزایش می‌دهند.[۱۷]

جدول ۲. بارکمانش استاتیکی نسبی برای هندسه‌های مختلف پوسته‌ی کامل.

	S = ۲۰	S = ۵۰	S = ۱۰۰
$L/R = ۱$	۰٫۶۳	۰٫۶۵	۰٫۷۷
$L/R = ۲$	۰٫۶۹	۰٫۷۲	۰٫۸۸
$L/R = ۵$	۰٫۷۹	۰٫۸۴	۰٫۹۶

جدول ۳. اثر دامنه‌ی تغییر شکل اولیه بر بار بحرانی پوسته.

بار بحرانی نسبی	$W_\circ/h$
۰٫۷	۰٫۰
۰٫۶۵	۰٫۰۱
۰٫۴۳	۰٫۱



شکل ۲. تغییر بار کمانش محوری پوسته‌ی پیزوالکتریک بر اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی.

۸.۴. اثر اختلاف پتانسیل الکتریکی بر بار کمانش

اثر اعمال تحریک‌های مختلف بر بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌یی پیزوالکتریک PVDF دو سر مفصل با مشخصات زیر در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نسبت طول به شعاع استوانه ۳ و نسبت شعاع به ضخامت برابر ۲۰ است. مشخصات ماده‌ی پیزوالکتریک نیز به‌صورت رابطه‌ی ۲۹ است.

$$\begin{aligned}
&E_۱ = E_۲ = E_۳ = ۲/۰\ GPa \\
&\nu_{۱۲} = \nu_{۱۳} = \nu_{۲۳} = ۱/۳ \\
&b_{۱۱} = b_{۲۲} = b_{۳۳} = ۰/۱۰۶۲ \times ۱۰^{-۹}\ F/m \\
&e_{۳۱} = -۰/۰۰۱۵,\ e_{۳۲} = ۰/۰۲۸۵ \\
&e_{۳۳} = -۰/۰۵۱\ C/m \\
&d_{۳۱} = ۳ \times ۱۰^{-۱۲},\ d_{۳۲} = ۲۳ \times ۱۰^{-۱۲} \\
&d_{۳۳} = -۳۰ \times ۱۰^{-۱۲}\ CN^{-۱} \qquad (۲۹)
\end{aligned}$$

شکل ۲ نشانگر اثر اعمال اختلاف پتانسیل‌های مختلف بر سطوح داخلی و خارجی پوسته است. با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی مناسب می‌توان مقدار بار کمانش را افزایش داد.

نتیجه‌گیری

در این نوشتار کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌یی پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا و به‌منظور تعیین دقیق‌تر بار کمانش از نظریه‌ی مرتبه‌ی بالای پوسته با در نظر گرفتن اثرات تنش‌های برشی عرضی بهره گرفته شد. همچنین، معادلات حاکم بر مسئله براساس روابط غیرخطی کرنش-جابه‌جایی دانل و با استفاده از توزیع مرتبه ۲ پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت، استخراج شد.

با استفاده از روش اجزاء محدود و با در نظر گرفتن المان دوبعدی چهارگرهی هرمیتی در مختصات استوانه‌یی معادلات حاکم حل شد. اثر انحراف اولیه و همچنین اثر بار الکتریکی بر پوسته‌ی استوانه‌یی

پیزوالکتریک مورد ارزیابی قرار گرفت. برای اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، نتایج حل خمشی برای استوانه‌ی پیزوالکتریک با نتایج مراجع دیگر مقایسه شد.

نهایتاً مقادیر بارکمانش محوری بی‌بعد شده برای نسبت‌های مختلف طول به شعاع و شعاع به ضخامت به دست آمده و همچنین اثر تغییر شکل اولیه و نیز ولتاژ الکتریکی در مقدار بارکمانش مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاکی از کاهش بارکمانش نسبت به حل مقدار ویژه با افزایش نسبت ضخامت به شعاع و شعاع به طول است.

پانوشت

1. poly vinyli dene fluoride

منابع

1. Lammering, R., "The application of a finite shell element for composites containing piezoelectric polymers in vibration control", *Comput Struct,* **41** (5), pp. 1101-9 (1991).
2. Tzou, H. and Ye, R., "Piezothermoelasticity and precision control of piezoelectric systems", *ASME J. Vibrations and Acoustics,* **116**, pp. 489-495 (1994).
3. Miller, S.E. and Abramovich, H., "A self-sensing piezolaminated actuator model for sells using a first shear deformation theory", *J. Intelligent Material System and Structures,* **6**, pp. 624-638 (1995).
4. Thomson, S.P. and Loughlan, J., "The active buckling control of some composite column strip using piezoceramic actuators", *Composite Structures,* **32** (1-4), pp. 56-67 (1995).
5. Strambi, G., Barboni, R. and Gaudenzi, P., "Pin-force and Euler-Bernoulli models for analysis of intelligent structures", *AIAA J.,* **33**(9), pp. 1746-9 (1995).
6. Lalande, F., Chaudhry, Z. and Rogers, C.A., "Modeling considerations for in-phase actuation of actuators bonded to shell structures", *AIAA J.,* **33**(7), pp. 1300-4 (1995).
7. Chen, C.Q. and Shen, Y.P., "Incremental variational principles for finitely deformed piezothermoelastic media", Acta Solids Mechanica Sinica (1995).
8. Chen, C.Q. and Shen, Y.P., "Piezothermoelasticity analysis for a circular cylindrical shell under the state of axisymmetric deformation", *Int. J. Eng. Sci.,* **34**, pp. 1585-600 (1996).
9. Chen, C.Q. and Shen, Y.P., "Stability analysis of piezoelectric circular cylindrical shells", *J. Appl. Mech.,* **64**, pp. 847-852 (1997).
10. Oh, I.K., Han, J.H. and Lee, I., "Postbuckling and vibration characteristics of piezolaminated composite plates subjected to thermopizoelectric loads", *J. Sound and Vibration,* **233** (1), pp. 19-40 (2000).
11. Oh, I.K., Han, J.H. and Lee, I., "Thermopizoelastic snapping of piezolaminated plates using layerwise nonlinear finite elements", *AIAA J.,* **39**(6), pp. 1188-1197 (2001).
12. Shen, H.S., "Postbuckling analysis of axially-loaded laminated cylindrical shells with piezoelectric actuators", *Eur. J. Mech. A/Solids,* **20**, pp. 1007-1022 (2001).
13. Zhu, J.Q., Chen, C.Q. and Shen, Y.P., "Three dimensional analysis of the dynamic stability of piezoelectric circular cylindrical shells",*European Journal of Mechanics and Solids,* **22**, pp. 401-411 (2003).
14. Ganesan, N. and Kadoli, R., "Buckling and dynamic analysis of piezothermoelastic composite cylindrical shell", *Composite Structures,* **59**, pp. 45-60 (2003).
15. Pinto Correia, I.F. Mota Soares, C.M. Mota Soares, C.A. and J. Herskovits, "Active control of axisymmetric shells with piezoelectric layers: a mixed laminated theory with a high order displacement field", *Computers and Structures*, **80**, pp. 2265–2275 (2002).
16. Palazotto, A.N. and Dennis, S.T., "Nonlinear analysis of shell structures", AIAA education series (1992).
17. Shariyat, M. and Eslami, M.R., "On thermal dynamic buckling analysis of imperfect laminated cylindrical shells", ZAMM, **80**(3), pp. 171-182 (2000).
18. Wu, X.H., Chen, C., Shen, Y. and Tian, X., "A high order theory for functionally graded piezoelectric shells", *International Journal of Solids and Structures,* **39**, pp. 5325-44 (2002).
19. Wang, J. and Yang, J., "Higher-Order Theories of Piezoelectric Plates and Applications", *Appl. Mech. Review,* **53**(4), pp. 87-99 (2000).
20. Kapuria, S., Sengupta, S. and Dumir, P.C., "Three-dimensional solution for simply-supported piezoelectric cylindrical shell for axisymmetric load", *Comput Meth Appl Mech and Eng,* **140**, pp. 139-155 (1997).
21. Reddy, J.N., "Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis", Boca Raton, CRC Press (2004).

پیوست

فرم باز شده‌ی ماتریس‌های روابط ۱۶ و ۱۷:

$$B_{u0}=\left[\begin{array}{lccc} \ldots & N_{k,x} & 0 & (\bar{w}_{,x}+\frac{1}{2}w_{0,x})H_{kl,x} & \bar{w}_{,x}+\frac{1}{2}w_{0,x})H_{k2,x} \\ & 0 & \frac{1}{R}N_{k,\theta} & \frac{1}{R}[(\bar{w}_{,\theta}+\frac{1}{2}w_{0,\theta})H_{k1,\theta}+H_{k1}] & \frac{1}{R}[(\bar{w}_{,\theta}+\frac{1}{2}w_{0,\theta})H_{k2,\theta}+H_{k2}] \\ & 0 & 0 & \frac{1}{R}H_{k1,\theta} & \frac{1}{R}H_{k2,\theta} \\ & 0 & 0 & H_{k1,x} & H_{k2,x} \\ & & & \frac{1}{R}[(\bar{w}_{,\theta}+\frac{1}{2}w_{0,\theta})H_{k1,x} & \frac{1}{R}[(\bar{w}_{,\theta}+\frac{1}{2}w_{0,\theta})H_{k2,x} \\ & \frac{1}{R}N_{k,\theta} & N_{k,x} & & \\ & & & [+(\bar{w}_{,x}+\frac{1}{2}w_{0,x})H_{k1,\theta}] & [+(\bar{w}_{,x}+\frac{1}{2}w_{0,x})H_{k2,\theta}] \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cccc} (\bar{w}_{,x}+\frac{1}{2}w_{0,x})H_{k3,x} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{R}[(\bar{w}_{,\theta}+\frac{1}{2}w_{0,\theta})H_{k3,\theta}+H_{k3}] & 0 & 0 & \\ \frac{1}{R}H_{k3,\theta} & & 0 & N_k \\ H_{k3,x} & N_k & 0 & \ldots \\ \frac{1}{R}[(\bar{w}_{,\theta}+\frac{1}{2}w_{0,\theta})H_{k3,x} & & & \\ & & 0 & 0 \\ [+(\bar{w}_{,x}+\frac{1}{2}w_{0,x})H_{k3,\theta}] & & & \end{array}\right]$$

$$B_{u1}=\begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{k,x} & 0 & \\ & 0 & -\frac{1}{R^2}N_{k,\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R}N_{k,\theta} & \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & -\frac{1}{R}N_{k,\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$B_{u2}=\begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \ldots & 0 & 0 & -\frac{4}{h^2R}H_{k1,\theta} & -\frac{4}{h^2R}H_{k2,\theta} & -\frac{4}{h^2R}H_{k3,\theta} & 0 & -\frac{4}{h^2}N_k & \ldots \\ & 0 & 0 & -\frac{4}{h^2}H_{k1,x} & -\frac{4}{h^2}H_{k2,x} & -\frac{4}{h^2}H_{k3,x} & -\frac{4}{h^2}N_k & 0 & \ldots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$B_{u3}=\begin{bmatrix} & 0 & 0 & -\frac{4}{3h^2}H_{k1,xx} & -\frac{4}{3h^2}H_{k2,xx} & -\frac{4}{3h^2}H_{k3,xx} & -\frac{4}{3h^2}N_{k,x} & 0 & \\ \ldots & 0 & 0 & -\frac{4}{3h^2R^2}H_{k1,\theta\theta} & -\frac{4}{3h^2R^2}H_{k2,\theta\theta} & -\frac{4}{3h^2R^2}H_{k3,\theta\theta} & 0 & -\frac{4}{3h^2R}N_{k,\theta} & \ldots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & 0 & -\frac{8}{3h^2R}H_{k1,x\theta} & -\frac{8}{3h^2R}H_{k2,x\theta} & -\frac{8}{3h^2R}H_{k3,x\theta} & -\frac{4}{3h^2R}N_{k,\theta} & -\frac{4}{3h^2}N_{k,x} & \end{bmatrix}$$

$$B_{\varphi 0}=-\begin{bmatrix} & 0 & N_{k,x} & 0 & \\ \ldots & 0 & \frac{1}{R}N_{k,\theta} & 0 & \ldots \\ & -\frac{1}{h}N_k & 0 & \frac{1}{h}N_k & \end{bmatrix}$$

$$B_{\varphi 1}=-\begin{bmatrix} & -\frac{1}{h}N_{k,x} & 0 & \frac{1}{h}N_{k,x} & \\ \ldots & -\frac{1}{hR}N_{k,\theta} & 0 & \frac{1}{hR}N_{k,\theta} & \ldots \\ & \frac{4}{h^2}N_k & -\frac{8}{h^2}N_k & \frac{4}{h^2}N_k & \end{bmatrix}$$

$$B_{\varphi 2}=-\begin{bmatrix} & \frac{2}{h^2}N_{k,x} & -\frac{4}{h^2}N_{k,x} & \frac{2}{h^2}N_{k,x} & \\ \ldots & \frac{2}{h^2R}N_{k,\theta} & -\frac{4}{h^2R}N_{k,\theta} & \frac{2}{h^2R}N_{k,\theta} & \ldots \\ & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$