

شبیه‌سازی عددی جریان غیرلزج حول روتور بالگرد در پرواز ایستایی

با استفاده از روش بالادست در شبکه‌ی بی‌سازمان

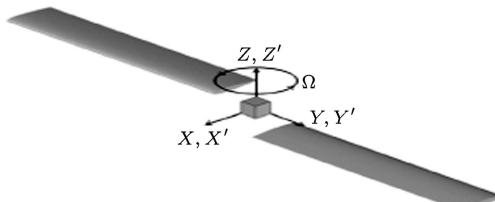
کاظم هجران‌فر (استادیار)
سید مسعود محمدی (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی هواپیما، دانشگاه صنعتی شریف

در این تحقیق، شبیه‌سازی عددی جریان غیرلزج و تراکم‌پذیر حول روتور در پرواز ایستایی توسط روش بالادست «رو» و با استفاده از شبکه‌ی بی‌سازمان انجام شده است. برای افزایش دقت گسسته‌سازی مکانی، از تخمین شار روی وجوده به روش «ماسکل» استفاده شده است. الگوریتم حل به روش انتگرال‌گیری زمانی صریح صورت گرفته و برای افزایش نزخ همگرایی جواب‌ها، از روش هموارسازی ضمنی مانده‌ها استفاده شده است. به منظور اطمینان از دقت و صحیح الگوریتم حل ارزیابی نتایج، شبیه‌سازی عددی میدان جریان حول روتور در پرواز ایستایی در اعداد ماخ نوک تیغه برابر با $0,44$ و $0,877$ در زاویه‌ی گام تیغه 8° درجه انجام شده و نتایج حاضر برای مشخصات آبیودینامیکی، شامل توزع فشار در مقاطع مختلف تیغه‌های روتور، با نتایج تجربی و عددی معتبر مقایسه شده و مورد ارزیابی قرار گرفته است. همچنین، تأثیر افزایش دقت گسسته‌سازی مکانی حل عددی در شبیه‌سازی عددی جریان حول روتور و در نتیجه، تأثیر آن روی مشخصات آبیودینامیکی روتور بررسی شده است.

مبتنی بر معادلات پتانسیل کامل را توسعه دادند. همچنین سانکار^[۱۲]، آگاروال و دزی^[۱۴] و حسن^[۱۵] از پیشروان استفاده از معادلات اویلر برای شبیه‌سازی میدان جریان حول روتور در دهه 80° میلادی هستند. از اویل دهه 90° میلادی تاکنون، با پیشرفت قابل ملاحظه‌ی ریانه‌ها، شبیه‌سازی میدان جریان حول مجموعه‌ی کامل بالگرد با استفاده از معادلات ناویر-استوکس امکان‌پذیر شده است. احمد و داکیو در سال 1994° میلادی، نخستین بار موفق به انجام این کار شده‌اند.^[۱۶] در دهه‌ی اخیر، استفاده از روش‌های پتانسیل به همراه مدل‌سازی گردابه‌ی آزاد^[۱۷] به دلیل کارایی و دقت این روش‌ها مورد توجه قرار گرفته است. روش‌های جریان پتانسیل عمدهاً به دو دسته‌ی کلی «روش شبکه‌ی گردابه» و «روش پانل» تقسیم‌بندی می‌شوند. در روش شبکه‌ی گردابه، از توزیع گردابه‌های حلقوی روی تیغه‌ها و دنباله‌ی آنها استفاده می‌شود و از اثرات ضخامت تیغه‌ها صرف نظر می‌شود. در روش پانل، از توزیع چشممه/مزدوج روی تیغه‌ها و توزیع مزدوج در دنباله استفاده، و اثرات ضخامت تیغه‌ها نیز محاسبه می‌شود. استفاده از روش‌های پتانسیل سبب ساده‌سازی تحلیل مسئله، و دستیابی به حل مؤثر و نسبتاً دقیق آنها می‌شود. مشکل اصلی این روش ضعف در تخمین میدان جریان تراکم‌پذیر است، و در نتیجه، تخمین حالات پروازی ایستایی با سرعت دورانی زیاد تیغه‌های روتور یا پرواز رو به جلوی بالگرد که تیغه‌ی پیش رو معمولاً در حالت جریان گذر صوتی قرار دارد، در این روش دقت مناسبی نخواهد داشت.

مقدمه

امروزه شبیه‌سازی جریان حول اجسام دورانی، به ویژه روتور بالگرد، یکی از پیچیده‌ترین مسائل دینامیک سیالات محاسباتی است. میدان جریان حول روتور به علت متغیر بودن میدان سرعت در راستای دهانه‌ی تیغه‌ها و اثرات تراکم‌پذیری از یک‌سو، وجود گردابه‌های قوی نوک و صفحه گردابه‌ی جدا شده از تیغه‌ها و در نتیجه ساختار پیچیده‌ی دنباله‌ی روتور^[۱] برای شبیه‌سازی عددی از مشکلات خاصی برخوردار است. پیش‌بینی دقیق مشخصه‌های آبیودینامیکی روتور شامل بازگذاری تیغه‌ها و تعیین ضرایب تراست و قوان القایی، و نیز محاسبه‌ی ارتعاشات و اکوستیک روتور نیازمند شبیه‌سازی دقیق و مؤثر میدان جریان حول روتور است. طی دهه‌ی 70° میلادی تاکنون روش‌های مختلفی به منظور حل جریان و تحلیل آبیودینامیکی روتور استفاده شده که از آن جمله می‌توان به روش‌های تحلیلی، روش‌های پتانسیل، روش‌های اویلر / ناویر-استوکس و روش‌های ترکیبی اشاره کرد. روش‌های اویلیه می‌بینی بر فرضیات نظریه‌ی خط برآزای پرانتل بودند. در دهه‌ی 70° میلادی، گرای^[۱] و لانگر^[۲] مدل‌های گردابه‌ی معین را بر پایه‌ی مشاهدات تجربی ارائه کردند. در اوآخر این دهه، کاکورک و تانگلر^[۳] و نیز شینوی و گرای^[۴] از ترکیب سطح برآزا (به جای خط برآزا) و مدل‌های گردابه معین استفاده کردند. در دهه‌های 70° و 80° میلادی، اسکولی^[۵]، سوما^[۶] و بلیس^[۷] روش‌های تحلیل گردابه‌ی آزاد را ارائه کردند. در دهه‌ی 80° سانکار^[۸]، استراون^[۹]، بریجمن^[۱۰] و کارادونا^[۱۱] روش‌های عددی



شکل ۱. سیستم مختصات برای حل میدان جریان حول روتور.

$\mathbf{V} = (u, v, w)$ بیان شده‌اند. همچنین، $\mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \hat{n}$ معرف بردار شار عمود بروجه سلول و $\mathbf{S}(\mathbf{Q})$ معرف بردار چشم ناشی از دوران دستگاه مختصات طبق رابطه‌ی ۲ بیان می‌شوند:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \hat{n} = \begin{Bmatrix} \rho U_{\perp r} \\ \rho u U_{\perp r} + p n_x \\ \rho v U_{\perp r} + p n_y \\ \rho w U_{\perp r} + p n_z \\ (E_r + p) U_{\perp r} \end{Bmatrix}, \mathbf{S}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \Omega v \\ -\rho \Omega u \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

در این رابطه، تعریف کمیت E_r مشابه تعریف انرژی بر واحد حجم در دستگاه مختصات اینرسی بوده و براساس رابطه‌ی ۳ بیان می‌شود:

$$E_r = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} - 2\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \quad (3)$$

معادله‌ی ۱ بیان‌گر موازنیه بین نزخ تغییرات بردار حالت \mathbf{Q} در حجم V با شار خالص عبوری از سطح مرزی ∂V است. در رابطه‌های ارائه شده، ρ به ترتیب معرف چگالی و فشار، (u, v, w) مؤلفه‌های دکارتی بردار سرعت مطلق درجهت‌های (x, y, z) ، $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ، $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$ بردار یکی عمود بر وجه سلول، $\mathbf{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$ بردار مکانی هر نقطه (اظیر مرکز سلول) نسبت به محور دوران (z) ، $U_{\perp r}$ مؤلفه‌ی سرعت نسبی عمود بر وجه از سلول و $\mathbf{V}_r = (u_r, v_r, w_r)$ بردار سرعت نسبی اند:

$$\mathbf{V}_r = (u + \Omega y) \hat{i} + (v - \Omega x) \hat{j} + w \hat{k}$$

$$U_{\perp r} = (u + \Omega y) n_x + (v - \Omega x) n_y + w n_z \quad (4)$$

بی بعدسازی متغیرها، شامل چگالی و فشار به ترتیب با متغیرهای جریان آزاد (یعنی ρ_∞ و p_∞)، سرعت‌ها با مقایسه از سرعت صوت $\sqrt{\gamma}$ ، ابعاد هندسی با طول مرجع c (وترا تیغه) و زمان t با $a_\infty c / \sqrt{\gamma}$ انجام شده است. نسبت گرمایی ویژه نیز ثابت و برابر $1/4$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از این بی بعدسازی، سرعت زاویه‌ی بی بعد Ω به صورت رابطه‌ی ۵ بیان می‌شود:

$$\Omega = \sqrt{\gamma} M_{tip} / R \quad (5)$$

روش‌های اویلر/ناویر-استوکس از قابلیت محاسبه‌ی دقیق میدان جریان تراکم‌پذیر مادون صوت/گذر صوتی حول یک روتور برخوردارند و تعیین نواحی چرخش جریان و دنباله‌ی روتور (شامل گرداهای نوک و گرداهای جداسده از تیغه‌ها) را ممکن می‌سازند، هرچند دست‌یابی به این امر مستلزم تمهدات خاص از نظر نوع و ابعاد شبکه‌ی انتخابی و نوع الگوریتم عددی مورد استفاده است. [۲۴-۲۰] بدکارگیری روش‌های ترکیبی (استفاده از روش اویلر/ناویر-استوکس در مجاورت تیغه‌ها، و روش پتانسیل در نواحی دور از تیغه‌ها) نیز در تحقیقات جدید به منظور تحلیل آبرودینامیکی دقیق و مؤثر روتور بالگرد مورد توجه خاص قرار گرفته است. [۲۷-۲۵]

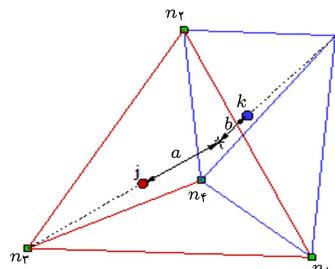
تحقیق حاضر در راستای تدوین نرم افزاری دقیق و مؤثر برای محاسبات آبرودینامیکی روتور بالگرد در داخل کشور صورت گرفته است. در حقیقت، به دلیل پیچیدگی و مشکلات موجود در حل عددی میدان جریان حول روتور، در کشور ما تحقیق جامع و دقیقی در این زمینه صورت نگرفته و تحقیقات انجام شده، غالباً معطوف به مسائل مربوط به محاسبات آبرودینامیکی دیگر اجسام است. در مطالعه‌ی حاضر، شبیه‌سازی عددی میدان جریان غیرلزج و تراکم‌پذیر حول روتور در پرواز ایستایی^۲ توسط روش بالادست «روآ» انجام شده است. شبکه‌ی مورد استفاده از نوع بی‌سازمان^۳ چهار وجهی است و برای افزایش دقت گسسته‌سازی مکانی، از تخمین شار روی وجوده به روش «ماسکل^۴» استفاده شده است. همچنین تأثیر افزایش دقت مکانی حل عددی در شبیه‌سازی عددی جریان حول روتور و در نتیجه، مشخصات آبرودینامیکی آن بررسی شده است. برای افزایش نزخ همگرایی جواب‌ها نیز از روش هموارسازی ضمنی مانده‌ها^۵ استفاده شده است. محاسبات یک روتور در پرواز ایستایی در دو سرعت دورانی مختلف به ازاء اعداد ماخ نوک تیغه برای با ۴۴° و ۸۷۷°، و در زاویه‌ی گام تیغه‌ی ۸ درجه انجام شده است، و نتایج حاصل با اطلاعات تجربی و عددی مقایسه و ارزیابی شده‌اند.

معادلات حاکم

روابط حاکم برای شبیه‌سازی میدان جریان، معادلات اویلر بوده و در دستگاه مختصات (x, y, z) که با سرعت زاویه‌ی Ω حول محور z نسبت به دستگاه مختصات اینرسی (x', y', z') در حال دوران است (شکل ۱)، برای هر حجم با سلول دلخواه به شکل رابطه‌ی ۱ بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \mathbf{Q} dV + \int \int_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_V \mathbf{S}(\mathbf{Q}) dV \quad (1)$$

در این رابطه، $\mathbf{Q} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_r]^T$ معرف بردار متغیرهای حالت بوده و معادلات بر حسب مؤلفه‌های مطلق بردار سرعت



شکل ۲. تعریف پارامترها در روش «ماسکل».

«رو» است و به جای مقدار آنتالپی کل H در ماتریس ژاکوبی، از مقدار روتالپی کل $(E_r + p)/\rho$ استفاده می‌شود. عملگر Δ به معنی $(L) - (R)$ است و زیرنویس‌های L و R نیز معرف موقعیت‌های چپ و راست وجه k هستند. بالا نویس «~» نیز معرف مقادیر میانگین «رو» است. مثلاً:

$$\tilde{u} = (u_L + u_R \sqrt{\rho_R/\rho_L}) / (1 + \sqrt{\rho_R/\rho_L}) \quad (10)$$

در رابطه‌های ذکر شده، زیرنویس r معرف کمیت‌های نسبی (نسبت به دستگاه مختصات دورانی) است.

افزایش دقت مکانی

یکی از مزایای الگوریتم‌های بالادست، برخورداری از قابلیت افزایش دقت حل آنها است. افزایش دقت حل به ویژه برای تسخیر دقیق نواحی با گرادیان بالا، نظری نواحی شوک که در حالت جریان گذرسوتی مجاور نوک تیغه‌ها روی می‌دهد، بسیار حائز اهمیت است. در روش بالادست «رو»، اگر در موقعیت‌های چپ و راست هر وجه سلول از مقادیر سلول‌های همسایه استفاده شود روش از دقت بالادست مرتبه اول برخوردار است. در مطالعه‌ی حاضر، به منظور افزایش دقت مکانی از روابط «ماسکل» استفاده شده است.^[۲۹] در این روش، برای افزایش دقت حل عددی، درون‌یابی متغیرهای اولیه $\mathbf{q} = [\rho, u, v, w, p]^T$ براساس رابطه‌ی ۱۱ انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_L &= \mathbf{q}_j + \frac{s}{\varphi} [(\mathbf{1} - ks) \nabla_j + (\mathbf{1} + ks) \Delta_j] \\ \mathbf{q}_R &= \mathbf{q}_{j+1} - \frac{s}{\varphi} [(\mathbf{1} + ks) \nabla_{j+1} + (\mathbf{1} - ks) \Delta_{j+1}] \end{aligned} \quad (11)$$

علاوه بر \mathbf{q}_L و \mathbf{q}_R داریم $\Delta = \mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j$ و $\nabla = \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{n_r}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی عملگرهای پیش رو و پس رو بوده و موقعیت‌های مورد استفاده در رابطه‌ی (۱۱)، در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. پارامتر k کنترل‌کننده‌ی میزان دقت روش بالادست است. به ازاء k برابر با -1 و $3/33$ در شبکه‌ی باسازمان و یکنواخت) به ترتیب دقت‌های مرتبه‌ی دو و سه بالادست به دست می‌آید. همچنین از ضریب s به عنوان محدودساز شار، و برای

که در آن، M_{tip} عدد ماخ نوک تیغه و R شعاع بی‌بعد روتور است. درنتیجه، عدد ماخ نوک تیغه از طریق تعریف سرعت زاویه‌ی بی‌بعد در حالات مختلف سرعت دورانی اعمال می‌شود.

گسسته‌سازی معادلات حاکم

برای حل عددی میدان جریان حول روتور از روش بالادست «رو» برای گسسته‌سازی شارهای جریان استفاده شده است.^[۲۸] گسسته‌سازی در یک شبکه‌ی بی‌سازمان چهار وجهی انجام شده است (شکل ۲). روش حجم محدود مورد استفاده از نوع مرکزیت سلول بوده و مقادیر متغیرهای بردار حالت در موقعیت مرکز سلول ذخیره می‌شوند. شار خالص عبوری از وجه شماره k هر سلول توسط رابطه‌ی شار «رو» براساس رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{F}_k = \frac{1}{\varphi} [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{Q})_R - |\tilde{\mathbf{A}}|(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L)]_k \quad (6)$$

که در آن،

$$|\tilde{\mathbf{A}}|(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L) = |\Delta \tilde{\mathbf{F}}_1| + |\Delta \tilde{\mathbf{F}}_2| + |\Delta \tilde{\mathbf{F}}_3| \quad (7)$$

$$|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_1| = |\tilde{U}_{\perp r}| \left\{ \left(\Delta \rho - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \\ \frac{(\tilde{u}^r + \tilde{v}^r + \tilde{w}^r)}{\varphi} \end{bmatrix} \right\}$$

$$+ \tilde{\rho} \begin{bmatrix} \dots \\ \Delta u - \hat{n}_x \Delta U_{\perp r} \\ \Delta v - \hat{n}_y \Delta U_{\perp r} \\ \Delta w - \hat{n}_z \Delta U_{\perp r} \\ \tilde{u} \Delta u + \tilde{v} \Delta v + \tilde{w} \Delta w - \tilde{U}_{\perp r} \Delta U_{\perp r} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$|\Delta \tilde{\mathbf{F}}_{2,3}| = |\tilde{U}_{\perp r} \pm \tilde{a}| \left(\frac{\Delta p \pm \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta U_{\perp r}}{2 \tilde{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm \tilde{n}_x \tilde{a} \\ \tilde{v} \pm \tilde{n}_y \tilde{a} \\ \tilde{w} \pm \tilde{n}_z \tilde{a} \\ \tilde{H}_r \pm \tilde{U}_{\perp r} \tilde{a} \end{bmatrix} \quad (9)$$

در رابطه‌های فوق، \tilde{A} معرف ماتریس ژاکوبی متوسطگیری شده

هموارسازی ضمنی مانده‌ها

یک راه حل برای تسریع در همگرایی حل عددی، استفاده از روش هموارسازی ضمنی مانده‌ها است. این روش افزایش عدد CFL را ممکن می‌سازد. هموارسازی مانده‌ها در هر تکرار از محاسبات انجام می‌شود. در این روش لازم است مانده‌ها توسط یک عملگر هموارساز فیلتر شوند، که به این منظور از عملگر لانلاس در شبکه‌ی یکنواخت استفاده شده است. رابطه‌ی نهایی مورد استفاده برای هموارسازی مانده‌ها، طبق روش تکرار ژاکوبی به صورت رابطه‌ی ۱۵ بیان می‌شود:^[۲۱]

$$\bar{\mathbf{R}}_j^{(m)} = \frac{\mathbf{R}_j + \sigma \sum_{i=k(j)}^k \bar{\mathbf{R}}_i^{(m-1)}}{1 + \sigma \sum_{i=k(j)}^k 1} \quad (15)$$

بالانویس «-» نشان‌دهنده‌ی مقادیر مانده‌ی هموار شده بوده و علامت جمع روی مقادیر مانده‌ها در سلول‌های همسایه که دارای وجود مشترک با سلول i هستند، صورت می‌گیرد. مقدار مناسب برای σ که سبب افزایش خاصیت غالب بودن قطрی ضریب ماتریس شده، حدود ۵، ۶، ۷ و ۸ است. مزیت استفاده از روش هموارسازی مانده‌ها، دو برابر شدن تکرار است. مزیت استفاده از روش هموارسازی مانده‌ها، دو برابر شدن عدد کورانت مجاز (او درنتیجه گام زمانی) است.

شرایط مرزی

برای اعمال شرط مرزی مماس بودن جریان بر سطح تیغه‌ها، به ازاء هر وجه روی سطح تیغه‌ها، سلولی مجازی در نظر گرفته می‌شود. مقادیر فشار، چگالی و انرژی یکسان فرض شده و سرعت‌های نسبی نیز طبق رابطه‌ی ۱۶ داخل سلول مجازی در نظر گرفته می‌شود:^[۲۲]

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\hat{n}_x^2 & -2\hat{n}_x\hat{n}_y & -2\hat{n}_x\hat{n}_z \\ -2\hat{n}_x\hat{n}_y & 1 - 2\hat{n}_y^2 & -2\hat{n}_y\hat{n}_z \\ -2\hat{n}_x\hat{n}_z & -2\hat{n}_y\hat{n}_z & 1 - 2\hat{n}_z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{Bmatrix} \quad (16)$$

برای اعمال شرایط مرزی مادون صوت در مرزهای ورودی و خروجی، از شرط مرزی مشخصه‌ها مبتنی بر لایتیغرهای «ریمان»^۷ استفاده شده است.

نتایج و بحث

برای اطمینان از صحت و دقیقیت حل عددی در تحلیل جریان تراکم پذیر، شبیه‌سازی عددی میدان جریان سه بعدی گذر صوتی با عدد ماخ ONERA M6^۸ و زاویه‌ی حمله‌ی ۳۰ درجه حول بال ثابت انجام شده است. صورت گرفته که نتایج حل شامل ضرایب آیرودینامیکی و توزیع فشار

تخمین یکنواخت شارها در دقت‌های بالاتر از مرتبه‌ی اول براساس رابطه‌ی ۱۲ استفاده می‌شود:^[۲۰]

$$s = \frac{2\Delta\nabla + \epsilon}{\Delta^2 + \nabla^2 + \epsilon} \quad (12)$$

ثابت ϵ یک عدد بسیار کوچک است که برای تضمین صفر نشدن صورت یا مخرج رابطه‌ی بالا در دقت‌های بالادست بیشتر از ۱ استفاده می‌شود. اگر از عبارت داخل کروشه در سمت راست روابط ۱۱ صرف نظر شود، دقت مرتبه‌ی اول بدست می‌آید.

انتگرال‌گیری زمانی

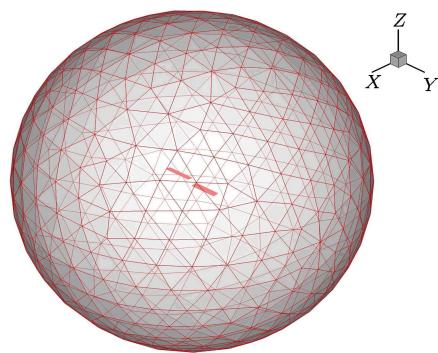
شکل نیمه‌گستته‌ی معادلات ۱ به صورت رابطه‌ی ۱۳ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} V_j \frac{\Delta \mathbf{Q}_j}{\Delta t} &= \mathbf{R}_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \\ \mathbf{R}_j &= \{\mathbf{S}(\mathbf{Q})V\}_j - \sum_{i=k(j)}^k \mathbf{F}_{j,i} \Delta S_{j,i} \end{aligned} \quad (13)$$

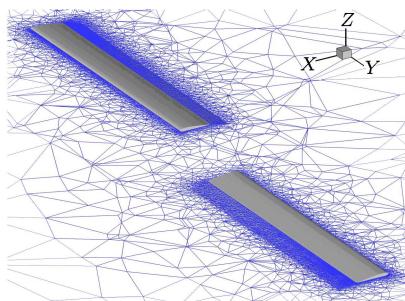
زیرنویس ز نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی سلول مورد محاسبه است، و $i = k(j)$ به معنی سلول شماره‌ی i (همساخه با سلول j) در وجه است. همچنین، \mathbf{R} نشان‌دهنده‌ی بردار مانده‌ها است. در این تحقیق، دست‌یابی به جواب حالت پایا مد نظر بوده است، بنابراین با صرف نظر کردن از دقت زمانی حل، از روش صریح با دقت مرتبه اول استفاده می‌شود. درنتیجه، گام زمانی هر سلول در هر تکرار براساس رابطه‌ی ۱۴ محاسبه می‌شود:

$$\Delta t_j \leq CFL \frac{V_j}{\sum_{k=1}^N ((|\bar{U}_{\perp,r}| + \bar{a})_k \Delta S_k) / N} \quad (14)$$

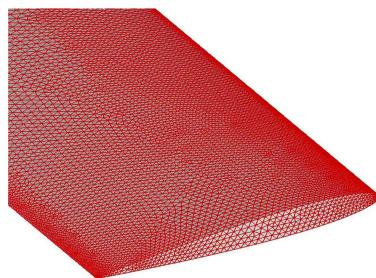
که در آن، CFL عدد کورانت و N تعداد وجوده سلول است. بالانویس «-» معرف مقدار میانگین هر متغیر در وجه سلول است که به این منظور در روش‌های بالادست از میانگین‌گیری روش «رو» استفاده شده است. همچنین در رابطه‌ی ۱۴، عبارت $|\bar{U}_{\perp,r}| + \bar{a}|$ بزرگ‌ترین مقدار بین مقادیر ویژه $|\bar{U}_{\perp,r} + \bar{a}|$ و $|\bar{U}_{\perp,r} - \bar{a}|$ است. به منظور محاسبه‌ی گام زمانی در هر تکرار، از کوچک‌ترین گام زمانی میدان حل استفاده شده و محاسبات با این گام زمانی ثابت انجام شده است. با انتخاب گام زمانی ثابت، الگوریتم حل عددی از قابلیت محاسبات جریان غیردائم نیز برخوردار خواهد بود. برای کاهش تعداد تکرار لازم به منظور همگرایی جواب‌ها به حالت پایا، روش هموارسازی ضمنی مانده‌ها به کار رفته است.



شکل ۳. شبکه‌ی حجمی حول روتور دو تیغه‌ی کارданا.



شکل ۴. نمایی از شبکه‌ی برش خودده مجاور تیغه‌ی روتور.



شکل ۵. شبکه‌ی سطحی تیغه‌ی روتور.

ویژگی‌های اساسی و مهم شبکه‌های بی‌سازمان، قابلیت تطبیق محلی این نوع شبکه در نواحی با گرادیان‌های زیاد (نظر نواحی شوک در مجاور نوک تیغه‌ها) برای افزایش دقیق حل عددی در این نواحی از میدان حل است. شکل ۴ نمای برش خودده‌ی از شبکه‌ی حجمی مجاور تیغه‌ها را نشان می‌دهد؛ چنان‌که مشاهده می‌شود فشرده‌گی نسبی شبکه در نزدیکی تیغه‌های روتور و افزایش سریع ابعاد سلول‌ها در نواحی دور از سطح تیغه‌ها نمایان است.

حالات اول: جریان مادون صوت ($M_{tip} = ۰/۴۴$)
در شکل ۶، توزیع ضریب فشار سطح در نواحی مختلف از دهانه تیغه به ازاء مانع نوک تیغه $M_{tip} = ۰/۴۴$ و زاویه‌ی گام تیغه ۸ درجه، در مقایسه با داده‌های تجربی، نشان داده شده است. مطابق این شکل، در نواحی بیرونی تیغه تطابق نسبتاً خوبی بین نتایج حاضر

روی سطح بال در مقاطع مختلف، در مقایسه با داده‌های تجربی و عددی از دقت بسیار خوبی برخوردار است. نتایج این بررسی معرف قابلیت و دقت الگوریتم عددی مورد نظر در تحلیل جریان تراکم‌پذیر سه بعدی حول هندسه‌های پیچیده است^[۲۳] و به همین علت، الگوریتم عددی مورد نظر برای شبیه‌سازی عددی جریان تراکم‌پذیر حول روتور مورد استفاده قرار گرفته است.

به منظور بررسی دقت و صحت الگوریتم عددی در حل میدان جریان حول روتور، از نتایج تجربی روتور در پرواز ایستایی استفاده شده^[۲۴] و شبیه‌سازی عددی میدان جریان تراکم‌پذیر در دو حالت مانع نوک تیغه برابر با $۰/۴۴$ و $۰/۸۷۷$ و زاویه‌ی گام تیغه ۸ درجه انجام شده است. نتایج آیرودینامیکی به دست آمده از روش بالادست با نتایج تجربی^[۲۴] و عددی^[۱۶] براساس روش حجم محدود مرکزی «جیمسون^۱» با دقت مرتبه ۲، و نتایج عددی^[۲۴] براساس روش بالادست با دقت مرتبه ۴، مقایسه و ارزیابی شده است. حل حاضر در یک شبکه‌ی بی‌سازمان، و حل‌های مراجعه موردنظر توسط شبکه‌ی بی‌سازمان حاصل شده است. همچنین، تأثیر افزایش دقیق مکانی حل عددی روی شبیه‌سازی عددی جریان حول روتور و درنتیجه، تأثیر آن روی مشخصات آیرودینامیکی روتور در هر دو حالت مانع نوک تیغه بررسی شده است.

مشخصات روتور

روتور مورد نظر دارای ۲ تیغه بوده و تیغه‌های آن شامل ایرفویل با مقطع $۰/۲۰$ NACA هستند. در تیغه‌ها پیچش و باریک‌شدگی وجود ندارد. شعاع هر تیغه برابر با $۳/۷۵$ ft ($۱/۴۳$ m) و نسبت منظری آن $R/c = ۶$ است. فاصله‌ی شروع تیغه از مرکز روتور به اندازه‌ی وتر تیغه است. در هر دو حالت، تیغه‌ها دارای زاویه‌ی گام ۸ درجه‌اند. حالت اول دارای سرعت دورانی ۱۲۵ rpm (معادل با مانع نوک تیغه $۰/۴۴ = M_{tip}$ و حالت دوم دارای سرعت دورانی ۲۵۰ rpm (معادل با مانع نوک تیغه $۰/۸۷۷ = M_{tip}$) است.

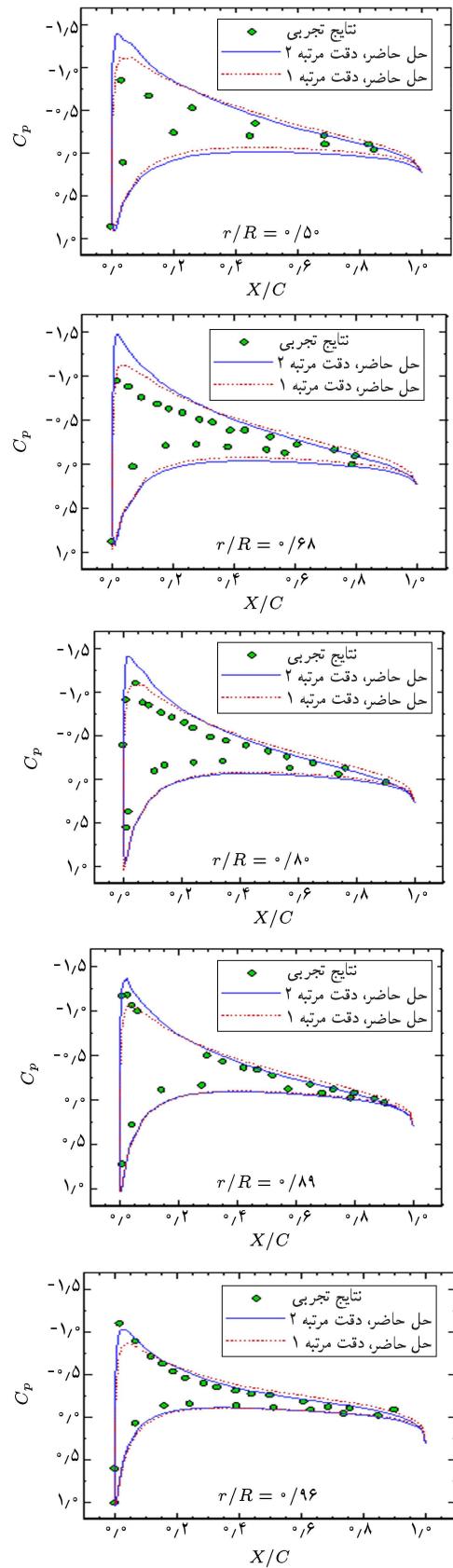
شبکه‌ی محاسباتی

در شکل‌های ۳ تا ۵، شبکه‌های حجمی و سطحی به کار رفته برای شبیه‌سازی میدان جریان حول روتور مورد نظر نشان داده شده است. مرز خارجی به صورت یک کره هم‌مرکز با صفحه‌ی روتور و به شعاع ۳۰ برابر ۴۷۴۵۵۱ سلول و ۹۷۴۵۷ گره است که از این تعداد مجموعاً ۶۹۷۶۲ سلول روی سطح تیغه‌ها در نظر گرفته شده است. میدان محاسباتی دارای $۰/۷۴۵۷$ گره است که از این تعداد مجموعاً ۶۹۷۶۲ سلول روی سطح تیغه‌ها قرار گرفته‌اند. به علت وجود نواحی با گرادیان‌های زیاد و نیز وجود نواحی شوک، تمرکز شبکه‌ی سطحی در نواحی نوک تیغه‌ها و لبه‌های حمله و فرار هر تیغه بیشتر است (شکل ۵). در حقیقت، از

و نتایج تجربی برقرار است، در حالی که در نواحی داخلی تیغه، تطابق کمتری در نتایج، بهویژه نتایج حاصل از حل مرتبه ۲، مشاهده می‌شود. در حقیقت میدان جریان حول روتور دنباله‌ی دارد که گردابه‌های نوک و صفحه‌ی گردابه‌ی جدا شده از هر تیغه را شامل می‌شود. به علت نوع حرکت تیغه‌ها، این گردابه‌ها در مسیر تیغه‌ی بعدی قرار گرفته و میدان جریان القایی ناشی از آنها، سبب ایجاد فروزنش در بیشتر نواحی داخلی و فرازش در ناحیه‌ی نوک تیغه‌ها می‌شود. در صورت تسخیر دقیق این دنباله، میدان جریان القایی سبب ایجاد فروزنش در بیشتر نواحی صفحه‌ی روتور شده و جریان با زاویه‌ی حمله‌ی کمتر از مقدار زاویه‌ی حمله‌ی هندسی به تیغه‌ها برخورد می‌کند و سبب کاهش زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر در اکثر نواحی دهانه‌ی تیغه‌ها (بهویژه در نواحی داخلی) نسبت به مقدار هندسی آن خواهد شد. با این وجود، الگوریتم‌های عددی متداول — بهویژه برای حل با دقت مرتبه ۲ — به دلیل وجود شبکه‌ی عددی با ابعاد حجمی نسبتاً درشت و افزایش سریع ابعاد شبکه‌ی حجمی بلافضله بعد از تیغه‌ها و در نتیجه، افزایش لزجت مصنوعی حل عددی (میرایی عددی) در این نواحی از شبکه، قابلیت تسخیر دقیق گردابه‌های نوک و صفحه‌ی گردابه‌ی جدا شده از تیغه‌های روتور را ندارد.

این اثرات در حل مرتبه‌ی اول کمتر است و بنابراین، توزیع فشار حاصل از حل مرتبه‌ی اول در برخی نواحی از تیغه‌ها (نواحی داخلی به دلیل بارگذاری کم و در نتیجه سرعت القایی کم و نیاز به تمهدات خاص شامل شبکه‌ی محاسباتی ریز و افزایش دقت الگوریتم حل برای آشکارسازی و تسخیر دقیق این جریان القایی) نسبت به حل مرتبه‌ی ۲ کمی دقیق‌تر به نظر می‌رسد. این اثرات در یک بال ثابت، به دلیل دور شدن دنباله پس از جدا شدن از بال، وجود ندارد.
 $r/R = ۰/۹۶$
 در نواحی نوک تیغه از جمله مقاطع $r/R = ۰/۸۹, ۰/۹۶$ و $۰/۹۹$ جواب‌های عالی حل بالادست با دقت مرتبه ۲ قابل مشاهده است. در حقیقت، به دلیل این که دنباله‌ی ناشی از روتور به سمت داخل منقبض می‌شود، در نواحی نوک تیغه‌ها اثر معکوس وجود دارد. بنابراین، زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر در نواحی نوک تیغه‌ها به علت پدیده‌ی فرازش اندرکی افزایش می‌یابد.

حالت دوم: جریان گذر صوتی ($M_{tip} = ۰/۸۷۷$) در شکل ۷، توزیع ضریب فشار سطح در نواحی مختلف از دهانه‌ی تیغه به ازاء ماخ نوک $۰/۸۷۷$ و زاویه‌ی گام تیغه ۸ درجه در مقایسه با داده‌های تجربی ارائه شده است. در این حالت، تأثیر دقت ساختار دنباله‌ی روتور روی مشخصات آیرودینامیکی تیغه‌ها به دلیل سرعت دورانی بالاتر و ایجاد گردابه‌های قوی‌تر، بیشتر است. در این حالت نیز نتایج در نواحی داخلی تیغه‌ها متأثر از عدم اخذ دقیق گردابه‌ها



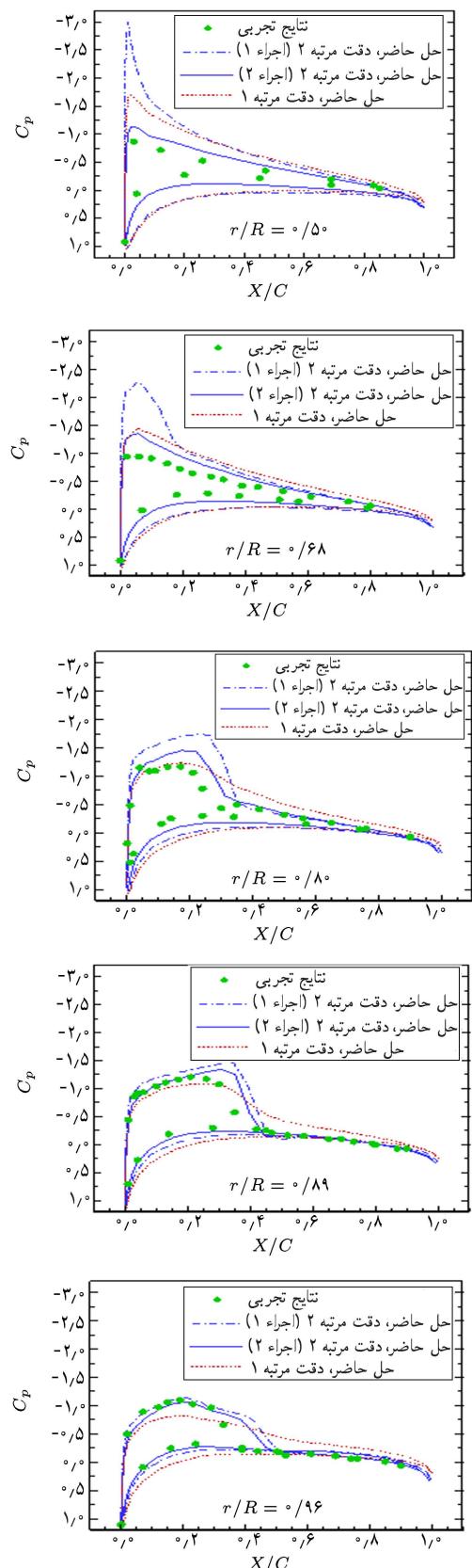
شکل ۶. توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف تیغه در مقایسه با داده‌های تجربی در ماخ نوک تیغه $۰/۴۴$ و زاویه گام تیغه ۸ درجه.

بوده و توزیع فشار محاسباتی در این نواحی، در مقایسه با مقادیر تجربی به ویژه در حل مرتبه ۲، تطابق کمتری نسبت به نواحی نوک تیغه دارد. نکته‌ی بسیار مهمی که نتایج بیان می‌دارند؛ تأثیر ساختار دنباله‌ی روتور روی توسعه‌ی حل عددی و اثر آن بر میدان جریان القایی به ویژه در حل مرتبه ۲ است. با شروع حل عددی، ابتدا بارگذاری ناشی از سرعت دورانی تیغه‌ها به ویژه در نواحی داخلی، به سرعت افزایش می‌یابد (اجراء ۱)؛ در این حالت دنباله‌ی چندانی تشکیل نمی‌شود. در نتیجه، به دلیل عدم ایجاد جریان القایی دقیق روی صفحه‌ی روتور، نتایج حل مرتبه ۲ به ویژه در نواحی داخلی - در مقایسه با نتایج تجربی - از تطابق کمتری برخوردار است. در این حالت، علاوه بر کاهش بیشتر مقادیر ضریب فشار نقطه اوج (نسبت به مقادیر تجربی) در حل با دقت مرتبه ۲، در بعضی از مقطع از جمله $r/R = ۰/۶۸$ موج ضربه‌ی ظاهر شده است. پیدایش غیرواقعی موج ضربه‌ی تحت تأثیر عدم پیش‌بینی دنباله‌ی روتور و در نتیجه، تخمین نامناسب زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر در این مقطع است.

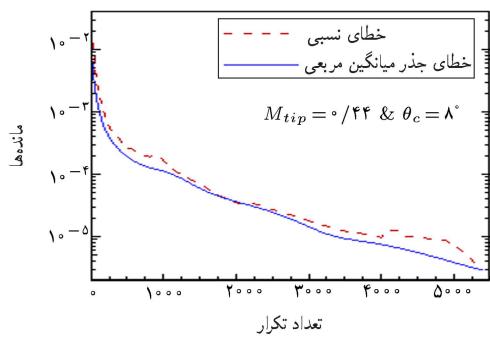
با افزایش زمان و توسعه‌ی حل عددی، و با شکل‌گیری دنباله‌ی روتور و نیز به دلیل ایجاد جریان القایی بیشتر مجاور تیغه‌ها، بارگذاری تیغه‌ها کاهش یافته و در بیشتر نواحی، حل مرتبه ۲ نسبت به حل مرتبه‌ی اول دقیق‌تر است (اجراء ۲). با این حال، تحت تأثیر اثرات میرایی الگوریتم عددی و محושدن اثرات گردابه‌ها در نواحی دور از تیغه‌ها که روی بارگذاری تأثیرگذارد، اختلاف کمی با نتایج تجربی مشاهده می‌شود. بنابراین، در صورتی که ساختار دنباله و در نتیجه، جریان القایی با دقت بیشتر تعیین شوند، توزیع فشار و مشخصات آیرودینامیکی تیغه‌ها (به ویژه در حل مرتبه ۲) نیز دقیق‌تر محاسبه خواهد شد. الگوریتم بالا درست با دقت مرتبه‌ی اول نیز علیرغم دقت نسبی در تخمین توزیع فشار نواحی داخلی (نسبت به حل دقت مرتبه ۲)، در اخذ امواج ضربه‌ی مجاور نواحی نوک تیغه‌ها ناقوان بوده است. در نواحی نزدیک به نوک تیغه، به علت وجود خطای کم در پیش‌بینی مقدار زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر، موقعیت موج ضربه‌ی حاصل از حل مرتبه ۲ نسبت به داده‌های تجربی اختلاف اندکی وجود دارد.

مقایسه نتایج دو حالت

در شکل ۸، خطوط همتراز فشار سطح تیغه‌ها در دو حالت برای اعداد ماخ نوک تیغه برابر با $۰/۴۴$ و $۰/۸۷۷$ و زاویه‌ی گام تیغه‌ی ۸ درجه نشان داده شده است. در هر حالت، تراکم خطوط فشار ثابت در نواحی بیرونی و مجاور نوک تیغه‌ها، معرف اثرات تراکم پذیری و تغییرات بیشتر فشار ناشی از سرعت دورانی بیشتر در نواحی بیرونی تیغه‌ها است و بارگذاری تیغه‌ها در این نواحی نیز بیشتر است. در حالت دوم که معرف



شکل ۷. توزیع ضریب فشار در مقطع مختلف تیغه در مقایسه با داده‌های تجربی در ماخ نوک تیغه $۰/۸۷۷$ و زاویه گام تیغه ۸ درجه.



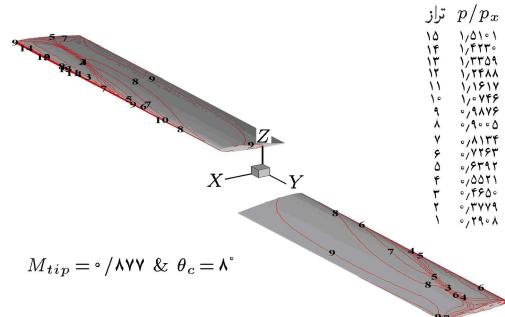
شکل ۹. نزخ همگرایی مانده‌ها برای دو حالت ماخ نوک تیغه ۴۴ و ۸۷۷ و زاویه گام تیغه ۸ درجه.

نتایج عددی [۲۴] براساس روش بالادست با دقت مرتبه ۴ مقایسه و ارزیابی شده است.

در تحلیل حاضر برخلاف تحقیقات انجام شده قبلی [۱۴] مدل سازی اثرات دنباله‌ی روتور صورت نگرفته است؛ با این وجود، نتایج حاضر با استفاده از روش بالادست حتی بدون تصحیح اثرات جریان القایی نسبت به نتایج موجود [۱۴] با استفاده از روش حجم محدود مرکزی (که در آن اثرات دنباله به صورت کاهش زوایای حمله‌ی تیغه منظور شده است)، در هر دو حالت ماخ نوک تیغه ($M_{tip} = 0/44$ و $0/877$)، از تطبیق خوبی برخوردار است.

در روش‌های حجم محدود مرکزی برای حل عددی جریان و پایداری الگوریتم حل، از عبارات میرایی عددی (اتلاف مصنوعی^۹) استفاده می‌شود. اگر چه مقادیر عبارات میرایی عددی در روش‌های حجم محدود مرکزی قابل کنترل‌اند، در صورت عدم کنترل مقادیر آنها در این روش‌ها، ساختار دنباله‌ی حاصل نسبت به روش‌های عددی بالادست ممکن است با دقت کمتر محاسبه شود. بنابراین، تطابق خوب نتایج تحلیل حاضر در مقایسه با نتایج مرجع [۱۴]، می‌تواند ناشی از دقت بیشتر روش بالادست یا میرایی عددی کمتر این روش نسبت به روش به کارگرفته شده مرجع [۱۴] یا عدم توسعه و همگرایی کامل حل عددی آنها باشد.

در برخی از تحقیقات از روش شبکه‌ی باسازمان به همراه الگوریتم



شکل ۸. خطوط همتراز فشار سطح تیغه‌های روتور برای دو حالت ماخ نوک تیغه ۴۴ و ۸۷۷ و زاویه گام تیغه ۸ درجه.

جریان گذرسوتی مجاور نوک تیغه‌ها است، اثرات تراکم‌بندیری در نواحی بیرونی نسبت به حالت اول بیشتر است و نواحی شوک مجاور نوک تیغه‌ها در این حالت دیده می‌شود.

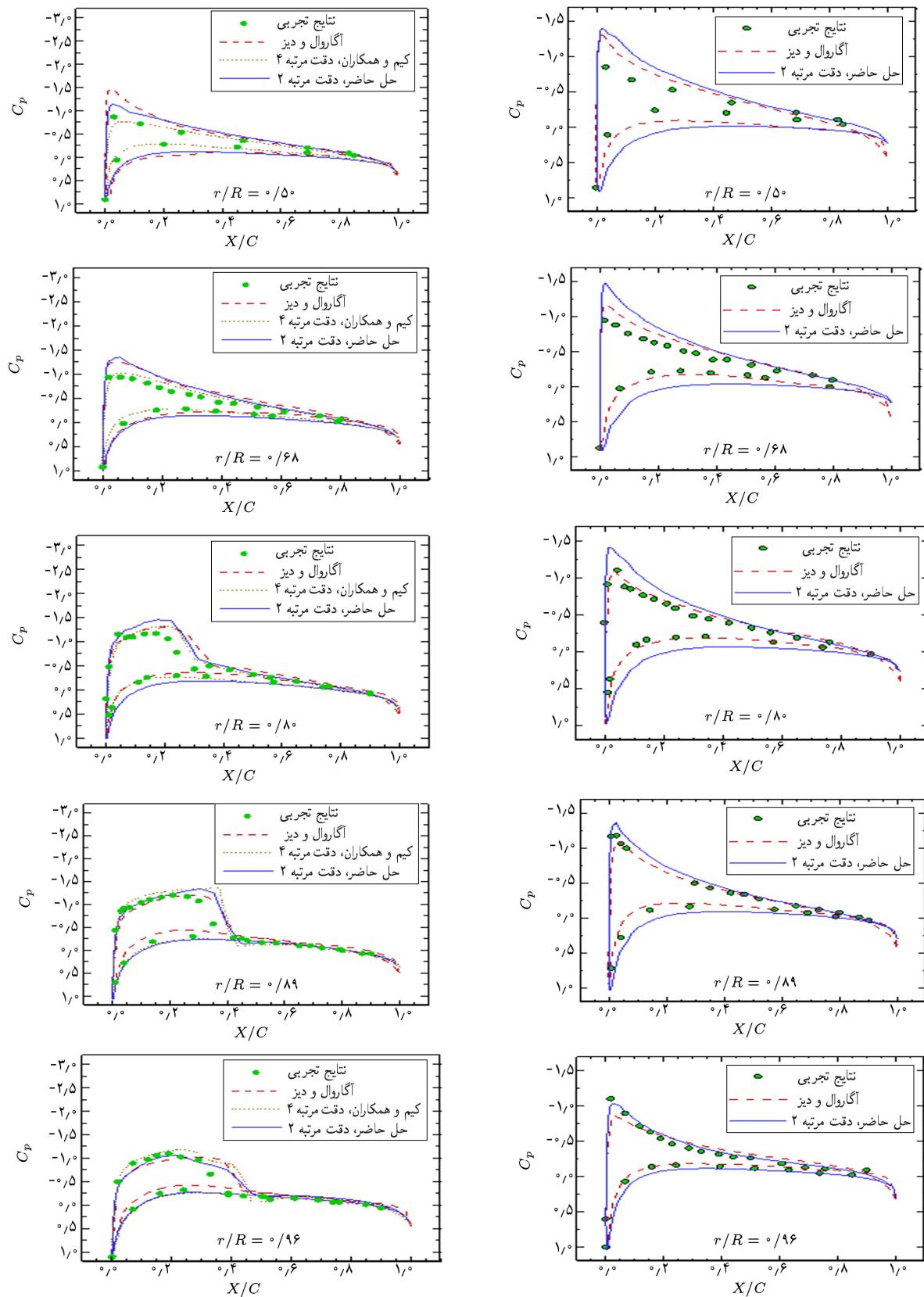
روند همگرایی حل عددی

در شکل ۹، نمودارهای نزخ همگرایی مانده‌ها بر حسب خطای نسبی و چذر میانگین مربعی برای دو حالت ماخ نوک تیغه ۴۴ و ۸۷۷ نشان داده شده است.

محاسبات با گام زمانی ثابت انجام شده و از روش هموارسازی مانده‌ها برای تسریع همگرایی حل عددی استفاده شده است. مطابق این شکل، زمان مورد نیاز برای محاسبه‌ی همگرایی حل در حالت جریان گذرسوتی ($M_{tip} = 0/877$) بیشتر از حالت جریان مادون صوت (۰/۴۴) است. این موضوع به دلیل وجود اثرات غیرخطی بیشتر ناشی از ناحیه‌ی شوک مجاور نوک تیغه‌ها است.

مقایسه با نتایج عددی

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱، نتایج عددی حاضر با استفاده از روش بالادست «رو» با دقت مرتبه ۲ با نتایج تجربی [۲۴] و نتایج عددی [۱۴] براساس روش حجم محدود مرکزی «جیمسون» با دقت مرتبه ۲ و



شکل ۱۱. مقایسه‌ی توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف تیغه در مقایسه با نتایج عددی در ماخ نوک تیغه 877° و زاویه گام تیغه 8 درجه.

شکل ۱۰. مقایسه‌ی توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف تیغه در مقایسه با نتایج عددی در ماخ نوک تیغه 44° و زاویه گام تیغه 8 درجه.

دقت حل در آنها است. با توجه به این ویژگی، در مطالعه‌ی حاضر، تأثیر دقت مکانی حل عددی در شبیه‌سازی عددی جریان حول روتور و در نتیجه، تأثیر آن بر مشخصات آیرودینامیکی تیغه‌های روتور بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که حل دقیق جریان حول روتور متأثر از اثرات دنباله‌ی تیغه‌ها بوده و با توسعه‌ی حل عددی از نظر زمان - در صورتی که ساختار دنباله و در نتیجه جریان القابی با دقت بیشتر تعیین شود - توزیع فشار و مشخصات آیرودینامیکی تیغه‌ها (بهویژه در حل مرتبه‌ی دو) نیز دقیق‌تر محاسبه خواهد شد.

در نوشتار حاضر از شبکه‌ی بی‌سازمان استفاده شده که علاوه بر مدل سازی خوب هندسی و قابلیت تحلیل جریان حول هندسه‌های پیچیده‌تر نسبت به روش بسازمان، از ویژگی اساسی و مهم قابلیت تطبیق محلی این نوع شبکه در نواحی باگردایان‌های زیاد (نظیر نواحی شوک در مجاور نوک تیغه‌ها) برای افزایش دقت حل عددی در این نواحی از میدان حل برخوردار است. از این ویژگی و قابلیت به همراه استفاده از الگوریتم‌های تطبیق شبکه می‌توان برای تسخیر دقیق دنباله‌ی روتور شامل گردابه‌های نوک تیغه و در نتیجه، حل دقیق‌تر جریان حول روتور نیز استفاده کرد.

این تحقیق در راستای تدوین نرم‌افزاری دقیق و مؤثر برای تحلیل جریان تراکم‌پذیر حول روتور در داخل کشور است و نرم‌افزار حاضر در حال توسعه برای حل معادلات اویلر/ناویراستوکس حول هندسه کامل بالگرد است.

قدرتانی

بدینوسیله از دانشگاه صنعتی شریف به‌دلیل در اختیار قراردادن امکانات لازم و کمک‌های بی‌شایعه، کمال تشرک و قدردانی می‌نماید.

عددی بالادست با دقت مرتبه‌ی ۴ استفاده شده [۲۶] و در نتیجه، نتایج آن در نواحی داخلی نسبت به حل حاضر و نتایج قبلی [۱۹] که هر دو دارای دقت مرتبه‌ی ۲ هستند در مقایسه با نتایج تجربی از تطابق بهتری برخوردار است.

شایان ذکر است که در مقاله‌ی حاضر از شبکه‌ی بی‌سازمان استفاده شده در حالی که در تحقیقات قبلی [۲۴ و ۱۹] از روش شبکه‌ی بسازمان استفاده شده است. علاوه بر مدل سازی خوب هندسی روش بی‌سازمان و قابلیت آن در تحلیل جریان حول هندسه‌های پیچیده‌تر نسبت به روش بسازمان، ویژگی اساسی و مهم آن، عبارت است از قابلیت تطبیق محلی این نوع شبکه در نواحی باگردایان‌های زیاد (نظیر نواحی شوک در مجاور نوک تیغه‌ها) برای افزایش دقت حل عددی در این نواحی از میدان حل.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، شبیه‌سازی عددی میدان جریان غیرلزج و تراکم‌پذیر حول روتور در پرواز ایستایی توسط روش عددی «رو» در شبکه‌ی بی‌سازمان انجام شده است. نتایج آیرودینامیکی حاضر شامل توزیع فشار مقاطع مختلف تیغه، بهویژه در مقاطع بیرونی، حتی بدون استفاده از مدل سازی اثرات دنباله‌ی روتور تطابق نسبی با نتایج عددی (روش حجم محدود مرکزی همراه با مدل سازی دنباله) و نتایج تجربی دارد. با استفاده از الگوریتم عددی بالادست در تحلیل جریان حول روتور به‌دلیل در برداشتن مشخصه‌های انتشار موجی جریان در این روش‌ها، حل‌های دقیق و فیزیکی حاصل شده و این روش‌ها به ویژه در تحلیل جریان گذر صوتی حول تیغه‌ها، نسبت به روش‌های حجم محدود مرکزی مؤثرترند. یکی از مزایای الگوریتم‌های بالادست، قابلیت و امکان افزایش

پانوشت

1. rotor wake
2. hovering rotor
3. Roe's scheme
4. unstructured mesh
5. MUSCL scheme
6. residual smoothing
7. Rieman n invariants
8. Jamson's scheme
9. artificial viscosity

منابع

1. Gray, R.B., "On the motion of the helical vortex shed from a single bladed hovering model rotor and its application to the calculation of the spanwise aerodynamic loading", Princeton University Aero. Engineering Department, Report No. 313, (1955).
2. Landgrebe, A.J., "An analytical and experimental investigation of helicopter rotor performance and wake geometry characteristicl", USAAM-RDL Technical Report 71-24 (1971).
3. Kocurek, J.D. and Tangler, J.L., "A prescribed wake lifting surface hover performance analysis", *Journal of the American Helicopter Society*, **22**(1), pp. 24-35 (1977).
4. Shenoy, K.R. and Gray, R.B., "Iterative lifting surface method for thick bladed hovering helicopter rotors", *Journal of Aircraft*, **18**(6), pp. 417-424 (1981).

5. Scully, M.P., "Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads", MIT, ASRL-TR-178-1 (1975).
6. Summa, J.M., "Potential flow about three-dimensional lifting configurations with applications to wings and rotors", AIAA paper 75-125 (1975).
7. Bliss, D.B. and Miller, W.O., "Efficient free wake calculations using analytical/numerical matching and far-field linearization", Presented at the 45th Annual American Helicopter Society Forum, Boston, MA, (May 1989).
8. Sankar, L.N. and Prichard, D., "Solution of transonic flow past rotor blades using the conservative full potential equation," AIAA Paper 85-5012 (Oct. 1985).
9. Sankar, L.N., Malone, J.B. and Tassa, Y., "A strongly implicit procedure for steady three-dimensional transonic potential flow", *AIAA Journal*, **20**(5), (1982).
10. Strawn, R.C., "Numerical modeling of rotor flows with a conservative form of the full potential equation", AIAA Paper 86-0079 (July 1986).
11. Bridgeman, J.O., Strawn, R.C. and Caradonna, F.X., "An entropy and viscosity corrected potential method for rotor performance prediction", 44th Annual AHS Forum, (June 1988).
12. Strawn, R.C. and Caradonna, F.X., "Conservative full potential model for unsteady transonic rotor flows", *AIAA Journal*, **25**, pp. 193-198 (1987).
13. Sankar, L.N., Wake, B.E. and Lekoudis, S.G., "Solution of the unsteady Euler equations for fixed and rotor wing configurations", *Journal of Aircraft*, **23**(4), pp. 283-289 (1986).
14. Agarwal, R.K. and Deese, J.E., "An Euler solver for calculating the flowfield of a helicopter rotor in hover and forward flight", AIAA 19th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Laser Conference, (June 1987).
15. Hassan, A.A., Tung, C. and Sankar, L.N., "An assessment of full potential and Euler solutions for self generated blade-vortex interactions", 46th Annual AHS Forum, (May 1990).
16. Ahmad, J. and Duque, E.P.N., "Helicopter rotor blade computation in unsteady flows using moving embedded grids", AIAA Paper 94-1922, (June 1994).
17. Ahmed, S.R. and Vidjaja, V.T., "Unsteady panel method calculation of pressure distribution on BO 105 model rotor blades", *Journal of the American Helicopter Society*, **43**(1), pp. 47-56 (1998).
18. Richason T.F. and Katz J., "Unsteady panel method for flows with multiple bodies moving along various paths", *AIAA Journal*, **32**(1), pp. 62-68 (1994).
19. Szymendera C.J., "Computational free wake analysis of A helicopter rotor", The Pennsylvania State University, Ms.c Thesis (2002).
20. Hariharan, N., "Evaluation of high order upwind schemes for rotors in hover", AIAA Paper 2003-49 (2003).
21. Hariharan, N. and Sankar, L.N., "First-principles based high order methodologies for rotorcraft flowfield studies", *AHS 55th Annual Forum*, Montreal, Canada, (1999).
22. Hall, C.M., Long, L. N., "High-order accurate simulations of wake and tip vortex flowfields", *AHS 55th Annual Forum*, Montreal, Canada (1999).
23. Tang, L., and Baeder, J.D., "Improved Euler simulation of hovering rotor tip vortices with validation", *AHS 55th Annual Forum*, Montreal, Canada (1999).
24. Kim, H., Williams, M.H. and Lyrintzis, A.S., "Improved Method for Rotor Wake Capturing", *Journal of Aircraft*, **39**(5), pp. 794-803 (Sept. Oct. 2002).
25. Berkman, M.E., Sankar, L.N., Berezin, C.R., and Torok, M.S., "A Navier-Stokes/full potential/free wake method for advancing multi-blade rotors", *Proceedings of the 53rd Annual Forum of the American Helicopter Society*. Virginia Beach, VA., (1997).
26. Moulton, M.A., Wenren, Y. and Caradonna, F.X., "Free-wake hover flow prediction with a hybrid potential/Navier-Stokes solver", *AHS 55th Annual Forum*, Montreal, Canada (1999).
27. Hariharan, N., Sankar, L.N., "A review of computational techniques for rotor wake modeling", AIAA Paper 2000-0114 (2000).
28. Roe, P.L., "Characteristic-based schemes for the Euler equations", *Annual Review of Fluid Mechanics*, **18**, pp. 337-365 (1986).
29. Van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V: A Second Order Sequel to Godunov's Method", *Journal of Computational Physics*, **32**, pp. 101-136 (1979).
30. Van Albada, G.D., Van leer, B. and Roberts, W.W., "A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics", *Astronomy and Astrophysics*, **108**, pp. 76-84 (1982).
31. Frink, N.T., Parikh, P. and Pirzadeh, S., "A Fast Upwind Solver for the Euler Equations

- on Three-Dimensional Unstructured Meshes”, AIAA Paper 91-0102 (1991).
32. Batina, J.T., “Implicit flux split Euler schemes for unsteady aerodynamic analysis involving unstructured dynamic meshes”, *AIAA Journal*, **29**(11), pp. 1836-1843 (1991).
33. Hejranfar, K. and Mohammadi, M., “Upwind scheme for solution of three-dimensional inviscid flows over complex geometries on unstructured meshes”, *Proceedings of the 9th Fluid Dynamics Conference*, Iran, Shiraz (March 2005).
34. Caradonna, F.X. and Tung, C., “Experimental and analytical studies of a model helicopter rotor in hover”, *Vertica*, **5**, pp. 149-161 (1981).